ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 208 (2022). С. 15–23
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-208-15-23

УДК 517.9

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

© 2022 г. **Г. В. ГАРКАВЕНКО, Н. Б. УСКОВА**

Аннотация. Рассматривается разностный оператор с инволюцией, действующий в комплексном гильбертовом пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. При помощи метода подобных операторов он приводится к диагональному (блочно-диагональному) виду, что позволяет получить различные спектральные характеристики исходного оператора и построить для него биинвариантные подпространства.

Ключевые слова: метод подобных операторов, разностный оператор, спектр, спектральный проектор.

ON SPECTRAL PROPERTIES OF ONE DIFFERENCE OPERATOR WITH INVOLUTION

© 2022 **G. V. GARKAVENKO, N. B. USKOVA**

Abstract. We consider a difference operator with involution acting in the complex Hilbert space $l_2(\mathbb{Z})$. Using the method of similar operators, we reduce it to the diagonal (block diagonal) form, which allows one to obtain various spectral characteristics of the original operator and to construct biinvariant subspaces for it.

Keywords and phrases: method of similar operators, difference operator, spectrum, spectral projector.

AMS Subject Classification: 47A75, 47B25, 47B36

1. Введение. В последнее время (см., например, [5–11, 19, 22, 24, 30] и ссылки в них) рассматривались дифференциальные операторы первого порядка с инволюцией. Исследование таких операторов производилось различными методами, например, в [8–10] — резольвентным методом. В [5, 6, 19, 22, 24] применялся к дифференциальным операторам с инволюцией метод подобных операторов. В настоящей работе рассматривается не дифференциальный, а разностный оператор с инволюцией. С помощью метода подобных операторов получены условия его диагонализации (блочной диагонализации), что позволяет оценивать спектральные характеристики этого оператора. Отметим, что проблема диагонализации некоторых классов операторов рассматривалась, например, в [12, 21, 26].

Отметим, что применяется та же модификация метода подобных операторов, что при исследовании дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией в [19, 22, 24] (без предварительного преобразования подобия). Эта модификация представлена в работах [2, 23], на теоремы из этих работ мы и будем опираться в дальнейшем. Другие примеры применения этой модификации можно найти в [3].

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00732).

Перейдем к постановке задачи. В работе, как обычно, через $\mathbb{Z}$ обозначена группа целых чисел, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Везде символом $\mathcal{H}$ обозначено гильбертово пространство и символом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|X\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Xx\|$, $x \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Введем в рассмотрение следующие два пространства последовательностей, вначале напомнив, что под последовательностью мы понимаем отображение из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$. Введем в рассмотрение гильбертово пространство $l_2 = l_2(\mathbb{Z})$ суммируемых с квадратом модуля комплексных последовательностей $x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Скалярное произведение в l_2 задается формулой

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n)}, \quad x, y\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$

и норма, порождаемая этим скалярным произведением, имеет вид

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2\right)^{1/2}.$$

Векторы e_k, $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющие условию $e_k(n) = \delta_{nk}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, δ_{nk} — символ Кронекера, образуют безусловный ортонормированный базис в l_2. Также в дальнейшем будем использовать банахово пространство $l_1 = l_1(\mathbb{Z})$ комплексных суммируемых последовательностей, т.е. $x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $x \in l_1$,

$$\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| < \infty.$$

Определение 1 (см. [20])**.** Оператор $A\colon D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется нормальным, если $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ и выполнены 2 условия: $D(A) = D(A^*)$, $\|Ax\| = \|A^*x\|$, для всех $x \in D(A)$. При этом если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным.

В пространстве l_2 рассмотрим линейный оператор $A\colon D(A) \subset l_2 \to l_2$, действующий по формуле $(Ax)(n) = (an + b)x(n)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $x \in D(A)$, с областью определения

$$D(A) = \left\{x \in l_2 : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nx(n)|^2 < \infty\right\}.$$

Рассматриваемый оператор A является нормальным. В случае, если $a, b \in \mathbb{R}$, то оператор A будет самосопряженным.

