



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 234 (2024). С. 118–132
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-234-118-132

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОСОБЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЗАДАЧ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

© 2024 г. А. С. БУЛДАЕВ, И. Д. КАЗЬМИН

Аннотация. В классе линейных по управлению задач оптимального управления предложен подход к расчету особых управлений, удовлетворяющих принципу максимума. Предлагаемый подход основан на новых условиях оптимальности в виде задач о неподвижной точке, которые эквивалентны известным условиям принципа максимума. Новые формы условий принципа максимума дают возможность конструировать эффективные методы поиска особых управлений. Эффективность расчета особых экстремальных управлений иллюстрируется на модельных примерах.

Ключевые слова: линейно управляемая система, принцип максимума, задача о неподвижной точке, особые управления, итерационные методы.

AN APPROACH TO CALCULATING DEGENERATE EXTREMAL CONTROLS BASED ON FIXED POINT PROBLEMS

© 2024 A. S. BULDAEV, I. D. KAZMIN

ABSTRACT. In the class of optimal control problems linear with respect to the control, an approach to calculating degenerate controls that satisfy the maximum principle, is proposed. This approach is based on new optimality conditions in the form of fixed point problems that are equivalent to the well-known conditions of the maximum principle. New forms of conditions for the maximum principle make it possible to construct effective methods for searching for degenerate controls. The efficiency of the approach proposed is illustrated using model examples.

Keywords and phrases: linearly controlled system, maximum principle, fixed point problem, degenerate controls, iterative methods.

AMS Subject Classification: 49M20

1. Введение. Линейные по управлению задачи оптимального управления широко распространены в теории и практике моделирования управляемых систем в различных приложениях. Эти задачи часто характеризуются особыми экстремальными управлениями, для которых условия классического принципа максимума становятся неэффективными для определения их значений. В связи с этим по-прежнему является актуальной разработка специализированных методов для эффективного решения задач оптимального управления рассматриваемого класса. В частности, в [6] для квадратичных по состоянию и линейных по управлению задач разработаны методы на основе построения специальных условий нелокального улучшения управления. В [3] разработаны методы поиска экстремальных управлений в классе линейно-квадратичных задач оптимального управления на основе задач о неподвижной точке.

В настоящей работе в классе линейных по управлению задач оптимального управления на основе построения специальных форм условий принципа максимума в виде задач о неподвижной точке предлагаются итерационные методы, позволяющие эффективно строить численные приближения особых экстремальных управлений.

2. Задачи о неподвижной точке. Рассматривается класс линейных по управлению задач оптимального управления

$$\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T \left(\langle a(x(t), t), u(t) \rangle + d(x(t), t) \right) dt \rightarrow \inf_{u \in V}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = A(x(t), t)u(t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

в котором переменная $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ описывает состояние системы, переменная $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ характеризует управляющее воздействие в системе. Функции $a(x, t)$, $d(x, t)$, $A(x, t)$, $b(x, t)$ дифференцируемы по переменной x и непрерывны по переменной t на множестве $\mathbb{R}^n \times T$, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на множестве $\mathbb{R}^n$. В качестве множества допустимых управлений $u(t)$, $t \in T$, рассматривается множество V кусочно непрерывных функций со значениями в компактном и выпуклом множестве $U \subset \mathbb{R}^m$. Начальное состояние x^0 и временной интервал T заданы.

Функция Понтрягина с сопряженной переменной ψ в задаче (1), (2) имеет следующий вид:

$$H(\psi, x, u, t) = H_0(\psi, x, t) + \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \\ H_0(\psi, x, t) = \langle \psi, b(x, t) \rangle - d(x, t), \quad H_1(\psi, x, t) = A^T(x, t)\psi - a(x, t).$$

Стандартная сопряженная система рассматривается в следующей форме:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T, \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)). \quad (3)$$

Для $v \in V$ обозначим через $x(t, v)$, $t \in T$, решение системы (2) при $u(t) = v(t)$, а через $\psi(t, v)$, $t \in T$, — решение стандартной сопряженной системы (3) при $x(t) = x(t, v)$, $u(t) = v(t)$.

Рассмотрим отображение на основе операции максимизации

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{u \in U} \langle H_1(\psi, x, t), u \rangle, \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^* условие известного принципа максимума для управления $u \in V$ в задаче (1), (2) можно записать в виде

$$u(t) = u^*(\psi(t, u), x(t, u), t), \quad t \in T. \quad (4)$$

Определим отображение u^α с параметром $\alpha > 0$ на основе операции проектирования

$$u^\alpha(\psi, x, w, t) = P_U(w + \alpha H_1(\psi, x, t)), \quad \psi \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in U, \quad t \in T.$$

С помощью отображения u^α условие принципа максимума (4) в задаче (1), (2) можно записать в эквивалентном виде

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T, \quad \alpha > 0. \quad (5)$$

Управление $u \in V$ называется экстремальным, если оно удовлетворяет условию принципа максимума. Для экстремальности управления достаточно установить выполнение условия (5) хотя бы для одного $\alpha > 0$.

Поиск экстремальных управлений существенно усложняется в особых задачах оптимального управления, в которых необходимые условия оптимальности в форме классического принципа максимума не позволяют определять значения экстремального управления.

