ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 54–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-54-60

УДК 517.9

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНОМ ПОЛЕ ЯДРА

© 2023 г. **Ю. А. ГЛАДЫШЕВ, Е. А. ЛОШКАРЕВА**

Аннотация. In this paper, we demonstrate an application of the method of generalized powers for constructing solutions to the Dirac equation of quantum electrodynamics, which governs the motion of an electron in a centrally symmetric electrostatic field.

Ключевые слова: обобщенная степень, уравнение Дирака, квантовая электродинамика.

ON THE APPLICATION OF GENERALIZED BERS POWERS FOR CONSTRUCTING SOLUTIONS TO THE DIRAC EQUATION FOR THE MOTION OF A PARTICLE IN A CENTRALLY SYMMETRIC FIELD OF A NUCLEUS

© 2023 **Yu. A. GLADYSHEV, E. A. LOSHKAREVA**

1. Введение. Первоначально метод обобщенных степеней [3] развивался в матричной форме применительно к системам линейных дифференциальных уравнений, что отражено в монографии [4]. Метод обобщённых степеней Берса, прежде всего, может быть использован для решения краевых задач теории переноса в многослойной среде [10,11], в неоднородных твердых пластинах и оболочках [12], на системе контактирующих стержней [13], при стационарной передаче тепла через стенку [16], а также для построения поля температур в цилиндре при наличии распределенных тепловых источников [14]. Работа [5] посвящена исследованию обобщенных степеней Берса на комплексной плоскости. В [1,7–9] дано приложение этого метода к системам Мойсила—Теодореску, Максвелла и Дирака. В [6,15] развит так называемый параметрический метод обобщенных степеней, который применим к отдельным уравнениям второго и более высоких порядков.

Основная цель работы — показать, что метод обобщенных степеней может быть с успехом использован для решения системы уравнений, полученных при конкретизации системы уравнений Дирака для движения частицы в центрально симметричном поле. Эта система имеет вид (см. [4])

$$\frac{df}{dr} + \frac{(1-\nu)}{r} f + b_1 g = 0, \quad \frac{dg}{dr} + b_2 g + \frac{(1+\nu)}{r} f = 0, \tag{1}$$

где $b_1 = \varepsilon - m - V(r)$, $b_2 = \varepsilon + m - V(r)$. Здесь ε — энергия частицы, m — масса частицы, $V(r)$ — потенциальная функция, ν — коэффициент, учитывающий орбитальный и спиновый моменты, r — радиальная координата сферической системы.

Для применения метода обобщенных степеней изменим вид этой системы (1), введя вспомогательные функции

$$\varphi_1 = r^{1-\nu} f, \quad \varphi_2 = r^{1+\nu} g. \tag{2}$$

Запишем систему для функций φ_1, φ_2, заменив r на x

$$a_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + \varphi_2 = 0, \quad a_2 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_1 = 0, \tag{3}$$

где

$$a_1 = \frac{x^{2\nu}}{b_1(x)}, \quad a_2 = \frac{x^{-2\nu}}{b_2(x)}. \tag{4}$$

Система (3) является стандартной для применения обобщенных степеней, и вся сложность сводится к возможности интегрирования функций a_1, a_2. Решение может быть выписано в явной форме.

Для кулоновского потенциала все интегралы можно получить в явной форме и все интегралы сводятся к степенным функциям, поскольку a_1, a_2 имеют вид

$$a_1 = a_{11} x^{s_1} + a_{12} x^{t_1}, \quad a_2 = a_{21} x^{s_2} + a_{22} x^{t_2},$$

где s и t — заданные целые числа. Однако получаемые выражения весьма громоздки. Положив $V = \mathrm{const}$ и введя обозначения $b_1 = -\beta_1$, $b_2 = -\beta_2$, получим

$$x^{2\nu} \frac{d\varphi_1}{dr} = \beta_1 \varphi_2, \quad x^{-2\nu} \frac{d\varphi_2}{dr} = -\beta_2 \varphi_1. \tag{5}$$

В системе (5) хорошо выделены два фактора: геометрический фактор, связанный с симметрией задачи и симметрией пространства, и физический фактор, связанный с внешним полем V.

