ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 100–106
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-100-106

УДК 519.635.1

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

© 2024 г. **В. Н. ПОПОВ, О. В. ГЕРМИДЕР**

Аннотация. Предложен метод для построения решения неоднородного бигармонического уравнения в приложении к задачам механики тонких изотропных пластин. Метод основан на полиномиальной аппроксимации Чебышева смешанной частной производной восьмого порядка искомой функции. В качестве базисных функций использованы многочлены Чебышева первого рода. Предложенный метод применен для моделирования изгиба упругой изотропной прямоугольной пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки. Проведен анализ результатов, полученных методом коллокации с применением интегрального подхода и в его отсутствии при использовании нулей многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации.

Ключевые слова: полиномиальная аппроксимация, многочлены Чебышева, прямоугольная пластина, напряженно-деформированное состояние.

ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF THE INHOMOGENEOUS BIHARMONIC EQUATION IN PROBLEMS OF MECHANICS OF THIN ISOTROPIC PLATES

© 2024 **V. N. POPOV, O. V. GERMIDER**

Abstract. In this paper, we propose a method for constructing a solution of the inhomogeneous biharmonic equation as applied to problems in the mechanics of thin isotropic plates. The method is based on the Chebyshev polynomial approximation of the eighth-order mixed partial derivative of the unknown function. Chebyshev polynomials of the first kind were used as basis functions. The proposed method is used to simulate the bending of an elastic isotropic rectangular plate under the action of a transverse load. The results obtained by the collocation method are analyzed; the roots of Chebyshev polynomials of the first kind are used as collocation points.

Keywords and phrases: polynomial approximation, Chebyshev polynomials, rectangular plate, stress-strain state.

AMS Subject Classification: 65D40, 31A30

1. Введение. Многие практически значимые инженерные проблемы, связанные с деформацией тонкой пластины, приводят к необходимости решения неоднородного бигармонического уравнения (см. [1–5, 8, 10, 13]). Построение его решения вызывает ряд трудностей, в частности, связанных с наличием в этом уравнении производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач (см. [5]). При этом достижение требуемой степени детализации области интегрирования предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразреженной матрицей (см. [4]). Одним из перспективных подходов к решению проблемы является развитие методов полиномиальной аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00381).

Представленная работа посвящена построению решения неоднородного бигармонического уравнения с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Выбор в качестве базисных функций многочленов Чебышева обусловлен тем, что такое приближение минимизирует количество членов усеченного ряда, необходимых для аппроксимации решения [6,9]. В представленной работе предложено развитие метода полиномиальной аппроксимации Чебышева путем представления в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева смешанной производной восьмого порядка искомой функции и использования в качестве точек коллокации нулей этих полиномов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования прогиба упругой изотропной прямоугольной пластины, закрепленной на краях $x = 0$, $x = d_1$, $y = 0$ и $y = d_2$ и находящейся под действием поперечной нагрузки $q(x, y)$. Пластина предполагается тонкой. В этом случае прогиб срединной поверхности пластины $\omega(x, y)$ будем описывать на основе бигармонического уравнения Софи Жермен—Лагранжа, которое запишем в следующем виде (см. [12]):

$$\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\omega}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ — цилиндрическая жесткость пластины, h — толщина пластины, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В качестве граничного условия используем защемление по каждому краю прямоугольной области (см. [12]):

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0,\, d_1, \tag{2}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0, \quad y = 0,\, d_2. \tag{3}$$

3. Построение решения краевой задачи. Представим смешанную производную восьмого порядка функции $\omega(x, y)$ в виде усеченного ряда по полиномам Чебышева первого рода $\big\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i),\ j_i = \overline{0, n_i}\big\}$ (см. [9]) по каждой введенной новой переменной $x_i \in [-1, 1]$ ($n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1. \tag{4}$$