Рассмотрим функцию переключения $g(\psi, x, t) = H_1(\psi, x, t)$. В соответствии с известным определением особого управления (см. [4]), управление $u \in V$ в задаче (1), (2) назовем особым, если для этого управления существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$.

Для особого экстремального управления условия (4) и (5) на особом интервале выполняются тождественно и не могут служить для определения значений экстремального управления на

особом интервале. Задача (1), (2) называется особой, если существует хотя бы одно особое экстремальное управление.

Определим отображения X, Ψ, V^α следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} X(v) &= x, \quad v \in V, \quad x(t) = x(t, v), \quad t \in T; \\ \Psi(v) &= \psi, \quad v \in V, \quad \psi(t) = \psi(t, v), \quad t \in T; \\ V^\alpha(\psi, x, v) &= v^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad x \in C(T), \quad v \in V, \quad v^\alpha(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций.

С помощью введенных отображений условие принципа максимума (5) можно представить как задачу о неподвижной точке с оператором управления G_1^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = G_1^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (6)$$

Введем отображение X^α следующим образом:

$$X^\alpha(\psi, v) = x^\alpha, \quad \psi \in C(T), \quad v \in V,$$

где $x^\alpha(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t) + b(x(t), t), x(t_0) = x^0.$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_2^α :

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = G_2^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (7)$$

Построим отображение Ψ^α по правилу

$$\Psi^\alpha(x, v) = \psi^\alpha, \quad x \in C(T), \quad v \in V,$$

где $\psi^\alpha(t)$, $t \in T$, — решение следующей сопряженной задачи Коши:

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), v(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Рассмотрим задачу о неподвижной точке с оператором управления G_3^α :

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = G_3^\alpha(u), \quad u \in V. \quad (8)$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Задачи о неподвижной точке (7) и (8) являются эквивалентными условию принципа максимума (5).

Доказательство. Условие принципа максимума в проекционной форме (5) является эквивалентным следующей дифференциально-алгебраической краевой задаче:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \\ \dot{\psi}(t) &= -H_x(\psi(t), x(t), u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)), \\ u(t) &= u^\alpha(\psi(t), x(t), u(t), t), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что задача о неподвижной точке (7) эквивалентна условию принципа максимума (5).

Действительно, пусть $u \in V$ удовлетворяет условию (5), т.е. тройка $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи (9). Это значит, что функция $x(t, u)$, $t \in T$, является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0,$$

т.е. $X(u) = X^\alpha(\Psi(u), u)$. Следовательно,

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u).$$

Обратно, пусть $u \in V$ является решением уравнения (7), т.е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$ является решением специальной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0.$$

Следовательно, $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$, т.е. $X^\alpha(\Psi(u), u) = X(u)$. Получаем следующее:

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X^\alpha(\Psi(u), u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Аналогично покажем эквивалентность задачи о неподвижной точке (8) и условия принципа максимума (5). Действительно, пусть $u \in V$ удовлетворяет условию (5), т.е. тройка $(x(t, u), \psi(t, u), u(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи (9). Это значит, что функция $\psi(t, u)$, $t \in T$, является решением задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)),$$

т.е. $\Psi(u) = \Psi^\alpha(X(u), u)$. Следовательно,

$$u = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u).$$

Обратно, пусть $u \in V$ является решением уравнения (8), т.е.

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)).$$

Следовательно, $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$, т.е. $\Psi^\alpha(X(u), u) = \Psi(u)$. Получаем

$$u = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(u), u), X(u), u) = V^\alpha(\Psi(u), X(u), u).$$

Теорема доказана. $\square$

3. Особые управления. Определим понятия особых экстремальных управлений, удовлетворяющих условиям (7) и (8). Для этого рассмотрим соответствующие поточечные формы этих условий.

Задача о неподвижной точке (7) в поточечной форме имеет вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, u), x(t), u(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (10)$$

Задача о неподвижной точке (8) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной сопряженной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, u), u^\alpha(\psi(t), x(t, u), u(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, u)). \quad (11)$$

Для управления $u \in V$ введем функцию переключения $g_1(x, t) = g(\psi(t, u), x, t)$. Решение $x(t)$, $t \in T$, задачи Коши (10) назовем особым, если существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g_1(x(t), t) = 0$.

Управление $u \in V$ назовем особым для задачи Коши (10), если решение $x(t)$, $t \in T$, этой задачи Коши является особым.

Экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (7), называется особым, если это управление является особым для соответствующей задачи Коши (10).

Покажем, что понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (5), и понятие особого экстремального управления, удовлетворяющего условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), являются эквивалентными.

Теорема 2. *Особое экстремальное управление, удовлетворяющее условию (5), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть экстремальное управление $u \in V$ является особым на основе функции переключения $g(\psi, x, t)$, т.е. $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$. В силу экстремальности управления $u \in V$ выполняется соотношение $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. Следовательно, функция $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$, удовлетворяет задаче Коши (10) для соотношения $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. При этом получаем $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$.

Обратно, пусть экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (7) с соответствующей задачей Коши (10), является особым, т.е. $g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, где $x(t)$, $t \in T$, является решением задачи Коши (10). В силу системы (10) и условия экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ имеем $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$. Следовательно, получаем $0 = g_1(x(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, и условие экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. $\square$

Введем функцию переключения $g_2(\psi, t) = g(\psi, x(t, u), t)$. Решение $\psi(t)$, $t \in T$, задачи Коши (11) назовем особым, если существует интервал времени $[\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ ненулевой меры, на котором выполняется условие $g_2(\psi(t), t) = 0$.