Спектральные характеристики оператора A известны. А именно, его простыми изолированными собственными значениями являются числа $\lambda_n = an + b$, $n \in \mathbb{Z}$, соответствующими собственными векторами — векторы стандартного базиса $\{e_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ пространства l_2, спектральные проекторы Рисса $P_n(\sigma_n, A)$, где $\sigma_n = \{an + b\}$, задаются формулой $P_n x = x(n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Также введем обозначение

$$P_{(n)} = \sum_{|i|\leqslant n} P_i, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Оператор A в дальнейшем будет играть роль невозмущенного оператора. Также важно отметить выполнение двух условий, которые понадобятся для возможности применения модификации метода подобных операторов из [2] (это условие разделенности спектра (1) и условие (6)):

$$\inf_{i\neq j} \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j) = a > 0, \quad \sup_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{i\}} (|a||i - n|)^{-2} < \infty.$$

Возмутим оператор A ограниченным оператором $B \in \mathcal{B}(l_2)$, действующим по формуле

$$(Bx)(n) = c_1(n)x(n-1) + c_2(n)x(n+1) + c_0(n)x(-n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где последовательности $c_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $c_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $c_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, суммируемы с квадратом, т.е. $c_1, c_2, c_0 \in l_2$.

Напомним, что оператор $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется инволюцией, если $\mathcal{E}^2 = I$, где I — тождественный оператор в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. В нашем случае $(\mathcal{E}x)(n) = x(-n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H} = l_2$, поэтому $\mathcal{E}^2 = I$ и B — оператор с инволюцией.

Далее рассматривается возмущенный оператор $A - B\colon D(A) \subset l_2 \to l_2$. Сразу же остановимся на одном важном вопросе. Оператор $A - B$ не есть разностный аналог дифференциального оператора первого порядка с инволюцией. Это совершенно другой оператор, не связанный с дифференциальным, но его спектральные свойства удобно изучать с помощью той же модификации метода подобных операторов из [2, 23], что и для дифференциального оператора с инволюцией. Более того, для дифференциального оператора с инволюцией вначале применяют предварительное преобразование подобия. Для оператора $A - B$ такого делать не надо. А также отметим, что оператор $A - B$ можно рассматривать как хороший иллюстративный пример применения метода, так как для него далее будут построены три различные допустимые тройки.

Отметим, что рассматриваемая в работе проблема близка к проблеме оценки собственных значений бесконечных трехдиагональных матриц со скалярными или матричными элементами (см. [7,25,27–29,31–33]). При этом в [7] исследование также проводилось с помощью метода подобных операторов, но из-за специфики рассматриваемых в ней блочных трехдиагональных матриц использовалась другая модификация метода подобных операторов, разработанная в статье [4]. В [27–29, 31–33] использовался другой подход к решению задачи оценки собственных значений, связанный с приближениями их собственными значениями усеченных (конечных) трехдиагональных матриц.

Трехдиагональные матрицы специального типа также возникают при дискретизации дифференциальных уравнений второго порядка. У них последовательности $c_1, c_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — постоянные и каждый элемент этих последовательностей равен единице, а последовательность $c_0\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ нулевая. Они не укладываются в приводимую ниже схему. Поэтому для них удобны другие модификации метода подобных операторов (см. [13–16]). Заметим, что если возмущение B рассматривать как элемент пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, то и для исследуемого оператора $A - B$ подойдет одна из модификаций метода подобных операторов из [15, 16], связанная с использованием в качестве пространства допустимых возмущений пространства $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Оператор-возмущение $B \in \mathcal{B}(l_2)$ принадлежит более узкому операторному пространству, вложенному в $\mathcal{B}(l_2)$, двустороннему идеалу операторов Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2(l_2) \subset \mathcal{B}(l_2)$. Как обычно, норма в $\mathfrak{S}_2(l_2)$ определяется формулой $\|X\|_2 = (\operatorname{tr}(XX^*))^{1/2}$. Здесь $\operatorname{tr}(XX^*)$ след оператора XX^*, принадлежащего двустороннему идеалу $\mathfrak{S}_1(l_2)$ ядерных операторов из $\mathcal{B}(l_2)$ с нормой

$$\|X\|_1 = \operatorname{tr}(XX^*) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n,$$