Характер решения (5) существенно зависит от знака $\beta_1\beta_2$, меняясь с осциллирующего поведения при $\beta_1\beta_2 > 0$ к монотонному изменению при $\beta_1\beta_2 < 0$.

При постоянных β_1, β_2 система (5) хорошо известна и определяет функцию Бесселя. Далее система (5) будет основой всех построения обобщенных степеней.

Введем дифференциальные операторы

$$D_1 = a_1(x) \frac{d}{dx}, \quad D_2 = a_2(x) \frac{d}{dx}. \tag{6}$$

На функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ (порождающая пара) обычно наложены условия положительности (постоянство знака). Поскольку в поставленной задаче оно нарушено, то это вынуждает ввести деление всей области изменения x на области постоянства знака $a_1(x)$, $a_2(x)$, что использовано ниже. Остальные требования возможности построения обобщенных степеней, а именно наличие непустых ядер у операторов в (6), а также правых обратных выполнены.

В качестве правых обратных I_1, I_2 для D_1, D_2 всюду ниже взят самый простой случай определенного интеграла с указанным нижним пределом:

$$I_1 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\eta}{a_1(\eta)} \ldots, \quad I_1 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\eta}{a_2(\eta)} \ldots. \tag{7}$$

Ниже обобщенные степени построены для случая степенных функций

$$a_1 = x^p, \quad a_2 = x^{-p}, \quad p > 0, \quad p = 2\nu, \tag{8}$$

а также при кусочно построенных функциях порождающей пары:

$$X^{(2i)}(x, x_0)C = (2i)!\,(I_1 I_2)^i C, \quad X^{(2i+1)}(x, x_0)C = (2i+1)!\,I_1 (I_2 I_1)^i C. \tag{9}$$

Запишем присоединенные степени, полученные заменой $I_1 \to I_2$, $I_2 \to I_1$:

$$\tilde{X}^{(2i)}(x, x_0)C = (2i)!\,(I_2 I_1)^i C, \quad \tilde{X}^{(2i+1)}(x, x_0)C = (2i+1)!\,I_2 (I_1 I_2)^i C. \tag{10}$$

Можно показать, что степени связаны рекуррентными соотношениями

$$
\begin{aligned}
X^{(2i)}(x,x_0) &= x^{p+1}\tilde{X}^{(2i-1)}(x,x_0) - x_0^{p+1}X^{(2i-1)}(x,x_0),\\
\tilde{X}^{(2i)}(x,x_0) &= x^{p+1}X^{(2i-1)}(x,x_0) - x_0^{-p+1}\tilde{X}^{(2i-1)}(x,x_0),\\
X^{(2i+1)}(x,x_0) &= \frac{2i+1}{2i+1-p}\left(x^{-p+1}X^{(2i)}(x,x_0) - x_0^{-p+1}X^{(2i)}(x,x_0)\right),\\
\tilde{X}^{(2i+1)}(x,x_0) &= \frac{2i+1}{2i+1-p}\left(x^{p+1}X^{(2i)}(x,x_0) - x_0^{p+1}X^{(2i)}(x,x_0)\right).
\end{aligned}
$$

Далее при решении уравнения Дирака важен случай $p=2$. Для этого значения порождающей пары степень можно найти в явном виде. Имеем для степени с нуль-точкой x_0

$$
\begin{aligned}
X^{(2i+1)}(x,x_0) &= \frac{(x-x_0)^{2i+1}}{x},\\
\tilde{X}^{(2i)}(x,x_0) &= \frac{1}{x_0}\left[x(x-x_0)^{2i} - \frac{1}{2i+1}(x-x_0)^{2i+1}\right],\\
X^{(2i)}(x,x_0) &= \frac{1}{x_0}\left[x_0(x-x_0)^{2i} - \frac{1}{2i+1}(x-x_0)^{2i+1}\right],\\
\tilde{X}^{(2i+1)}(x,x_0) &= xx_0(x-x_0)^{2i} + \frac{1}{2i+3}(x-x_0)^{2i+3}.
\end{aligned}
$$

