



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.  
Современная математика и ее приложения.  
Тематические обзоры.  
Том 230 (2023). С. 75–87  
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-75-87

УДК 517.929

## ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ НА ДИНАМИКУ РЕШЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ «СПРОС-ПРЕДЛОЖЕНИЕ»

© 2023 г. А. Н. КУЛИКОВ, Д. А. КУЛИКОВ

**Аннотация.** Рассматривается обобщенный вариант одной из самых известных математических моделей макроэкономики, известной под названием «спрос-предложение». Основной вариант такой модели имеет единственный аттрактор: состояние экономического равновесия. В работе анализируется нелинейная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными и запаздыванием в правой части. Анализ решений из окрестности состояния равновесия сведен к изучению локальных бифуркаций комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау. Для основной краевой задачи показано существование циклов, в том числе циклов, зависящих от пространственной переменной.

**Ключевые слова:** математическая модель «спрос-предложение», краевая задача, уравнение Гинзбурга—Ландау, бифуркация, устойчивость, цикл, асимптотика.

## THE INFLUENCE OF DELAY AND SPATIAL FACTORS ON THE DYNAMICS OF SOLUTIONS IN THE MATHEMATICAL MODEL “SUPPLY-DEMAND”

© 2023 A. N. KULIKOV, D. A. KULIKOV

**ABSTRACT.** A generalized version of the macroeconomic model “supply-demand” is considered. The main version of this model possesses a single attractor, namely, the state of economic equilibrium. We analyze a nonlinear boundary-value problem for a partial differential equation with delay on the right-hand side. The analysis of solutions in a neighborhood of the equilibrium state is reduced to the study of local bifurcations of the complex Ginzburg–Landau equation. For the basic boundary-value problem, the existence of cycles is proved, including cycles depending on the spatial variable.

**Keywords and phrases:** mathematical model «supply-demand», boundary-value problem, Ginzburg–Landau equation, bifurcation, stability, cycle, asymptotics.

**AMS Subject Classification:** 34K18, 37G05, 37N40

**1. Введение.** Одной из самых известных моделей макроэкономики следует считать модель «спрос-предложение». Иногда ее называют модель рынка (модель рынка одного товара). В основе модели лежит закон Сэя, согласно которому предложение товара рождает спрос (см. [1, 12, 14]). Приведем эту модель в наиболее известной форме:

$$\dot{p} = D(p) - S(p). \quad (1)$$

Здесь  $p = p(t)$  — цена товара ( $p \geq 0$ ),  $D(p)$  — функция, характеризующая спрос,  $S(p)$  — предложение товара. Принято считать, что эти функции обладают следующими свойствами:

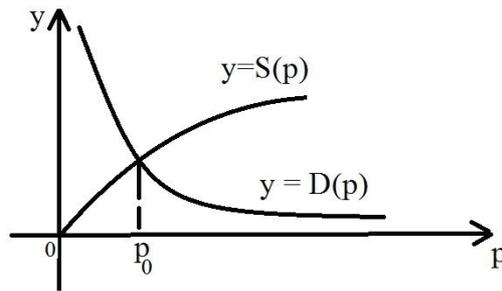


Рис. 1

- (a) при  $p \in (0, \infty)$  или  $p \in [0, \infty)$  функции  $S(p), D(p)$  достаточно гладко зависят от своего аргумента  $p$ ;
- (b)  $D'(p) < 0$ , т.е.  $D(p)$  — убывающая функция;
- (c)  $\lim_{p \rightarrow 0} D(p) = D_0, D_0 = \infty$  или  $D_0 \gg 1$ ;
- (d)  $\lim_{p \rightarrow \infty} D(p) = 0$ ;
- (e)  $S'(p) > 0$ , т.е.  $S(p)$  — возрастающая функция;
- (f)  $\lim_{p \rightarrow 0} S(p) = 0$ ;
- (g)  $\lim_{p \rightarrow \infty} S(p) = S_\infty, S_\infty = \infty$  или  $S_\infty \gg 1$ .

На рис. 1 представлены графики этих функций в системе координат  $pOy$  при  $p > 0$ . Точки их пересечения представляют собой координаты состояния равновесия  $p = p_0 > 0$ . Согласно представлениям многих экономистов, вплоть до середины прошлого века, рыночной экономике характерно наличие состояния равновесия, которое устанавливается «автоматически». Это как раз демонстрируют решения уравнения (1): его состояние равновесия  $p = p_0$  — единственный аттрактор, к которому стремятся все решения дифференциального уравнения (1). Иными словами, решение  $p(t) = p_0$  асимптотически устойчиво в целом ( $p = p_0$  — глобальный аттрактор).

Вместе с тем, как отмечают специалисты, для экономики характерна цикличность, и поэтому требуются иные математические модели, использующие обыкновенные дифференциальные уравнения с большим числом уравнений и, конечно, переменных.

С другой стороны возможен иной подход, который не предполагает замену уравнения (1) некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Во многих случаях уравнение (1) играет базовую роль, и его часто называют не только уравнением «спрос-предложение», но и уравнением Эванса (Вальраса—Эванса).

Другой подход состоит в учете такого фактора макроэкономических процессов, как запаздывания (см. [13], а также учет пространственных эффектов. В одном из возможных вариантов это приводит к следующему уравнению:

$$p_t = D(p_h) - S(p_h) + \varepsilon dp_{xx}, \quad (2)$$

где  $p = p(t, x)$ ,  $D(p_h)$ ,  $S(p_h)$  — функции спроса и предложения,  $p_h = p(t - h, x)$ ,  $d, h, \varepsilon > 0$ . Подчеркнем, что  $d$  — первоначальный коэффициент «диффузии». Уравнение (1) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$p_x(t, 0) = p_x(t, \pi) = 0, \quad (3)$$

которые принято называть условиями «непроницаемости». Для простоты предполагаем, что экономика расположена в «одномерном» регионе. Понятно, что это модельная ситуация: обычно экономические регионы двумерны.

**Замечание 1.** Изначально следует считать, что пространственная переменная  $y \in [0, l]$  и  $l$  — достаточно большая постоянная, а  $\varepsilon$  появляется как нормировочный множитель при переходе к

отрезку  $[0, \pi]$ . Действительно, пусть сначала уравнение (2) имело вид

$$p_t = D(p_h) - S(p_h) + dp_{yy},$$

где  $y \in [0, l]$ . Замена  $x = y\pi/l$  приводит последнее уравнение к уравнению (2), где  $\varepsilon = (\pi/l)^2 \ll 1$ , если  $l$  — достаточно большая положительная постоянная.