где s_n — последовательность s-чисел оператора X. Формула $(X, Y) = \operatorname{tr}(XY^*)$ определяет скалярное произведение в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Мы будем использовать стандартные свойства идеала $\mathfrak{S}_2(l_2)$ из, например, [17, 18].

Пусть $\{Q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — система ортопроекторов из $\mathcal{B}(l_2)$, образующая разложение единицы, т.е. обладающая свойствами $Q_n Q_m = Q_m Q_n = 0$ при $n \neq m$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n x = x, \quad x \in l_2.$$

Тогда в $\mathfrak{S}_2(l_2)$ можно ввести эквивалентную норму по формуле

$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} \|P_i X P_j\|_2^2.$$

Оператор Гильберта—Шмидта имеет матрицу Гильберта—Шмидта: для $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$, $X \sim (x_{ij})$ при выполнении условия

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} |x_{ij}|^2 < \infty$$

имеем
$$\|X\|_2^2 = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} |x_{ij}|^2.$$
Возмущение B, очевидно, принадлежит $\mathfrak{S}_2(l_2)$ и
$$\|B\|_2^2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(|c_1(n)|^2 + |c_2(n)|^2 + |c_0(n)|^2\right)\right)^{1/2}.$$
Перейдем к краткому описанию метода.

2. Об используемом методе исследования.

Определение 2 (см. [4])**.** Два линейных оператора $A_i\colon D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются подобными, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что
$$UD(A_2) = D(A_1), \quad A_1Ux = UA_2x, \quad x \in D(A_2).$$
Оператор U называется оператором преобразования оператора A_1 в оператор A_2.

Подобные операторы интересны тем, что зная спектральные свойства одного оператора, мы знаем и спектральные свойства другого. Соответствующий результат удобно привести в виде следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $A_i\colon D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, — подобные операторы и $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — оператор преобразования. Имеют место следующие утверждения.*

1. $\operatorname{Im} A_1 = U(\operatorname{Im} A_2)$.
2. $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, *где* $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, *— спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов* A_i, $i = 1, 2$.
3. *Пусть e — собственный вектор оператора A_2, отвечающий собственному значению λ, $A_2e = \lambda e$; тогда Ue — собственный вектор оператора A_1, причем $A_1Ue = \lambda Ue$.*
4. *Если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|\mathcal{H}_k$, $k = 1, 2$, — сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, то подпространства $\widetilde{\mathcal{H}}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A_1|\widetilde{\mathcal{H}}_k$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$. Кроме того, если P — проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \operatorname{Im} P$ — образ проектора P, $\mathcal{H}_2 = \operatorname{Im}(I - P)$ — образ дополнительного проектора $I - P$), то проектор $\widetilde{P} \in \operatorname{End}\mathcal{H}$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_2$, определяется формулой $\widetilde{P} = UPU^{-1}$.*
5. *Если оператор A_2 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2\colon \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (полугруппы класса C_0), то оператор A_1 является генератором сильно непрерывной полугруппы операторов*
$$T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \geqslant 0, \quad T_1\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Определение 3 (см. [2, 23])**.** Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_*$ и $J\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Gamma\colon \mathcal{M} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — трансформаторы (т.е. линейные операторы, действующие в пространстве линейных операторов). Тройку $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ назовем допустимой тройкой для оператора A, а $\mathcal{M}$ — допустимым пространством возмущений, если выполнены следующие условия:

(i) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор и $J^2 = J$;

(ii) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$ и имеют место равенства $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$ для любого $X \in \mathcal{M}$, выполняемые на векторах из $D(A)$, причем $Y = \Gamma X$ единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