Управление $u \in V$ назовем особым для задачи Коши (11), если решение $\psi(t)$, $t \in T$, этой задачи Коши является особым.

Экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (8), называется особым, если это управление является особым для соответствующей задачи Коши (11).

Теорема 3. *Особое экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (5), является особым экстремальным управлением, удовлетворяющим условию (8) с соответствующей задачей Коши (11), и наоборот. При этом соответствующие особые интервалы совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть экстремальное управление $u \in V$ является особым на основе функции переключения $g(\psi, x, t)$, т.е. $g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$. В силу экстремальности управления $u \in V$ имеем соотношение $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. Следовательно, функция $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$, удовлетворяет задаче Коши (11) для соотношения $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. При этом получаем $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$.

Обратно, пусть экстремальное управление $u \in V$, удовлетворяющее условию (8) с соответствующей задачей Коши (11), является особым, т.е. $g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t) = 0$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$, где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением задачи Коши (11). В силу системы (11) и условия экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$ имеем $\psi(t) = \psi(t, u)$, $t \in T$. Следовательно, получаем $0 = g_2(\psi(t), t) = g(\psi(t, u), x(t, u), t)$, $t \in [\Theta_1, \Theta_2] \subset T$ и условие экстремальности $u(t) = u^\alpha(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t)$. $\square$

4. Итерационные методы. Рассматриваемые задачи о неподвижной точке принципа максимума (6)–(8) с различными операторами являются основой для конструирования различных итерационных методов простой итерации для поиска экстремальных управлений. Сходимость соответствующих итерационных процессов этих методов можно исследовать на основе известного принципа сжатых отображений.

Для решения задач о неподвижной точке принципа максимума (6)–(8) рассмотрим соответствующие итерационные процессы метода простой итерации при $k \geq 0$:

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X(v^k), v^k) = G_1^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (12)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi(v^k), X^\alpha(\Psi(v^k), v^k), v^k) = G_2^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V; \quad (13)$$

$$v^{k+1} = V^\alpha(\Psi^\alpha(X(v^k), v^k), X(v^k), v^k) = G_3^\alpha(v^k), \quad v^0 \in V. \quad (14)$$

Процесс (12) в поточечной форме имеет вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (15)$$

Процесс (13) в поточечной форме принимает вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (16)$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t), v^k(t), t) + b(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (17)$$

Очевидно, что $x(t) = x(t, v^{k+1})$, $t \in T$. Следовательно, итерационный процесс (16), (17) в поточечной форме может быть записан в следующем неявном виде:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^k), x(t, v^{k+1}), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (18)$$

Процесс (14) в поточечной форме имеет вид

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T, \quad (19)$$

где $\psi(t)$, $t \in T$,

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(\psi(t), x(t, v^k), u^\alpha(\psi(t), x(t, v^k), v^k(t), t), t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1, v^k)). \quad (20)$$

В классе билинейных задач получаем $\psi(t) = \psi(t, v^{k+1})$, $t \in T$, и итерационный процесс (19), (20) можно представить в следующей неявной форме:

$$v^{k+1}(t) = u^\alpha(\psi(t, v^{k+1}), x(t, v^k), v^k(t), t), \quad t \in T. \quad (21)$$

Проекционный параметр $\alpha > 0$ в методах (12)–(14) фиксируется, в отличие от стандартного метода проекции градиента. Методы (12)–(14) не содержат операцию параметрического варьирования управления для обеспечения улучшения управления на каждой итерации методов. Трудоемкость реализации каждой итерации методов (12)–(14) оценивается решением двух задач Коши. Сходимость итерационных процессов (12)–(14) можно обосновать при достаточно малых $\alpha > 0$ на основе известного принципа сжимающих отображений аналогично [2].

В условиях сходимости предлагаемые проекционные методы позволяют вычислять итерационные приближения особых экстремальных управлений с любой заданной точностью при любых значениях функции переключения.

Итерационные приближения экстремальных управлений в методах (12)–(14) имеют свойство нелокальности, которое обеспечивается фиксированностью проекционного параметра $\alpha > 0$. Это свойство является важным для повышения вычислительной эффективности расчета особых экстремальных управлений, оцениваемой суммарным количеством расчетных фазовых и сопряженных задач Коши.

Итерационные приближения экстремальных управлений в методах (13) и (14) вычисляются одновременно вместе с решением соответствующих задач Коши (17) и (19). Это свойство повышает вычислительную точность расчета приближений и вычислительную эффективность этих методов по сравнению с методом (12). Указанное свойство является существенным фактором повышения эффективности расчета особых экстремальных управлений.

На каждой итерации предлагаемых методов релаксация по целевому функционалу не гарантируется, но это свойство компенсируется нелокальностью последовательных приближений управления, отсутствием операции варьирования управления в окрестности текущего приближения для обеспечения улучшения по функционалу задачи, принципиальной сходимостью итерационных процессов к экстремальным управлениям при достаточно малых параметрах проектирования.

