



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 230 (2023). С. 25–40
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-230-25-40

УДК 517.977: 534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАДАНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2023 г. В. Р. БАРСЕГЯН, С. В. СОЛОДУША

Аннотация. Статья посвящена разработке конструктивного подхода к решению задачи оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой, динамика которой моделируется одномерным волновым уравнением с кусочно постоянными характеристиками. Специфика предлагаемого подхода позволяет удовлетворить многоточечные промежуточные условия. Полученные результаты проиллюстрированы конкретным примером.

Ключевые слова: колебания, оптимальное управление, неоднородный процесс, волновое уравнение, разделение переменных.

OPTIMAL BOUNDARY CONTROL FOR A DISTRIBUTED INHOMOGENEOUS OSCILLATORY SYSTEM WITH GIVEN INTERMEDIATE CONDITIONS

© 2023 V. R. BARSEGHYAN, S. V. SOLODUSHA

ABSTRACT. In this paper, we develop a constructive approach to the problem of optimal boundary control for a distributed inhomogeneous oscillatory system whose dynamics is modeled by a one-dimensional wave equation with piecewise constant characteristics. Using the approach proposed, one may satisfy multi-point intermediate conditions. The results obtained are illustrated by a specific example.

Keywords and phrases: oscillations, optimal control, inhomogeneous process, wave equation, separation of variables.

AMS Subject Classification: 93C95, 70Q05

1. Введение. Изучению задач управления, в том числе и оптимального, распределенных колебательных систем, где задаются начальное, конечное, а также и многоточечные промежуточные условия, посвящена многочисленная литература, в частности, работы [1, 3–5, 7, 8, 10–20, 24–28] (см. также библиографию в этих работах). Одна из первых задач, где колебательная система состоит из двух разных кусочно однородных сред (разнородных распределенных составных систем), сформулирована А. Г. Бутковским и рассмотрена в [7]. В [4, 5, 8, 10, 12–15, 28] рассмотрены задачи граничного управления колебаниями распределенных систем, состоящих из разнородных участков (с кусочно постоянными характеристиками). Исследование этих задач, как правило, основывается на использовании метода бегущих волн и получении формул типа Даламбера.

Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. AAAA-A21-121012090034-3).

Задачам управления и оптимального управления составных динамических систем посвящены, в частности, работы [1, 2, 4, 5, 7, 8, 10–15, 19–24, 27, 28]. В отличие от [1, 19, 20, 24] здесь представлена задача оптимального граничного управления распределенной неоднородной колебательной системой с управляющими смещениями обоих концов. В качестве промежуточных условий учитываются заданные в разные промежуточные моменты времени значения функции колебания (прогиба) и производной от этой функции (скоростей точек). Критерий качества определен на всем временном интервале. Будем считать, что колебательный процесс характеризуется разными физическими свойствами (т.е. состоит из двух участков, которые имеют различные упругие свойства и плотность). При этом длины этих участков таковы, что время прохождения волны по каждому из них одинаково. Настоящая работа наиболее близка к исследованиям, представленным в [1, 19, 20, 24].

Цель данной статьи заключается в разработке аналитической методики построения оптимального граничного управляющего воздействия. Управление реализуется за счет смещения, которое прилагается на двух концах и за конечный временной промежуток переводит колебания из известного начального состояния (через многоточечные промежуточные) в заданное конечное состояние. Статья структурирована в соответствии со схемой построения решения задачи. В разделе 2 сформулирована постановка задачи. В разделе 3 исходная задача сведена к задаче с нулевыми граничными условиями. Для ее решения в разделах 4 и 5 используются метод разделения переменных и методы теории оптимального управления конечномерными системами с многоточечными промежуточными условиями. Построение оптимальной функции управления с помощью проблем моментов приведено в разделе 5. В разделах 6 и 7 приведены результаты, иллюстрирующие применение полученных формул на конкретных примерах.

2. Постановка задачи. Рассмотрим колебания распределенной кусочно однородной среды, которая расположена вдоль отрезка $-l_1 \leq x \leq l$ и состоит из двух участков длины $-l_1$ и l соответственно, так что $-l_1 \leq x \leq 0$ и $0 \leq x \leq l$. Обозначим через $a_i = \sqrt{k_i/\rho_i}$ скорость прохождения волны по i -му ($i = 1, 2$) участку, где $\rho_i = \text{const}$ — плотность, $k_i = \text{const}$ — модуль Юнга. Пусть величины l_1 и l удовлетворяют равенству

$$\frac{l_1}{a_1} = \frac{l}{a_2}, \quad (2.1)$$

так что время прохождения волны по первому участку (где $-l_1 \leq x \leq 0$) равно времени прохождения волны по второму участку (где $0 \leq x \leq l$).