Тогда

$$\frac{\partial^8 w(x_1, x_2)}{\partial {x_1}^4 \partial {x_2}^4} = \sum_{\substack{j_i=0\\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) T_{j_2}(x_2) = (\boldsymbol{T}_1(x_1) \circ \boldsymbol{I}_{s,1}) \otimes (\boldsymbol{T}_2(x_2) \circ \boldsymbol{I}_{s,2}) \boldsymbol{A}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{T}_i(x_i)$ — матрица-строка размером $1 \times n'_i$ ($n'_i = n_i + 5$):

$$\boldsymbol{T}_i(x_i) = \Big(T_0(x_i)\, T_1(x_i) \ldots T_{n_i-1}(x_i)\, T_{n_i}(x_i)\, T_{n_i+1}(x_i)\, T_{n_i+2}(x_i)\, T_{n_i+3}(x_i)\, T_{n_i+4}(x_i)\Big),$$

$\boldsymbol{I}_{s,i}$ — матрица-строка размером $1 \times n'_i$ с ненулевыми элементами $I_{s,i,0,j_i} = 1$ ($j_i = \overline{0, n_i}$, $i = 1, 2$), знаки $\circ$ и $\otimes$ соответственно обозначают произведение Адамара и тензорное произведение Кронекера двух матриц (см. [7]). Нумерацию строк и столбцов каждой из введенных матриц осуществляем с нуля. Матрица-столбец $\boldsymbol{A}$ имеет размер $n'_1 n'_2 \times 1$ и содержит неизвестные коэффициенты

$$\boldsymbol{A} = \Big(a_{00}\, a_{01} \ldots a_{0n_2}\, a'_{0\, n_2+1}\, a'_{0\, n_2+2}\, a'_{0\, n_2+3}\, a'_{0\, n_2+4}\, a_{10} \,\ldots a_{n_1 n_2}\, a'_{n_1\, n_2+1} \ldots a'_{n_1+4\, n_2+4}\Big)^T.$$

Интегрируя (5) по переменой x_2 и используя обозначения для интегралов из [11], получаем

$$\frac{\partial^7 w(x_1, x_2)}{\partial {x_1}^4 \partial {x_2}^3} = \sum_{\substack{j_i=0\\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) \int^{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 + \sum_{j_1=0}^{n_1} a'_{j_1\, n_2+1} T_{j_1}(x_1). \tag{6}$$

Последовательно k раз интегрируя (6) по переменой x_2, получаем

$$\frac{\partial^4 w(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^4 \partial {x_2}^{3-k}} = \sum_{\substack{j_i=0\\ i=1,2}}^{n_i} a_{j_1 j_2} T_{j_1}(x_1) \int^{x_2^{k+1}} T_{j_2}(s_2) d^{k+1} s_2 +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{n_1} T_{j_1}(x_1) \left(a'_{j_1\, n_2+k+1} + \sum_{l=1}^{k} a'_{j_1\, n_2+l} \frac{x_2^{k+1-l}}{(k+1-l)!} \right), \quad k=\overline{1,\,3}. \quad (7)$$

Для нахождения интегралов от многочленов Чебышева первого рода в (6) и (7) учитывая, что $T_0(x_2)=1$ и $T_1(x_2)=x_2$ [9], имеем

$$\int^{x_2} T_0(s_2) ds_2 = x_2, \quad \int^{x_2} T_1(s_2) ds_2 = \frac{x_2^2}{2}, \quad (8)$$

для четных $j_2 \geqslant 2$ согласно [9] получаем

$$2\int^{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 = \frac{T_{j_2+1}(x_2)}{j_2+1} - \frac{T_{j_2-1}(x_2)}{j_2-1}, \quad (9)$$

для нечетных $j_2 \geqslant 3$:

$$2\int^{x_2} T_{j_2}(s_2) ds_2 = \frac{T_{j_2+1}(x_2)}{j_2+1} - \frac{T_{j_2-1}(x_2)}{j_2-1} - \frac{2j_2(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2^2-1}. \quad (10)$$

Постоянная в (10) получена с использованием следующего представления (см. [9]):

$$T_{j_2}(x_2) = \sum_{k=0}^{[j_2/2]} \chi_k x_2^{j_2-2k}, \quad \chi_k = \frac{(-1)^k 2^{j_2-2k-1} j_2 (j_2-k-1)!}{(j_2-2k)!k!}. \quad (11)$$

Здесь $[j_2/2]$ обозначает целую часть числа $j_2/2$.