Далее необходимы еще две последовательности обобщенных степеней с нуль-точкой в начале координат, т.е. $x_0=0$:

$$
X^{(2i)}(x,\infty) = \frac{x^{2i}}{2i+1}, \quad X^{(2i+1)}(x,0) = x^{2i+1}, \quad \tilde{X}^{(2i-1)}(x,0) = \frac{x^{2i+1}}{2i+1}.
$$

2. Основные использованные функции. Далее рассмотрим функции, которые представлены в виде рядов от обобщенных степеней. На основе предложенного Л. Берсом принципа соответствия (см. [3]) элементарным функциям типа $\cos(x-x_0)$, $\sin(x-x_0)$ ставятся в соответствие функции, представленные рядами обобщенных степеней с теми же действительными коэффициентами:

$$
\begin{aligned}
\cos\lambda X(x,x_0)C &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i)!}\lambda^{2i}X^{(2i)}(x,x_0)C,\\
\sin\lambda X(x,x_0)C &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\lambda^{2i+1}X^{(2i+1)}(x,x_0)C,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где C — константа. Аналогично, гиперболическим функциям действительного переменного поставим в соответствие функции

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}\lambda X(x,x_0)C &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2i}}{(2i)!}X^{(2i)}(x,x_0)C,\\
\operatorname{sh}\lambda X(x,x_0)C &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2i+1}}{(2i+1)!}X^{(2i+1)}(x,x_0)C,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где λ — действительный параметр. Напомним, что $X^{(i)}(x,x_0)$ — символическое обозначение заранее найденных функций, которые по построению обладают следующим свойством:

$$
D_1X^{(n)} = n\tilde{X}^{(n-1)}, \quad D_2\tilde{X}^{(n)} = nX^{(n-1)}. \tag{13}
$$

На основе соотношений (11)–(13) можно утверждать, что решение системы (1) можно записать в виде

$$
\varphi_1 = C_1\cos\beta X(x,x_0), \quad \varphi_2 = -C_1\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\sin\beta\tilde{X}(x,x_0) \tag{14}
$$

при $\beta = \sqrt{\beta_1\beta_2}$. Второе решение имеет вид

$$\varphi_1 = C_2\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\sin\beta X(x,x_0), \quad \varphi_2 = C_2\cos\beta\tilde{X}(x,x_0). \tag{15}$$

Если $\beta_1\beta_2 < 0$, то решение ищется в виде аналогов гиперболических функций:

$$\varphi_1 = C_1\operatorname{ch}\beta X(x,x_0), \quad \varphi_2 = C_1\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\operatorname{sh}\beta\tilde{X}(x,x_0). \tag{16}$$

3. Аппроксимация решения основной системы методом обобщенных степеней. Функция потенциала V может иметь достаточно сложное строение, и вычисление обобщенных степеней может быть трудно выполнимо. Поэтому укажем приближенное решение, заменяя функцию V подходящей кусочно постоянной функцией. Как было отмечено выше, рассматриваем функции a_1, a_2 как произведение двух функций:

$$a_1 = \frac{x^{2\nu}}{\beta_1}, \quad a_2 = \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2}.$$

Первоначально приведем решение задачи типа Коши при условии

$$\varphi_1\Big|_{x_1} = C_1, \quad \varphi_2\Big|_{x_1} = C_2. \tag{17}$$

Это решение можно записать в виде

$$\varphi_1 = C_1\cos\beta X(x,x_1) + C_2\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\sin\beta X(x,x_1), \tag{18}$$

$$\varphi_2 = -C_1\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\sin\beta\tilde{X}(x,x_1) + C_2\cos\beta\tilde{X}(x,x_1) \tag{19}$$

