ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 226 (2023). С. 16–22
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-16-22

УДК 519.624.3

НОРМАЛИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2023 г. **И. Н. БЕЛЯЕВА, И. К. КИРИЧЕНКО, Н. Н. ЧЕКАНОВА**

Аннотация. Описана нормализация гамильтоновых систем, т.е. приведение классической функции Гамильтона при помощи канонических преобразований к более простому виду, называемому нормальной формой в подходе Биркгофа—Густавсона. Получена классическая нормальная форма по правилам Борна—Йордана и Вейля—Маккоя, построены ее квантовые аналоги, для которых решена задача на собственные значения и найдены приближенные формулы для энергетического спектра. Для частных значений параметров квантовых нормальных форм по этим формулам проведены численные расчеты нижних уровней энергии.

Ключевые слова: функция Гамильтона, канонические преобразования, нормальная форма, правило квантования Вейля—Маккоя, правило квантования Борна—Йордана, квантовая нормальная форма, энергетический спектр, символьно-численные вычисления, компьютерное моделирование.

NORMALIZATION AND QUANTIZATION OF HAMILTONIAN SYSTEMS USING COMPUTER ALGEBRA

© 2023 **I. N. BELYAEVA, I. K. KIRICHENKO, N. N. CHEKANOVA**

Abstract. The normalization of Hamiltonian systems is described, i.e., the reduction of a classical Hamilton function using canonical transformations to a simpler form called the Birkhoff–Gustavson normal form. The classical normal form is obtained according to the Born–Jordan and Weyl–McCoy rules, its quantum analogs are constructed, for which the eigenvalue problem is solved, and approximate formulas for the energy spectrum are found. For partial values of the parameters of quantum normal forms, numerical calculations of the lower energy levels were carried out using these formulas.

Keywords and phrases: Hamilton function, canonical transformations, normal form, Weyl–McCoy quantization rule, Born–Jordan quantization rule, quantum normal form, energy spectrum, symbolic numerical calculations, computer simulation.

AMS Subject Classification: 34B27

1. Введение. Как известно (см. [1,5,11]), нормализация гамильтоновых систем позволяет провести приближенное интегрирование уравнений классической механики. Процедура нормализации состоит в выполнении канонических преобразований исходной классической функции Гамильтона и ее приведении к более простому нормальному виду. При этом нормальная форма представляется в виде различных однородных полиномов по каноническим переменным. Тогда уравнения движения с новой функцией Гамильтона в нормальной форме или непосредственно просто интегрируются в нерезонансном случае, или же существенно упрощаются по сравнению с исходной функцией Гамильтона в случае наличия в системе резонансов. Исследование нерезонансных гамильтоновых систем в представлении их в нормальной форме широко использовал

Дж. Биркгоф (см. [1]); Ф. Густавсон расширен такой подход на случай наличия в системе резонансов (см. [11]). Необходимые канонические преобразования выполнялись при помощи производящей функции, зависящей от исходных координат и новых импульсов, поэтому получение явных зависимостей исходных канонически сопряженных координат и импульсов от новых представляет крайне трудную практически невыполнимую вручную задачу. Использование для этих целей систем компьютерной алгебры позволяет решить данную задачу. В данной работе поставленная задача решается с применением компьютерной системы алгебраических вычислений Reduce и Maple.

Нормальная форма позволяет произвести квантование классической гамильтоновой системы без использования решений уравнений движения при регулярном или хаотическом режимах движения классической системы. Для получения квантовой нормальной формы были использованы известные правила соответствия классическим выражениям их квантовым аналогам из-за не коммутации канонически сопряженных координат и импульсов.

2. Нормализация гамильтоновых систем. В работе исследованы классические системы, которые описываются следующей функцией Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + V(q_1, q_2), \tag{1}$$

где

$$V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}\Big(q_1^2 + q_2^2\Big) + b\Big(q_1^2 q_2 + \frac{1}{3}q_2^3\Big) + c\, q_1^2 q_2^2 + d\Big(q_1^2 + q_2^2\Big)^2,$$

(p_1, p_2) и (q_1, q_2) — канонически сопряженные координата и импульс, а параметры b, c и d подобраны таким образом, что $d > 0$ и $c + 4d > 0$. Выполним сначала вспомогательные канонические преобразования $(q, p) \to (Q, P)$ (см. [8]):

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2i}(-Q_1 + Q_2 + P_1 - P_2), \qquad & p_1 &= \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + P_1 - P_2),\\ q_2 &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + P_1 + P_2), & p_2 &= \frac{1}{2i}(Q_1 + Q_2 - P_1 - P_2), \end{aligned} \tag{2}$$

и тогда гамильтониан (1) будет иметь следующий вид:

$$M(Q, P) = M^{(2)} + \sum_{s>2} M^{(s)}(Q, P), \quad M^{(2)} = i(Q_1 P_1 + Q_2 P_2), \tag{3}$$

где $P = (P_1, P_2)$, $Q = (Q_1, Q_2)$ — новые канонически сопряженные координата и импульс.

Выполняя канонические преобразования $(Q, P) \to (\xi, \eta)$ с производящей функцией

$$F(Q, \eta) = Q\eta + W(Q, \eta), \tag{4}$$

приводим классическую гамильтонову функцию (3) к нормальной форме Биркгофа—Густавсона $M(Q, P) \to G(\xi, \eta)$.

Гамильтонова функция $G(\xi, \eta)$ имеет нормальную форму, если выполняется условие

$$DG(\xi, \eta) = 0, \tag{5}$$

где дифференциальное выражение

$$D = \sum_{\nu=1}^{2}\left(\eta_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} - \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \eta_\nu}\right) \tag{6}$$

называется оператором нормальной формы. Производящая функция (4) удовлетворяет уравнениям

$$P = \eta + \frac{\partial W(Q, \eta)}{\partial Q}, \quad \xi = Q + \frac{\partial W(Q, \eta)}{\partial \eta} \tag{7}$$

(см. [11]), которые связывают старые переменные (Q, P) и новые (ξ, η).

В соответствии с методикой Густавсона для нахождения s порядка нормальной формы нужно решить основное дифференциальное уравнение

$$DW^{(s)}(Q, \eta) = -M^{(s)}(Q, \eta) + G^{(s)}(Q, \eta), \quad s = 2, 3, \dots, \tag{8}$$

где D есть оператор нормальной формы (6).

При помощи символьной программы REDUCE (см. [7]) получаем производящий полином $W(Q,\eta)$ и нормальную форму $G(\xi,\eta)$, которые представляются в виде суммы однородных полиномов разных степеней по переменным ξ и η.

Нормальная форма для функции Гамильтона (1) получена в виде

$$\begin{aligned} G_6 = i\Big[&\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+R_{41}\big(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\big)^2-R_{42}\big(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1\big)^2+R_{43}\big(\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2\big)^2+R_{61}\big(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\big)^2-\\ &-R_{62}\big(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1\big)^3-R_{63}\big(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1\big)\big(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\big)^2-R_{64}\big(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\big)\big(\xi_1\eta_2-xi_2\eta_1\big)^2+\\ &+R_{65}\big(\xi_1\eta_2+\xi_2\eta_1\big)\big(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1\big)^2+R_{66}\big(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2\big)\big(\xi_1\eta_1-\xi_2\eta_2\big)^2\Big]. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь постоянные коэффициенты определяются параметрами функции Гамильтона (1):

$$\begin{gathered} R_{41}=\frac{3}{2}d-\frac{5}{12}b^2,\quad R_{42}=-\frac{5}{12}b^2+\frac{3}{8}c,\quad R_{43}=-\frac{d}{2}+\frac{c}{8},\\ R_{61}=\frac{13}{36}b^2c+\frac{173}{36}b^2d-\frac{235}{432}b^4-\frac{17}{4}d^2,\quad R_{62}=-\frac{2}{9}b^2d+\frac{1}{18}b^2c,\\ R_{63}=\frac{11}{36}b^2c-\frac{11}{9}b^2d,\quad R_{64}=\frac{277}{36}b^2d+\frac{199}{72}b^2c-\frac{17}{64}c^2-\frac{235}{144}b^4-\frac{17}{8}cd,\\ R_{65}=\frac{11}{9}b^2\left(d-\frac{1}{4}c\right),\quad R_{66}=\frac{9}{4}d^2-\frac{1}{2}cd-\frac{1}{64}c^2-\frac{1}{36}b^2d+\frac{1}{144}b^2c. \end{gathered} \tag{10}$$