Для нечетных $j_2 \geqslant 3$ из (11) получаем

$$\frac{\chi_{(j_2+1)/2}}{j_2+1} - \frac{\chi_{(j_2-1)/2}}{j_2-1} = \frac{(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2+1} - \frac{(-1)^{(j_2-1)/2}}{j_2-1} = \frac{2j_2(-1)^{(j_2+1)/2}}{j_2^2-1}. \quad (12)$$

Далее, подставляя (8)–(12) в (6) иЁ(7), имеем

$$\frac{\partial^{8-k} w(x_1,x_2)}{\partial {x_1}^4 \partial {x_2}^{4-k}} = (\boldsymbol{T}_1(x_1) \circ \boldsymbol{I}_{s,1}) \otimes \Big((\boldsymbol{T}_2(x_2) \boldsymbol{G}_2{}^k) \circ \boldsymbol{I}_{s,2} + \boldsymbol{P}_{k,2}(x_2) \Big) \boldsymbol{A}, \quad k=\overline{1,4}, \quad (13)$$

где $\boldsymbol{G}_2$ — квадратная матрица размером $n'_2 \times n'_2$, в которой последний столбец нулевой, ненулевые элементы первой строки:

$$G_{2,0\,1} = \frac{1}{4}, \quad G_{2,0\,2j_2+1} = (-1)^{[(j_2+1)/2]} \frac{2j_2+1}{(2j_2+1)^2-1}, \quad j_2 = \overline{1, [n'_2/2]-1},$$

ненулевые элементы второй строки: $G_{2,1\,0}=1$, $G_{2,1\,2}=-1/2$, одиночные ненулевые элементы предпоследней и последней строк: $G_{2,n'_2-2\,n'_2-3} = 1/(2n'_2-4)$, $G_{2,n'_2-1\,n'_2-2} = 1/(2n'_2-2)$, парные ненулевые элементы остальных строк:

$$G_{2,j_2\,j_2+(-1)^i} = \frac{(-1)^{i+1}}{j_2^2}, \quad i=1,2, \quad j_2=\overline{2, n'_2-3};$$

$\boldsymbol{P}_{k,2}(x_2)$ $(k=\overline{1,4})$ — матрицы-строки размером $1 \times n'_2$ каждая, в $\boldsymbol{P}_{1,2}(x_2)$ один ненулевой элемент $P_{1,2,0\,n_2+1}(x_2)=1$, в остальных матрицах $\boldsymbol{P}_{k,2}(x_2)$ ненулевые элементы

$$P_{k,2,0\,n_2+k}(x_2) = 1, \quad P_{k,2,0\,n+j}(x_2) = \frac{x_2^{k-j}}{(k-j)!}, \quad j=\overline{1,k-1}, \quad k=\overline{2,4}.$$

При $n_2 = 4$ приведем развернутую форму матрицы $\boldsymbol{G}_2$:

$$\boldsymbol{G}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & -\frac{7}{48} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично, последовательно интегрируя (13) по переменой x_1, получаем

$$\frac{\partial^{8-k_1-k_2} w(x_1, x_2)}{\partial {x_1}^{4-k_1} \partial {x_2}^{4-k_2}} = \boldsymbol{Q}_{k_1-1,i}(x_1) \otimes \boldsymbol{Q}_{k_2-1,i}(x_2)\boldsymbol{A}, \quad k_i = \overline{0,4}, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{Q}_{0,i}(x_i) = \boldsymbol{T}_i(x_i) \circ \boldsymbol{I}_{s,i}, \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{Q}_{k_i,i}(x_i) = (\boldsymbol{T}_i(x_i)\boldsymbol{G}_i^{k_i}) \circ \boldsymbol{I}_{s,i} + \boldsymbol{P}_{k_i,i}(x_i), \quad k_i = \overline{1,4}, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

где матрицы $\boldsymbol{G}_1$ и $\boldsymbol{P}_{k_1,1}(x_1)$ определяются аналогичным образом, что и матрицы $\boldsymbol{G}_2$ и $\boldsymbol{P}_{k_2,2}(x_2)$.