(см. раздел 2). Функции $\sin\beta X$, $\cos\beta X$ были определены в разделе 2 для значения x_0; для (18) (19) нужно заменить x_0 в (14), (15) на x_1. Введем матричную форму записи результата:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad V(x,x_1) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$K(x,x_1) = \begin{pmatrix} \cos\beta X(x,x_1) & +\sqrt{\beta_1/\beta_2}\sin\beta X(x,x_1) \\ -\sqrt{\beta_2/\beta_1}\sin\beta\tilde{X}(x,x_1) & \cos\beta\tilde{X}(x,x_1) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$V(x,x_1) = K(x,x_1)C. \tag{22}$$

Предположим, что имеем две области (x_1,x_2) и (x_2,x_3). Все величины, относящиеся к первой (второй) области, снабдим верхним индексом «(1)» (соответственно, «(2)»). Таким образом, имеем величины

$$\beta_1^{(1)}, \quad \beta_2^{(1)}, \quad \beta^{(1)} = \sqrt{\beta_1^{(1)}\beta_2^{(1)}}, \quad \beta_1^{(2)}, \quad \beta_2^{(2)}, \quad \beta^{(2)} = \sqrt{\beta_1^{(2)}\beta_2^{(2)}}.$$

При символе степени номер области будем указывать нижним индексом; например, $X_1^{(n)}(x,x_1)$ — степень для первой области, $X_2^{(n)}(x,x_2)$ — для второй.

В каждой из областей справедливы соответствующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(1)}}\dfrac{d\varphi_1^{(1)}}{dx} = \varphi_2^{(1)}, \\[2ex] \dfrac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(1)}}\dfrac{d\varphi_2^{(1)}}{dx} = -\varphi_1^{(1)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(2)}}\dfrac{d\varphi_1^{(2)}}{dx} = \varphi_2^{(2)}, \\[2ex] \dfrac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(2)}}\dfrac{d\varphi_2^{(2)}}{dx} = -\varphi_1^{(2)}. \end{cases} \tag{23}$$

Условия согласования включают непрерывность функций φ_1, φ_2 в граничной точке x_2:

$$\varphi_1^{(1)}\Big|_{x_2} = \varphi_1^{(2)}\Big|_{x_2}, \quad \varphi_2^{(1)}\Big|_{x_2} = \varphi_2^{(2)}\Big|_{x_2}, \tag{24}$$

а также непрерывность производных по Берсу:

$$\frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(1)}}\frac{d\varphi_1^{(1)}}{dx}\Big|_{x_2} = \frac{x^{2\nu}}{\beta_1^{(2)}}\frac{d\varphi_1^{(2)}}{dx}\Big|_{x_2}, \quad \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(1)}}\frac{d\varphi_2^{(1)}}{dx}\Big|_{x_2} = \frac{x^{-2\nu}}{\beta_2^{(2)}}\frac{d\varphi_2^{(2)}}{dx}\Big|_{x_2}. \tag{25}$$

Обратим внимание, что эти условия отличны от общеизвестных требований непрерывности производных; они приняты из чисто математических соображений. В аппарате обобщенных степеней они очевидны. Можно показать, что требование непрерывности производных приводит к противоречию с системой уравнений.

Запишем

$$V^{(1)}(x_2, x_1) = K^{(1)}(x_2, x_1)C, \tag{26}$$

где $K^{(1)}$ — матрица Коши первой области, — вектор-столбец с компонентами C_1, C_2. Будем рассматривать значения $\varphi_1^{(2)}(x_2)$, $\varphi_2^{(2)}(x_2)$ в точке x_2 как граничные условия задачи Коши для вектор-столбца второй области. Тогда имеем

$$V^{(2)}(x, x_2) = K^{(2)}(x, x_2)V^{(1)}(x_2, x_1), \tag{27}$$

где $V^{(1)}(x_2, x_1)$, $V^{(2)}(x, x_2)$ — вектор-столбцы значений φ_1, φ_2.