Отметим, что присутствие отклонения  $h$  достаточно естественно, так как и предложение и спрос ориентируются на цену «прошлого» рыночного дня. «Мгновенной» реакции нет даже на валютной или фондовой биржах.

Прежде чем перейти к основному анализу краевой задачи (2), (3), удобнее переписать ее в ином виде.

**2. Основная краевая задача.** Положим  $p(t, x) = p_0 + u(t, x)$ . Тогда  $p_h(t, x) = p_0 + v(t, x)$ , где  $v(t, x) = u(t - h, x)$ . Перепишем уравнение (2) в отклонениях относительно состояния равновесия  $p = p_0$ . Пусть  $F(p) = D(p) - S(p)$ ; тогда

$$F(p_0 + v) = D(p_0 + v) - S(p_0 + v) = a_0 + a_1v + a_2v^2 + a_3v^3 + F_0(v),$$

где  $a_0 = F(p_0) = 0$ ,  $a_1 = F'(p_0)$ ,  $a_2 = F''(p_0)/2$ ,  $a_3 = F'''(p_0)/6$ , а через  $F_0(v)$  обозначены слагаемые, имеющие порядок малости выше третьего. Напомним, что  $F'(p_0) < 0$  и для удобства при дальнейших построениях положим  $a = -a_1 (a > 0)$ .

Итак, вместо краевой задачи (2), (3) далее будем рассматривать краевую задачу следующего вида:

$$u_t = \varepsilon du_{xx} - av + a_2v^2 + a_3v^3 + F_0(v), \quad (4)$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что краевая задача (4), (5) допускает решения, не зависящие от  $x$ , которые можно находить как решения уравнения с отклоняющимся аргументом

$$w_t = -ay + a_2y^2 + a_3y^3 + F_0(y), \quad (6)$$

где теперь  $w = w(t)$ ,  $y = y(t) = w(t - h)$ . Если дополнить уравнение (6) начальным условием

$$w(t) = f(t), \quad t \in [-h, 0], \quad (7)$$

где функция  $f(t) \in C^k[-h, 0]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то начально-краевая задача (6), (7) имеет единственное решение при  $t \in [0, T]$  (см. [10]), где  $T > 0$ . Решение задачи Коши (6), (7) порождает гладкий нелинейный полупоток (см. [10, 11]).

Прежде чем перейти к анализу краевой задачи (4), (5), рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся уравнения (6). Одним из основных таких вопросов следует считать вопрос об устойчивости нулевого решения в линейном (первом) приближении. Это приводит к необходимости анализа следующего дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$w_t = -ay, \quad y(t) = w(t - h). \quad (8)$$

Уравнение с отклоняющимся аргументом (8) имеет счетный набор решений

$$w(t) = \exp(\lambda t),$$

где  $\lambda$  — корни характеристического уравнения (см., например, [10])

$$\lambda = -a \exp(-\lambda h). \quad (9)$$

У характеристического уравнения (9) все корни лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости, если величина отклонения  $h$  достаточно мала. При увеличении  $h$  у уравнения (9) могут появиться решения, принадлежащие мнимой оси ( $\operatorname{Re} \lambda = 0$ ). Подчеркнем, что корень  $\lambda = 0$  исключен. Далее через  $H$  будем обозначать наименьшее значение  $h$ , при котором уравнение (9) имеет корни на мнимой оси. При этом  $H$  находим после анализа уравнения  $i\sigma = -a \exp(-i\sigma h)$ , у которого можно указать счетный набор решений

$$\sigma_n = \frac{\omega_n}{h_n}, \quad \omega_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad h_n = \left( \frac{\pi + 4\pi n}{2a} \right),$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Подходящее решение получаем при  $n = 0$ , т.е.  $H = h_0 = \pi/(2a)$ ,  $\sigma_0 = a$ . Заметим, что при выбранном  $H$  дифференциальное уравнение (8) имеет решение

$$w(t) = \exp(i\sigma t), \quad \sigma = a.$$

Наряду с указанным решением имеется периодическое решение  $\bar{w}(t) = \exp(-i\sigma t)$ .

**Лемма 1.** *Характеристическое уравнение (9) при  $h < H$  имеет корни в левой полуплоскости, а при  $h > H$  у него есть корни в правой полуплоскости. Наконец, при  $h = H$  у характеристического уравнения (9) есть два чисто мнимых собственных значения  $\pm i\sigma$ ,  $\sigma = a$ .*

**Следствие 1.** *Отмеченные выше утверждения позволяют заключить, что*

- (i) *все решения линейной краевой задачи (8) асимптотически устойчивы при  $h < H$  и неустойчивы при  $h > H$ ;*
- (ii) *нулевое решение нелинейного дифференциального уравнения (6) асимптотически устойчиво при  $h < H$  и неустойчиво при  $h > H$ ;*
- (iii) *при  $h = H$  реализуется критический случай в задаче об устойчивости решения  $w = 0$  уравнения (6)*
- (iv) *линейное дифференциальное уравнение (8) имеет периодические решения с периодом  $2\pi/\sigma$ .*

Положим

$$h = H(1 + \gamma\varepsilon),$$

где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\gamma = 0, \pm 1$ , т.е.  $\varepsilon_0$  — некоторая достаточно малая положительная постоянная. При таких значениях  $h$  в следующих разделах рассмотрим вопросы о локальных бифуркациях в окрестности состояния экономического равновесия.

**3. Нормальная форма.** Рассмотрим краевую задачу (4), (5) при выбранных значениях параметра  $h$  и пронормируем эволюционную переменную  $t$ , положив

$$t = (1 + \gamma\varepsilon)\tau. \quad (10)$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (4) можно после замены (10) переписать следующим образом:

$$u_\tau = (1 + \gamma\varepsilon) \left( -av + a_2v^2 + a_3v^3 + O(v^4) \right) + \varepsilon d(1 + \gamma\varepsilon)u_{xx}, \quad (11)$$

$$u_x(\tau, 0) = u_x(\tau, \pi) = 0. \quad (12)$$

В краевой задаче (11), (12)  $v(\tau, x) = u(\tau - H, x)$ ,  $H = \pi/(2a)$ .