Будем считать, что функцией $Q(x, t)$, $-l_1 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$, задается состояние неоднородного процесса, динамика которого описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_1^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & -l_1 \leq x \leq 0, & 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.2)$$

с условиями на границах

$$Q(-l_1, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

и с сопряженными условиями при $x = 0$ (точка соединения участков)

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1^2 \rho_1 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0-0} = a_2^2 \rho_2 \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0+0}. \quad (2.4)$$

Начальные (при $t = t_0 = 0$) и конечные (при $t = T$) условия заданы следующим образом:

$$Q(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (2.5)$$

$$Q(x, T) = \varphi_T(x), \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=T} = \psi_T(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (2.6)$$

Пусть в некоторые моменты времени

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = T$$

известны промежуточные значения функции состояния и ее производной в виде

$$Q(x, t_i) = \varphi_i(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}. \quad (2.8)$$

В условиях (2.7) и (2.8) предполагается, что m — четное число. В формуле (2.3) функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ являются управляющими воздействиями (граничные управления). Дополнительно будем считать, что функция $Q(x, t) \in C^2(\Omega_T)$, $\varphi_i(x) \in C^2[-l_1, l]$ и $\psi_j(x) \in C^1[-l_1, l]$, где множество $\Omega_T = \{(x, t) : x \in [-l_1, l], t \in [0, T]\}$, а все функции таковы, что выполняются условия согласования (см. [1, 19, 20, 24]).

Указанным динамическим процессом могут быть представлены продольные (поперечные) колебания кусочно однородного стержня (струны), где ρ — плотность, k — модуль упругости (натяжение струны). Отметим также, что распределенный кусочно однородный колебательный процесс (2.2) описывается системой переменной структуры (см. [1, 2, 19–22, 24]). Сформулируем далее задачу оптимального граничного управления неоднородными колебаниями системы (2.2) с условиями, заданными в промежуточные моменты времени.

Требуется найти такие оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, в (2.3), под воздействием которых колебательное движение системы (2.2) из заданного начального состояния (2.5) переходит в конечное состояние (2.6), удовлетворяя условиям (2.7), (2.8) и минимизируя функционал

$$\left[\int_0^T (\mu^2(t) + \nu^2(t)) dt \right]^{1/2}. \quad (2.9)$$

Так как в промежуточные моменты времени t_k , $k = \overline{1, m}$, известны или только значения функции колебания (2.7), или только значения ее производной (2.8), то целесообразно использовать такой подход решения сформулированной задачи оптимального управления, где будет учтена специфика промежуточных условий (2.7), (2.8).

3. Сведение задачи к задаче с нулевыми граничными условиями. Для построения решения введем такую новую переменную ξ (см. [1, 19, 20, 24]), что

$$\xi = \begin{cases} \frac{a_2}{a_1}x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (3.1)$$

Замена вида (3.1) приводит к преобразованию (растяжению либо к сжатию) отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ относительно точки $x = 0$. Легко видеть, что, в силу (2.1), вместо отрезка $-l_1 \leq x \leq 0$ имеем $-l \leq \xi \leq 0$. Таким образом, для функции $Q(\xi, t)$ получим одинаковое на участках длины l уравнение

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & -l \leq \xi \leq 0, & 0 \leq t \leq T, \\ a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, & 0 \leq \xi \leq l, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

или

$$\frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 Q(\xi, t)}{\partial \xi^2}, \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

с условиями на границах

$$Q(-l, t) = \mu(t), \quad Q(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

начальными условиями

$$Q(\xi, 0) = \varphi_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_0(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (3.4)$$

промежуточными условиями

$$Q(\xi, t_i) = \varphi_i(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (3.5)$$

$$\left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \psi_j(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad (3.6)$$

и конечными условиями

$$Q(\xi, T) = \varphi_T(\xi), \quad \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} = \psi_T(\xi), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad (3.7)$$

а также сопряженными условиями при $\xi = 0$ (точке соединения участков)

$$Q(0-0, t) = Q(0+0, t), \quad a_1 \rho_1 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0-0} = a_2 \rho_2 \left. \frac{\partial Q(\xi, t)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0+0}. \quad (3.8)$$

Для удобства здесь все функции после замены (3.1) оставлены в исходных обозначениях.

Принимая во внимание неоднородность граничного условия (3.3), решение задачи (3.2) будем искать в виде

$$Q(\xi, t) = V(\xi, t) + W(\xi, t), \quad (3.9)$$

где для искомой функции $V(\xi, t)$ справедливы однородные граничные условия

$$V(-l, t) = V(l, t) = 0, \quad (3.10)$$

а функция $W(\xi, t)$ — решение уравнения (3.2) с условиями

$$W(-l, t) = \mu(t), \quad W(l, t) = \nu(t), \quad (3.11)$$

удовлетворяющая условию

$$W(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(l - \xi)\mu(t) + (l + \xi)\nu(t)]. \quad (3.12)$$

Из (3.2), (3.9) и (3.12) для определения функции $V(\xi, t)$ получим

$$\frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 V(\xi, t)}{\partial \xi^2} + F(\xi, t), \quad -l \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.13)$$

где

$$F(\xi, t) = \frac{1}{2l} [(\xi - l)\ddot{\mu}(t) - (\xi + l)\ddot{\nu}(t)]. \quad (3.14)$$

Заметим, что функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет условию сопряжения (3.8) в точке $\xi = 0$. Согласно (3.1) будем иметь

$$\varphi_0(-l) = \varphi_0(-l), \quad \varphi_i(-l) = \varphi_i(-l), \quad \psi_j(-l) = \psi_j(-l), \quad (3.15)$$

$$\varphi_T(-l) = \varphi_T(-l), \quad \psi_0(-l) = \psi_0(-l), \quad \psi_T(-l) = \psi_T(-l). \quad (3.16)$$

Из начальных (3.4), промежуточных (3.5), (3.6) и конечных (3.7) условий, с учетом условий согласования и (3.15) получим, что решение $V(\xi, t)$ задачи (3.13) должно удовлетворять начальным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi, 0) &= \varphi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\varphi_0(-l) + (l + \xi)\varphi_0(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \psi_0(\xi) - \frac{1}{2l} [(l - \xi)\psi_0(-l) + (l + \xi)\psi_0(l)], \end{aligned} \quad (3.17)$$

промежуточным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi, t_i) &= \varphi_i(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\varphi_i(-l), \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} &= \psi_j(\xi) - \frac{1}{2l}(l - \xi)\psi_j(-l), \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

и конечным условиям

$$\begin{aligned} V(\xi, T) &= \varphi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\varphi_T(-l) + (l + \xi)\varphi_T(l)], \\ \left. \frac{\partial V(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=T} &= \psi_T(\xi) - \frac{1}{2l}[(l - \xi)\psi_T(-l) + (l + \xi)\psi_T(l)]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Исходная задача сведена к задаче оптимального управления колебанием, описываемым неоднородным уравнением (3.13) с однородными граничными условиями (3.10). Полученная задача оптимального управления формулируется следующим образом.

Требуется найти оптимальные граничные управления $\mu^0(t)$ и $\nu^0(t)$, $0 \leq t \leq T$, доставляющие минимум функционала (2.9), под воздействием которых вынужденное колебание, моделируемое уравнением (3.13) с граничными условиями (3.10), переходит из заданного начального состояния (3.17) через промежуточные состояния (3.18) в конечное состояние (3.19).

4. Сведение решения задачи с нулевыми граничными условиями к проблеме моментов. С учетом однородных граничных условий (3.10) решение уравнения (3.13) ищем в виде

$$V(\xi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(t) \sin \frac{\pi k \xi}{l}, \quad V_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l V(\xi, t) \sin \frac{\pi k \xi}{l} d\xi. \quad (4.1)$$

Функции $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ представим в виде рядов Фурье в базисе $\left\{ \sin \frac{\pi k \xi}{l}, k = 1, 2, \dots \right\}$ и, подставив их значения вместе с $V(\xi, t)$ в уравнение (3.13), (3.14) и в условия (3.17)–(3.19), для каждого k получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{V}_k(t) + \lambda_k^2 V_k(t) = F_k(t), \quad \lambda_k^2 = \left(\frac{a_2 \pi k}{l} \right)^2, \quad (4.2)$$

$$F_k(t) = \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\ddot{v}(t)(2(-1)^k - 1) - \ddot{\mu}(t) \right] \quad (4.3)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} V_k(0) &= \varphi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_0(-l) - \varphi_0(l)(2(-1)^k - 1) \right], \\ \dot{V}_k(0) &= \psi_k^{(0)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_0(-l) - \psi_0(l)(2(-1)^k - 1) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

промежуточными условиями

$$\begin{aligned} V_k(t_i) &= \varphi_k^{(i)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_i(-l) - \varphi_i(l)(2(-1)^k - 1) \right], \quad i = 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \\ \dot{V}_k(t_j) &= \psi_k^{(j)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_j(-l) - \psi_j(l)(2(-1)^k - 1) \right], \quad j = 2\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

и конечными условиями

$$\begin{aligned} V_k(T) &= \varphi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\varphi_T(-l) - \varphi_T(l)(2(-1)^k - 1) \right], \\ \dot{V}_k(T) &= \psi_k^{(T)} - \frac{a_2}{\lambda_k l} \left[\psi_T(-l) - \psi_T(l)(2(-1)^k - 1) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Здесь коэффициенты Фурье функций $F(\xi, t)$, $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_j(\xi)$ обозначены через $F_k(t)$, $\varphi_k^{(i)}$ и $\psi_k^{(j)}$ соответственно.