Метод в поточечной форме (15) отличается от широко известного метода проекции градиента отсутствием операции варьирования управления на каждой итерации процесса.

В классе билинейных задач на каждой итерации методы в поточечной форме (18) и (21) становятся эквивалентными известным проекционным методам улучшения управления, являющимися проекционными аналогами x - и ψ -методов (см. [6]). Таким образом, в классе билинейных задач методы (13) и (14) становятся релаксационными по значению функционала с оценкой улучшения

$$\Phi(v^{k+1}) - \Phi(v^k) \leq -\frac{1}{\alpha} \int_T \|v^{k+1}(t) - v^k(t)\|^2 dt.$$

Свойство релаксации методов (13) и (14) в классе билинейных задач также является существенным фактором повышения эффективности расчета особых экстремальных управлений в указанном классе.

5. Примеры. Проиллюстрируем на простых примерах сравнительную эффективность предлагаемых методов для расчета особых управлений.

Пример 1. Рассматривается билинейная задача

$$\int_0^2 u(t)x(t)dt \rightarrow \inf_{u \in V},$$

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in U = [-1, 1], \quad t \in T = [0, 2].$$

Функция Понтрягина и сопряженная система соответственно имеют вид

$$H(\psi, x, u, t) = (\psi - x)u; \quad g(\psi, x, t) = \psi - x;$$

$$\dot{\psi}(t) = u(t), \quad \psi(2) = 0.$$

Отображение u^* представляется в форме

$$u^*(\psi, x, t) = \arg \max_{w \in [-1, 1]} \langle (\psi - x), w \rangle = \text{sign}(\psi - x).$$

Условие принципа максимума имеет вид

$$u(t) = \text{sign}(\psi(t, u) - x(t, u)), \quad t \in T. \quad (22)$$

Краевая задача принципа максимума, эквивалентная условию (22), принимает вид

$$\dot{x}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad x(0) = 1,$$

$$\dot{\psi}(t) = \text{sign}(\psi(t) - x(t)), \quad \psi(2) = 0,$$

Анализ краевой задачи показывает, что ее решения удовлетворяют условию

$$\psi(t) - x(t) = 0, \quad t \in T.$$

Следовательно, экстремальными управлениями являются допустимые управления $u \in V$, удовлетворяющие условию

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi(t, u) - x(t, u) = 0, \quad t \in T. \quad (23)$$

Таким образом, все экстремальные управления являются особыми с особыми интервалами, равными интервалу T .

Стандартный прием дифференцирования тождества (23) не позволяет определять особые значения экстремального управления. Рассмотрим следующий подход к поиску особых экстремальных управлений. Предположим, что особое экстремальное управление $u \in V$ существует. Из дифференциальных уравнений и тождества (23) получаем

$$x(t, u) = \psi(t, u) = \int_0^t u(\Theta)d\Theta + 1, \quad \psi(2, u) = \int_0^2 u(\Theta)d\Theta + 1 = 0.$$

Таким образом, управление удовлетворяет равенству

$$\int_0^2 u(\Theta)d\Theta = -1. \quad (24)$$

Будем искать управления $u \in V$, удовлетворяющие условию (24), в различных классах функций.

В классе постоянных функций вида $u(t) = k$, $t \in T$, получаем

$$u(t) = -\frac{1}{2}, \quad x(t, u) = -\frac{1}{2}t + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

В классе линейных функций вида $u(t) = k_1 t + k_2$, $t \in T$, из условия (24) получаем равенство

$$2k_1 + 2k_2 = -1.$$

Задавая значения k_2 , можно получать различные особые экстремальные управления. При этом для любых k_1 и k_2 получаем значение $\Phi(u) = -1/2$. Например, при $k_2 = 0$ получаем

$$u(t) = -\frac{1}{2}t, \quad x(t, u) = -\frac{1}{4}t^2 + 1, \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

При $k_2 = -0,27$ получаем управление $u(t) = -0,23t - 0,27$, $\Phi(u) = -1/2$. При $k_2 = -0,73$ получаем управление $u(t) = 0,23t - 0,73$, $\Phi(u) = -1/2$.

Рассмотрим класс кусочно постоянных функций с одной точкой переключения $0 < \tau < 2$ с максимального допустимого значения на минимальное допустимое значение, имеющих вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ -1, & t \in [\tau, 2]. \end{cases}$$

В этом классе получаем

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 1/2), \\ -1, & t \in [1/2, 2]; \end{cases} \quad x(t, u) = \begin{cases} t + 1, & t \in [0, 1/2), \\ -t + 2, & t \in [1/2, 2]; \end{cases} \quad \Phi(u) = -\frac{1}{2}.$$

Для численного расчета особых экстремальных управлений рассмотрим эквивалентные условия принципа максимума в форме задач о неподвижной точке.

Задача о неподвижной точке (6) с параметром $\alpha > 0$ в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t, u))), \quad t \in T.$$

Задача о неподвижной точке (7) в поточечной форме принимает следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad t \in T,$$

где $x(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t, u) - x(t))), \quad x(0) = 1.$$

Задача о неподвижной точке (8) в поточечной форме имеет следующий вид:

$$u(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad t \in T,$$

где $\psi(t)$, $t \in T$, является решением специальной задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u))), \quad \psi(2) = 0.$$

Соответствующие итерационные методы поиска особых экстремальных управлений (12)–(14) в поточечной форме принимают вид

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t, u^k))), \quad t \in T; \quad (25)$$

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t))), \quad t \in T, \quad (26)$$

$$\dot{x}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t, u^k) - x(t))), \quad x(0) = 1; \quad (27)$$

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u^k))), \quad t \in T, \quad (28)$$

$$\dot{\psi}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha(\psi(t) - x(t, u^k))), \quad \psi(2) = 0. \quad (29)$$

Расчеты проводились при $\alpha = 0,8$. Для численного решения фазовых и сопряженных задач Коши применялся метод Рунге–Кутты–Вернера переменного (5-6) порядка точности, который реализовывался с помощью программы DIVPRK библиотеки IMSL Fortran PowerStation 4.0 (см. [1]). Значения вычисленных управляемых, фазовых и сопряженных переменных запоминались в узлах заданной на интервале T равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 10^{-3}$. При численном решении задач Коши значения управления в промежутках между соседними узлами сетки

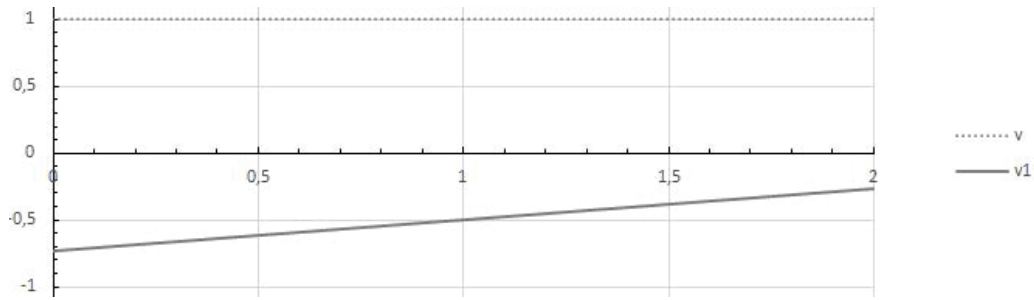


Рис. 1. v — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление метода (26),(27).

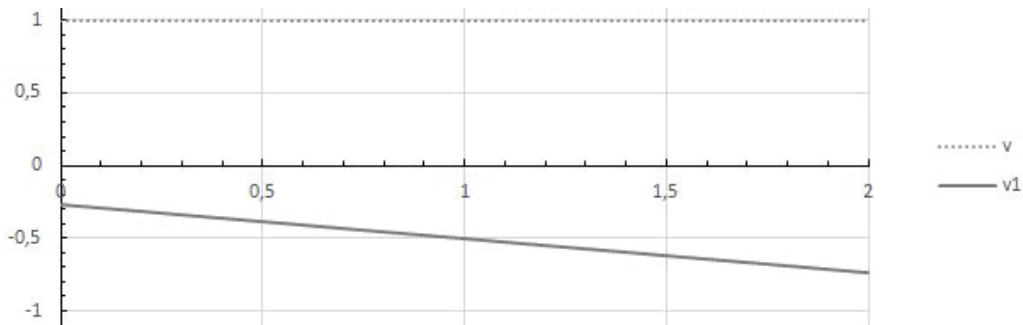


Рис. 2. v — стартовое управление, $v1$ — расчетное управление метода (28),(29).

T_h принимались равным значению в левом узле. Численный расчет задач о неподвижной точке проводился до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-6}.$$

Для стартовых управлений $u^0 = 1$, $u^0 = 0$, $u^0 = -1$ расчетные управления метода (26), (27) практически совпадают с особым экстремальным управлением $u(t) = 0,23t - 0,73$, $t \in T$. Для тех же стартовых управлений расчетные управления метода (28), (29) практически совпадают с другим особым экстремальным управлением $u(t) = -0,23t - 0,27$, $t \in T$.

На рис. 1 и 2 представлены расчетные управления, полученные методами (26), (27) и (28), (29) при стартовом управлении $u^0 = 1$. При этом для каждого метода количество расчетных задач Коши равно 15, количество итераций улучшения равно 7.

Метод условного градиента не работает в данном примере ввиду неопределенности особых значений управления при достаточно малых значениях функции переключения.

Итерационный процесс метода неподвижных точек (25) не сходится к экстремальным управлениям.

Пример 2. Рассматривается задача минимизации нормы конечного состояния системы, линейной по управлению:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), & x_1(0) &= 2, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= -1, \\ |u(t)| &\leq 1, & t \in T &= [0, 3], \\ \Phi(u) &= 0,5(x_1^2(3) + x_2^2(3)) \rightarrow \inf_{u \in V}. \end{aligned}$$

Задача для $T = [0, 2]$ рассматривалась в [7].

Функция Понтрягина и сопряженная система имеют вид

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u, t) &= \psi_1 x_2 + \psi_2 u; \quad g(\psi, x, t) = \psi_2; \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, \quad \psi_1(3) = -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), \quad \psi_2(3) = -x_2(3). \end{aligned}$$

Условия принципа максимума на основе операции максимизации и на основе операции проектирования соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), \quad t \in T; \\ u(t) &= P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), \quad t \in T. \end{aligned} \quad (30)$$

Анализ краевой задачи принципа максимума

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 2, \\ \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), \quad x_2(0) = -1, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, \quad \psi_1(3) = -x_1(3), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), \quad \psi_2(3) = -x_2(3), \end{aligned}$$

показывает, что экстремальные управления могут быть только особыми с особыми интервалами, равными T . При этом последовательное дифференцирование тождества

$$g(\psi(t), x(t), t) = \psi_2(t) = 0$$

в силу фазовой и сопряженной систем приводит к соотношениям, выполненным тождественно, которые не позволяют определять особые значения экстремального управления.

Существование особых экстремальных управлений определяется возможностью выполнения тождества на интервале ненулевой меры

$$x_1(3)t - x_1(3)3 - x_2(3) = 0.$$

Это тождество является эквивалентным условиям

$$x_1(3) = 0, \quad x_2(3) = 0.$$

Особые управления могут быть найдены на основе вспомогательной краевой задачи

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad x_1(0) = 2, \quad x_1(3) = 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = -1, \quad x_2(3) = 0, \end{aligned}$$

которая сводится к системе уравнений

$$\int_0^3 \left(\int_0^\xi u(\tau) d\tau - 1 \right) d\xi + 2 = 0, \quad -1 + \int_0^3 u(\tau) d\tau = 0.$$

В классе линейных функций $u(t) = k_1 t + k_2$ этим условиям удовлетворяет особое управление

$$u = \frac{2}{9}t, \quad t \in [0, 3], \quad \Phi(u) = 0,$$

которое является оптимальным.

Для численного поиска особых экстремальных управлений рассматривались итерационные методы (12)–(14).

Соответствующие задачи о неподвижной точке (6)–(8) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (30). Следовательно, итерационные процессы (12)–(14) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают следующий вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha \psi_2(t, u^k)), \quad t \in T. \quad (31)$$

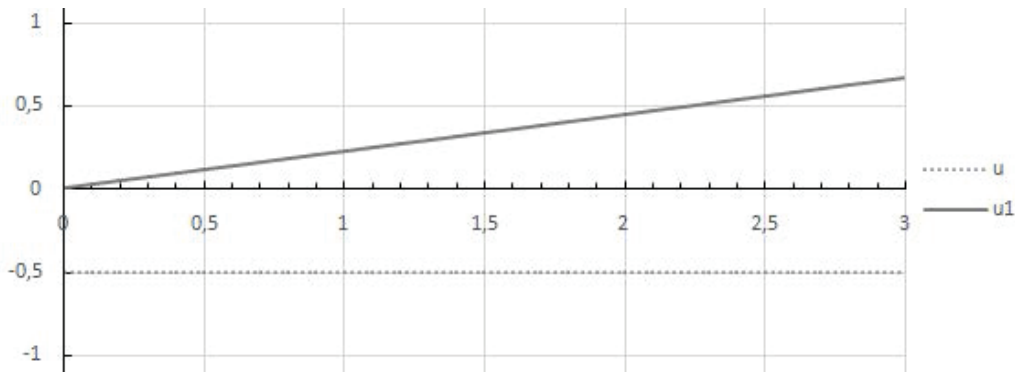
Эффективность итерационного метода (31) сравнивалась с эффективностью стандартного метода проекции градиента. В обоих методах значения фазовых, сопряженных и управляемых переменных запоминались в узлах заданной равномерной сетки T_h с шагом дискретизации $h = 0,01$.

Таблица 1. Результаты расчета методом (31).

u^0	$\Phi(u^0)$	$\hat{\Phi}$	NI	NC
0	1,0	4,121454489153501 $E-031$	135	273
0,5	0,90625	3,701439152776731 $E-031$	119	241
-0,5	8,40625	4,183785596600276 $E-031$	143	289
1,0	8,125	4,798278816953728 $E-031$	114	231
-1,0	23,125	4,726449136370594 $E-031$	149	301

Таблица 2. Результаты расчета методом проекции градиента.

u^0	$\Phi(u^0)$	$\hat{\Phi}$	NI	NC
0	1,0	2,536857622943042 $E-029$	272	1246
0,5	0,90625	1,362366037348309 $E-030$	270	1239
-0,5	8,40625	4,457897360122761 $E-031$	266	1211
1,0	8,125	4,457897360122761 $E-031$	265	1209
-1,0	23,125	4,457897360122761 $E-031$	266	1211

Рис. 3. u — стартовое управление, $u1$ — расчетное управление.

В промежутках между соседними узлами сетки T_h значение управления принималось постоянным и равным значению в левом узле. Итерационные процессы последовательных приближений управления осуществлялись до выполнения следующего критерия остановки:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-5}.$$

При этом для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись одновременно с расчетом специальной задачи Коши по правилу (19), (20).

В таблицах 1 и 2 приведены результаты расчета методом (31) при $\alpha = 0,1$ и методом проекции градиента при различных стартовых управлениях u^0 . Здесь $\hat{\Phi}$ — расчетное значение функционала, NI — суммарное количество итераций улучшения управления, NC — суммарное количество расчетных задач Коши.

Расчетное управление в обоих методах практически совпадает с особым оптимальным управлением $u(t) = 2t/9$, $t \in [0, 3]$. На рис. 3 представлено расчетное управление, полученное обоими методами при стартовом управлении $u^0 = -0,5$.

Итерационный метод неподвижных точек (31) показывает существенно лучшую вычислительную эффективность по количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентным методом.

Также можно отметить по расчетным значениям функционала, что с разных стартовых управлений метод неподвижных точек (31) позволяет получить практически одно и тоже расчетное управление. Расчетные управления градиентного метода с разных стартовых управлений отличаются по расчетному значению функционала на величину до двух порядков.

Пример 3. Рассматривается упрощенная задача из [5] без терминального ограничения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \cos x_2(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), & x_2(0) &= 0, \end{aligned} \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T = [0, 3\pi], \quad U = \{|u| \leq 1\},$$

$$\Phi(u) = x_1(3\pi) \rightarrow \inf_{u \in V}.$$

Функция Понтрягина записывается в виде

$$H(\psi, x, u, t) = \psi_1 \cos x_2 + \psi_2 u, \quad g(\psi, x, t) = \psi_2.$$

Стандартная сопряженная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= 0, & \psi_1(3\pi) &= -1, \\ \dot{\psi}_2(t) &= \psi_1(t) \sin x_2(t), & \psi_2(3\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\psi_1(t) = -1, \quad t \in T; \quad \dot{\psi}_2(t) = -\sin x_2(t), \quad \psi_2(3\pi) = 0.$$

Условие принципа максимума представляется в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sign}(\psi_2(t, u)), & t &\in T; \\ u(t) &= P_U(u(t) + \alpha \psi_2(t, u)), & t &\in T. \end{aligned} \quad (32)$$

Особые управления характеризуются тождеством

$$g(\psi(t, u), x(t, u), t) = \psi_2(t, u) = 0, \quad t \in T.$$

Дифференцирование этого тождества позволяет получить особое значение управления $u(t) = 0$. Других особых значений нет.

Краевая задача принципа максимума сводится к вспомогательной краевой задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \text{sign}(\psi_2(t)), & x_2(0) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\sin x_2(t), & \psi_2(3\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично методике работы [5] можно получить следующее решение этой краевой задачи:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t, & t &\in [0, \pi], & x_2(t) &= \pi, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= \cos t + 1, & t &\in [0, \pi], & \psi_2(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi]. \end{aligned}$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление с особым интервалом $[\pi, 3\pi]$:

$$u(t) = 1, \quad t \in [0, \pi), \quad u(t) = 0, \quad t \in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi.$$

Аналогично можно получить второе решение краевой задачи и второе особое экстремальное управление с особым интервалом $[\pi, 3\pi]$:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -t, & t &\in [0, \pi], & x_2(t) &= -\pi, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ \psi_2(t) &= -\cos t - 1, & t &\in [0, \pi], & \psi_2(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi], \\ u(t) &= -1, & t &\in [0, \pi), & u(t) &= 0, & t &\in [\pi, 3\pi], \quad \Phi(u) = -2\pi. \end{aligned}$$

Краевая задача допускает очевидное нулевое решение

$$x_2(t) = 0, \quad \psi_2(t) = 0, \quad t \in T.$$

Этому решению соответствует особое экстремальное управление $u(t) = 0, t \in T, \Phi(u) = 3\pi$.

Таблица 3. Сравнительные результаты расчетов: 1 — ПМНТ, 2 — МПГР, 3 — МУГ.

u^0	$NC, NI, \hat{\Phi}(1)$	$NC, NI, \hat{\Phi}(2)$	$NC, NI, \hat{\Phi}(3)$
-1	3, 1, 0	3, 1, 0	3, 1, 0
-0,5	743, 371, -6,28	3602, 796, -6,28	24209, 2699, -6,28
0,0	3, 1, 9,42	3, 1, 9,42	3, 1, 9,42
0,5	743, 371, -6,28	3602, 796, -6,28	24209, 2699, -6,28
1,0	3, 1, 0	3, 1, 0	3, 1, 0

Вспомогательная краевая задача допускает также два симметричных решения, которым соответствуют неособые экстремальные управления

$$\begin{aligned} u(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad \psi_2(t) = \cos t + 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0; \\ u(t) = -1, \quad x_2(t) = -t, \quad \psi_2(t) = -\cos t - 1, \quad t \in T, \quad \Phi(u) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим результаты численного расчета рассматриваемой задачи оптимального управления.

Задачи о неподвижной точке (6)–(8) в поточечной форме совпадают между собой и имеют вид (32). Следовательно, итерационные процессы (12)–(14) в поточечной форме также совпадают между собой и принимают вид:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^k(t) + \alpha\psi_2(t, u^k)), \quad t \in T. \quad (33)$$

При этом для повышения точности расчетные приближения управления вычислялись одновременно с расчетом специальной задачи Коши по правилу (19), (20).

Эффективность итерационного метода неподвижных точек (33) (ПМНТ) сравнивалась с эффективностью метода условного градиента (МУГ) и метода проекции градиента (МПГР). Расчеты проводились при $\alpha = 10^{-2}$. Сетка T_h рассматривалась с шагом дискретизации $h = 10^{-2}$. В методе условного градиента при значениях функции переключения, удовлетворяющих условию

$$|g(\psi(t, u), x(t, u), t) - \psi_2(t, u)| < 10^{-4},$$

значение управления выбиралось равным особому значению $u(t) = 0$. Критерий остановки определялся следующим образом:

$$\max \left\{ |u^{k+1}(t) - u^k(t)|, t \in T_h \right\} \leq 10^{-3}.$$

В таблице 3 приведены результаты расчетов сравниваемыми методами при различных стартовых управлениях u^0 : $\hat{\Phi}$ — расчетное значение функционала, NI — суммарное количество итераций улучшения управления, NC — суммарное количество расчетных задач Коши.