В такой ситуации краевая задача (11), (12) имеет двумерное инвариантное многообразие, состоящее из решений, не зависящих от  $x$ . Эти решения можно найти, как решения вспомогательного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом

$$w_\tau = (1 + \gamma\varepsilon) \left( -ay + a_2y^2 + a_3y^3 + O(y^4) \right), \quad (13)$$

где  $y(\tau, \varepsilon) = w(\tau - H, \varepsilon)$ . Подчеркнем, что теперь величина отклонения не зависит от  $\varepsilon$ .

Из результатов работ [4, 6, 11] вытекает, что у решений дифференциального уравнения (13) существует гладкое двумерное инвариантное (центральное) многообразие  $M_2(\varepsilon)$ . На нем решения уравнения (13) могут быть заданы в виде дифференциального уравнения первого порядка для комплекснозначной функции  $z(s)$ , где  $s = \varepsilon\tau$  — медленное время. Это уравнение может быть записано в следующем виде (см. [2, 9]):

$$z' = (\alpha + i\beta)z + (l_1 + il_2)\varepsilon|z|^2, \quad (14)$$

где  $\alpha, \beta, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  и априори считаем, что в нашем случае ляпуновская величина  $l_1 \neq 0$ . Обычно в теории динамических систем уравнение (14) называют нормальной формой (см. [2, 9]) в задаче об анализе бифуркаций Андронова—Хопфа.

Решения на этом многообразии можно искать в следующем виде:

$$w(\tau, z, \bar{z}, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}w_1(\tau, z, \bar{z}) + \varepsilon w_2(\tau, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2}w_3(\tau, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2), \quad (15)$$

где

$$w_1(\tau, z, \bar{z}) = z(s)q(\tau) + \bar{z}(s)\bar{q}(\tau), \quad q(\tau) = \exp(i\sigma\tau),$$

а функции  $w_2(\tau, z, \bar{z})$ ,  $w_3(\tau, z, \bar{z})$  обладают следующими свойствами:

- (а) они достаточно гладко зависят от своих аргументов при всех  $\tau$  и  $|z| \leq r_0$ , где  $r_0$  — некоторая положительная постоянная;
- (б) по переменной  $\tau$  имеют период  $2\pi/\sigma$  ( $\sigma = a$ );
- (с) удовлетворяют следующим равенствам  $M_{\pm}(w_j) = 0$ ,  $j = 2, 3$ , где использованы обозначения

$$M_{\pm}(\varphi) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} \varphi(\tau)q_{\pm}(\tau)d\tau, \quad q_+(\tau) = q(\tau), \quad q_-(\tau) = \bar{q}(\tau).$$

Далее будут использованы обозначения  $y_k(\tau, z, \bar{z}) = w_k(\tau - H, z, \bar{z})$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Если теперь подставить сумму (15) в дифференциальное уравнение (13) и приравнять члены с  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{3/2}$ , то при  $\varepsilon^{1/2}$  получим равенство, выполненное за счет выбора функции  $w_1(\tau, z, \bar{z})$ . Наконец, выделяя слагаемые при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{3/2}$ , получим два линейных неоднородных дифференциальных уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$\dot{w}_2 + ay_2 = a_2y_1^2, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 + ay_3 = & -(z'q + \bar{z}'\bar{q}) - \gamma a(zq \exp(-i\sigma H) + \bar{z}\bar{q} \exp(i\sigma H)) + \\ & + aH(z'q \exp(-i\sigma H) + \bar{z}'\bar{q} \exp(i\sigma H)) + 2a_2y_1y_2 + a_3y_1^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Добавим также, что  $\sigma H = \omega = \pi/2$  и поэтому  $\exp(i\sigma H) = i$ ,  $\exp(-i\sigma H) = -i$ . Наконец, точкой обозначены производные функций по  $\tau$ .

**Замечание 2.** Неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{w} + ay = f(\tau),$$

где  $f(\tau)$  — достаточно гладкая  $(2\pi/\sigma)$ -периодическая функция, корректно разрешимо, если  $M_{\pm}(f) = 0$ , а решение последнего неоднородного дифференциального уравнения выбирается однозначно, если для этого решения выполнены равенства  $M_{\pm}(w) = 0$ .

Равенства  $M_{\pm}(f) = 0$  носят традиционное название условий разрешимости (см. [8]). Очевидно, что для уравнения (16) условия разрешимости выполнены и, кроме того, подходящее решение имеет следующий вид:

$$w_2(\tau, z, \bar{z}) = \eta_2 z^2 q^2 + \eta_0 |z|^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}^2 \bar{q}^2,$$

где

$$\eta_2 = a_2 \frac{1 + 2i}{5a}, \quad \eta_0 = \frac{2a_2}{a}.$$

Условия разрешимости, примененные к дифференциальному уравнению (17), позволяют получить следующее равенство:

$$-\left(1 + i\frac{\pi}{2}\right) z' + i\gamma az + (\tilde{l}_1 + \tilde{l}_2) z |z|^2 = 0,$$

где

$$\tilde{l}_1 + i\tilde{l}_2 = -i \left( 3a_3 + 2a_2^2 \frac{11 + 2i}{5a} \right).$$

В результате в правой части нормальной формы (14) коэффициенты  $l_1$  и  $l_2$  определяются следующими равенствами:

$$l_1 = \frac{2}{5a(4 + \pi^2)} \left( 2a_2^2(4 - 11\pi) - 15\pi a a_3 \right), \quad l_2 = -\frac{4}{5a(4 + \pi^2)} \left( 15a a_3 + 2a_2^2(11 + \pi) \right);$$

при этом

$$\alpha = \frac{2\pi a \gamma}{4 + \pi^2}, \quad \beta = \frac{4a\gamma}{4 + \pi^2}.$$

Отметим, что знак  $\alpha$  определяется знаком  $\gamma$ . Напомним, что величину  $l_1$  принято называть ляпуновской величиной (первой ляпуновской величиной). Далее будем считать, что  $l_1 \neq 0$ . При  $l_1 = 0$  необходима корректировка правой части нормальной формы (14) и алгоритма ее построения.

Хорошо известно (см. [2], что нормальная форма (14) при  $\alpha/l_1 < 0$  имеет периодическое решение

$$z = z_a(s) = \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}} \exp(i\sigma_1 s), \quad \sigma_1 = \beta - \frac{\alpha l_2}{l_1}.$$

Решение  $z_a(s)$  устойчиво, если  $l_1 < 0$  ( $\alpha > 0$ ), и неустойчиво, если  $l_1 > 0$  ( $\alpha < 0$ ). Иногда такое решение называют циклом Андронова—Хопфа нормальной формы (14).

Если теперь возвратиться к анализу краевой задачи (11), (12), то ее решения в окрестности двумерного инвариантного многообразия  $M_2(\varepsilon)$  и с учетом того, что коэффициент при второй производной мал (пропорционален  $\varepsilon$ ), можно искать в виде суммы аналогичной правой части формулы (15), но в которой уже  $z = z(s, x)$ .

Это означает что решение краевой задачи (11), (12) мы ищем в следующем виде:

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} w_1(\tau, z, \bar{z}) + \varepsilon w_2(\tau, z, \bar{z}) + \varepsilon^{3/2} w_3(\tau, z, \bar{z}) + O(\varepsilon^2),$$

где в отличие от суммы (15) комплекснозначные функции  $z = z(s, x)$ ,  $\bar{z} = \bar{z}(s, x)$  зависят не только от эволюционной переменной  $s$ , но и от  $x$ . Естественно, что функция  $z(s, x)$  по переменной  $x$  должна удовлетворять условиям непроницаемости (однородным краевым условиям Неймана).

В результате практически не измененного алгоритма, использованного при построении нормальной формы (14), для вспомогательной комплекснозначной функции  $z(s, x)$  получаем краевую задачу

$$z_s = (\alpha + i\beta)z + (l_1 + il_2)z|z|^2 + gz_{xx}, \quad (18)$$

$$z_x(s, 0) = z_x(s, \pi) = 0, \quad (19)$$

где постоянные  $\alpha, \beta, l_1, l_2$  были определены ранее; они такие же, что и в нормальной форме (14). Наконец,

$$g = g_1 - ig_2, \quad g_1 = \frac{4d}{4 + \pi^2}, \quad g_2 = \frac{2\pi d}{4 + \pi^2}.$$

Краевую задачу (18), (19) также можно называть нормальной формой, но уже основной краевой задачи (4), (5) или даже краевой задачи (2), (3). Еще раз отметим, что те решения краевой задачи (18), (19), которые не зависят от  $x$ , удовлетворяют нормальной форме (14), т.е. нормальную форму (18), (19) можно интерпретировать как обобщенный вариант традиционной нормальной формы для краевой задачи (18), (19). Иногда ее называют не нормальной формой, а квазинормальной формой, но в данной работе будем использовать простой вариант терминологии, т.е. «нормальная форма».

Добавим, что при анализе нормальной формы определяющую роль играет знак  $l_1$ . В нашем случае знак  $l_1$  однозначно не определяется, но в большинстве случаев он отрицателен. Например, если  $a_3 > 0$ , то неравенство  $l_1 < 0$  выполнено. Неравенство  $l_1 < 0$  будет справедливо, если даже  $a_3 < 0$ , но  $a_2^2$  — достаточно большая постоянная. Добавим, что краевая задача (18), (19) имеет периодическое решение  $z_a(s)$ , которое является периодическим решением нормальной формы (14).

**4. Анализ нормальной формы.** В этом разделе будем рассматривать краевую задачу (18), (19) при дополнительном предположении, что  $\alpha > 0$ ,  $l_1 < 0$ . Для упрощения анализа этой краевой задачи удобно ее перенормировать. Положим

$$s = \frac{\Theta}{\alpha}, \quad z = R_0 \zeta, \quad R_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}}. \quad (20)$$

Тогда краевая задача (18), (19) в новых переменных будет иметь следующий вид:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2 + (b_1 - ib_2)\zeta_{xx}, \quad (21)$$

$$\zeta_x(\Theta, 0) = \zeta_x(\Theta, \pi) = 0, \quad (22)$$

где теперь  $\beta_0 = \beta/\alpha$ ,  $c = l_2/l_1$ ,  $b_1 = g_1/\alpha$ ,  $b_2 = g_2/\alpha$ . Сразу отметим, что краевая задача (21), (22) имеет периодическое решение

$$\zeta_a(\Theta) = \exp(i\omega\Theta), \quad \omega = \beta_0 - c.$$

Это периодическое решение называют однородным циклом краевой задачи (21), (22), или циклом Андронова–Хопфа. Второе название мотивировано тем, что решение  $\zeta_a(\Theta)$  удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2,$$

которое может быть проинтерпретировано как нормальная форма, к изучению которой приводит анализ бифуркаций Андронова–Хопфа (см., например, [2]).

Цикл Андронова–Хопфа устойчив в данной ситуации как решение последнего обыкновенного дифференциального уравнения. Если же мы изучаем вопрос об устойчивости цикла Андронова–Хопфа как решения краевой задачи (21), (22), то для этого требуется дополнительный анализ. Приступим к нему и положим

$$\zeta(\Theta, x) = \exp(i\omega\Theta)(1 + \varkappa(\Theta, x)). \quad (23)$$

Подстановка равенства (23) в краевую задачу (21), (22) позволяет после преобразований получить краевую задачу уже для новой комплекснозначной функции  $\varkappa(\Theta, x)$ . Она имеет следующий вид:

$$\varkappa_\Theta = -(1 + ic)\left(\varkappa + \bar{\varkappa} + 2\varkappa\bar{\varkappa} + \varkappa^2 + \varkappa^2\bar{\varkappa}\right) + (b_1 - ib_2)\varkappa_{xx}, \quad (24)$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0. \quad (25)$$

Тем самым анализ устойчивости цикла Андронова–Хопфа краевой задачи (21), (22) оказался сведенным к аналогичному вопросу для нулевого решения новой краевой задачи (24), (25). Для анализа устойчивости в первом приближении следует рассмотреть линеаризованный вариант краевой задачи (24), (25)

$$\varkappa_\Theta = A\varkappa, \quad (26)$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0, \quad (27)$$

где через  $A$  обозначен линейный дифференциальный оператор

$$A\varkappa = -(1 + ic)(\varkappa + \bar{\varkappa}) + (b_1 - ib_2)\varkappa_{xx}.$$

Изучим устойчивость решений краевой задачи (26), (27) записав ее в действительной форме. Для этого положим  $\varkappa_1 = \operatorname{Re} \varkappa$ ,  $\varkappa_2 = \operatorname{Im} \varkappa$  и  $W = \operatorname{colon}(\varkappa_1, \varkappa_2)$ . После разделения действительных и мнимых частей получаем уже краевую задачу в  $\mathbb{R}^2$ :

$$W_\Theta = AW, \quad W_x(\Theta, 0) = W_x(\Theta, \pi) = 0. \quad (28)$$

В линейной краевой задаче (28)

$$AW = \begin{pmatrix} -2 + b_1\partial^2 & b_2\partial^2 \\ -2c - b_2\partial^2 & b_1\partial^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Как обычно, вопрос об устойчивости решений краевой задачи (28) можно свести к анализу спектра линейного дифференциального оператора  $A$ . Собственные элементы оператора (29) можно искать в следующем виде:

$$E_n(x) = a_n \cos nx, \quad a_n = \operatorname{colon}(a_{1n}, a_{2n}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Двумерные векторы  $a_n$  будем искать как собственные векторы матриц  $A_n$ :

$$A_n a_n = \lambda_n a_n,$$

где

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 - b_1 n^2 & -b_2 n^2 \\ -2c + b_2 n^2 & -b_1 n^2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, собственные числа матриц  $A_n$  следует искать как корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2P_n \lambda + Q_n = 0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $P_n = 1 + b_1 n^2 > 0$  при всех  $n$ ,  $Q_n = n^2((b_1^2 + b_2^2)n^2 + 2(b_1 - cb_2))$ . Ясно, что  $Q_0 = 0$  и, следовательно,  $\lambda_{01} = 0$ ,  $\lambda_{02} = -2 < 0$ .

Для устойчивости решений линейной краевой задачи (28) должны быть выполнены неравенства  $Q_n > 0$ . Тогда все остальные собственные числа линейного дифференциального оператора  $\mathbf{A}$  лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости ( $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 < 0$ ). Но неравенства  $Q_n > 0$  будут выполнены при всех  $n \in \mathbb{N}$ , если  $Q_1 > 0$ . Отметим следующее: если  $Q_1 = 0$ , то все коэффициенты  $Q_k > 0$  при  $k = 2, 3, \dots$

Для продолжения анализа вопроса об устойчивости введем новые параметры, положив

$$\eta_1 = b_1, \quad \frac{b_2}{b_1} = \delta > 0, \quad \eta > 0.$$

Тогда неравенство  $Q_1 > 0$  можно записать в виде

$$\eta(1 + \delta^2) + 2(1 - c\delta) > 0.$$

Наконец, условие  $Q_1 = 0$  приводит к равенству

$$\eta = \eta_* = \frac{2(c\delta - 1)}{1 + \delta^2},$$

и такое критическое значение  $\eta$  существует, если  $c\delta > 1$ .

Итак, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Если  $\eta \in (0, \eta_*)$ , то линейный дифференциальный оператор  $\mathbf{A}$  имеет по крайней мере одно собственное значение, расположенное в правой полуплоскости, а решения вспомогательной задачи (28) неустойчивы. При  $\eta \in [\eta_*, \infty)$  эти решения устойчивы.*

Напомним, что линейный дифференциальный оператор (29) всегда имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственный элемент  $\operatorname{colon}(0, 1)$ . При  $\eta = \eta_*$  нулевое собственное значение становится двукратным и ему отвечают собственные элементы  $\operatorname{colon}(0, 1)$  и  $\operatorname{colon}(k, 1) \cos x$ , где  $k = (1 - c\delta)/(c + \delta)$ .

Подчеркнем, что при  $\eta = \eta_*$  оператор  $\mathbf{A}$  имеет двукратное нулевое собственное значение, а остальные его собственные числа лежат в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 < 0$ .

Возвратимся к комплексной форме записи и рассмотрим линейный дифференциальный оператор  $A_0 = A$  при  $\eta = \eta_*$ . Он определен равенством

$$A_0 \varkappa = -(1 + ic)(\varkappa + \bar{\varkappa}) + \eta_*(1 - i\delta)\varkappa_{xx},$$

у которого есть двукратное собственное число  $\lambda = 0$ . Ему отвечают собственные элементы

$$e_0(x) = i, \quad e_1(x) = (k + i) \cos x.$$

**Замечание 3.** При дальнейших построениях нам потребуются условия разрешимости неоднородного дифференциального уравнения

$$A_0 \varkappa = \varphi(x),$$

где  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ , но лишь в частных случаях:

- (а) при  $\varphi(x) = \varphi_0 + i\psi_0$  условие разрешимости состоит в выполнении равенства  $\psi_0 = c\varphi_0$ ;
- (б) при  $\varphi(x) = (\varphi_1 + i\psi_1) \cos x$  условие разрешимости состоит в выполнении равенства  $\varphi_1 = \delta\psi_1$ .

Здесь  $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{R}$ .

Подчеркнем, что в обоих случаях решения соответствующего неоднородного уравнения, если они существуют (т.е. при выполнении условий разрешимости), то заведомо не могут быть выбраны единственным образом. Естественно их выбор предполагает дополнительные условия, которые и обеспечивают единственность.

В случае, когда выполнено условие (а), решение следует искать в виде  $\varkappa = \varkappa_1 + i\varkappa_2$ , где выбор  $\varkappa_1, \varkappa_2$  подчинен равенству  $\varkappa_2 = c\varkappa_1$ . Если рассматривается вариант (б), то решение выбирается в виде  $\varkappa(x) = (\varkappa_3 + i\varkappa_4) \cos x$ , и равенство  $\varkappa_3 = \delta\varkappa_4$  обеспечивает выбор подходящего решения. Итак, соответствующие решения таковы:

$$(а) \quad - (1 + ic) \frac{\varphi_0}{2}, \quad (б) \quad (\delta + i) \frac{1 + \delta^2}{1 - \delta^2 - 2c\delta} \frac{\psi_1}{2}.$$

**5. Бифуркационная задача.** Пусть в краевой задаче (24), (25) величина  $\eta$  выбрана таким образом, что

$$\eta = \eta_*(1 - \nu\mu), \quad (30)$$

где  $\nu = \pm 1$  (или  $\nu = 0$ ),  $\mu \in (0, \mu_0)$ , а  $0 < \mu_0 \ll 1$ , т.е.  $\mu$  в дальнейшем интерпретируем как малый положительный параметр.

Рассмотрим теперь оператор  $A$  из правой части уравнения (26), если в нем  $b_1 = \eta_*(1 - \nu\mu)$ , а  $b_2 = \delta\eta = \delta\eta_*(1 - \nu\mu)$ . В результате получим линейный дифференциальный оператор

$$Ay = A(\mu)y = A_0y - \mu A_1y,$$

где

$$A_0y = -(1 + ic)(y + \bar{y}) + \eta_*(1 - i\delta)y_{xx}, \quad A_1y = \nu\eta_*(1 - i\delta)y_{xx}.$$

Наконец, здесь  $y = y(x)$  — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая краевым условиям  $y'(0) = y'(\pi) = 0$ . У данного оператора  $A(\mu)$  при всех значениях параметров имеется нулевое собственное значение, которое отвечает собственной функции  $y(x) = i$ . Кроме этого, у данного оператора при достаточно малых  $\mu$  есть собственное число  $\lambda_1(\mu)$ , где

$$\lambda_1(\mu) = 2\nu \frac{(c\delta - 1)^2}{\delta^2 + 2c\delta - 1} \mu + o(\mu).$$

При этом в случае  $\delta^2 + 2c\delta - 1 > 0$ , так как  $\delta = \pi/2$ . Из последнего равенства ясно, что  $\lambda_1 > 0$ , если  $\nu = 1$ , т.е.  $\eta < \eta_*$ ; напротив, при  $\nu = -1$  получаем  $\eta > \eta_*$ . При вычислении  $\lambda_1$  использованы условия разрешимости. Как уже отмечалось, при  $\eta < \eta_*$  происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия краевой задачи (24), (25), если в ней положить  $\eta = b_1$  и  $\delta = b_2/b_1$ .

Перейдем теперь к анализу бифуркаций в окрестности цикла Андронова—Хопфа краевой задачи (21), (22), если для цикла реализуется случай, близкий к критическому спектра устойчивости. Для этого перепишем ее при соответствующем выборе коэффициентов правой части, т.е. в данном разделе вместо краевой задачи (21), (22) будем изучать краевую задачу в следующем варианте:

$$\zeta_\Theta = (1 + i\beta_0)\zeta - (1 + ic)\zeta|\zeta|^2 + \eta_*(1 - \nu\mu)(1 - i\delta)\zeta_{xx}, \quad (31)$$

$$\zeta_x(\Theta, 0) = \zeta_x(\Theta, \pi) = 0. \quad (32)$$

Краевая задача (31), (32) в окрестности однородного цикла (цикла Андронова—Хопфа) имеет двумерное интегральное многообразие (см. [5], решения на котором удовлетворяют системе из двух действительных дифференциальных уравнений

$$\rho'_0 = G_0(\rho, \mu), \quad (33)$$

$$\rho' = G(\rho, \mu). \quad (34)$$

При этом решения, принадлежащие этому многообразию, будем искать в виде

$$\zeta(\Theta, x, \mu) = \exp(i\omega\Theta + i\rho_0)(1 + \varkappa(\Theta, x, \rho_0, \mu)), \quad (35)$$

где  $\rho_0(\Theta, \mu), \rho(\Theta, \mu)$  — решения системы (33), (34), которая также может быть интерпретирована как нормальная форма, но уже краевой задачи (31), (32). Замена (35) на первом этапе приводит к новой краевой задаче уже для функции  $\varkappa$ . Итак, вместо краевой задачи (31), (32) получаем следующую краевую задачу:

$$\varkappa_\Theta + iG_0(\rho, \mu)(1 + \varkappa) = A(\mu)\varkappa - (1 + ic)(2\varkappa\bar{\varkappa} + \varkappa^2 + \varkappa^2\bar{\varkappa}), \quad (36)$$

$$\varkappa_x(\Theta, 0) = \varkappa_x(\Theta, \pi) = 0, \quad (37)$$

где  $A(\mu)$  — линейный дифференциальный оператор, введенный ранее. Решения краевой задачи (36), (37) будем искать в следующем виде:

$$\varkappa(x, \rho, \mu) = \rho\Gamma_1(x) + \rho^2\Gamma_2(x) + \rho^3\Gamma_3(x) + \mu\rho\Gamma_0(x) + \dots, \quad (38)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными в явном виде. Как было показано в [5], для этих слагаемых справедлива оценка сверху

$$M(\mu\rho^2 + \mu^2|\rho| + \rho^4), \quad M = \text{const} > 0.$$

Выше  $\rho = \rho(\Theta) = \rho(\Theta, \mu)$  — решения дифференциального уравнения (34). Уместно отметить, что дифференциальное уравнение (34) можно изучать отдельно, так как его правая часть не зависит от  $\rho_0(\Theta)$ . В свою очередь,  $\rho_0(\Theta)$  находим после того, как определим  $\rho(\Theta)$  из уравнения (34). После этого следует  $\rho(\Theta)$  подставить в правую часть уравнения (33) и определить  $\rho_0(\Theta)$  интегрированием правой части этого уравнения.

Пусть  $\Gamma_1(x) = (k + i) \cos x$ . Подставим теперь сумму (38) в краевую задачу (36) и приравняем слагаемые при  $\rho, \rho^2, \rho^3, \mu\rho$ . В результате получим последовательность линейных краевых задач. В [5] этот алгоритм обсуждался более подробно. Особо подчеркнем, что слагаемые в правых частях уравнений (33), (34) имеют порядок малости выше первого. Как уже отмечалось, для линеаризованной задачи при  $\mu = 0$  в правой части (33), (34) с необходимостью должно быть  $G_0 = G = 0$  ( $\rho_0 = \rho = \text{const}$ ). Там же было показано, что функции  $G_0(\rho, \mu), G_1(\rho, \mu)$  имеют следующий вид:

$$G_0(\rho, \mu) = G_0\rho^2 + \dots, \quad G(\rho, \mu) = \mu G_1\rho + G_3\rho^3 + \dots$$

Точками обозначены слагаемые, которые по совокупности переменных имеют порядок малости выше выписанных в явном виде. В результате получим три линейные неоднородные краевые задачи для определения функций  $\Gamma_2(x), \Gamma_3(x), \Gamma_0(x)$  из правой части суммы (38).

Для  $\Gamma_2(x)$  получаем краевую задачу

$$-A_0\Gamma_2(x) = \Phi_2(x), \quad (39)$$

$$\Gamma_{2x}(0) = \Gamma_{2x}(\pi) = 0, \quad (40)$$

где

$$\Phi_2(x) = -iG_0 - \frac{1}{2}(1 + ic)(3k^2 + 1 + 2ki) - \frac{1}{2}(1 + ic)(3k^2 + 1 + 2ki) \cos 2x.$$

Для  $\Gamma_3(x)$  получаем краевую задачу

$$-A_0\Gamma_3(x) = \Phi_3(x), \quad (41)$$

$$\Gamma_{3x}(0) = \Gamma_{3x}(\pi) = 0, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) = & -iG_0\Gamma_1(x) - G_3\Gamma_1(x) - 2(1 + ic)\left(\Gamma_1(x)\bar{\Gamma}_2(x) + \right. \\ & \left. + \bar{\Gamma}_1(x)\Gamma_2 + \Gamma_1(x)\Gamma_2(x)\right) - (1 + ic)\Gamma_1^2(x)\bar{\Gamma}_1(x). \end{aligned}$$

При  $\mu\rho$  образуется следующая краевая задача:

$$-A_0\Gamma_0 = \nu\eta_*(1 - i\delta)(k + i) \cos x - G_1(k + i) \cos x, \quad (43)$$

$$\Gamma_{0x}(0) = \Gamma_{0x}(\pi) = 0. \quad (44)$$

Приступим к анализу трех последних линейных неоднородных краевых задач. Из условий разрешимости краевой задачи (39), (40) вытекает, что она имеет решение в рассматриваемом классе функций, если

$$G_0 = -k(1 + c^2).$$

При таком выборе постоянной  $G_0$  соответствующее решение краевой задачи (39), (40) имеет вид

$$\Gamma_2 = (\delta_1 + i\delta_2) + (\delta_3 + i\delta_4) \cos 2x,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{3k^2 + 1 - 2kc}{4}, \quad \delta_2 = c\delta_1, \quad \delta_3 = \frac{3k^2 - 1}{12}, \quad \delta_4 = \frac{3kc - 6k^2 - 1 + \eta_*(1 - 3k^2)}{12\delta\eta_*}.$$

После достаточно простых, но громоздких вычислений из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (41), (42) получаем

$$\begin{aligned} G_3 = & \frac{1}{k - \delta} \left( (1 + k\delta)G_0 + \frac{3}{4}(k^2 + 1)((1 + kc)\delta + c - k) + \right. \\ & \left. + (\delta(1 + 3kc) + c - 3k)(2\delta_1 + \delta_3) + (\delta(c + k) + ck - 1)(2\delta_2 + \delta_4) \right), \end{aligned}$$

где постоянная  $k$  была определена при линейном анализе, а постоянные  $G_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4 \in \mathbb{R}$  были найдены на втором этапе реализации алгоритма.

Наконец, рассмотрим неоднородную краевую задачу (43), (44). Условия ее разрешимости позволяют найти, что

$$G_1 = 2\nu \frac{(c\delta - 1)^2}{\delta^2 + 2c\delta - 1}.$$

Уместно отметить, что  $\delta^2 + 2c\delta - 1 > 0$ . В изучаемой задаче  $\delta = \pi/2 > 1$  ( $c > 0$ ). Подчеркнем, что величина  $G_1$  и есть коэффициент при  $\mu$  в разложении по степеням малого параметра собственного числа  $\lambda_1(\mu)$  линейного дифференциального оператора  $A(\mu)$ .

Перейдем теперь к анализу нормальной формы (33), (34) и выпишем ее в «укороченной» форме (см. [9]). Итак, рассмотрим следующий вариант нормальной формы:

$$\rho'_0 = G_0 \rho^2, \quad (45)$$

$$\rho' = \mu G_1 \rho + G_3 \rho^3. \quad (46)$$

При этом, как нетрудно заметить, уравнение (46) не зависит от  $\rho_0(\Theta)$  и поэтому это дифференциальное уравнение можно анализировать отдельно. Ясно, что  $G_1 > 0$ , если  $\nu = 1$  и  $G_1 < 0$ , если  $\nu = -1$ . Поэтому основную роль при анализе уравнения (46) играет его коэффициент  $G_3$ . Для него была приведена формула. Ввиду ее громоздкости аналитическое исследование знака  $G_3$  затруднительно; оно было проведено с привлечением численных методов. Оказалось, что при всех значениях параметров  $G_3 < 0$ . Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Дифференциальное уравнение (46) имеет два ненулевых асимптотически устойчивых состояния равновесия, если в равенстве для  $G_1$  выбрать  $\nu = 1$ :*

$$S_{\pm} : \rho_{\pm} = \pm \mu^{1/2} \chi, \quad \chi = \sqrt{-\frac{G_1}{G_3}}.$$

При таком выборе  $\nu$  нулевое состояние равновесия дифференциального уравнения (46) неустойчиво. При  $\nu = -1$  и  $\nu = 0$  уравнение (46) имеет асимптотически устойчивое нулевое состояние равновесия. Ненулевых состояний равновесия это уравнение при  $\nu = -1$  или  $\nu = 0$  не имеет.

Из леммы 3 вытекает, что система дифференциальных уравнений (45), (46) имеет два интегральных многообразия  $V_{\pm}(\mu)$ , соответствующих  $S_{\pm}$ . Определяющие их решения нормальной формы (45), (46) имеют вид

$$\rho = \pm \mu^{1/2} \chi, \quad \rho_0 = \mu G_0 \chi^2 \Theta + \text{const}.$$

Данные интегральные многообразия являются локальными аттракторами, если состояния равновесия  $S_{\pm}$  асимптотически устойчивы.

Из результатов работы [5] вытекает следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Существует такая положительная постоянная  $\mu_0$ , что при  $\mu \in (0, \mu_0)$  состояниям равновесия  $S_{\pm}$  дифференциального уравнения (46) соответствуют два состояния равновесия  $E_{\pm}$  краевой задачи (24), (25). Они наследуют устойчивость состояний равновесия уравнения (46). Для них справедливы асимптотические формулы*

$$\varkappa_{\pm}(x, \mu) = \pm \mu^{1/2} \chi(k + i) \cos x + \mu \chi^2 \Gamma_2(x) + o(\mu),$$

где

$$\Gamma_2(x) = (\delta_1 + i\delta_2) + (\delta_3 + i\delta_4) \cos 2x$$

(см. краевую задачу (39), (40)).

**Следствие 2.** *Состояниям равновесия краевой задачи (24), (25) соответствуют периодические решения краевой задачи (21), (22). Для этих решений справедливы асимптотические формулы*

$$\zeta_{\pm}(\Theta, x, \mu) = \exp\left(i\omega\Theta + i(\mu G_0 \chi^2 + o(\mu))\Theta\right)(1 + \varkappa_{\pm}(x, \mu)).$$

При их выводе использована замена (35). Наконец, с помощью равенств (20) можно получить аналогичные формулы уже для краевой задачи (18), (19)

$$z_{\pm}(s, x, \mu) = R_0 \exp \left( i\omega\alpha s + i(\mu G_0 \chi^2 + o(\mu))\alpha s \right) (1 + \varkappa_{\pm}(x, \mu)). \quad (47)$$

Решения (47) краевой задачи (18), (19) устойчивы (орбитально асимптотически устойчивы).

**6. Основной результат.** Основной результат устанавливает соответствие между решениями нормальной формы (18), (19) (краевой задачи (18), (19)) и основной краевой задачи, подлежащей изучению, т.е. краевой задачи (4), (5), а также с первоначально выбранной краевой задачей (2), (3), естественно, при соответствующем выборе параметров уравнений.

**Теорема 2.** Существует такая постоянная  $\varepsilon_0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  каждому периодическому решению нормальной формы (18), (19) соответствует периодическое решение краевой задачи (11), (12) и в конечном итоге краевой задачи (4), (5):

- (i) циклу Андронова—Хопфа нормальной формы (18), (19) соответствует пространственно однородный цикл краевой задачи (4), (5), который порождается периодическим решением

$$u_a(t, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left[ \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}} \exp(i(\sigma + \varepsilon\sigma_1)t) + \sqrt{-\frac{\alpha}{l_1}} \exp(-i(\sigma + \varepsilon\sigma_1)t) \right] + O(\varepsilon),$$

где  $\sigma = a$ ,  $\sigma_1 = \beta - \alpha l_2/l_1$ , если, конечно, такой цикл существует ( $\alpha/l_1 < 0$ );

- (ii) каждому циклу (47) соответствует пространственно неоднородный цикл

$$u_{\pm}(t, x, \varepsilon, \mu) = \varepsilon^{1/2} R_0 \left( \exp(iQ(t, \varepsilon, \mu))(1 + \varkappa_{\pm}(x, \mu)) + \exp(-iQ(t, \varepsilon, \mu))(1 + \bar{\varkappa}_{\pm}(x, \mu)) \right) + O(\varepsilon),$$

где

$$Q(t, \varepsilon, \mu) = \left( \sigma + \omega\alpha\varepsilon + (\mu G_0 \chi^2 + o(\mu))\omega\alpha\varepsilon \right) \frac{t}{1 + \gamma\varepsilon}, \quad \sigma_1 = \omega\alpha.$$

Построенные периодические решения наследуют устойчивость соответствующих им решений нормальной формы. Наконец, равенства

$$p_a(t, \varepsilon) = p_0 + u_a(t, \varepsilon), \quad p_{\pm}(t, x, \varepsilon, \mu) = p_0 + u_{\pm}(t, x, \varepsilon, \mu)$$

восстанавливают решения первоначального варианта системы «спрос-предложения» (см. краевую задачу (2), (3)).

Правая часть второй асимптотической формулы из теоремы 2 содержит два независимых малых параметра  $\varepsilon$  и  $\mu$ . «Основной» из них  $\varepsilon$ , а от  $\mu$  зависит только компоненты решения нормальной формы (45), (46). Подчеркнем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  и  $\mu$  частота колебаний близка к  $\sigma$ , а период, естественно, к  $2\pi/\sigma$ . Напомним, что  $\sigma = a$ , и в принципе период колебаний экономики может быть любым. Если величина  $2\pi/\sigma$  мала, то принято говорить о краткосрочных циклах — циклах Китчина. При умеренном  $a$  имеем среднесрочные циклы (циклы Жуглара) и, наконец, если  $a \ll 1$ , то период  $T = 2\pi/a$  достаточно велик, и речь идет о долгосрочных циклах Кондратьева (см. [3, 7]).

**7. Заключение.** Как уже отмечалось, классический вариант модели «спрос-предложение» не может адекватно моделировать макроэкономические процессы, так как анализ поведения решений системы дифференциальных уравнений (1) противоречит экономической практике. Весь опыт макроэкономической динамики показывает, что рыночная экономика не обязательно имеет устойчивое состояние равновесия и, более того, для нее характерна цикличность.

Вместе с тем учет двух таких факторов, как запаздывание спроса и предложения и учет пространственного взаимодействия, способны изменить радикально динамику такой модели.

В работе была рассмотрена краевая задача (2), (3). Ее анализ позволил найти периодические по  $t$  решения циклы — циклы Андронова—Хопфа, а также пространственно неоднородные циклы. Современные математические методы продемонстрировали, что динамика даже в достаточно

простой на первый взгляд модели может быть сложной и не вступать в противоречие с наблюдаемым, реальным процессом экономическим процессом.

Для анализа обобщенной модели рынка одного товара использовались такие методы теории динамических систем как метод интегральных (инвариантных) многообразий, а также соответствующая редакция метода нормальных форм в применении к динамическим системам с бесконечномерным фазовым пространством.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агапова Т. А., Серегина С. Ф.* Макроэкономика. — М.: Дело и сервис, 2004.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
3. *Кондратьев Н. Д.* Особое мнение. — М.: Наука, 1993.
4. *Куликов А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве// в кн.: Исследования по устойчивости и теории колебаний (*Колесов Ю. С.*, ред.). — Ярославль: ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
5. *Куликов А. Н., Куликов Д. А.* Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шрёдингера// Диффер. уравн. — 2010. — 46, № 9. — С. 1290–1299.
6. *Куликов Д. А.* Эффект запаздывания и экономические циклы// Итоги науки техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — 217. — С. 41–50.
7. *Лебедев В. В., Лебедев К. В.* Математическое моделирование нестационарных процессов. — М.: eТест, 2011.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
9. *Guckenheimer J., Holmes P. J.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. — New York: Springer, 1983.
10. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1977.
11. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcations and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
12. *Puu T.* Nonlinear Economic Dynamics. — Berlin: Springer-Verlag, 1997.
13. *Radin M. A., Kulikov A. N., Kulikov D. A.* The influence of spatial effects on the dynamics of solutions in Keynes' mathematical model of the business cycle// Nonlin. Dyn. Psychol. Life Sci. — 2022. — 26, № 4. — P. 441–463.
14. *Zhang W. B.* Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. — Berlin: Springer-Verlag, 1991.

### ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Финансирование.** Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

**Финансовые интересы.** Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Куликов Анатолий Николаевич  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
E-mail: anat\_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
E-mail: kulikov\_d\_a@mail.ru