(iii) $X\Gamma Y, (\Gamma X)Y \in \mathcal{M}$ для любых $X, Y \in \mathcal{M}$, и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что

$$\|\Gamma\| \leqslant \gamma, \quad \max\Big\{\|X\Gamma Y\|_*,\ \|(\Gamma X)Y\|_*\Big\} \leqslant \gamma\|X\|_*\|Y\|_*$$

для любых $X, Y \in \mathcal{M}$;

(iv) $J((\Gamma X)JY) = 0$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}$;

(v) для любых $X \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, что

$$\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| \leqslant \varepsilon.$$

Отметим, что для одного невозмущенного оператора иногда можно построить несколько разных допустимых троек. Мы построим три допустимые тройки.

Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ некоторая допустимая тройка. Оператор преобразования оператора $A - B$, $B \in \mathcal{M}$, в оператор $A - JX$, $X \in \mathcal{M}$, имеющий по сравнению с $A - B$ более простую структуру, в виде $U = I + \Gamma X$. Мы будем рассматривать два случая: $JB = 0$ и $JB \neq 0$.

Теорема 1 (см. [2,23])**.** *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $JB = 0$, и выполнено условие*

$$3\gamma\|B\|_*\|J\| < 1. \tag{1}$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, т.е. имеет место равенство

$$(A - B)(I + \Gamma X_*) = (I + \Gamma X_*)(A - JX_*), \tag{2}$$

где $X \in \mathcal{M}$ — решение уравнения

$$\Phi(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{3}$$

причем единственное. Оно может быть найдено методом простых итераций $X_{n+1} = \Phi(X_n)$, $n \geqslant 0$, где $X_0 = 0, X_1 = B, \ldots$.

Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая для оператора A тройка, $JB \neq 0$ и выполнено условие

$$4\gamma\|B\|_*\|J\| < 1.$$

Тогда имеет место равенство (2), где оператор $X_* \in \mathcal{M}$ — решение уравнения

$$\Phi_1(X) = B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B, \tag{4}$$

и оно может быть найдено методом простых итераций $X_{i+1} = \Phi_1(X_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $X_0 = 0$.

Заметим, что условия определения 3 — это условия корректного определения операторов $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и, в частности, операторов $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $\Phi_1\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ в правой части уравнений (3), (4).

Следствие 1. *Пусть $(\mathcal{M}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора A, оператор $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ удовлетворяет условию (1) и оператор $A - JX_*$, где X_* — решение нелинейного операторного уравнения (3), является генератором полугруппы операторов $\widetilde{T}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда оператор $A - B$ является генератором полугруппы операторов $T\colon \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, определенной равенствами*

$$T(t) = (I + \Gamma X_*)\widetilde{T}(t)(I + \Gamma X_*)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

3. Основные результаты. Применим к исходному оператору $A - B$ все рассуждения из работы [2], еще раз подчеркнув, что он полностью удовлетворяет условиям, накладываемым на возмущенный оператор в этой работе.

Начнем с построения семейства трансформаторов J_k, $\Gamma_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, используя для этого матричный подход, согласно [2]. Также обозначим J и Γ через J_0 и Γ_0 соответственно.

Трансформаторы $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$ и $J_k, \Gamma_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определяются для оператора $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$, имеющего матрицу $X \sim (x_{ij})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, через свои матрицы следующим образом:

$$(JX)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad (\Gamma X)_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \dfrac{x_{ij}}{a(i-j)}, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(J_k X)_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \max\{|i|, |j|\} \leqslant k, \\ x_{ij}, & i = j,\ |i| > k, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases} \qquad (\Gamma_k X)_{ij} = \begin{cases} 0, & \max\{|i|, |j|\} \leqslant k, \\ 0, & i = j,\ |i| > k, \\ \dfrac{x_{ij}}{a(i-j)}, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Отметим, что оператор $J \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$ определяется формулой

$$JX = J_0 X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i X P_i,$$

а оператор $J_k \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_2(l_2))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, — формулой

$$J_k X = \sum_{|i| > k} P_i X P_i + P_{(k)} X P_{(k)}, \quad X \in \mathfrak{S}_2(l_2), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Подчеркнем, что если оператор X из $\mathfrak{S}_2(l_2)$, то операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ при любом $k \geqslant 0$ определены корректно, их матрицы являются матрицами Гильберта—Шмидта и константа γ из определения 3 равна $1/|a|$.