Для стартовых управлений $-1 < u^0 < 0$ расчетные управления практически совпадают с первым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рис. 4 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении $u = -0,5$.

Для стартовых управлений $1 > u^0 > 0$ расчетные управления практически совпадают со вторым особым экстремальным управлением, указанным выше. На рис. 5 представлены расчетные управления, полученные сравниваемыми методами при стартовом управлении $u = 0,5$. Результаты расчета особых управлений демонстрируют существенно лучшую вычислительную эффективность итерационного метода неподвижных точек по суммарному количеству расчетных задач Коши в сравнении с градиентными методами.

6. Заключение. В классе линейных по управлению задач оптимального управления на основе новых форм принципа максимума в виде задач о неподвижной точке построены итерационные методы, позволяющие приближенно находить экстремальные управления, в том числе особые экстремальные управления.

Эффективность поиска особых экстремальных управлений, определяется следующими свойствами предлагаемых итерационных методов неподвижных точек:

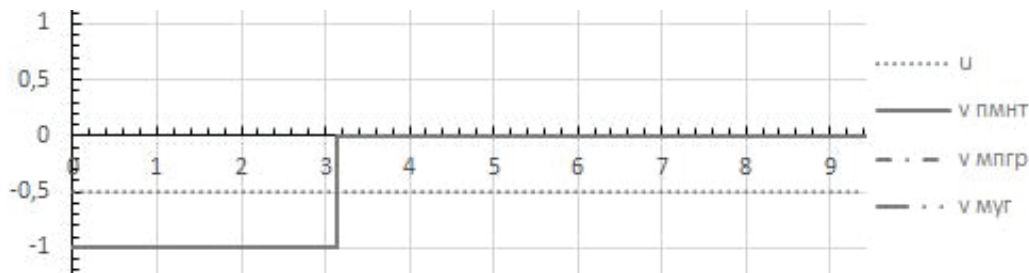


Рис. 4. u — стартовое управление, v пмнт — расчетное управление проекционного метода неподвижных точек, v мпгр — расчетное управление метода проекции градиента, v муг — расчетное управление метода условного градиента.

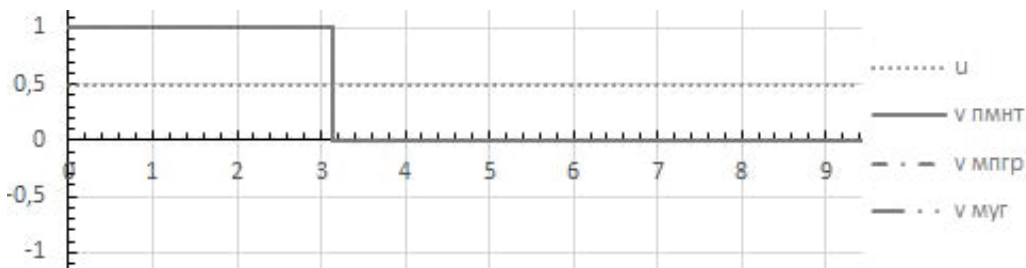


Рис. 5. u — стартовое управление, v пмнт — расчетное управление проекционного метода неподвижных точек, v мпгр — расчетное управление метода проекции градиента, v муг — расчетное управление метода условного градиента.

- (i) трудоемкость вычисления последовательных приближений особого экстремального управления на каждой итерации оценивается решением двух задач Коши для фазовых и сопряженных переменных;
- (ii) корректность определения значений итерационных приближений особого экстремального управления для любых значений функции переключения;
- (iii) повышение точности расчета итерационных приближений особого экстремального управления с помощью численного решения специальных задач Коши для фазовых и сопряженных переменных.

Указанные свойства предлагаемых методов являются важными для повышения эффективности поиска особых экстремальных управлений в рассматриваемом классе линейных по управлению задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев О. В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. — М.: Диалог-МИФИ, 2001.
2. Булдаев А. С. Операторные уравнения и алгоритмы принципа максимума в задачах оптимального управления // Вестн. Бурят. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 1. — С. 35–53.
3. Булдаев А. С., Казьмин И. Д. Операторные методы поиска экстремальных управлений в линейно-квадратичных задачах оптимального управления // Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2023. — 224. — С. 19–27.
4. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. — Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994.
5. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
6. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
7. Срочко В. А. Конечномерная аппроксимация управлений в задачах оптимизации линейных систем // Вестн. Бурят. ун-та. Мат. Информ. — 2020. — № 3. — С. 19–31.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Булдаев Александр Сергеевич (Buldaev Aleksandr Sergeevich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after D. Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: buldaev@mail.ru

Казьмин Иван Дмитриевич (Kazmin Ivan Dmitrievich)

Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Улан-Удэ
(Buryat State University named after D. Banzarov, Ulan-Ude, Russia)

E-mail: kazminvanya@mail.ru