3. Квантование гамильтоновых систем. Для выполнения квантования необходимо получить квантовый аналог классической нормальной формы (9). В настоящей работе были использованы известные правила Борна—Йордана (см. [2, 4, 9, 10, 14]):

$$BJ\{\xi^m\eta^n=\eta^n\xi^m\}\to\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\hat\eta^{n-k}\hat\xi^m\hat\eta^k \tag{11}$$

и правило Вейля—Маккоя (см. [3, 13, 17]):

$$WMc\{\xi^m\eta^n=\eta^n\xi^m\}\to\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\hat\eta^{n-k}\hat\xi^m\hat\eta^k. \tag{12}$$

где $\hat\xi$, $\hat\eta$ являются операторами со правилом коммутации

$$\hat\xi\hat\eta-\hat\eta\hat\xi=1.$$

Используя правила (11), (12) можно получить соответствующие квантовые нормальные формы. В частности, при использовании правила Борна—Йордана (11) получается квантовая форма

$$\begin{aligned} \hat G^{BJ}=\hat A_1+\hat A_2+1+R_{41}&\left[\big(\hat A_1+\hat A_2+1\big)^2+\frac{5}{2}\right]+R_{42}\left(\hat A_1+\hat A_2+2\hat A_1\hat A_2+\frac{1}{2}\right)+\\ +R_{43}&\left[\big(\hat A_1-\hat A_2\big)^2+\frac{5}{2}\right]+R_{61}\left[\big(\hat A_1+\hat A_2+1\big)^3+\frac{1}{4}\hat A_1^2+\frac{1}{4}\hat A_2^2+\frac{27}{4}\big(\hat A_1+\hat A_2\big)+\frac{13}{2}\right]-\\ &-R_{64}\left[\big(\hat A_1+\hat A_2+1\big)\big(\hat A_1+\hat A_2+2\hat A_1\hat A_2+3\big)\right]+\\ &+R_{66}\left[\big(\hat A_1+\hat A_2+1\big)\left((\hat A_1-\hat A_2)^2+\frac{1}{4}\big(\hat A_1+\hat A_2\big)\right)-\frac{1}{2}\hat A_1\hat A_2\right], \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\hat A_1=\hat\xi_1\hat\eta_1,\quad \hat A_2=\hat\xi_2\hat\eta_2.$$

Квантовая нормальная форма G^{WMc}, полученная при использовании правила (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat G^{WMc}=&\,\hat A_1+\hat A_2+1+\\ &+R_{41}\left[(\hat A_1+\hat A_2+1)^2+\frac{1}{2}\right]+R_{42}\left(\hat A_1+\hat A_2+2\hat A_1\hat A_2+\frac{1}{2}\right)+R_{43}\left[(\hat A_1-\hat A_2)^2+\frac{1}{2}\right]+ \end{aligned}$$

$$+ R_{61}\left[(\hat{A}_1+\hat{A}_2+1)^3+2(\hat{A}_1+\hat{A}_2+2)\right] - R_{64}\left[(\hat{A}_1+\hat{A}_2+1)(\hat{A}_1+\hat{A}_2+2\hat{A}_1\hat{A}_2+1)\right]+ \\ + R_{66}\left[(\hat{A}_1+\hat{A}_2+1)\left((\hat{A}_1)^2+(\hat{A}_2)^2-2\hat{A}_1\hat{A}_2+1\right)\right]. \quad (14)$$

4. Компьютерный расчет энергетического спектра. Векторы $|N,L\rangle$, определяемые выражением

$$|N,L\rangle = \left[\left(\frac{N+L}{2}\right)\left(\frac{N-L}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \hat{\xi}_1^{\frac{N-L}{2}} \hat{\xi}_2^{\frac{N+L}{2}} |0,0\rangle, \quad \hat{\eta}_1|0,0\rangle = \hat{\eta}_2|0,0\rangle = 0 \quad (15)$$

(см. [8]), в котором $N = 0,1,\ldots$ — главное квантовое число, а L — орбитальное число, принимающее при данном N значения $\pm N$, $\pm(N-2)$, $\pm(N-4)$, которые являются собственными для построенных квантовых нормальных форм $\hat{G}^{BJ}$ и $\hat{G}^{WMc}$. Это позволяет получить формулы для энергетических спектров.

Формула для спектра, полученная при использовании правила Борна—Йордана для $\hat{G}^{BJ}$:

$$E^{BJ}_{NL} = N+1+\frac{1}{2}R_{41}(2N^2+4N+7)+\frac{1}{2}R_{42}(N^2+2N-L^2+1)+\frac{1}{2}R_{43}(5+2L^2)+ \\ +\frac{1}{8}R_{61}(8N^3+25N^2+78N+L^2+60)-\frac{1}{2}R_{64}(N^3-L^2+3N^2+8N-NL^2+3)+ \\ +\frac{1}{8}R_{66}(N^2+8NL^2+9L^2+14N+12). \quad (16)$$

Формула для спектра, полученная при использовании правила Вейля-Маккоя для $\hat{G}^{WMc}$:

$$E^{WMc}_{NL} = N+1+\frac{1}{2}R_{41}(2N^2+4N+3)+\frac{1}{2}R_{42}(N^2+2N-L^2+1)+ \\ +\frac{1}{2}R_{43}(2L^2+1)+R_{61}(N^3+3N^2+5N+3)-\frac{1}{2}R_{64}(N^3+3N^2+2N-NL^2-L^2+1)+ \\ +R_{66}(N+NL^2+L^2+1). \quad (17)$$

Численное решение уравнения Шрёдингера является крайне сложной задачей. Поэтому получение спектра энергий при помощи квантования нормальной формы, сильно упрощает решение уравнения Шрёдингера, что представлено в настоящей работе.

Рассмотрим результаты численных расчетов энергетических спектров для конкретных числовых значений параметров b, c, d в тех случаях, когда классическая система (1) является интегрируемой.

Проведем сравнение результатов, вычисленных по формулам (16)–(17) согласно правилам квантования Борна—Йордана и Вейля—Маккоя, с известными и очень надежными численными результатами для энергетических спектров, полученными в [6, 15, 16].

Для конкретных параметров $b = 0$, $c = 0$ и $d \neq 0$ в уравнении Шрёдингера разделяются переменные в полярных координатах. Поэтому энергетический спектр характеризуется орбитальным моментом l и главным квантовым числом n. В [16] разработан метод численного решения радиального уравнения Шрёдингера, на основе которого проведены расчеты энергетических уровней для значений квантовых чисел равных $n = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и $l = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при значении параметра $d = 0{,}05\cdot10^{-4}$. Квантовые числа n, l связаны с нашими числами N, L соотношениями $N = l + 2n$, $|L| = l$.

В таблице 1 приведены величины уровней энергии, полученные в [16], а также их значения, рассчитанные при том же значении параметра d по формулам (16) и (17) на основе квантования классической нормальной формы по правилам Борна—Йордана и Вейля—Маккоя соответственно.

Из таблицы 1 видно, что очень хорошее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля—Маккоя. Энергия основного состояния, полученная с использованием правила квантования Вейля—Маккоя, совпадает с результатами из [15] до девяти знаков после десятичной точки, а при квантовании по правилу Борна—Йордана — до четырех знаков после десятичной точки. Для энергии 16 уровня также видно, что значения, полученные по правилу правилу Борна—Йордана, совпадает с результатами из [15] до четырех знаков после десятичной точки, а значения, полученные по правилу квантования Вейля—Маккоя, — до девяти знаков

Таблица 1. Сравнение уровней энергии $b = 0$, $c = 0$, $d = 0{,}05 \cdot 10^{-4}$

No.	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Результаты из [15]
1.	$2E_{0,0}$	2,000039998	2,000019999	2,000019999
2.	$2E_{1,\pm1}$	4,000079996	4,000059997	4,000059998
3.	$2E_{2,\pm2}$	6,000139991	6,000119994	6,000119994
4.	$2E_{2,0}$	6,000159990	6,000139993	6,000139993
5.	$2E_{3,\pm3}$	8,000219985	8,000199989	8,000199989
6.	$2E_{3,\pm1}$	8,000259981	8,000239985	8,000239985
7.	$2E_{4,\pm4}$	10,00031997	10,00029998	10,00029998
8.	$2E_{4,\pm2}$	10,00037996	10,00035997	10,00035997
9.	$2E_{4,0}$	10,00039996	10,00037997	10,00037997
10.	$2E_{5,\pm5}$	12,00043996	12,00041996	12,00041996
11.	$2E_{5,\pm3}$	12,00051995	12,00049995	12,00049995
12.	$2E_{5,\pm1}$	12,00055994	12,00053995	12,00053995
13.	$2E_{6,\pm6}$	14,00057994	14,00055995	14,00055995
14.	$2E_{6,\pm4}$	14,00067993	14,00065993	14,00065993
15.	$2E_{6,\pm2}$	14,00073992	14,00071992	14,00071992
16.	$2E_{6,0}$	14,00075991	14,00073992	14,00073992

после десятичной точки. Таким образом, можно сделать вывод, что предсказание по правилу Вейля—Маккоя улучшается.

Рассмотрим еще один случай интегрируемости классической системы (1). Выберем значения параметров $c = -2d$, $b = 0$, $d \neq 0$. В данном случае исследуем следующее двумерное уравнение Шрёдингера:

$$\big(\hat{H}_1 + \hat{H}_2\big)\psi = 2E\psi, \quad \hat{H}_k = -\frac{d^2}{dq_k^2} + q_k^2 + 2dq_k^4, \quad k = 1, 2, \tag{18}$$

где переменные разделены. Таким образом его решение можно свести к решению двух одинаковых одномерных уравнений для ангармонического осциллятора. Энергетический спектр определяется в виде суммы $2E = 2E_1 + 2E_2$.

Квантовые числа изотропного двумерного осциллятора (N, L) связаны с квантовыми числами $(n1, n2)$ одномерных осцилляторов соотношениями $N = n1 + n2$ и $L = n1 - n2$. Стоит отметить, что при упорядочении значений уровней энергетического спектра по величине квантовых чисел (N, L) состояния растут с увеличением главного квантового числа.

Изучив достаточно обширные численные результаты работ [6, 15] для квантового одномерного ангармонического осциллятора, чтобы провести сравнения с нашими методами расчетов, мы вычислили часть энергетического спектра двумерного уравнения Шрёдингера (1). Результаты полученных расчетов приведены в таблице 2. Сравнение обнаруживает достаточно хорошее согласие с результатами работы [6]. Отметим, что численные значения энергетического спектра, полученные в [6], для первых десяти уровней совпадают с результатами более поздней работы [15] до 13 знаков после десятичной точки. В таблице 2 представлены значения нижних уровней энергий E_{NL}^{BJ} и E_{NL}^{WMc}, которые получены по формулам (16) и (17) соответственно.

Из таблицы 2 видно, что значения для основного состояния, вычисленное по формуле (17) (квантование по правилу Вейля—Маккоя), совпадает до пяти знаков после десятичной точки с результатами из [6]. Результат для основного состояния, вычисленное по формуле (16) (квантование по правилу Борна—Йордана), совпадает до двух знаков после десятичной точки с результатами из [6]. Заметим, что для 12 уровня энергии значения, полученные как по правилу Борна—Йордана, так и по правилу Вейля—Маккоя отличаются от результатов [6] уже во второй цифре

Таблица 2. Сравнение результатов при $b = 0$, $c = -2d$, $d = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$

No.	$2E_{N,L}$	E_{NL}^{BJ}	E_{NL}^{WMc}	Результаты из [6]
1.	$2E_{0,0}$	2,002991	2,001493	2,001497
2.	$2E_{1,\pm1}$	4,005976	4,004475	4,004488
3.	$2E_{2,\pm2}$	6,010451	6,008939	6,010460
4.	$2E_{2,0}$	6,011941	6,010411	6,007479
5.	$2E_{3,\pm3}$	8,016123	8,014885	8,019401
6.	$2E_{3,\pm1}$	8,019387	8,017809	8,013451
7.	$2E_{4,\pm4}$	10,02385	10,02230	10,03129
8.	$2E_{4,\pm2}$	10,02831	10,02666	10,02239
9.	$2E_{4,0}$	10,02979	10,02811	10,01942
10.	$2E_{5,\pm1}$	12,04167	12,03986	12,02836
11.	$2E_{5,\pm3}$	12,03870	12,03697	12,03428
12.	$2E_{5,\pm5}$	12,03278	12,03120	12,04613

после десятичной точки. Таким образом что лучшее приближение к точному спектру дает применение правила квантования Вейля—Маккоя, однако с увеличением величины квантовых чисел погрешность для значений E_{NL}^{BJ} уменьшается, т.е. для больших квантовых чисел расхождение между значениями E_{NL}^{WMc} и E_{NL}^{BJ} уменьшается.

Автор работы [12] оказывает предпочтение правилу Вейля—Маккоя. Однако, вероятно, преждевременно утверждать о преимуществе того или иного правила квантования.

5. Заключение. В работе исследована система с функцией Гамильтона (1). Для данной системы получена классическая нормальная форма Биркгофа—Густавсона, а также ее квантовые аналоги построены согласно правилам квантования Борна—Йордана и Вейля—Маккоя. Данные квантовые аналоги представляют приближенные дифференциальные выражения для точного оператора Шрёдингера. Решена задача на собственные значения, найдены формулы энергетических спектров. По полученным формулам с определенными значениями параметров выполнены расчеты нижних энергетических уровней, проведено сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе данными других авторов. Обнаружено, что лучшее согласие с известными результатами расчета энергетического спектра наблюдается при использовании правила квантования Вейля—Маккоя по сравнению с правилом Борна—Йордана. Однако распространение преимущества правила квантования Вейля—Маккоя, выявленного на частных численных расчетах, на другие системы является, вероятно, преждевременным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. — М.-Ижевск: РХД, 2002.
2. *Борн М., Иордан П.* О квантовой механике// Усп. физ. наук. — 1977. — *122*, № 8. — С. 586–611.
3. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. — М.: Наука, 1986.
4. *Гейзенберг В.* О квантовотеоретическом истолковании кинематических и механических соотношений// Усп. физ. наук. — 1977. — *122*, № 4. — С. 574–586.
5. *Гребеников Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах. — М.: Наука, 1986.
6. *Banerjee K.* General anharmonic oscillator// Proc. Roy. Soc. — 1978. — *364.* — P. 265–275.
7. *Basios V., Chekanov N. A., Markovski B. L., Rostovtsev V. A.,Vinitsky S. I.* REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians// Comp. Phys. Commun. — 1995. — *90.* — P. 355–368.
8. *Chekanov N. A.* Quantization of the normal form of Birkhoff–Gustavson// Nucl. Phys. — 1989. — *50*, № 8. — P. 344–346.
9. *Fedak W. A., Prentis J. J.* The 1925 Born and Jordan paper “On quantum mechanics”// Am. J. Phys. — 2009. — *77.* — P. 128–139.

10. *Gosson M. A.* Born–Jordan quantization and the uncertainty principle// J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — *46.* — P. 445–462.
11. *Gustavson F. G.* On constructing formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point// Astron. J. — 1966. — *71*, № 8. — P. 670–686.
12. *Kauffmann S. K.* Unambiguous quantization from the maximum classical correspondence that is self-consistent: the slightly stronger canonical commutation rule Dirac missed// Found. Phys. — 2011. — *41.* — P. 805–918.
13. *McCoy N. H.* On the function in quantum mechanics which corresponds to a given function in classical mechanics// Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. — 1932. — *18.* — P. 674–676.
14. *Razavy M.* Heisenberg's Quantum Mechanics. — Singapore: World Scientific, 2011.
15. *Taseli H.* On the exact solution of the Schroedinger equation with a quartic anharmonicity// Int. J. Quant. Chem. — 1996. — *57.* — P. 63–71.
16. *Taseli H., Demiralp M.* Studies on algebraic methods to solve linear eigenvalue problems: generalised anharmonic oscillators// J. Phys. A: Math. Gen. — 1988. — *21.* — P. 3903–3919.
17. *Weyl H.* Quantenmechanik und Gruppentheorie// Z. Phys. — 1927. — *46.* — P. 1–46..

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Беляева Ирина Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `ibelyaeva@bsu.edu.ru`

Кириченко Игорь Константинович
Харьковский национальный автодорожный университет
E-mail: `ikir238@rambler.ru`

Чеканова Наталья Николаевна
Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина;
Харьковский учебно-научный институт «Каразинский банковский институт»
E-mail: `natchek1976@gmail.com`