ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 231 (2024). С. 53–67
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-53-67

УДК 517.97, 517.955

МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. **Л. Ю. КАБАНЦОВА**

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя случайными коэффициентами и случайной неоднородностью. Получены явные формулы для моментных функций решения: математическое ожидание, смешанные моментные функции и вторая моментная функция. В качестве приложений выведены явные формулы смешанных моментных функций и второй моментной функции решения уравнения с независимыми гауссовскими случайными коэффициентами.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со случайными коэффициентами, математическое ожидание, смешанная моментная функция, вторая моментная функция, вариационная производная, характеристический функционал.

MOMENT FUNCTIONS FOR A SOLUTION OF A STOCHASTIC SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2024 **L. Yu. KABANTSOVA**

Abstract. In this paper, we consider the Cauchy problem for a linear inhomogeneous system of first-order partial differential equations with two random coefficients and a random inhomogeneity. Explicit formulas for the moment functions of the solution are obtained: mathematical expectation, mixed moment functions, and the second moment function. As applications, explicit formulas for mixed moment functions and the second moment function for solutions of an equation with independent Gaussian random coefficients are obtained.

Keywords and phrases: system of first-order partial differential equations with random coefficients, mathematical expectation, mixed moment function, second moment function, variational derivative, characteristic functional.

AMS Subject Classification: 35R60, 60H15

1. Введение. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t) A \frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t) y + b(t,z), \tag{1}$$

$$y(t_0,z) = y_0(z), \tag{2}$$

где $t \in T = [t_0,t_1] \subset \mathbb{R}$, t_0 задано, $y : T \times \mathbb{R} \to Y$ — искомое отображение, $b : T \times \mathbb{R} \to Y$ — случайный векторный процесс, A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y, Y —

конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ε_1, ε_2 — случайные процессы, $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Так как уравнение (1) содержит случайные процессы, то решение задачи Коши (1), (2) также является случайным процессом. Для приложений важны статистические характеристики решения — функция распределения, плотность распределения, характеристический функционал или моментные функции. Наиболее важным и одновременно простым является математическое ожидание. Метод сведения стохастической задачи к детерминированному дифференциальному уравнению с обычными и вариационными производными (см. [1–4, 7]) оказался эффективным для нахождения моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений. В [2] получены явные формулы для математического ожидания решения мультипликативно возмущенного векторного дифференциального уравнения в частных производных с одним случайным коэффициентом и случайной неоднородностью.

В данной работе решается задача нахождения математического ожидания, смешанных моментных функций и второй моментной функции решения задачи (1), (2) с двумя случайными коэффициентами и случайной неоднородностью. Исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с частными и вариационными производными, для которой удается получить явную формулу решения. На основе полученной формулы выписать математическое ожидание, смешанные моментные функции и вторую моментную функцию решения стохастического уравнения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов и неоднородности. В качестве приложений выведены явные формулы смешанных моментных функций и второй моментной функции решения уравнения с независимыми гауссовскими случайными коэффициентами.

2. Математическое ожидание решения задачи (1), (2).

Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой

$$\|v\| = \int_T |v(t)|dt,$$

$\psi : L_1(T) \to \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v.

Определение 1. Если

$$\psi(v+h) - \psi(v) = \int_T \varphi(t,v)h(t)\,dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h, то отображение $\varphi : T \times L_1(T) \to \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала ψ в точке v* и обозначается $\delta\psi(v)/\delta v(t)$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t,\omega)$ обозначает случайный процесс (ω — случайное событие; см. [1]). В дальнейшем случайный процесс будем записывать просто как $\varepsilon(t)$, а обозначение $E[\varepsilon]$ использовать для математического ожидания случайного процесса ε.

Определение 2 (см. [1, с. 30])**.** Функционал

$$\psi(v) = E\left[\exp\left(i\int_T \varepsilon(s)v(s)\,ds\right)\right],$$

где $v \in L_1(T)$, $i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом* случайного процесса ε.