В качестве точек коллокации в (13) для переменных x_1 и x_2 будем использовать нули многочлена $T_{n_i+1}(x_i)$ (см. [9]):

$$x_{i,j_i} = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \tag{17}$$

Значения полиномов Чебышева в точках (13) находим, используя геометрическое представление $T_{q_i}(x_i) = \cos(q_i \arccos x_i)$:

$$T_{q_i}(x_{i,j_i}) = \cos\left(\frac{\pi q_i(2n_i - 2j_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad j_i,\, q_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя (4)–(17) в (1) и используя (2) и (3), приходим к системе линейных $n_1'n_2'$-уравнений в матричной форме:

$$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{B}_i, \tag{18}$$

где $\boldsymbol{B}_i$ $(i = \overline{1,5})$ — квадратные матрицы размером $n_1'n_2' \times n_1'n_2'$, $\boldsymbol{F} = (F_{01}\, F_{02}, \dots\, F_{n_1'\, n_2'})^T$ — матрица-столбец размером $n_1'n_2' \times 1$ с элементами $F_{k_1\, k_2} = q(d_1(x_{1,k_1} + 1)/2, d_2(x_{2,k_2} + 1)/2)/D$ за исключением нулевых элементов при $k_1 = \overline{n_1 + 1,\, n_1 + 4}$ или $k_2 = \overline{n_2 + 1,\, n_2 + 4}$, которые соответствуют граничным условиям (2) и (3). Ненулевые строки $\boldsymbol{B}_i$ $(i = \overline{1,3})$ получены из уравнения

(1) в узлах (17) с использованием (14)–(16):

$$\boldsymbol{B}_1=\kappa_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{0,1}(x_{1,0})\\ \boldsymbol{Q}_{0,1}(x_{1,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{0,1}(x_{1,n_1})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,0})\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,n_2})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\kappa_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,0})\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,n_1})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{0,2}(x_{2,0})\\ \boldsymbol{Q}_{0,2}(x_{2,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{0,2}(x_{2,n_2})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=\kappa_3\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{2,1}(x_{1,0})\\ \boldsymbol{Q}_{2,1}(x_{1,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{2,1}(x_{1,n_1})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{2,2}(x_{2,0})\\ \boldsymbol{Q}_{2,2}(x_{2,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{2,2}(x_{2,n_2})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \kappa_i=\frac{16}{d_i^4},\quad i=1,2,\quad \kappa_3=\frac{32}{d_1^2d_2^2}.$$

Ненулевые строки матриц $\boldsymbol{B}_4$ и $\boldsymbol{B}_5$ соответствуют граничным условиям (2) и (3):

$$\boldsymbol{B}_4=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \dots\\ \mathbf{0}\\ \kappa_4\boldsymbol{Q}_{3,1}(-1)\\ \kappa_4\boldsymbol{Q}_{3,1}(1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(-1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(1)\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,0})\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(x_{2,n_2})\\ \kappa_5\boldsymbol{Q}_{3,2}(-1)\\ \kappa_5\boldsymbol{Q}_{3,2}(1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(-1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(1)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}_5=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,0})\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,1})\\ \dots\\ \boldsymbol{Q}_{4,1}(x_{1,n_1})\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \dots\\ \mathbf{0}\\ \kappa_5\boldsymbol{Q}_{2,2}(-1)\\ \kappa_5\boldsymbol{Q}_{2,2}(1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(-1)\\ \boldsymbol{Q}_{4,2}(1)\end{bmatrix},$$

где $\kappa_4=2/d_1$, $\kappa_5=2/d_2$.

Для приведения матрицы $\boldsymbol{B}$ в (18) к разреженной и уменьшения числа вычислений при ее заполнении используем свойство конечных сумм многочленов Чебышева в точках (17) (см. [9]):

$$\sum_{j_i=0}^{n_i}T_{l_i}(x_{i,j_i})T_{q_i}(x_{i,j_i})=\gamma_{l_i}\delta_{l_i,q_i},\quad i=1,2,$$

где δ_{l_i,q_i} — символ Кронекера, коэффициент $\gamma_{l_i}=1/2$, если $l_i=0$, иначе $\gamma_{l_i}=1$. В этом случае левые и правые части уравнения (18) умножаем на матрицу $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\otimes\boldsymbol{S}_2$, где отличные от нуля элементы квадратных матриц $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$, имеющих размер соответственно $n_i'\times n_i'$, определяются как $S_{i,0,j_i}=1/(n_i+1)$, $S_{i,q_i,j_i}=2T_{q_i}(x_{i,j_i})/(n_i+1)$, ($j_i=\overline{0,n_i}$, $j_i=\overline{1,n_i}$), $S_{n_i+k_i,n_i+k_i}=1$, ($k_i=\overline{1,4}$, $i=1,2$). В результате получаем

$$\boldsymbol{B}_S\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}_S,\quad \boldsymbol{B}_S=\sum_{i=1}^{5}\boldsymbol{B}_{S,i},\tag{19}$$

где $\boldsymbol{B}_{S,i}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_i$ ($i=\overline{1,5}$), $\boldsymbol{F}_S=\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}$. Решение уравнения (19) находим LU-методом. Зная элементы матрицы $\boldsymbol{A}$, функцию $w(x,y)$ получаем, используя (14).

4. Представление и анализ результатов. Рассмотрим изгиб пластины, на которую действует распределенная нагрузка:

$$q(x,y)=q_0\left(\cos\left(\frac{\pi(2x-d_1)}{d_1}\right)\cos\left(\frac{\pi(2y-d_2)}{d_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d_1^4d_2^4}{\pi^4D(d_1^2+d_2^2)^2}\left(\frac{1}{d_1^2}\cos\left(\frac{\pi(2x-d_1)}{d_1}\right)+\frac{1}{d_2^2}\cos\left(\frac{\pi(2y-d_2)}{d_2}\right)\right)\right),$$

n	$\|E_n\|_\infty$		
	ChPIn	ChP	ChPS
6	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$7{,}1 \cdot 10^{-2}$	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$
9	$5{,}1 \cdot 10^{-7}$	$1{,}8 \cdot 10^{-3}$	$4{,}2 \cdot 10^{-5}$
12	$2{,}7 \cdot 10^{-11}$	$2{,}7 \cdot 10^{-6}$	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$
18	$1{,}2 \cdot 10^{-12}$	$3{,}5 \cdot 10^{-12}$	$9{,}8 \cdot 10^{-15}$

Таблица 1. Значения погрешности полученного решения

где $q_0 = 10^5$ Па. В этом случае аналитическое решение задачи (1)–(3) имеет вид

$$\omega(x,y) = \frac{q_0 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D(d_1^2 + d_2^2)^2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi(2y - d_2)}{d_2}\right)\right). \tag{20}$$

При проведении вычислений предложенным методом (ChPIn) использованы значения физических параметров из [1, 2]: $d_1 = d_2 = 10$ м, $h = 0{,}1$ м, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}28$, $n_{1,2} = n$. В таблице 1 представлены результаты вычислений, где для расчета погрешности построенного решения применены 100 равномерно распределенных контрольных точек (x_i, y_j) (см. [1]):

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max\limits_{i,j} |\omega(x_i, y_j) - w(x_i, y_j)|}{\max\limits_{i,j} |\omega(x_i, y_j)|}.$$

В таблице приведены также значения погрешности численного решения краевой задачи (1)–(3), полученного на основе представления в виде усеченного ряда по многочленам Чебышева первого рода самой искомой функции. Результаты вычислений в этом случае без использования интегрального подхода в таблице имеют аббревиатуру ChP. Здесь приходим к системе линейных $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ уравнений, полученных при использовании точек (17), и осуществляем замену уравнений согласно граничным условиям (2) и (3) в точках, для которых $x_1 = x_{1,0}$, x_{1,n_1} или $x_2 = x_{2,0}$, x_{2,n_2}, соответственно на уравнения