Отметим, что возмущение B можно также рассматривать как оператор из $\mathcal{B}(l_2)$. Тогда в качестве пространства допустимых возмущений удобно брать также $\mathcal{B}(l_2)$ и для любого $X \in \mathcal{B}(l_2)$ операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$, $k \in \mathbb{Z}_+$, также принадлежат $\mathcal{B}(l_2)$ и их матричные элементы определяются теми же формулами (см., например, [14, 15]). Но в этом случае константа γ оценивается величиной $\gamma = \gamma_k = C|a|^{-1}$, где точное значение константы C неизвестно, а известна лишь ее оценка $C \leqslant 5$ (см. [1]).

Теорема 2 (см. [23, Lemma 3.5])**.** *Тройка* $(\mathfrak{S}_2(l_2), J_k, \Gamma_k)$ *является допустимой тройкой для невозмущенного оператора* A *при любом* $k \geqslant 0$.

Теорема 3 (см. [23, лемма 1])**.** *Тройка* $(\mathcal{B}(l_2), J_k, \Gamma_k)$ *является допустимой тройкой при любом* $k \in \mathbb{Z}_+$.

Из [3, теорема 5.3] (для $\mathcal{M} = \mathfrak{S}_2(l_2)$), а также теоремы 1 и леммы 1 (для $\mathcal{M} = \mathcal{B}(l_2)$) немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $B \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ *и выполнено одно из следующих условий*:

$$3\|B\|_2 < |a|, \tag{5}$$

$$15\|B\| < |a|. \tag{6}$$

Тогда оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - JX_*$, *имеющему диагональную матрицу, где* $X_* \in \mathcal{M}$ — *решение рассматриваемого в* $\mathcal{M}$ *нелинейного уравнения* (2). *При этом в случае условия* (5) *выполнено* $X \in \mathfrak{S}_2(l_2) \subset \mathcal{B}(l_2)$, *а в случае условия* (6) — $X \in \mathcal{B}(l_2)$.

Отметим, что оба условия (5) и (6) очень ограничительны, поэтому удобно рассмотреть другое пространство допустимых возмущений $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$, в котором возможна блочная диагонализация оператора $A - B$ при отсутствии условий на малость нормы оператора B.

Теперь, следуя работам [2, 23], рассмотрим для ненулевого $X \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ двустороннюю последовательность вещественных чисел вида

$$\alpha_n(X) = \|X\|_2^{-1/2} \max\Big\{ \Big(\sum_{|k| \geqslant n, k \in \mathbb{Z}} \|P_k X\|_2^2 \Big)^{1/4}, \Big(\sum_{|k| \geqslant n, k \in \mathbb{Z}} \|X P_k\|_2^2 \Big)^{1/4} \Big\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим $\alpha_n(B) = \alpha_n$. Введем в рассмотрение подпространство $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ операторов из $\mathfrak{S}_2(l_2)$, представимых в виде $X = X_l f(A_0)$, $X = f(A_0)X_r$, где $X_r, X_l \in \mathfrak{S}_2(l_2)$ и

$$f(A_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n P_n.$$

Норма в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ определяется формулой $\|X\|_{2,\alpha} = \max\{\|X_l\|_2, \|X_r\|_2\}$. Сразу же отметим, что так как $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$, то трансформаторы J и Γ определены, при этом $J, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2))$. Причем легко показать, что они переводят $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$ в $\mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2)$.

Из [2, теорема 5.7] следует теорема о блочной диагонализации оператора A.