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса, например (см. [1]),

$$\left.\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}\right|_{v=0} = iE[\varepsilon(t)], \quad \left.\frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)}\right|_{v=0} = -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)].$$

2.1. Переход к детерминированной задаче. Будем считать, что процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b заданы характеристическим функционалом, т.е. считаем известным

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = E\left[\exp(i\int\limits_T \varepsilon_1(s)v_1(s)\,ds + i\int\limits_T \varepsilon_2(s)v_2(s)\,ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2)\rangle\,ds_2\,ds_1)\right].$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в Y. Введем обозначение

$$w = \exp\left(i\int\limits_T \varepsilon_1(s)v_1(s)\,ds + i\int\limits_T \varepsilon_2(s)v_2(s)\,ds + i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2)\rangle\,ds_2\,ds_1\right).$$

Умножим уравнение (1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства:

$$E\left[\frac{\partial y}{\partial t}w\right] = E\left[\varepsilon_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z}w\right] + E\big[\varepsilon_2(t)yw\big] + E\big[b(t,z)w\big]. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) = E[y(t, z)w].$$

Уравнение (3) (формально) можно записать с помощью $\widetilde{y}$. Имеем

$$\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\widetilde{y} - i\frac{\delta_p\psi}{\delta v_3(t,z)}, \qquad (4)$$

где $\delta_p\psi/\delta v_3(t,z)$ — частная вариационная производная по переменной v_3.

Будем считать, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b. Умножим начальные условие (2) на w и вычислим математическое ожидание полученного равенства:

$$E[y(t_0, z)w] = E[y_0(z)w] = E[y_0(z)]E[w] = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\widetilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3). \qquad (5)$$

Определение 3. *Математическим ожиданием* $E[y(t,z)]$ решения задачи Коши (1), (2) называется $\widetilde{y}(t, z, 0, 0, 0)$, где $\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ решение задачи (4), (5) в некоторой окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

Таким образом, для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ решения задачи (1), (2) достаточно найти решение $\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ не случайной (детерминированной) задачи (4), (5) в малой окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

2.2. Решение уравнения с обычной и вариационной производными. Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье функции g по переменной z (см. [6]):

$$F_z(g(z))(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{i\xi z}\,dz.$$

Применим преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (4), (5):

$$\frac{\partial}{\partial t}F_z(\widetilde{y}) = -\xi A\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}F_z(\widetilde{y}) - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}F_z(\widetilde{y}) - iF_z(\frac{\delta_p\psi(v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(t,z)}), \qquad (6)$$

$$F_z(\widetilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2, v_3) = F_z(E[y_0(z)])(\xi)\psi(v_1, v_2, v_3). \qquad (7)$$

Пусть $\chi(t_0, t, s)$ — функция переменной $s \in \mathbb{R}$, определенная следующим образом:

$$\chi(t_0, t, s) = \begin{cases} \operatorname{sign}(s - t_0), & s \in \big[\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}\big], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [2] получена явная формула для решения уравнения,содержащего обычную и вариационные производные, с заданным начальным условием.

Теорема 1 (см. [2, теорема 7.3]). *Пусть функционал $\psi(v_1, v_2)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1, v_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_k(s_1, \dots, s_k, v_2) v_1(s_1) \dots v_1(s_k)\, ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_0 = 1,$$

где ψ_k — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_2. Тогда решение задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} F_z(\widetilde{y}) = -\xi A \frac{\delta}{\delta v_1(t)} F_z(\widetilde{y}) - i F_z(\frac{\delta \psi(v_1, v_2)}{\delta v_2(t, z)}),$$
$$F_z(\widetilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2) = F_z(E[y_0(z)])(\xi) \psi(v_1, v_2)$$

имеет вид

$$F_z(\widetilde{y})(t, \xi, v_1, v_2) = F_z(E[y_0])(\xi) \psi\big(v_1 E - \xi \chi(t_0, t) A, v_2\big) - i \int\limits_{t_0}^{t} F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 E - \xi \chi(s, t) A, v_2)}{\delta v_2(s, z)} \right) ds.$$

Полученную в теореме 1 формулу можно обобщить на случай задачи Коши вида (6), (7).

Теорема 2. *Пусть функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в ряд*

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_{1k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_1(s_1) \dots v_1(s_k)\, ds_1 \dots ds_k \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_T \dots \int\limits_T \psi_{2k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_2(s_1) \dots v_2(s_k)\, ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_{10} = 1, \psi_{20} = 1, \quad (8)$$

где ψ_{ik} — симметрические по любой паре переменных функции, и имеющие вариационные производные по переменной v_3. Тогда

$$F_z(\widetilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3) = \psi\Big(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3\Big) F_z(E[y_0])(\xi) -$$
$$- i \int\limits_{t_0}^{t} F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) ds \quad (9)$$

является решением задачи (6), (7).

Замечание 1. Характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ будет удовлетворять условию (8), если предположить независимость случайных процессов ε_1, ε_2.

2.3. Нахождение математического ожидания решения задачи. Для нахождения среднего значения решения задачи (1), (2) нужно найти отображение $\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$. Это можно сделать вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (9). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей (см. [6, с. 154]), то для детерминированной задачи Коши (4), (5) можно получить явную формулу решения.

Теорема 3. *Если характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в степенной ряд вида* (8), *то*

$$\widetilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) = F_\xi^{-1} \psi\Big(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3\Big) * E[y_0(z)] -$$
$$- i \int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi\Big(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3\Big)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds \quad (10)$$

является решением детерминированной задачи (4), (5). *Здесь F_ξ^{-1} — обратное преобразование Фурье, $*$ — свертка по переменной z, I — единичный оператор.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$E[y(t,z)] = F_\xi^{-1}\psi\Big(-\xi\chi(t_0,t)A, -i\chi(t_0,t), 0\Big) * E[y_0(z)] - \\ - i\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A, -i\chi(s,t),0)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right) ds \quad (11)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

3. Смешанные моментные функции. Формула (10) полезна не только для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ решения задачи (1),(2), но и может быть применена для нахождения других моментных функций решения задачи (1), (2). Из определения $\widetilde{y}$ следует, что

$$\left.\frac{\delta_p\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_1(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = iE[y(t,z)\varepsilon_1(\tau)],$$
$$\left.\frac{\delta_p\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_2(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = iE[y(t,z)\varepsilon_2(\tau)],$$
$$\left.\frac{\delta_p\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_3(\tau,z)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0} = iE[y(t,z)b^{\mathrm{T}}(\tau,z)].$$

Таким образом, смешанные моментные функции может быть найдена из $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ с помощью вариационного дифференцирования.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$E[y(t,z)\varepsilon_1(\tau)] = -iF_\xi^{-1}\left(\left.\frac{\delta_p\psi(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A, v_2-i\chi(t_0,t),v_3)}{\delta v_1(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0}\right) * E[y_0(z)] - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\left.\frac{\delta_p^2\psi(v_1I-\xi\chi(s,t)A, v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_1(\tau)\delta v_3(s,z)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0}\right)\right) ds. \quad (12)$$

Доказательство. Так как

$$E[y(t,z)\varepsilon_1(\tau)] = -i\left.\frac{\delta_p\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_1(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0},$$

то справедливость формулы (12) можно легко установить, если вычислить вариационную производную от $\widetilde{y}(t,z,v_1,v_2,v_3)$ по переменной v_1. □

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$E[y(t,z)\varepsilon_2(\tau)] = -iF_\xi^{-1}\left(\left.\frac{\delta_p\psi(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A, v_2-i\chi(t_0,t),v_3)}{\delta v_2(\tau)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0}\right) * E[y_0(z)] - \\ - \int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\left.\frac{\delta_p^2\psi(v_1I-\xi\chi(s,t)A, v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_2(\tau)\delta v_3(s,z)}\right|_{v_1=v_2=v_3=0}\right)\right) ds. \quad (13)$$

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда*

$$E[y(t,z)b^T(\tau,z)] = -iF_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A, v_2-i\chi(t_0,t),v_3)}{\delta v_3(\tau,z)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0}\right) * E[y_0^T(z)] - \\ -\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p^2\psi(v_1I-\xi\chi(s,t)A, v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_3(\tau,z)\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0}\right)\right)ds. \quad (14)$$

4. Вторая моментная функция.

Умножим уравнение (1) на $y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w$ и возьмем математическое ожидание полученного равенства

$$E\left[\frac{\partial y(t,z)}{\partial t}y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w\right] = \\ = E\left[\varepsilon_1(t)A\frac{\partial y(t,z)}{\partial z}y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w\right] + E\big[\varepsilon_2(t)y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w\big] + E\big[b(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w\big]. \quad (15)$$

Введем обозначение

$$\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3) = E[y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w].$$

Уравнение (15) (формально) можно записать с помощью ζ в виде

$$\frac{\partial\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)}{\partial t} = \\ = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3) - i\frac{\delta_p\widetilde{y}(\tau,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_3(t,z)}. \quad (16)$$

Умножим начальные условие (2) на $y^{\mathrm{T}}(t_0,z)w$ и вычислим математическое ожидание полученного равенства, находим

$$E\big[y(t_0,z)y^{\mathrm{T}}(t_0,z)w\big] = E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)w\big] = E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}\big]E[w] = E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]\psi(v_1,v_2,v_3);$$

предполагаем, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b. Перепишем последнее равенство в виде

$$\zeta(t_0,t_0,z,v_1,v_2,v_3) = E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]\psi(v_1,v_2,v_3). \quad (17)$$

Определение 4. *Второй моментной функцией* $E[y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)]$ решения задачи Коши (1), (2) называется величина $\zeta(t,\tau,z,0,0,0)$, где $\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)$ — симметричное по переменным t, τ решение уравненияЁ(16), удовлетворяющее условию

$$\zeta(t_0,\tau,z,v_1,v_2,v_3) = E[y(t_0,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)w]$$

в некоторой окрестности точки $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$.

Запишем уравнение (16) при $\tau = t_0$:

$$\frac{\partial\zeta(t,t_0,z,v_1,v_2,v_3)}{\partial t} = \\ = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial\zeta(t,t_0,z,v_1,v_2,v_3)}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\zeta(t,t_0,z,v_1,v_2,v_3) - i\frac{\delta_p\widetilde{y}(t_0,z,v_1,v_2,v_3)}{\delta v_3(t,z)}. \quad (18)$$

Задача (18), (17) имеет вид задачи (4), (5). Найдем её решение по формуле (10):

$$\zeta(t,t_0,z,v_1,v_2,v_3) = F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A, v_2-i\chi(t_0,t),v_3\Big) * E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big] - \\ - i\int\limits_{t_0}^{t} F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\widetilde{y}(t_0,z,v_1I-\xi\chi(s,t)A, v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right)ds.$$

Так как ζ симметрична по двум первым переменным,то

$$\zeta(t_0,\tau,z,v_1,v_2,v_3)=F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,\tau),v_3\Big)*E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\widetilde{y}(t_0,z,v_1I-\xi\chi(s,\tau)A,v_2-i\chi(s,\tau),v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right)ds. \quad (19)$$

Равенство (19) является начальным условием для уравнения (16). Задача (16), (19) имеет вид задачи (4), (5). Найдем её решение по формуле (10):

$$\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)=\\=F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),v_3\Big)*E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\widetilde{y}(t_0,z,v_1I-\xi\chi(t,t_0)A-\xi\chi(s,\tau)A,v_2-i\chi(t,t_0)-i\chi(s,\tau),v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right)ds-\\-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p\widetilde{y}(\tau,z,v_1I-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right)ds. \quad (20)$$

Подставив (10) в (20), получим окончательное представление для решения задачи (16), (19):

$$\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)=F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),v_3\Big)*E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(\frac{\delta_p}{\delta v_3(s,z)}\Bigg\{F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau),v_3\Big)*E[y_0(z)]\Bigg\}\Bigg)\Bigg)ds-\\-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(\frac{\delta_p}{\delta v_3(s,z)}\Bigg\{F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(t_0,\tau)-i\chi(s,t),v_3\Big)*E[y_0(z)]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(\sigma,z)}\Bigg)\Bigg)d\Bigg\}\Bigg)\Bigg)ds=\\=F_\xi^{-1}\psi\Bigg(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),v_3\Bigg)*E\big[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)\big]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\Bigg(F_zB\Bigg(F_\xi^{-1}\Big(\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\Bigg)*E[y_0(z)]\Bigg)\Bigg)ds-\\-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(F_\xi^{-1}\Bigg(\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(t_0,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(t_0,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\Bigg)*E[y_0(z)]\Bigg)\Bigg)ds-\\-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(\frac{\delta_p^2\psi\big(v_1I-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(\sigma,z)\delta v_3(s,z)}\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)d\sigma ds.$$

Таким образом, решение задачи (16), (19) задается следующей формулой

$$\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)=F_\xi^{-1}\psi\Big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),v_3\Big)*E[y_0(z)y_0^{\mathrm{T}}(z)]-\\-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\Bigg(F_z\Bigg(F_\xi^{-1}\Bigg(\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A,v_2-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\Bigg)\Bigg)\Bigg)*E[y_0(z)]ds-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(t_0,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(t_0,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\right)\right)\right)*E[y_0(z)]ds-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p^2\psi\big(v_1I-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(\sigma,z)\delta v_3(s,z)}\right)\right)\right)\right)d\sigma ds. \quad (21)$$

Отметим, что функция $\zeta(t,\tau,z,v_1,v_2,v_3)$, определяемая формулой (21), симметрична по t и τ.