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad x_1 = -1,\, 1,$$
$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad x_2 = -1,\, 1.$$

В последнем столбце таблицы представлены результаты полиномиальной интерполяции (ChPS) аналитического решения (20), коэффициенты в разложении которого определяются с использованием значений $\omega(d_1(x_1 + 1)/2, d_2(x_2 + 1)/2)$, вычисленных в узлах (17):

$$\boldsymbol{A} = {\boldsymbol{S}'_1}^{-1} \otimes {\boldsymbol{S}'_2}^{-1} \boldsymbol{W},$$

где элементы квадратных матриц $\boldsymbol{S}'_1$ и $\boldsymbol{S}'_2$, имеющих размер $(n_i + 1) \times (n_i + 1)$, равны соответствующим элементам матриц $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$:

$$S'_{i,0,j_i} = S_{i,0,j_i}, \quad S'_{i,q_i,j_i} = S_{i,q_i,j_i}, \quad j_i = \overline{0, n_i}, \quad j_i = \overline{1, n_i},$$

$W = \begin{pmatrix} w_{00}\; w_{01}\; \ldots\; w_{n_1\, n_2 - 1}\; w_{n_1\, n_2} \end{pmatrix}^T$ — матрица-столбец размера $n'_1 n'_2 \times 1$, элементы которой равны $w_{k_1\, k_2} = \omega(d_1(x_{1,k_1} + 1)/2, d_2(x_{2,k_2} + 1)/2)$, $(k_i = 0, n_i,\ i = 1, 2)$.

Из таблицы видно, что высокая точность полученного решения с использованием нулей многочленов Чебышева первого рода достигается при сравнительно малых значениях n.

5. Заключение. В работе методом полиномиальной аппроксимации с использованием интегрального подхода построено решение задачи расчета напряженно-деформированного состояния прямоугольной изотропной пластины под действием заданной поперечной нагрузки для случая граничного условия защемленого края. Показано, что построенное решение с высокой точностью приближает аналитическое решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П.* Н-, Р- и НР-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2022. — *62*, № 4. — С. 531–552.
2. *Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П.* Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин// Вычисл. технол. — 2013. — *18*, № 6. — С. 31–43.
3. *Карчевский А. Л.* Вычисление напряжений в угольном пласте с учетом диффузии газа// Сиб. ж. индустр. мат. — 2016. — *19*, № 4. — С. 31–43.
4. *Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И.* Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области// Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2013. — *1*. — С. 52–62.
5. *Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А.* НР-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения// Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2022. — *26*, № 3. — С. 556–572.
6. *Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E.* A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions// Appl. Math. Comput. — 2018. — *322*. — P. 55–65.
7. *Liu S., Trenkler G.* Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products// Int. J. Inform. Syst. Sci. — 2008. — *4*, № 1. — P. 160–177.
8. *Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W.* A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation// Eng. Anal. Bound. Elements. — 2022. — *143*. — P. 687–699.
9. *Mason J., Handscomb D.* Chebyshev Polynomials. — Florida: CRC Press, 2003.
10. *Shao W., Wu X.* An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations// Appl. Math. Model. — 2015. — *39*, № 9. — P. 2554–2569.
11. *Shao W., Wu X., Wang C.* Numerical study of an adaptive domain decompositionalgorithm based on Chebyshev tau method forsolving singular perturbed problems// Appl. Num. Math. — 2017. — *118*. — P. 19–32.
12. *Timoshenko S., Woinowsky–Krieger S.* Theory of Plates and Shells. — New York: McGraw-Hill, 1959.
13. *Ye X., Zhang Sh.* A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation// Res. Appl. Math. — 2022. — *15*. — P. 100318.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00381).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Попов Василий Николаевич
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: `v.popov@narfu.ru`

Гермидер Оксана Владимировна
Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск
E-mail: `o.germider@narfu.ru`