ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 153–157
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-153-157

УДК 517.958:531.332

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ MCKEAN

© 2024 г. **С. А. ДУХНОВСКИЙ**

Аннотация. В работе исследуется кинетическая система уравнений McKean двух групп частиц. Система представляет собой кинетическое уравнение Больцмана, и для этой модели импульс и энергия не сохраняются. При помощи методов группового анализа получено решение, представляющее плотность частиц газа. Аналогичным образом можно найти точные решения для других кинетических моделей.

***Ключевые слова*:** кинетическая система McKean, инвариантное решение, групповой анализ.

GROUP ANALYSIS OF THE MCKEAN SYSTEM

© 2024 **S. A. DUKHNOVSKY**

Abstract. In this paper, we examine the kinetic McKean system for two groups of particles. The system represents the Boltzmann kinetic equation, in this model, the momentum and the energy are not conserved. Using methods of group analysis, we obtain a solution representing the density of gas particles. Similarly, exact solutions for other kinetic models can be found.

***Keywords and phrases*:** kinetic system McKean, invariant solution, group analysis.

***AMS Subject Classification*:** 35L02, 35L60, 35Q20

1. Введение. Метод группового анализа является широко известным методом поиска решений, в частности, инвариантных решений уравнений математической физики. Подробно этот метод описан в [5,10,15]. Общее описание уравнения Больцмана описано в [3]. В [6,7] О. В. Ильин получил оптимальную систему одномерных подалгебр и классов инвариантных решений для стационарной кинетической модели Бродуэлла и одномерного интегро-дифференциального уравнения Больцмана для максвелловских частиц с неупругими столкновениями. В [9] приведены результаты группового анализа уравнений Больцмана и Власова. Решения кинетических систем, использующие разложения Пенлеве, были найдены в [4,8,13,14]. Асимптотическая устойчивость для моделей Больцмана, а также численное исследование представлены в [1,2,11,12].

Рассмотрим одномерную систему McKean (см. [4,13,14]):

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\partial_t v - \partial_x v = -\frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv). \tag{2}$$

Здесь $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ — плотности групп частиц со скоростями $c = 1, -1$, ε — параметр Кнудсена из кинетической теории газов. Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий их двух групп частиц. Система McKean является неинтегрируемой системой, т.е. для нее тест Пенлеве неприменим (см. [13]). Взаимодействие происходит следующим образом. Частица из первой группы, взаимодействуя с частицей второй группы, переходят в две частицы второй группы. Аналогично две частицы второй группы, взаимодействуя сами с собой, переходят в частицу первой группы и второй группы соответственно.

2. Формулы группового анализа. Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$F_1(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0, \tag{3}$$

$$F_2(v, v_t, v_x, v_{tt}, v_{xt}, v_{xx}, \dots) = 0, \tag{4}$$

где $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$ являются неизвестными функциями. Согласно методу группового анализа, ищем продолженный оператор в форме

$$\underset{1}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial t} + \zeta\frac{\partial}{\partial u} + \chi\frac{\partial}{\partial v} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial u_x} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial u_t} + \chi_1\frac{\partial}{\partial v_x} + \chi_2\frac{\partial}{\partial v_t},$$

где $\xi = \xi(x,t,u,v)$, $\eta = \xi(x,t,u,v)$, $\zeta = \zeta(x,t,u,v)$, $\chi = \chi(x,t,u,v)$. Здесь

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial t} + \zeta\frac{\partial}{\partial u} + \chi\frac{\partial}{\partial v} \tag{5}$$

является инфинитезимальным оператором группы. Инвариант группы и оператора (5) является функцией $I(x,t,u,v)$:

$$XI = \xi\frac{\partial I}{\partial x} + \eta\frac{\partial I}{\partial t} + \zeta\frac{\partial I}{\partial u} + \chi\frac{\partial I}{\partial v} = 0. \tag{6}$$

Координаты первого продолжения оператора определяются следующим образом:

$$\zeta_1 = D_x(\zeta) - u_x D_x(\xi) - u_t D_x(\eta), \quad \zeta_2 = D_t(\zeta) - u_x D_t(\xi) - u_t D_t(\eta),$$
$$\chi_1 = D_x(\chi) - v_x D_x(\xi) - v_t D_x(\eta), \quad \chi_2 = D_t(\chi) - v_x D_t(\xi) - v_t D_t(\eta),$$

где D_x, D_t являются операторами полного дифференцирования по x и t:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + v_x\frac{\partial}{\partial v} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + v_{xx}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{xt}\frac{\partial}{\partial v_t} + \dots,$$
$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + v_t\frac{\partial}{\partial v} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + v_{xt}\frac{\partial}{\partial v_x} + v_{tt}\frac{\partial}{\partial v_t} + \dots.$$