Матрица для второй области имеет вид

$$K^{(2)}(x, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\beta^{(2)}X(x, x_2) & +\sqrt{\beta_2^{(2)}/\beta_2}\sin\beta X(x, x_2) \\ -\sqrt{\beta_1^{(2)}/\beta_2^{(2)}}\sin\beta^{(2)}\tilde{X}(x, x_2) & \cos\beta^{(2)}X(x, x_2) \end{pmatrix}.$$

Все элементы, входящие в первую матрицу, снабжены индексом «(1)». Эта операция соединения областей может быть повторена любое число раз.

В физике важен случай $\nu = \pm 1$, поэтому укажем выражение основных функций через элементарные:

$$\cos\beta X(x, x_1) = \frac{1}{x}\left[x_1\cos\beta(x - x_1) + \frac{1}{\beta}\sin\beta(x - x_1)\right],$$
$$\sin\beta X(x, x_1) = \frac{1}{xx_1}\sin\beta(x - x_1),$$
$$\cos\beta\tilde{X}(x, x_1) = \frac{1}{x_1}\left[x\cos\beta(x - x_1) - \frac{1}{\beta}\sin\beta(x - x_1)\right],$$
$$\sin\beta\tilde{X}(x, x_1) = \left[\left(xx_1 + \frac{1}{\beta^2}\right)\sin\beta(x - x_1) - \frac{1}{\beta}\cos\beta(x - x_1)\right].$$

4. Частица в потенциальной яме конечной глубины. Основная система уравнений для частиц, движущихся в потенциальном поле V имеет вид (1). Задача о частице в сферической потенциальной яме подробно рассмотрена в [2]. Пусть в сферической области задан потенциал

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \tag{28}$$

где V_0 — константа. Имеем две области: внутреннюю $0 < r < r_0$ и внешнюю $r_0 < r < \infty$; величины, относящиеся к этим областям, будем обозначать $\varphi_1^{(1)}$, $\varphi_2^{(1)}$ для первой области и $\varphi_1^{(2)}$, $\varphi_2^{(2)}$ для второй. Имеем следующие две системы для первой и второй областей соответственно:

$$\begin{cases} r^{2\nu}\dfrac{d\varphi_1^{(1)}}{dr} = \beta_1^{(1)}\varphi_2^{(1)}, \\ r^{-2\nu}\dfrac{d\varphi_2^{(1)}}{dr} = -\beta_2^{(1)}\varphi_1^{(1)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} r^{2\nu}\dfrac{d\varphi_1^{(2)}}{dr} = \beta_1^{(2)}\varphi_2^{(2)}, \\ r^{-2\nu}\dfrac{d\varphi_2^{(2)}}{dr} = \left|\beta_2^{(2)}\right|\varphi_1^{(2)}. \end{cases} \tag{29}$$

В первой области знаки $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ одинаковы, а знаки $\beta_1^{(2)}$ и $\beta_2^{(2)}$ различны.

Если частица с допустимой энергией ε находится в яме, решение имеет осцилляционный характер. Вне ямы искомые функции f, g монотонны. Постановка граничных условий и условий согласования была рассмотрена в разделе 3; как известно, эти условия сводятся к равенству функций $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ и $f^{(2)}$, $g^{(2)}$ слева и справа в граничной точке ямы r_0.

Для первой области возьмем решение вида

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \frac{1}{r} \sin \beta^{(1)} r, \quad \varphi_2^{(2)} = -\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}} \left[\beta^{(2)} r e^{-\beta^{(2)} r} + e^{-\beta^{(2)} r} \right] C_2. \tag{30}$$

Запишем условие согласования:

$$\varphi_1^{(1)} \Big|_{r=r_0} = \varphi_1^{(2)} \Big|_{r=r_0}, \quad \varphi_2^{(1)} \Big|_{r=r_0} = \varphi_2^{(2)} \Big|_{r=r_0}. \tag{31}$$

В области 1 (внутри ямы)

$$\varphi_1^{(1)} = C_1 \frac{1}{r} \sin \beta^{(1)} r, \quad \varphi_2^{(2)} = C_2 \sqrt{\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}}} \, e^{-\beta^{(2)} r} \left(\beta^{(2)} r + 1 \right). \tag{32}$$

