ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 170–174
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-170-174

УДК 517.968.73

О ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ЛИНЕЙНОЙ ПЕРИДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

© 2023 г. **А. В. ЮЛДАШЕВА**

Аннотация. Доказаны единственность и существование решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с линейной перидинамической моделью механики твёрдого тела, обладающего нелинейными свойствами эластики.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, перидинамика, сингулярное ядро.

ON THE PROBLEM ASSOCIATED WITH THE LINEAR PERIDYNAMIC MODEL

© 2023 **A. V. YULDASHEVA**

Abstract. The uniqueness and existence of a solution to the Cauchy problem for an integro-differential equation associated with a linear peridynamic model in the mechanics of a rigid body with nonlinear elastic properties are proved.

Keywords and phrases: integro-differential equation, Cauchy problem, peridynamics, singular kernel.

AMS Subject Classification: 45K05, 47G20

1. Введение. Нелокальные теории в механике твердого тела, учитывающие эффекты дальнодействующих взаимодействий, такие как перидинамическое моделирование, введенное Силлингом (см. [3]), очень актуальны. Перидинамическая теория основана на интегро-дифференциальных уравнениях без какой-либо пространственной производной и может быть описана следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial u}{\partial t} + \int\limits_D K(x,y)[u(x,t)-u(y,t)]dy = f(x,t), \quad x \in D, \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ — область с кусочно гладкой границей, $a > 0$ — числовой параметр, $n \geqslant 3$. В данной работе предполагается, что неизвестная функция $u : D \times [0,T] \to \mathbb{R}$, ядро $K : D \times D \to \mathbb{R}$ и внешняя сила $f : D \times [0,T] \to \mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Интегральный оператор уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, которое вблизи диагонали $x = y$ имеет вид

$$K(x,y) = \frac{c_n}{|x-y|^n} + \gamma(x,y), \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект № F-FA-2021-424).

где $\gamma(x,y)$ — интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y) = 0, \quad x \in \partial D, \quad y \in D. \tag{4}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ — внешняя нормаль к границе ∂D области D в точке $x \in \partial D$.

Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v(x), \quad x \in D, \qquad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \partial D, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Для любого $\beta \geqslant 0$ введём гильбертово пространство $H^\beta(D) = D\left((I-\Delta)^{\beta/2}\right)$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2. \tag{6}$$

Для произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\big\{[0,T] \to B\big\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B (здесь $T > 0$).

Решением задачи (1)–(2) из класса $H^\beta(D)$ назовём функцию $u \in C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(D)\big\}$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальным условиям (2).

Основной результат данной работы заключается в следующем.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < \alpha/n$. *Для любого* $T > 0$ *и любых* $\varphi \in W_2^\alpha(D)$, $\psi \in W_2^\alpha(D)$ *и* $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^\alpha(D)\big\}$ *существует единственное решение задачи* (1)–(2) *из класса* $C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(D)\big\}$.

Задача Коши для уравнения (1) без младшей производной по времени была исследована в [1]; задача (1)–(2) на периодической структуре рассматривалась в [5].

2. Преобразование ядра уравнения. Введём невозрастающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условию

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если} \quad r \geqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$ и для любой точки $x \in D$ положим

$$R = R(x) = \min\{\delta, \operatorname{dist}(x, \partial D)\}, \tag{8}$$

где символом $\operatorname{dist}(x,\partial D)$ обозначено расстояние от точки x до границы ∂D. Введём в рассмотрение следующую функцию (напомним, что $n \geqslant 3$):

$$L_0(x,y) = \alpha\, |x-y|^{2-n} \ln \frac{1}{|x-y|} \cdot \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right), \quad x \in D, \quad y \in D, \tag{9}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi^{n/2}}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right).$$

Считая x параметром, найдем коэффициенты Фурье функции $L(x,y)$:

$$a_k(x) = \int_D L_0(x,y)\, v_k(y)\, dy = \alpha \int_{|x-y| \leqslant R} |x-y|^{2-n} \ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right) \cdot v_k(y)\, dy.$$

Перейдя к сферическим координатам с центром в точке x и применив формулу среднего значения (см. [4]), получим

$$a_k(x) = v_k(x) \cdot \alpha \frac{(2\pi)^{n/2}}{\lambda_k} \int_0^{R\sqrt{\lambda_k}} \left(\ln \frac{\sqrt{\lambda_k}}{t}\right) \chi\left(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}}\right) J_{n/2-1}(t)\, t^{2-n/2} dt, \tag{10}$$

где $t = r\sqrt{\lambda_k}$. Подставляя асимптотические представления, полученные в [1], получим следующее равенство:

$$a_k(x) = v_k(x)\,\left[\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} + \frac{\gamma}{\lambda_k} + O_x(\lambda_k^{-N})\right].$$

Отсюда и из равенства (10) вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Разложение функции* (9) *в ряд Фурье по собственным функциям задачи* (5) *имеет вид*

$$L_0(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\,v_k(x)\,v_k(y) + \gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)\,v_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty}c_k(x)v_k(x)v_k(y), \tag{11}$$

где коэффициенты $c_k(x)$ для любого номера N удовлетворяют условию

$$|c_k(x)| \leqslant \frac{C_N(x)}{(1+\lambda_k)^N}, \tag{12}$$

а величины $C_N(x)$ ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области D.