Имеем

$$\zeta_1 = \zeta_x + \zeta_u u_x + \zeta_v v_x - u_x(\xi_x + \xi_u u_x + \xi_v v_x) - u_t(\eta_x + \eta_u u_x + \eta_v v_x), \tag{7}$$

$$\zeta_2 = \zeta_t + \zeta_u u_t + \zeta_v v_t - u_x(\xi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t) - u_t(\eta_x + \eta_u u_t + \eta_v v_t) \tag{8}$$

и

$$\chi_1 = \chi_x + u_x\chi_u + v_x\chi_v - v_x(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v) - v_t(\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v), \tag{9}$$

$$\chi_2 = \xi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t - v_x(\xi_t + \xi_u u_t + \xi_v v_t) - v_t(\eta_t + \eta_u u_t + \eta_v v_t). \tag{10}$$

Потребуем, чтобы

$$\underset{1}{X}F_1\Big|_{F_1=F_2=0} = 0, \quad \underset{1}{X}F_2\Big|_{F_1=F_2=0} = 0. \tag{11}$$

Соотношения (11) называются инвариантными условиями.

3. Приложение метода группового анализа. Подставим

$$F_1 = u_t + u_x - \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv), \quad F_2 = v_t - v_x + \frac{1}{\varepsilon}(v^2 - uv)$$

в инвариантные условия (11):

$$\underset{1}{X}F_1\Big|_{F_1=F_2=0} = \left(\zeta_2 + \zeta_1 - \frac{2}{\varepsilon}v\chi + \frac{1}{\varepsilon}u\chi + \frac{1}{\varepsilon}v\zeta\right)\Bigg|_{F_1=F_2=0}, \tag{12}$$

$$\underset{1}{X}F_2\Big|_{F_1=F_2=0} = \left(\chi_2 - \chi_1 + \frac{2}{\varepsilon}v\chi - \frac{1}{\varepsilon}\chi u - \frac{1}{\varepsilon}v\zeta\right)\Bigg|_{F_1=F_2=0}. \tag{13}$$

Заменяя u_t, v_t на $-u_x+(v^2-uv)/\varepsilon$, $v_x-(v^2-uv)/\varepsilon$ и принимая во внимание выражения (7)–(10) для координат первого продолжения из первого уравнения (12), имеем:

$$\begin{aligned}
u_x:&\quad -\xi_t-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\xi_u+\xi_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\eta_t+\eta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\frac{1}{\varepsilon}\eta_v(v^2-uv)-\xi_x+\eta_x=0,\\
u_x^2:&\quad \xi_u-\eta_u-\xi_u+\eta_u=0,\\
v_x:&\quad \zeta_v-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v+\zeta_v-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v=0,\\
u_xv_x:&\quad -\xi_v+\eta_v-\xi_v+\eta_v=0,\\
1:&\quad \zeta_t+\zeta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\zeta_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_t-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\\
&\qquad +\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\zeta_x-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_x-\frac{2}{\varepsilon}v\chi+\frac{1}{\varepsilon}u\chi+\frac{1}{\varepsilon}v\zeta.
\end{aligned}$$

Из второго уравнения (13):

$$\begin{aligned}
u_x:&\quad \chi_u-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u-\chi_u-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u=0,\\
u_xv_x:&\quad \xi_u+\eta_u+\xi_u+\eta-u=0,\\
v_x:&\quad \chi_v-\xi_t-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\xi_u+\xi_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\eta_t-\eta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\eta_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\\
&\qquad +\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v-\chi_v+\xi_x+\eta_x-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v=0,\\
v_x^2:&\quad -\xi_v-\eta_v+\xi_v+\eta_v=0,\\
1:&\quad \chi_t+\chi_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\chi_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_t+\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\\
&\qquad -\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\chi_x-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_x+\frac{2}{\varepsilon}v\chi-\frac{1}{\varepsilon}\chi u-\frac{1}{\varepsilon}v\zeta.
\end{aligned}$$

Перепишем систему в более компактной форме:

$$\eta_v=\xi_v,\quad 2\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u-\xi_t+\eta_t+\eta_x-\xi_x=0,\quad \zeta_v-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v=0,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\left(\zeta_u-\zeta_v-\eta_t-\eta_u\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)+\eta_v\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)-\eta_x\right)+\zeta_x+\zeta_t-\frac{2}{\varepsilon}v\chi+\frac{1}{\varepsilon}u\chi+\frac{1}{\varepsilon}v\zeta=0,$$

$$\eta_u=-\xi_u,\quad \chi_u+\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u=0,\quad 2\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v-\eta_t-\xi_t+\eta_x+\xi_x=0,$$
$$\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\left(\chi_u-\chi_v+\eta_t+\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_u-\frac{1}{\varepsilon}(v^2-uv)\eta_v-\eta_x\right)+\chi_t-\chi_x+\frac{2}{\varepsilon}v\chi-\frac{1}{\varepsilon}\chi u-\frac{1}{\varepsilon}v\zeta=0.$$

Интегрируя систему, получаем

$$\eta(t)=\alpha t+\beta,\quad \xi(x)=\alpha x+\gamma,\quad \zeta(u)=-\alpha u,\quad \chi(v)=-\alpha v,$$

где α, β, γ — произвольные константы.