Тогда условия согласования примут вид

$$C_1 \frac{1}{r_0} \sin \beta^{(1)} r_0 = C_2 \frac{1}{r_0} \, e^{-\beta^{(2)} r_0},$$

$$C_1 \sqrt{\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_1^{(1)}}} \left(\beta^{(1)} r_0 \cos \beta^{(1)} r_0 - \sin \beta^{(1)} r_0 \right) = -C_2 \sqrt{\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}}} \left(\beta^{(2)} r_0 - 1 \right) e^{-\beta^{(2)} r_0}.$$

Разделив второе соотношение на первое почленно, придем к выражению

$$\beta^{(1)} r_0 \operatorname{ctg} \beta^{(1)} r_0 - 1 + \sqrt{\frac{\beta_1^{(1)}}{\beta_2^{(1)}} \frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1^{(2)}}} \left(\beta^{(2)} r_0 + 1 \right) = 0.$$

Это соотношение будет выполнено, если можно найти соответствующее ε. Это выражение для определения возможных значений в целом совпадает с решением, приведенным в [2]. Отличие связано с тем, что в [2] принято условие нулевой производной на стенке ямы, а в нашем случае — исчезновения f, g в бесконечности. На наш взгляд, это более соответствует физической сущности задачи и совпадает с обычно принимаемым в квантовой постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасенкова Ю. В., Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Применение метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила—Теодореску// Таврич. вестн. информ. мат. — 2021. — № 1 (50). — С. 48–64.
2. *Ахиезер В. Б.* Квантовая электродинамика. — М.: ИФМЛ, 1959.
3. *Берс Л.* Вопросы околозвуковой и сверхзвуковой газодинамики. — М.: Мир, 1976.
4. *Гладышев Ю. А.* Формализм Бельтрами—Берса и его приложения в математической физике. — Калуга, 1997.
5. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса// Вестн. Калуж. ун-та. — 2020. — № 2 (47). — С. 77–80.
6. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об использовании метода параметрических обобщенных степеней для построения решений одного класса дифференциальных уравнений// Мат. Междунар. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна–2022». — Воронеж, 2022. — С. 67–71.
7. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одном методе построения класса решений обобщенной системы уравнений электромагнитного поля// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2021. — С. 153–162.
8. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О построении обобщенных степеней для уравнения квантовой электродинамики Дирака// Мат. Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач». — Воронеж, 2021. — С. 70–72.
9. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* О приложении метода обобщенных степеней Берса для решения уравнения Дирака// Мат. Междунар. конф. «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания». — Калуга, 2021. — С. 300–301.

10. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье// Вестн. Калуж. ун-та. — 2018. — № 3. — С. 53–57.
11. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одном методе решения краевых задач теории теплопроводности в многослойной среде// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2017. — С. 44–47.
12. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А. О некоторых новых методах решения краевых задач теории переноса в неоднородных твердых пластинах и оболочках* Вестн. Калуж. ун-та. — 2017. — № 2. — С. 23–26.
13. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Методы построения решений основных задач теории переноса на системе контактирующих стержней// Вестн. Калуж. ун-та. — 2014. — № 1. — С. 10–13.
14. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А.* Об одном методе построения поля температур в цилиндре при наличии распределенных тепловых источников// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2019. — С. 275–279.
15. *Гладышев Ю. А., Лошкарева Е. А., Стамов Р. А.* Об одном варианте метода обобщенных степеней Берса// Сб. тр. Междунар. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, 13-15 декабря 2021 г.). — Воронеж, 2022. — С. 45–52.
16. *Канарейкин А. И.* Применение математического аппарата Берса к решению задачи теплопроводности// Науч. тр. Калуж. гос. ун-та им. К. Э. Циолковского. Сер. Естеств. техн. науки. — 2018. — С. 175–178.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Гладышев Юрий Александрович
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: gladyshev.yua@yandex.ru

Лошкарева Елена Анатольевна
Калужский государственный университет им. К. Э. Циолковского
E-mail: losh-elena@yandex.ru