Обозначим через $G(x,y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (5):

$$G(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k};$$

пусть

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}c_k(x)v_k(x)v_k(y).$$

Из оценки (12) следует, что функция $R(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $D\times D$. Введём функцию

$$L(x,y) = L_0(x,y) - \gamma\,G(x,y) - R(x,y). \tag{13}$$

Лемма 2. *Ряд Фурье функции $L(x,y)$, определённой равенством* (13)*, имеет вид*

$$L(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}\,v_k(x)\,v_k(y).$$

Функция $L(x,y)$ бесконечно дифференцируема вне диагонали $x=y$ и равномерно на каждом компакте $K\subset D$ её производные удовлетворяют условию

$$|D^\beta L(x,y)| \leqslant \mathrm{const}\,\frac{\big|\ln|x-y|\big|}{|x-y|^{n-2+\beta}},\quad x\in K,\quad y\in D.$$

3. Преобразование рассматриваемого уравнения.

Введем оператор

$$Bv(x) = \int\limits_D K(x,y)[v(y)-v(x)]dy.$$

Тогда уравнение (1) может быть записано в следующей форме:

$$u(x,t) + 2a\int\limits_0^t u(x,s)ds - \int\limits_0^t (t-s)Bu(x,s)ds = F(x,t),\quad x\in D,\quad t>0, \tag{14}$$

где

$$F(x,t) = (2at+1)\varphi(x) + t\psi(x) + \int\limits_0^t (t-s)f(x,s)ds.$$

Будем рассматривать уравнение (14) в гильбертовом пространстве $H_0 = L_2(D)$.

Рассмотрим оператор

$$Av(x) = -2a\int\limits_0^t v(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)Bv(s)ds.$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$u(t) = Au(t) + F(t) \tag{15}$$

Методом последовательных приближений, определим последовательность

$$w_0(t) = F(t), \quad w_{k+1}(t) = Aw_k(t) = A^kF(t).$$

Необходимо доказать сходимость ряда Неймана

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(t) \tag{16}$$

и показать, что сумма этого ряда будет решением уравнения (15).

Легко установить справедливость следующей леммы (см. [2]).

Лемма 3. *Пусть $F \in C[\mathbb{R}^+ \to H_m]$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $M > 0$ верно неравенство*

$$\|A^kF\|_{m,t} \leqslant \frac{(k+m)!}{\mu^{k+m}} e^{\mu-1}\|F\|_{W_2^\mu,t} \sum_{i=0}^{k} C_k^i |a|^{k-i} M^i \frac{t^{k+i}}{(k+i)!}. \tag{17}$$

Положим $C = \max(|a|, M)$.

Лемма 4. *Пусть $\mu > 0$ и $0 \leqslant T \leqslant \sqrt{\mu/C}$, где постоянная M определяется из неравенства* (17)*. Тогда для любой функции $F \in C[R^+ \to W_2^\mu(D)]$ и любого $m \in \mathbb{N}$ ряд Неймана* (16) *сходится в норме гильбертова пространства H_m равномерно на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ и его сумма удовлетворяет оценке*

$$\|u\|_m \leqslant D_m(\mu)\frac{(m+1)!}{(1-Ct^2/\mu)^{(m+2)}}, \tag{18}$$

где

$$D_m(\mu) = e^{\mu-1}\frac{(m+1)!}{\mu^m}.$$

Доказательство. Перепишем (16) в виде

$$u(t) = F(t) + \sum_{k=0}^{\infty} A^kF(t), \quad t \geqslant 0.$$

Согласно лемме 3, можем записать

$$\|u\|_m \leqslant \frac{e^{\mu-1}}{\mu^m}\|F\|_{W_2^\mu,t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+m)!}{\mu^k}\sum_{i=0}^{k} C_k^i|a|^{k-i}M^i\frac{t^{k+i}}{(k+i)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+m)!}{\mu^k}C^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Отсюда получим

$$\|u\|_m \leqslant D_m(\mu)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{m+1}\left(\frac{Ct^2}{\mu}\right)^k \leqslant D_m(\mu)\frac{(m+1)!}{(1-\frac{t^2}{\mu})^{(m+2)}}.$$

Таким образом, ряд (16) сходится равномерно на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ для любого положительного $T \leqslant \sqrt{\mu/C}$, а его сумма удовлетворяет уравнению (14). $\square$

Доказательство теоремы 1.

1. *Существование.* Согласно лемме 4 ряд Неймана (16) сходится в норме H_m равномерно по $t \in [0, T]$, а его сумма $u(x,t)$ является решением уравнения (14). Поскольку уравнение (14) эквивалентно задаче Коши (1)–(2), то эта функция $u(x,t)$ также является решением задачи (1)–(2). Ясно, что это решение принадлежит H_∞.

2. *Единственность.* Предположим, что существует два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)–(2). Тогда их разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ является решением однородного уравнения (14) и соответствующего однородного уравнения (15): $v = Av$. Из этого уравнения следует, что коэффициенты Фурье $v(x,t)$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{v}_k(t) = \Phi(k) \int\limits_0^t (t-s)\widehat{v}_k(s)ds,$$

где $\Phi(k)$ непрерывная функция, зависящая от k.

Интегральный оператор Вольтерра в правой части квазинильпотентен, поэтому это уравнение имеет только тривиальное решение $\widehat{v}_k(t) \equiv 0$. Следовательно, $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов Ш. А., Юлдашева А. В.* О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром// Диффер. уравн. — 2021. — *57*, № 3. — С. 375–386.
2. *Alimov Sh. A., Sheraliev Sh.* On the solvability of the singular equation of peridynamics// Compl. Var. Ellipt. Equations. — 2019. — *5*, № 64. — P. 873–887.
3. *Silling S. A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces// J. Mech. Phys. Solids. — 2000. — *48*, № 1. — P. 175–209.
4. *Titchmarsh E. C.* Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations. — Oxford: at the Clarendon Press, 1958.
5. *Yuldasheva A. V.* The linear peridynamic model in elasticity theory// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 137–141.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект № F-FA-2021-424).

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Юлдашева Асал Викторовна

Филиал Московского государственнного университета им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте

E-mail: `yuasv86@mail.ru`