Теорема 5. *Существует такое $k \geqslant 0$, что оператор $A - B$ подобен блочно-диагональному оператору*

$$\widetilde{A} = A - P_{(k)}XP_{(k)} - \sum_{|i|>k} P_i X P_i,$$

где $X \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$ — есть решение уравнения (4). Преобразование подобия оператора $A-B$ в оператор $\widetilde{A}$ осуществляет такой оператор $U = I + \Gamma_k X \in \mathcal{B}(l_2)$, что $U - I \in \mathfrak{S}_{2,\alpha}(l_2) \subset \mathfrak{S}_2(l_2)$.

Перейдем к оценке спектральных характеристик оператора $A - B$, используя, опять же, результаты из [2, 3]. Из [2, замечание 6.2], а также теоремы 5 и леммы 1 немедленно вытекает

Следствие 2. *Собственные векторы $\widetilde{e}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, оператора $A - B$ образуют в пространстве l_2 базис Рисса, базис Бари со скобками и p-базис со скобками при $p \geqslant 2$.*

Теорема 6. *Спектр $\sigma(A - B)$ оператора $A - B$ допускает представление в виде объединения взаимно непересекающихся конечных множеств $\widetilde{\sigma}_{(k)}$, $\widetilde{\sigma}_i$, $|i| > k$, при этом*

$$\widetilde{\sigma}_{(k)} = \sigma((A - P_{(k)}X_*)|\mathcal{H}_{(k)}), \quad \mathcal{H}_{(k)} = \operatorname{Im} P_{(k)},$$
$$\widetilde{\sigma}_i = \sigma((A - P_i X_*)|\mathcal{H}_i), \quad \mathcal{H}_i = \operatorname{Im} P_i, \quad |i| > k,$$
$$\sigma(A - B) = \widetilde{\sigma}_{(k)} \bigcup \Big(\bigcup_{|i|>k} \widetilde{\sigma}_i \Big),$$

где множество $\widetilde{\sigma}_{(k)}$ содержит не более чем $2k+1$ собственных значений, множества $\widetilde{\sigma}_i = \{\widetilde{\lambda}_i\}$, $|i| > k$, одноточечны. Для собственных значений $\widetilde{\lambda}_i$, $|i| > k$, оператора $A - B$ и соответствующих собственных векторов $\widetilde{e}_i$, $|i| > k$, имеют место асимптотические оценки

$$|\widetilde{\lambda}_i - ai - b| = \delta_i, \quad \|\widetilde{e}_i - e_i\| = \delta'_i, \quad |i| > k,$$

где последовательности $\delta_i \in l_1$ и $\delta'_i \in l_2$.

Обозначим через $\widetilde{P}_i$, $|i| > k$, спектральные проекторы оператора $A - B$, построенные по спектральным множествам $\widetilde{\sigma}_i = \{\widetilde{\lambda}_i\}$, $|i| > k$, $\widetilde{P}_{(k)} = P(\widetilde{\sigma}_k, A - B)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Имеет место следующая теорема, вытекающая из [2, теорема 6.3] и леммы 1.

Теорема 7. *Спектральные проекторы связаны соотношениями*

$$\widetilde{P}_i = P_i U^{-1} + \Gamma_k X_* P_i U^{-1}, \quad \widetilde{P}_i - P_i = (\Gamma_k X_* P_i - P_i \Gamma_k X_*)U^{-1}, \quad |i| > k,$$
$$\widetilde{P}_{(k)} = P_{(k)} U^{-1} + \Gamma_k X_* P_{(k)} U^{-1}, \quad \widetilde{P}_{(k)} - P_{(k)} = (\Gamma_k X_* P_{(k)} - P_{(k)} \Gamma_k X_*)U^{-1},$$

где $U = I + \Gamma_k X_*$,

$$U^{-1} = (I + \Gamma_k X_*)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (\Gamma_k X_*)^j.$$

При этом $\|\widetilde{P}_i - P_i\|_2 \leqslant \eta_i$, $|i| > k$, и последовательность η принадлежит l_2.

Определение 4. Нетривиальное замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ называется биинвариантным для линейного замкнутого оператора $\mathcal{E}\colon D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, если $\mathcal{H}_0$ и его ортогональное дополнение $\mathcal{H}_0^\perp$ инвариантны относительно $\mathcal{E}$.

Очевидно, что если оператор $\mathcal{E}$ перестановочен с некоторым ортопроектором Q, то подпространства $\operatorname{Im} Q$ и $\operatorname{Ker} Q$ являются биинвариантными для оператора $\mathcal{E}$.

Таким образом, подпространства $\operatorname{Im} P_{(k)}, \operatorname{Im} P_i, |i|>k$, образуют в пространстве l_2 базис из подпространств (см. определение в [1]), а также счетную систему биинвариантных подпространств для невозмущенного оператора A.

Определение 5 (см. [17])**.** Пусть $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ — базис из подпространств в пространстве $\mathcal{H}$, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и оператор $I+U$ обратим. Тогда подпространства $(I+U)\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют в пространстве $\mathcal{H}$ базис из подпространств, эквивалентный ортогональному, или спрямляемый, или базис Рисса из подпространств.

Определение 6. Пусть $A_i \colon D(A_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ подобны, $A_1 U = U A_2$, $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть также подпространства $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$ — биинвариантны для оператора A_2. Тогда подпространства $(I+U)\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, назовем для оператора A_1 биинвариантными подпространствами Рисса. Если же $U \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, то назовем их биинвариантыми для A_1 подпространствами Бари.

Из основной теоремы о подобии (теоремы 5) операторов $A-B$ и $A-J_k X_*$ немедленно следует

Теорема 8. *Подпространства $(I+\Gamma_k X_*)\mathcal{H}_i$, $|i|>k$, $(I+\Gamma_k X_*)\mathcal{H}_{(n)}$, образуют в пространстве l_2 базис Бари из подпространств и систему Бари биинвариантных подпространств для оператора $A-B$.*

Далее предполагается, что невозмущенный оператор A самосопряжен (т.е. $a, b \in \mathbb{R}$).
Из следствия 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Оператор $i(A-B)$ является генератором сильно непрерывной группы операторов $T_0 \colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(l_2)$ и эта группа подобна группе $\widetilde{T}_0 \colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ вида*

$$\widetilde{T}_0(t) = e^{i(A-P_{(k)}X_*|\mathcal{H}_{(k)})I_{(k)}t} P_{(k)} + \sum_{|n|>k} e^{i\widetilde{\lambda}_n I_n t} P_n,$$

где через I_n обозначен тождественный оператор в $\mathcal{H}_n = I_m P_n$, $|n|>k$, а через $I_{(k)}$ тождественный оператор в $\mathcal{H}_{(n)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов// Сиб. мат. ж. — 1983. — *24*, № 1. — С. 21–39.
2. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 2. — С. 71–85.
3. *Баскаков А. Г., Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в спектральном анализе операторных бесконечных матриц. Примеры. I// Прикл. мат. физ. — 2020. — *52*, № 3. — С. 185–194.
4. *Баскаков А. Г., Поляков Д. М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 1. — С. 3–47.
5. *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Обобщенный метод Фурье для системы дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 2. — С. 276–280.
6. *Баскаков А. Г., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ дифференциальных операторов с инволюцией и группы операторов// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 9. — С. 1281–1291.
7. *Бройтигам И. Н., Поляков Д. М.* Асимптотика собственных значений бесконечных блочных матриц// Уфим. мат. ж. — 2019. — *11*, № 3. — С. 10–29.
8. *Бурлуцкая М. Ш.* Смешанная задача для системы дифференциальных уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — *16*, № 2. — С. 145–151.
9. *Бурлуцкая М. Ш.* Классическое и обобщенное решение смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2019. — *59*, № 3. — С. 380–390.

10. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Функционально-дифференциальные операторы с инволюцией и операторы Дирака с периодическими краевыми условиями// Докл. РАН. — 2014. — *454*, № 1. — С. 15–17.
11. *Владыкина В. Е., Шкаликов А. А.* Спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов с инволюцией// Докл. РАН. — 2019. — *484*, № 1. — С. 12–17.
12. *Гаркавенко Г. В.* О диагонализации некоторых классов линейных операторов// Изв. вузов. Мат. — 1994. — № 11. — С. 14–19.
13. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом// Таврич. вестн. информ. мат. — 2015. — *28*, № 3. — С. 40–48.
14. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Метод подобных операторов в исследовании спектральных свойств одного класса разностных операторов// Вестн. Воронеж. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 3. — С. 101–111.
15. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Спектральный анализ одного класса разностных операторов с растущим потенциалом// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Мат. Мех. Информ. — 2016. — *16*, № 4. — С. 395–402.
16. *Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б.* Асимптотика собственных значений разностного оператора с растущим потенциалом и полугруппы операторов// Мат. физ. комп. модел. — 2017. — *20*, № 4. — С. 6–17.
17. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
18. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральные операторы. Т. 3. — М.: Мир, 1974.
19. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1091–1132.
20. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
21. *Скрынников А. В.* О квазинильпотентном варианте метода Фридрихса в теории подобия линейных операторов// Функц. анал. прилож. — 1983. — *17*, № 3. — С. 89–90.
22. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Romanova E. Yu.* Spectral analysis of a differential operator with an involution// J. Evol. Equations. — 2017. — *17*. — P. 669–684.
23. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* Similarity techniques in the spectral analysis of perturbed operator matrices// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *477*, № 2. — P. 930–960.
24. *Baskakov A. G., Krishtal I. A., Uskova N. B.* On the spectral analysis of a differential operator with an involution and general boundary conditions// Eurasian Math. J. — 2020. — *11*, № 2. — P. 30–39.
25. *Boutet de Monvel A., Zielinski L.* Approximation of eigenvalues for unbounded Jacobi matrices using finite submatrices// Centr. Eur. J. Math. — 2014. — *12*, № 3. — P. 445–463.
26. *Hinkkannen A.* On the diagonalization of a certain class of operators// Michigan Math. J. — 1985. — *32*, № 3. — P. 349–359.
27. *Ikebe Y., Asai N., Miyazaki Y., Cai D.* The eigenvalue problem for infinite complex symmetric tridiagonal matrices with application// Lin. Alg. Appl. — 1996. — *241–243*. — P. 599–618.
28. *Janas J., Malejki M.* Alternative approaches to asymptotic behavior of eigenvalues of some unbounded Jacobi matrices// J. Comput. Appl. Math. — 2007. — *200*. — P. 342–356.
29. *Janas J., Naboko S.* Infinite Jacobi matrices with unbounded entries: Asymptotics of eigenvalues and the transformation operator approach// SIAM J. Math. Anal. — 2004. — *36*, № 2. — P. 643–658.
30. *Kopzhassarova A. A., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M.* Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — *2012*. — 590781.
31. *Malejki M.* Asymptotics of large eigenvalues for some discrete unbounded Jacobi matrices// Lin. Alg. Appl. — 2009. — *431*. — P. 1952–1970.
32. *Malejki M.* Asymptotic behaviour and approximation of eigenvalues for unbounded block Jacobi matrices// Opuscula Math. — 2010. — *30*, № 3. — P. 311–330.
33. *Malejki M.* Eigenvalues for some complex infinite tridiagonal matrices// J. Adv. Math. Comp. Sci. — 2018. — *26*, № 5. — P. 1–9.

Гаркавенко Галина Валериевна
Воронежский государственный педагогический университет
E-mail: `g.garkavenko@mail.ru`

Ускова Наталья Борисовна
Воронежский государственный технический университет
E-mail: `nat-uskova@mail.ru`