Теорема 8. *Если характеристический функционал $\psi(v_1,v_2,v_3)$ разлагается в степенной ряд вида* (8) *имеет вариационную производную второго порядка по переменной v_3, то*

$$E[y(t,z)y^T(\tau,z)]=F_\xi^{-1}\psi\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),0\Big)*E[y_0(z)y_0^T(z)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi\big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A,-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_3=0}\right)\right)\right)*E[y_0(z)]ds-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi\big(-\xi\chi(t_0,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,-i\chi(t_0,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_3=0}\right)\right)\right)*E[y_0(z)]ds-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau}F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\frac{\delta_p^2\psi\big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_3(\sigma,z)\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_3=0}\right)\right)\right)\right)d\sigma ds \quad (22)$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Согласно определению $E[y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)]=\zeta(t,\tau,z,0,0,0)$. Подставляя $v_1=0$, $v_2=0$, $v_3=0$ в формулу (21), находим, что $E[y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)]$ определяется формулой (22). □

5. Случай независимых случайных процессов ε_1, ε_2 и b.

Если процессы $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и b независимы, то

$$\psi(v_1,v_2,v_3)=\psi_{\varepsilon_1}(v_1)\psi_{\varepsilon_2}(v_2)\psi_b(v_3),$$

где ψ_{ε_1}, ψ_{ε_2}, ψ_b — характеристические функционалы для ε_1, ε_2 и b соответственно.

Теорема 9. *Если случайные процессы $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и b независимы, то*

$$E[y(t,z)]=\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)\big)F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}\big(-\xi\chi(t_0,t)A\big)\Big)*E[y_0(z)]+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(s,t)\big)F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}\big(-\xi\chi(s,t)A\big)\Big)*E[b(s,z)]ds \quad (23)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(s,t)A,-i\chi(s,t),0)}{\delta v_3(s,z)}=\psi_{\varepsilon_1}\big(-\xi\chi(s,t)A\big)\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(s,t)\big)\frac{\delta_p\psi_b(0)}{\delta v_3(s,z)}=$$

$$=i\psi_{\varepsilon_1}\big(-\xi\chi(s,t)A\big)\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))E[b(s,z)].$$

Подставив найденные выражения в формулу (11) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (23). □

Замечание 2. Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t,z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов ε_1, ε_2 и только математическое ожидание процесса b.

Теорема 10. *Если случайные процессы* ε_1, ε_2 *и* b *независимы, то*

$$E\big[y(t,z)\varepsilon_1(\tau)\big] = -i\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)\big)F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0}\right) * E[y_0(z)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t}\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(s,t)\big)F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(s,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0}\right) * E[b(s,z)]ds \quad (24)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Вычислим значение вариационных производных входящих в формулу (12) в предположение, что случайные процессы $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ и b независимы:

$$\frac{\delta_p\psi\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A, v_2-i\chi(t_0,t),v_3\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0} =$$

$$= \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0}\psi_b(0) =$$

$$= \psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)\big)\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0},$$

$$\frac{\delta_p^2\psi\big(v_1I-\xi\chi(s,t)A, v_2-i\chi(s,t),v_3\big)}{\delta v_1(\tau)\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0} =$$

$$= \frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(s,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0}\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(s,t)\big)\frac{\delta\psi_b(v_3)}{\delta v_3(\tau,z)}\bigg|_{v_3=0} =$$

$$= \frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}\big(v_1I-\xi\chi(s,t)A\big)}{\delta v_1(\tau)}\bigg|_{v_1=0}\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))E[b(s,z)].$$

Подставив найденные выражения в формулу (12) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (24). □

Теорема 11. *Если случайные процессы* ε_1, ε_2 *и* b *независимы, то*

$$E[y(t,z)\varepsilon_2(\tau)] = -i\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(t_0,t))}{\delta v_2(\tau)}\bigg|_{v_2=0}F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)\Big) * E[y_0(z)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(s,t))}{\delta v_2(\tau)}\bigg|_{v_2=0}F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)\Big) * E[b(s,z)]ds \quad (25)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Теорема 11 доказывается аналогично теореме 10.

Теорема 12. *Если случайные процессы* ε_1, ε_2 *и* b *независимы, то*

$$E[y(t,z)b^T(\tau,z)] = \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)\Big)E[b(s,z)] * E[y_0^T(z)]+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))F_\xi^{-1}\Big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)\Big) * E[b(s,z)b^T(\tau,z)]ds \quad (26)$$

является смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Вычислим значения вариационных производных, входящих в формулу (14), в предположении, что случайные процессы ε_1, ε_2 и b независимы:

$$\frac{\delta_p\psi(v_1I-\xi\chi(t_0,t)A,v_2-i\chi(t_0,t),v_3)}{\delta v_3(\tau,z)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0}=i\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0,t))\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A)E[b(\tau,z)],$$

$$\frac{\delta_p^2\psi(v_1I-\xi\chi(s,t)A,v_2-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_3(\tau,z)\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_1=v_2=v_3=0}=-\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\tau,z)].$$

Подставив найденные выражения в формулу (14) и вычислив прямое и обратное преобразования Фурье, получаем формулу (26). ☐

Теорема 13. *Если случайные процессы ε_1, ε_2 и b независимы, то*

$$E[y(t,z)y^T(\tau,z)]=\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau)\big)F_\xi^{-1}\big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A)\big)*E[y_0(z)y_0^T(z)]+$$
$$+\int_{t_0}^{\tau}\Big\{\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\big)F_\xi^{-1}\big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A)\big)E[b(s,z)]*E[y_0(z)]\Big\}ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\Big\{\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,\tau)-i\chi(s,t)\big)F_\xi^{-1}\big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,\tau)A-\xi\chi(s,t)A)\big)E[b(s,z)]*E[y_0(z)]\Big\}ds+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\big)F_\xi^{-1}\big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A)\big)*E[b(s,z)b^T(\sigma,z)]d\sigma ds \quad (27)$$

является второй моментной функцией решения задачи (1), (2).

Доказательство. Поскольку

$$F_\xi^{-1}\psi\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A,-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau),0\Big)=$$
$$=\psi_{\varepsilon_2}\big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(t_0,\tau)\big)F_\xi^{-1}\big(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(t_0,\tau)A)\big)$$

и

$$F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\frac{\delta_p\psi(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A,-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau),v_3)}{\delta v_3(s,z)}\bigg|_{v_3=0}\right)\right)\right)=$$
$$=iF_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A\Big)\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\Big)E[b(s,z)]\right)\right)\right)=$$
$$=iF_\xi^{-1}\left(F_z\left(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\Big)E[b(s,z)]F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A\Big)\right)\right)\right)=$$
$$=iF_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\Big)F_z\left(F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A\Big)\right)E[b(s,z)]\right)\right)=$$
$$=\frac{i}{2\pi}F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\Big)\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A\Big)*F_z(E[b(s,z)])\right)=$$
$$=i\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(t_0,t)-i\chi(s,\tau)\Big)F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(t_0,t)A-\xi\chi(s,\tau)A\Big)\right)E[b(s,z)],$$

преобразуя последнее подинтегральное выражение, получаем

$$F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\left.\frac{\delta_p^2\psi(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A,-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t),v_3)}{\delta v_3(\sigma,z)\delta v_3(s,z)}\right|_{v_3=0}\right)\right)\right)\right)=$$

$$=-F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}\left(F_z(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\Big)\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A\Big)E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\sigma,z)])\right)\right)\right)=$$

$$=-F_\xi^{-1}\left(F_z\left(F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\Big)\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A\Big)F_z\Big(E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\sigma,z)]\Big))\right)\right)=$$

$$=-F_\xi^{-1}\left(F_z\left(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\Big)F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A\Big)\right)*E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\sigma,z)]\right)\right)=$$

$$=-F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\Big)\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A\Big)F_z\Big(E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\sigma,z)]\Big)\right)=$$

$$=-\psi_{\varepsilon_2}\Big(-i\chi(\sigma,\tau)-i\chi(s,t)\Big)F_\xi^{-1}\left(\psi_{\varepsilon_1}\Big(-\xi\chi(\sigma,\tau)A-\xi\chi(s,t)A\Big)\right)*E[b(s,z)b^{\mathrm{T}}(\sigma,z)].$$

Подставляя полученные выражения в формулу (22), получаем вторую моментную функцию (27) для независимых случайных процессов ε_1, ε_2 и b. □

Замечание 3. Отметим, что для нахождения второй моментной функции $E[y(t,z)y^{\mathrm{T}}(\tau,z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов ε_1, ε_2 и только математическое ожидание и вторую моментную функцию процесса b.

6. Частные случаи. Рассмотрим задачу (1), (2) с гауссовскими случайными процессами ε_1, ε_2, заданными характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k)=\exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon_k(s)]v_k(s)ds-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_k(s_1,s_2)v_k(s_1)v_k(s_2)ds_1ds_2\right),\quad k=1,2,\tag{28}$$

где $b_k(s_1,s_2)=E[\varepsilon_k(s_1)\varepsilon_k(s_2)]-E[\varepsilon_k(s_1)]E[\varepsilon_k(s_2)]$, $k=1,2,$ — ковариационные функции случайных процессов ε_1 и ε_2 соответственно, и независимым с ε_1 и ε_2 случайным процессом b.

Теорема 14. *Пусть в задаче* (1), (2) *случайные процессы* $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ *заданы характеристическими функционалами* (28) *и не зависят от случайного процесса* b. *Тогда*

$$E[y(t,z)\varepsilon_1(\tau)]=-i\exp\left(\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)]\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)]A\,ds-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(iE[\varepsilon_1(\tau)]I+\xi\int\limits_{t_0}^t b_1(\tau,s)A\,ds\right)\right)*E[y_0(z)]-$$
$$-i\int\limits_{t_0}^t\left\{\exp\left(\int\limits_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left(iE[\varepsilon_1(\tau)]I+\xi\int\limits_s^t b_1(\tau,s_1)Ads_1\right)\right)*E[b(s,z)]\right\}ds\tag{29}$$

является смешанной моментной функцией решения этой задачи.

Доказательство. Выпишем $\psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi\chi(s,t)A)$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s,t)$:

$$\psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi\chi(s,t)A) = \exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon_1(\sigma)]v_1(\sigma)I\,d\sigma - i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_1(s_1,s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2 I + \frac{1}{2}\xi\int\limits_s^t\int\limits_T b_1(s_1,s_2)v_1(s_1)A\,ds_1ds_2 +$$

$$\left. +\frac{1}{2}\xi\int\limits_T\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)v_1(s_2)A\,ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right).$$

Тогда

$$\left.\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_1}(v_1 I - \xi\chi(s,t)A)}{\delta v_1(\tau)}\right|_{v_1=0} = \exp\left(-i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\times$$

$$\times\left.\left[iE[\varepsilon_1(\tau)]I \quad -\int\limits_T b_1(s_1,\tau)v_1(s_1)I\,ds_1 + \frac{1}{2}\xi\int\limits_s^t b_1(\tau,s_2)Ads_2 + \frac{1}{2}\xi\int\limits_s^t b_1(s_1,\tau)Ads_1\right]\right|_{v_1=0}.$$

Учитывая, что функция $b_1(s_1,s_2)$ симметрична, окончательно получаем выражение

$$\exp\left(-i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\left[iE[\varepsilon_1(\tau)]I + \xi\int\limits_s^t b_1(\tau,s_2)Ads_2\right].$$

Выпишем $\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t))$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s,t)$:

$$\psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s,t)) = \exp\left(i\int\limits_T E[\varepsilon_2(\sigma)](-i\chi(s,t))d\sigma - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_2(s_1,s_2)(-i\chi(s,t))(-i\chi(s,t))ds_1ds_2\right) =$$

$$= \exp\left(\int\limits_s^t E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right).$$

Подставим эти выражения в (24), получаем формулу (29). $\square$

Теорема 15. *Пусть в задаче* (1), (2) *случайные процессы* ε_1, ε_2 *заданы характеристическими функционалами* (28) *и не зависят от случайного процесса* b. *Тогда*

$$E[y(t,z)\varepsilon_2(\tau)] = -i\exp\left(\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_2(s)]\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\left\{iE[\varepsilon_2(\tau)] + i\int\limits_{t_0}^t b_2(\tau,s)ds\right\}\times$$

$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^t E[\varepsilon_1(s)]A\,ds - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right) * E[y_0(z)] -$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t}\Biggl\{\exp\left(\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\left[iE[\varepsilon_2(\tau)]+i\int\limits_{s}^{t}b_2(\tau,s_2)ds_2\right]\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)*E[b(s,z)]\Biggr\}\,ds \quad (30)$$

является смешанной моментной функций решения этой задачи.

Доказательство. Выпишем $\psi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(s,t))$ для гауссовского процесса, используя определение функции $\chi(s,t)$:

$$\psi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(s,t))=\exp\Biggl(i\int\limits_{T}E[\varepsilon_2(\sigma)]v_2(\sigma)d\sigma+\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{T}\int\limits_{T}b_2(s_1,s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)ds_1ds_2+\frac{i}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{T}b_2(s_1,s_2)v_2(s_1)ds_1ds_2+$$
$$+\frac{i}{2}\int\limits_{T}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)v_2(s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\Biggr).$$

Тогда

$$\left.\frac{\delta_p\psi_{\varepsilon_2}(v_2-i\chi(s,t))}{\delta v_2(\tau)}\right|_{v_2=0}=\exp\left(\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times\left.\left[iE[\varepsilon_2(\tau)]-\int\limits_{T}b_2(s_1,\tau)v_2(s_1)ds_1+\frac{i}{2}\int\limits_{s}^{t}b_2(\tau,s_2)ds_2+\frac{i}{2}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,\tau)ds_1\right]\right|_{v_2=0}.$$

Учитывая, что функция $b_2(s_1,s_2)$ симметрична, окончательно получаем выражение

$$\exp\left(\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\left[iE[\varepsilon_2(\tau)]+i\int\limits_{s}^{t}b_2(\tau,s_2)ds_2\right].$$

Характеристический функционал $\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)$ для гауссовского процесса имеет вид

$$\psi_{\varepsilon_1}(-\xi\chi(s,t)A)=\exp\left(-i\xi\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]Ad\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right).$$

Подставляя эти выражения в (25), получаем формулу (30). □

Теорема 16. *Пусть в задаче* (1), (2) *случайные процессы* ε_1, ε_2 *заданы характеристическими функционалами* (28) *и не зависят от случайного процесса* b. *Тогда*

$$E[y(t,z)b^T(\tau,z)]=\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_2(s)]\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times F_\xi^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_1(s)]A\,ds-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)E[b(\tau,z)]*E[y_0^T(z)]+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp\left(\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\left.\times F_{\xi}^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)*E[b(s,z)b^T(\tau,z)]\right\}ds$$

является смешанной моментной функций решения этой задачи.

Теорема 16 доказывается по аналогии с предыдущей теоремой.

Теорема 17. *Пусть в задаче* (1), (2) *случайные процессы* ε_1, ε_2 *заданы характеристическими функционалами* (28) *и не зависят от случайного процесса* b. *Тогда*

$$E[y(t,z)y^T(\tau,z)]=$$
$$=\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_2(s)]ds+\int\limits_{t_0}^{\tau}E[\varepsilon_2(s)]ds+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times$$
$$\times F_{\xi}^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_1(s)]A\,ds-i\xi\int\limits_{t_0}^{\tau}E[\varepsilon_1(s)]A\,ds-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)*E[y_0(z)y_0^T(z)]+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{\tau}\left\{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\int\limits_{s}^{\tau}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{\tau}\int\limits_{s}^{\tau}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\times F_{\xi}^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma-i\xi\int\limits_{s}^{\tau}E[\varepsilon_1(\sigma)]A\,d\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{\tau}\int\limits_{s}^{\tau}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)E[b(s,z)]*E[y_0(z)]\right\}ds+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\left\{\exp\left(\int\limits_{t_0}^{\tau}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(\sigma)]d\sigma+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\right)\times\right.$$
$$\times F_{\xi}^{-1}\left(\exp\left(-i\xi\int\limits_{t_0}^{\tau}E[\varepsilon_1(\sigma)]Ad\sigma-i\xi\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_1(\sigma)]Ad\sigma-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{t_0}^{\tau}\int\limits_{t_0}^{\tau}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{t}b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\right)\right)E[b(s,z)]*E[y_0(z)]\right\}ds+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{\tau}\left\{\exp\left(\int\limits_{\sigma}^{\tau}E[\varepsilon_2(s_2)]ds_2+\int\limits_{s}^{t}E[\varepsilon_2(s_2)]ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{\sigma}^{\tau}\int\limits_{\sigma}^{\tau}b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\Bigg) F_\xi^{-1}\Bigg(\exp\Bigg(-i\xi\int\limits_\sigma^\tau E[\varepsilon_1(s_1)]A\,ds_1 - i\xi\int\limits_s^t E[\varepsilon_1(s_1)]A\,ds_1 -$$

$$-\frac{1}{2}\xi^2\int\limits_\sigma^\tau\int\limits_\sigma^\tau b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\xi^2\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_1(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\Bigg)\Bigg) * E[b(s,z)b^T(\sigma,z)]\Bigg\}d\sigma ds$$

является второй моментной функцией решения этой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
2. *Задорожний В. Г., Кабанцова Л. Ю.* О решении линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка// Совр. мат. Фундам. напр. — 2021. — *67*, № 3. — С. 549–563.
3. *Задорожний В. Г., Коновалова М. А.* Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — *63*, № 4. — С. 599–614.
4. *Задорожний В. Г., Тихомиров Г. С.* О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами// Совр. мат. Фундам. напр. — 2022. — *68*, № 4. — С. 621–634.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: Наука, 1970.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.
7. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model// Math. Mod. Comp. Simul. — 2021. — *13*, № 1. — P. 11–25.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кабанцова Лариса Юрьевна

Воронежский государственный университет

E-mail: `dljuv@yandex.ru`