Характеристическая система для (6) имеет вид

$$\frac{dt}{\eta}=\frac{dx}{\xi}=\frac{du}{\zeta}=\frac{dv}{\chi}\quad\text{или}\quad \frac{dt}{\alpha t+\beta}=\frac{dx}{\alpha x+\gamma}=\frac{du}{-\alpha u}=\frac{dv}{-\alpha v}.$$

Интегрируя, получаем

$$\omega=\frac{\alpha x+\gamma}{\alpha t+\beta},$$

где α, γ, β — константы интегрирования. Инвариантное решение будем искать в виде

$$u=\frac{\Phi(\omega)}{\alpha(\alpha t+\beta)},\quad v=\frac{\Psi(\omega)}{\alpha(\alpha t+\beta)},\tag{14}$$

где Φ, Ψ — неизвестные функции автомодельных переменных, которые требуется определить. Подставляем (14) в (1)–(2):

$$\frac{-(\alpha t+\beta)\Phi+(\alpha t-\alpha x+\beta-\gamma)\Phi'}{(\alpha t+\beta)^3}=\frac{\Psi^2-\Phi\Psi}{\alpha^2(\alpha t+\beta)^2\varepsilon},$$
$$\frac{-(\alpha t+\beta)\Psi-(\alpha t+\alpha x+\beta+\gamma)\Psi'}{(\alpha t+\beta)^3}=-\frac{\Phi^2-\Psi\Psi}{\alpha^2(\alpha t+\beta)^2\varepsilon}$$

или

$$\alpha^2\varepsilon(\Phi(1-\omega))'=\Psi^2-\Phi\Psi,\quad \alpha^2\varepsilon(\Psi(1+\omega))'=\Psi^2-\Phi\Psi$$

(здесь дифференцирование производится по переменной ω). Интегрируя, получим

$$\Phi(\omega)=\frac{1+\omega}{1-\omega}\Psi(\omega)+\frac{1}{(1-\omega)}C,$$

где C — константа интегрирования. Для нахождения функции Ψ имеем упрощенное уравнение Риккати

$$\Psi'=\frac{2\omega^2-2\omega}{\varepsilon\alpha^2(1-\omega)^2(1+\omega)}\Psi^2+\left(\frac{-C-\varepsilon\alpha^2+(2\varepsilon\alpha^2+C)\omega-\varepsilon\alpha^2\omega^2}{\varepsilon\alpha^2(1-\omega)^2(1+\omega)}\right)\Psi.$$

Можем записать частное решение при $C=0$:

$$\Psi(\omega)=\frac{2\varepsilon\alpha^2}{2+2\alpha^2\varepsilon C_1+2\omega\varepsilon\alpha^2C_1+(\omega+1)\ln\dfrac{\omega+1}{\omega-1}},\quad \Phi(\omega)=\frac{1+\omega}{1-\omega}\Psi(\omega), \tag{15}$$

где C_1 — произвольная константа интегрирования. Неотрицательность решения может быть достигнута посредством выбора константы C_1 в области x, t.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана// в кн.: Проблемы математического анализа. Т. 78, 2015. — С. 165–190.
2. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина// Совр. мат. Фундам. напр. — 2016. — *60*. — С. 23–81.
3. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 3. — С. 3–51.
4. *Духновский С. А.* Тест Пенлеве и автомодельное решение кинетической модели// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2020. — *176*. — С. 91–94.
5. *Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике// Усп. мат. наук. — 1992. — *47*, № 4. — С. 83–144.
6. *Ильин О. В.* Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2012. — *170*, № 3. — С. 481–488.
7. *Ильин О. В.* Симметрии, функция тока и точные решения для двумерной стационарной кинетической модели Бродуэлла// Теор. мат. физ. — 2014. — *179*, № 3. — С. 350–359.
8. *Линдблом О., Эйлер Н.* Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати// Теор. мат. физ. — 2002. — *131*, № 2. — С. 522–526.
9. *Платонова К. С., Боровских А. В.* Групповой анализ уравнений Больцмана и Власова// Теор. мат. физ. — 2020. — *203*, № 3. — С. 417–450.
10. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф, Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики. — М.: Физматлит, 2005.
11. *Радкевич Е. В.* О дискретных кинетических уравнениях// Докл. Акад. наук. — 2012. — *447*, № 4. — С. 369–373.
12. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения// Совр. мат. Фундам. напр. — 2013. — *47*. — С. 108–139.
13. *Dukhnovsky S. A.* On solutions of the kinetic McKean system// Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2020. — *94*, № 3. — P. 3–11.

14. *Euler N., Steeb W.-H.* Painlevé test and discrete Boltzmann equations// Austr. J. Phys. — 1989. — *42*. — P. 1–10.
15. *Ovsiannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. — New York: Academic Press, 1982.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Духновский Сергей Анатольевич (Dukhnovsky Sergey Anatolievich)
Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru