ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 61–68
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-61-68

УДК 517.983.23

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. **А. В. ГЛУШАК**

Аннотация. Для абстрактного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу рассматривается обратная задача с финальным переопределением второго рода. Устанавливается критерий единственности решения. В качестве приложения установленного критерия, приводятся критерии единственности решения обратных задач для вырождающихся дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу, вырождающееся дифференциальное уравнение, обратная задача, критерий единственности.

UNIQUENESS CRITERION FOR SOLUTIONS OF INVERSE PROBLEMS FOR ABSTRACT SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 **A. V. GLUSHAK**

Abstract. For the abstract Euler–Poisson–Darboux equation, an inverse problem with a final redefinition of the second kind is considered. A uniqueness criterion for solutions is established. As an application of the criterion established, uniqueness criteria for solutions of inverse problems for degenerate differential equations are given.

Keywords and phrases: Euler–Poisson–Darboux equation, degenerate differential equation, inverse problem, uniqueness criterion.

AMS Subject Classification: 34G10

1. Введение. Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E, область определения $D(A) \subset E$ которого не обязательно плотна в E. При $k > 0$ рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C([0,1],E) \cap C^2((0,1],E) \cap C((0,1),D(A)),$$

принадлежащей $D(A)$ при $t \in (0,1)$, и элемента $p \in E$, удовлетворяющих сингулярному уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t) + p, \quad ,0 < t < 1 \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+} t^k u'(t) = w_0, \quad u_0, w_0 \in D(A), \tag{2}$$

а также некоторому финальному переопределению в точке $t = 1$. В настоящей работе будет рассмотрен случай финального переопределения, имеющего вид

$$u'(1) = u_1 \in D(A). \tag{3}$$

Ограничиваемся случаем интервала $0 < t < 1$, так как общий случай $0 < t < T$ сводится к рассматриваемому заменой переменной t на t/T.

Задача (1)–(3) для эволюционного сингулярного уравнения относится к классу обратных задач (см. [7, 13]) и является, вообще говоря, некорректно поставленной задачей. Требуется восстановить неизвестную, не зависящую от времени t, правую часть p уравнения (1) при помощи дополнительного условия (3) в финальный момент времени. В работе будет исследован вопрос единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

Ранее в [11] был получен критерий единственности такого рода обратных задач в случае дифференциального уравнения первого порядка, а для несингулярных уравнений второго порядка (случай $k = 0$ в уравнении (1)) — в [1, 2, 12]. Отметим также, что в [11, 12] задавалось финальное переопределение в виде $u(1) = u_1$, в [1] — в виде $u'(1) = u_1$, а в [2] — в виде $\alpha u(1) + \beta u'(1) = u_1$. В указанных работах приведен обзор публикаций по данной тематике и установлено, что единственность решения обратных задач зависит лишь от расположения на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ собственных значений оператора A и связана с распределением нулей некоторых аналитических функций.

В настоящей работе будет показано, что аналогичная ситуация имеет место и в случае обратных задач для сингулярного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу и некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений. Отметим, что ранее похожие результаты были установлены при исследовании граничных задач для уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу (см. [6]).

2. Критерий единственности решения обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу. Исследование единственности решения задачи (1)–(3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $(u(t), p)$, удовлетворяющих нулевым условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^k u'(t) = 0, \tag{4}$$

$$u'(1) = 0, \tag{5}$$

поскольку нулевое решение $u(t) \equiv 0$, $p = 0$ у этой задачи всегда имеется.

Нетривиальные решения $(u(t), p)$ однородной задачи (1), (4), (5) будем искать методом разделения переменных в виде

$$(u(t), p) = (v(t)g, p), \tag{6}$$

где $v(t) \in C^2[0, 1]$ — ненулевая скалярная комплекснозначная функция, $g \in D(A)$, $g \neq 0$, а p — некоторый элемент из E. При этом требование $p \neq 0$ не налагается, ибо изначально нельзя исключать решения вида $(u(t), 0)$.

Подставляя пару (6) в задачу (1), (4), (5), будем иметь

$$v''(t)g + \frac{k}{t}v'(t)g = v(t)Ag + p, \tag{7}$$

и условия

$$v(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^k v'(t) = 0, \tag{8}$$

$$v'(1) = 0. \tag{9}$$

Если в уравнении (7) устремить $t \to 0$, то, учитывая условие (8), получим связывающее соотношение

$$p = \gamma g, \quad \gamma = (1 + k)v''(0). \tag{10}$$

Подставляя (10) в уравнение (7), получим равенство

$$Ag = \frac{v''(t) + (k/t)v'(t) - \gamma}{v(t)}\, g, \tag{11}$$

которое должно выполняться на множестве $\{t \in [0, 1] : \ v(t) \neq 0\}$.

Очевидно, равенство (11) может быть справедливым только, если

$$Ag = \lambda g \tag{12}$$

с некоторой постоянной $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, в силу (12), элемент $g \in D(A)$, $g \neq 0$, должен быть собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$, а уравнение (7) с учетом равенств (10), (11) превратится в уравнение

$$v''(t) + \frac{k}{t}v'(t) = \lambda v(t) + \gamma. \tag{13}$$

Легко убедиться, что решение обыкновенного дифференциального уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям (8), имеет вид

$$v(t) = \frac{\gamma}{\lambda}\big(Y_k(t;\lambda) - 1\big), \quad \lambda \neq 0, \qquad v(t) = \frac{\gamma t^2}{2(k+1)}, \quad \lambda = 0, \tag{14}$$

где

$$Y_k(t;\lambda) = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{t\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2-k/2} I_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{\lambda}\right), \tag{15}$$

$\gamma \neq 0$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, а $I_\nu(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя. Функцию $Y_k(t;\lambda)$ также часто называют нормированной функцией Бесселя и обозначают $j_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda})$.

Для нахождения подходящих собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$ осталось воспользоваться финальным условием (9), подставляя в которое функцию (14), получим трансцендентное уравнение

$$\frac{Y_k'(1;\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{16}$$

Поскольку производная функции $Y_k(t;\lambda)$ по переменной t имеет вид

$$Y_k'(t;\lambda) = \frac{\lambda t}{k+1} Y_{k+2}(t;\lambda),$$

то в терминах модифицированной функции Бесселя уравнение (16) имеет вид

$$\frac{I_{k/2+1/2}(\mu)}{\mu^{k/2+1/2}} = 0, \quad \mu = \sqrt{\lambda}. \tag{17}$$

Как известно, μ-корни уравнения (17) простые, чисто мнимые и расположены симметрично относительно точки $\mu = 0$ (см. [3, гл. XV]), поэтому λ-корни уравнения (16) действительные и отрицательные. Обозначим их через λ_j, $j \in \mathbb{N}$.

Подставляя λ_j, $j \in \mathbb{N}$ в (14) получим функции

$$v_j(t) = \frac{\gamma}{\lambda_j}\big(Y_k(t;\lambda_j) - 1\big), \quad j \in \mathbb{N}; \tag{18}$$

при этом соотношение (12) превратится в уравнения для нахождения $g_j \neq 0$:

$$Ag_j = \lambda_j g_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Предположим далее, что число λ_m при некотором $m \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $g_m \neq 0$. Тогда, выбирая в равенствах (6), (10), (18) постоянную $\gamma = \lambda_m$, мы определим нетривиальное решение однородной задачи (1), (4), (5) следующего вида:

$$\big(u_m(t), p_m\big) = \Big(\big(Y_k(t;\lambda_m) - 1\big)g_m,\ \lambda_m g_m\Big). \tag{19}$$

Сформулируем теперь критерий единственности решения обратной задачи (1)–(3).

Теорема 1. *Пусть $k > 0$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача* (1)–(3) *имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j, $j \in \mathbb{N}$ функции*

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}}, \tag{20}$$

называемой характеристической функцией обратной задачи (1)–(3)*, не являлся бы собственным значением оператора A.*

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, исследование единственности решения задачи (1)–(3) сводится к вопросу об отсутствии у уравнения (1) нетривиальных решений $(u(t), p)$, удовлетворяющих нулевым условиям (4), (5).

Необходимость. Предположим противное: пусть некоторый нуль λ_m, $m \in \mathbb{N}$ из счетного множества нулей функции $\varphi_k(\lambda)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $g_m \neq 0$. Тогда определяемая равенством (19) пара $(u_m(t), p_m)$ служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1), (4), (5), что противоречит единственности решения этой задачи. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что ни одно число из счетного множества нулей, определяемой равенством (20) функции $\varphi_k(\lambda)$, не является собственным значением оператора A, и пусть $(u(t), p)$ — некоторое решение однородной обратной задачи (1), (4), (5). Покажем, что в этом случае $u(t) \equiv 0$, $p = 0$.

Введем в рассмотрение функцию $U(\lambda)$ переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ со значениями в банаховом пространстве E

$$U(\lambda) = \int_0^1 t^k Y_k(t;\lambda) u(t)\, dt,$$

где скалярная функция $Y_k(t;\lambda)$ определена равенством (15), является решением уравнения (13) при $\gamma = 0$ и удовлетворяет условиям $Y_k(0;\lambda) = I$, $Y_k'(0;\lambda) = 0$.

Учитывая замкнутость оператора A и равенство (1), вычислим $AU_\delta(\lambda)$, где

$$U_\delta(\lambda) = \int_\delta^1 t^k Y_k(t;\lambda) u(t)\, dt, \quad \delta > 0.$$

После двукратного интегрирования по частям будем иметь

$$AU_\delta(\lambda) = \int_\delta^1 t^k Y_k(t;\lambda) Au(t)\, dt = \int_\delta^1 t^k Y_k(t;\lambda) \left(u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) - p \right) dt =$$

$$= t^k Y_k(t;\lambda) u'(t) \Big|_\delta^1 - \int_\delta^1 \left(t^k Y_k'(t;\lambda) u'(t) + t^k Y_k(t;\lambda) p \right) dt =$$

$$= t^k Y_k(t;\lambda) u'(t) \Big|_\delta^1 - t^k Y_k'(t;\lambda) u(t) \Big|_\delta^1 + \int_\delta^1 t^k \left(Y_k''(t;\lambda) + \frac{k}{t} Y_k'(t;\lambda) \right) u(t)\, dt - \int_\delta^1 t^k Y_k(t;\lambda) p\, dt.$$

Устремляя $\delta \to 0$, получим

$$AU(\lambda) = -Y_k'(1;\lambda) u(1) + \lambda U(\lambda) - \int_0^1 t^k Y_k(t;\lambda) p\, dt. \tag{21}$$

С помощью представления (15) и [10, интеграл 2.15.2.6], вычислим последний интеграл в равенстве (21):

$$\int_0^1 t^k Y_k(t;\lambda)\, dt = \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{1/2-k/2} \int_0^1 t^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}(t\sqrt{\lambda})\, dt =$$

$$= 2^{k/2-1/2} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}} = \frac{Y_k'(1;\lambda)}{\lambda}. \tag{22}$$

Подставляя интеграл (22) в (21) приходим к равенству

$$(\lambda I - A) U(\lambda) = Y_k'(1;\lambda) u(1) + \frac{Y_k'(1;\lambda)}{\lambda} p. \tag{23}$$

Таким образом, для всех чисел λ_m, $m \in \mathbb{N}$ из счетного множества нулей определяемой равенством (20) функции $\varphi_k(\lambda)$, из равенства (23) вытекает соотношение

$$AU(\lambda_m) = \lambda_m U(\lambda_m).$$

Согласно предположению ни одно из таких чисел λ_m не является собственным значением оператора A. Но тогда все значения $U(\lambda_m)$ должны равняться нулю:

$$U(\lambda_m) = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Используя начальное условие (4), равенства (22), (16) и [10, интеграл 1.11.1.5], после очевидных преобразований равенство (24) запишем в виде

$$\begin{aligned} U(\lambda_m) &= \int\limits_0^1 t^k Y_k(t;\lambda_m) u(t)\,dt = \int\limits_0^1 t^k Y_k(t;\lambda_m) \int\limits_0^t u'(\tau)\,d\tau\,dt = \\ &= \int\limits_0^1 u'(\tau) \int\limits_\tau^1 t^k Y_k(t;\lambda_m)\,dt\,d\tau = -\int\limits_0^1 u'(\tau) \int\limits_0^\tau t^k Y_k(t;\lambda_m)\,dt\,d\tau = \\ &= -\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\lambda_m}}{2}\right)^{1/2-k/2} \int\limits_0^1 u'(\tau) \int\limits_0^\tau t^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}\left(t\sqrt{\lambda_m}\right)\,dt\,d\tau = \\ &= -2^{k/2-1/2}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\sqrt{\lambda_m}\right)^{-k/2-1/2} \int\limits_0^1 \tau^{k/2+1/2} I_{k/2-1/2}\left(\tau\sqrt{\lambda_m}\right) u'(\tau)\,d\tau = \\ &= -\frac{1}{\lambda_m}\int\limits_0^1 \tau^k Y_k'(\tau;\lambda_m)\,u'(\tau)\,d\tau = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Пусть μ_m, $m \in \mathbb{N}$ — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения (17) и $(i\mu_m)^2 = \lambda_m$. Тогда равенства (25) принимают вид

$$U_m = \int\limits_0^1 \sqrt{t}\; J_{k/2+1/2}(t\mu_m)\; t^{k/2} u'(t)\,dt = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

где $J_\nu(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода.

Применив к определяемым равенством (26) векторным коэффициентам U_m линейный непрерывный функционал $f \in E^*$, получим непрерывную скалярную функцию $f(t^{k/2}u'(t))$, удовлетворяющую условиям

$$f(U_m) = \int\limits_0^1 \sqrt{t}\; J_{k/2+1/2}(t\mu_m) f(t^{k/2}u'(t))\,dt = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

С точностью до множителя скалярные коэффициенты $f(U_m)$ являются коэффициентами ряда Фурье—Бесселя разложения по функциям $J_{k/2+1/2}(t\mu_m)$ (см. [3, гл. XVIII], [8]) для функции $f(t^{k/2}u'(t))$, где $u(t)$ — решение задачи (1), (4), (5). Следовательно,

$$f(t^{k/2}u'(t)) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поскольку выбор функционала $f \in E^*$ был произвольным, то $u'(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, откуда, учитывая условие (4), получим

$$u(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Подставляя $u(t) \equiv 0$ в уравнение (1), получим $p = 0$. Тем самым установлено, что решение $(u(t), p)$ однородной обратной задачи (1), (4), (5), а, следовательно, и задачи (1)–(3), может быть только нулевым. $\square$

Следствие 1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор, не имеющий отрицательных собственных значений. Тогда обратная задача* (1)–(3) *при любом выборе элементов u_0, w_0, $u_1 \in D(A)$ имеет не более одного решения.*

Например, для заданного на множестве функций

$$D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \subset E = L_2(0,1)$$

дифференциального оператора $A = B_{q,x}$, где

$$B_{q,x} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{q}{x}\frac{d}{dx}, \quad q \geqslant 0,$$

единственность решения рассматриваемых обратных задач сводится к исследованию расположения нулей функции $I_{q/2-1/2}(\sqrt{z})$, которые являются собственными значениями оператора $B_{q,x}$, и нулей функции $I_{k/2+1/2}(\sqrt{\lambda})$ для задачи (1)–(3). Отметим также, что важную роль при исследовании единственности играют и промежутки изменения переменных $0 < t < T$ и $0 < x < l$, поскольку при этом нули каждой из функций Бесселя меняют свое положение.

В зависимости от параметров k и q указанные функции Бесселя могут иметь, а могут и не иметь общих нулей, расположенных на $(-\infty, 0)$, поэтому единственность решения обратных задач может иметь место, а может и нарушаться. Подробнее о расположении нулей см., например, в [9].

В случаях $A = -B_{q,x}$ или $A = iB_{q,x}$, где i — мнимая единица, собственные значения оператора A лежат либо на $(0, +\infty)$, либо на мнимой оси и не попадают на $(-\infty, 0)$, поэтому соответствующие обратные задачи имеют единственное решение.

Сделаем замечание об обратной задаче с финальным условием

$$u(1) = u_1, \tag{27}$$

задаваемом вместо условия (3). Как установлено в [4], характеристическая функция $\chi_k(\lambda)$ обратной задачи (1), (2), (27) имеет вид

$$\chi_k(\lambda) = \frac{Y_k(t;\lambda) - 1}{\lambda}.$$

и для того, чтобы решение обратной задачи (1), (2), (27) было единственным, необходимо, чтобы ни один нуль характеристической функции $\chi_k(\lambda)$ не являлся собственным значением оператора A. Нули характеристической функции $\chi_k(\lambda)$ не являются нулями функции Бесселя, явно не выписываются, поэтому для указанной задачи метод доказательства достаточности, использующий разложение в ряды Фурье—Бесселя, не проходит.

В [4] также указано, что для однозначной разрешимости задачи (1), (2), (27) с ограниченным оператором A, необходимо и достаточно, чтобы на спектре $\sigma(A)$ оператора A выполнялось условие

$$\chi_k(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(A).$$

Кроме того, в этой же работе приводится достаточное условие однозначной разрешимости и с неограниченным оператором A.

Укажем также, что рассматриваемая в [5] задача Дирихле для уравнения Бесселя—Струве

$$u''(t) + \frac{k}{t}\big(u'(t) - u'(0)\big) = Au(t), \tag{28}$$

$$u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1 \tag{29}$$

была переформулирована и решена как обратная задача нахождения функции $u(t)$ и входящего в уравнение (28) элемента $p = u'(0) \in D(A)$, одновременно являющимся вторым начальным условием, из уравнения

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t) + \frac{k}{t}p \tag{30}$$

по начальному и финальному условиям из равенства (29). Уравнение (30) отличается от уравнения (1) тем, что оно содержит зависящую от времени правую часть kp/t специального вида.

В качестве приложения установленного в теореме 1 критерия рассмотрим далее обратные задачи для некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений.

3. Критерии единственности решения обратных задач для абстрактных вырождающихся дифференциальных уравнений. В этом разделе по-прежнему E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E, область определения $D(A) \subset E$ которого не обязательно плотна в E. Рассмотрим задачу определения функции

$$u(t) \in C([0,T],E) \cap C^2((0,T],E) \cap C((0,T),D(A))$$

и элемента $p \in E$, удовлетворяющих при $b \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ вырождающемуся при $t = 0$ дифференциальному уравнению

$$t^\gamma u''(t) + bt^{\gamma-1}u'(t) = Au(t) + t^{1-\gamma/2}p, \quad 0 < t < T, \tag{31}$$

начальным условиям

$$u(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} t^{\gamma/2}u'(t) = 0, \tag{32}$$

а также финальному переопределению в точке $t = T$, имеющему вид

$$u'(T) = 0. \tag{33}$$

Требуется восстановить неизвестный, не зависящий от времени t входящий в правую часть уравнения (31) элемент $p \in E$ при помощи дополнительного условия (33) в финальный момент времени. Будем исследовать вопрос единственности решения обратной задачи, поэтому рассматривается однородная задача. При этом следует различать два случая: случай слабого вырождения $0 < \gamma < 2$ и случай сильного вырождения $\gamma > 2$. При $\gamma = 2$ получается уравнение Эйлера, которое, как известно, сводится к невырождающемуся уравнению.

В случае слабого вырождения $0 < \gamma < 2$ замена независимой переменной и неизвестной функции

$$t = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu = \frac{2}{2-\gamma}, \quad u(t) = u\left(\left(\frac{\tau}{\nu}\right)^\nu\right) = w(\tau),$$

с учетом равенств

$$u'(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{1-\nu} w'(\tau), \quad u''(t) = \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{2(1-\nu)} \left(w''(\tau) + \frac{1-\nu}{\tau}w'(\tau)\right),$$

приводит слабо вырождающееся уравнение (31) к уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$w''(\tau) + \frac{k}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau) + p, \quad 0 < \tau < l, \tag{34}$$

где $k = b\nu - \nu + 1$, $\nu = 2/(2-\gamma)$, $l = \nu T^{1/\nu}$. При этом условия (32), (33) превращаются соответственно в условия

$$w(0) = 0, \quad \lim_{t\to 0+} \tau^k w'(\tau) = 0, \tag{35}$$

$$w'(l) = 0. \tag{36}$$

Для обратной задачи (34)–(36) в силу теоремы 1 справедлив критерий единственности. Возвращаясь к задаче (31)–(33), получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $b > \gamma/2$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача* (31)–(33) *имеет решение $(u(t), p)$. Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j, $j \in \mathbb{N}$, функции*

$$\phi_k(\lambda) = \frac{I_{k/2+1/2}(l\sqrt{\lambda})}{\lambda^{k/4+1/4}},$$

называемой характеристической функции обратной задачи (31)–(33)*, не являлся бы собственным значением оператора A.*

В случае сильного вырождения $\gamma > 2$ при исследовании обратной задачи условие (32) следует заменить на следующее условие:

$$\lim_{t\to 0+} t^{4-\gamma/2}u'(t) = 0. \tag{37}$$

Замена независимой переменной и неизвестной функции

$$t = \left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{2}{2-\gamma}, \quad u(t) = u\left(\left(-\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}\right) = w(\tau),$$

приводит сильно вырождающееся уравнение (31) к уравнению Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$w''(\tau) + \frac{q}{\tau} w'(\tau) = Aw(\tau), \quad 0 < \tau < l,$$

где $q = \nu - b\nu + 1$, $l = -\nu T^{-1/\nu}$, и, так же как и в случае слабого вырождения, из теоремы 1 вытекает следующий критерий единственности.

Теорема 3. *Пусть $b > 2 - \gamma/2$ и A — линейный замкнутый оператор в E. Предположим, что обратная задача* (31), (33), (37) *имеет решение* $(u(t), p)$. *Для того, чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_j, $j \in \mathbb{N}$, функции*

$$\psi_k(\lambda) = \frac{I_{q/2+1/2}(l\sqrt{\lambda})}{\lambda^{q/4+1/4}},$$

называемой характеристической функции обратной задачи (31), (33), (37), *не являлся бы собственным значением оператора A.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алмохамед М.* Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2019. — № 3. — С. 50–58.
2. *Алмохамед М., Тихонов И. В.* Об обратной задаче для эволюционного уравнения второго порядка с финальным переопределением третьего рода// в кн.: Современные методы теории функций и смежные проблемы. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2021. — С. 35–37.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
4. *Глушак А. В., Попова В. А.* Обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения Эйлера—-Пуассона-—Дарбу// Совр. мат. Фундам. направл. — 2006. — *15*. — С. 126–141.
5. *Глушак А. В.* О разрешимости граничных задач для абстрактного уравнения Бесселя—Струве// Диффер. уравн. — 2019. — *55*, № 8. — С. 1103–1110.
6. *Глушак А. В.* Критерий единственности решения граничных задач для абстрактного уравнения Эйлера—-Пуассона—-Дарбу на конечном интервале// Мат. заметки. — 2021. — *109*, № 6. — С. 621–631.
7. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994.
8. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — *1*, № 2 (42). — С. 102–143.
9. *Керимов М. К.* Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2014. — *54*, № 9. — С. 1387—1441.
10. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
11. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1132–1133.
12. *Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера// Диффер. уравн. — 2002. — *38*, № 5. — С. 637–644.
13. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York–Basel: Marcel Dekker, 2000.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Глушак Александр Васильевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: aleglu@mail.ru, Glushak@bsu.edu.ru