Общее решение уравнения (4.2) представим в виде

$$V_k(t) = V_k(0) \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^t F_k(\tau) \sin \lambda_k(t - \tau) d\tau. \quad (4.7)$$

Следуя [15–20] и учитывая условия (4.5) и (4.6), из (4.7) получим, что функции управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$ для всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{1k}, \\ \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= C_{2k}, \\ \int_0^T \mu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) h_k^{(i)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_i), \quad i = 2\alpha - 1, \\ \int_0^T \mu(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau + E_k \int_0^T \nu(\tau) g_k^{(j)}(\tau) d\tau &= C_{2k}(t_j), \quad j = 2\alpha, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\alpha = 1, \dots, m/2$, $E_k = 1 - 2(-1)^k$,

$$\begin{aligned} C_{1k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} + E_k Y_{1k} \right], & C_{2k}(T) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} + E_k Y_{2k} \right], \\ C_{1k}(t_i) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_i) + X_{1k}^{(i)} + E_k Y_{1k}^{(i)} \right], & C_{2k}(t_j) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(t_j) + X_{2k}^{(j)} + E_k Y_{2k}^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{1k}(t_i) &= \lambda_k V_k(t_i) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k t_i - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k t_i, \\ \tilde{C}_{2k}(t_j) &= \dot{V}_k(t_j) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k t_j - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k t_j, \\ \tilde{C}_{1k} &= \lambda_k V_k(T) - \lambda_k V_k(0) \cos \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \sin \lambda_k T, \\ \tilde{C}_{2k} &= \dot{V}_k(T) + \lambda_k V_k(0) \sin \lambda_k T - \dot{V}_k(0) \cos \lambda_k T, \\ X_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k T, \\ X_{2k} &= \psi_T(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k T, \\ Y_{1k} &= \lambda_k \varphi_T(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k T - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k T, \\ Y_{2k} &= \psi_T(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k T + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k T, \\ X_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(-l) - \psi_0(-l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(-l) \cos \lambda_k t_i, \\ Y_{1k}^{(i)} &= \lambda_k \varphi_i(l) - \psi_0(l) \sin \lambda_k t_i - \lambda_k \varphi_0(l) \cos \lambda_k t_i, \\ X_{2k}^{(j)} &= \psi_j(-l) - \psi_0(-l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(-l) \sin \lambda_k t_j, \\ Y_{2k}^{(j)} &= \psi_j(l) - \psi_0(l) \cos \lambda_k t_j + \lambda_k \varphi_0(l) \sin \lambda_k t_j, \end{aligned}$$

$$h_k^{(i)}(\tau) = \begin{cases} \sin \lambda_k(t_i - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_i, \\ 0, & t_i < \tau \leq T, \end{cases} \quad g_k^{(j)}(\tau) = \begin{cases} \cos \lambda_k(t_j - \tau), & 0 \leq \tau \leq t_j, \\ 0, & t_j < \tau \leq T. \end{cases}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к поиску функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$, которые для всех $k = 1, 2, \dots$ удовлетворяют интегральным соотношениям (4.8) и, кроме того, обеспечивают минимум функционала (2.9) для $0 \leq t \leq T$.

На практике, как правило, ограничиваются некоторыми первыми значениями n ($k = \overline{1, n}$) гармоник и решают задачу синтеза управлений, привлекая методы теории оптимального управления

конечномерными системами. Будем строить решение задачи, придерживаясь этого подхода. Отметим, что при произвольном фиксированном значении число выражений в (4.8) равно $(2+m)n$, которым должны одновременно удовлетворять искомые функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$, определяется по формуле $(2+m)n$, где m — число промежуточных моментов времени. Тогда из соотношения (4.8) следует справедливость следующего важного результата данного пункта — утверждение о вполне управляемости (см. [2, 6, 9]).

Теорема 4.1. *Для произвольного числа первых n гармоник динамический процесс, описываемый уравнением (4.2) с условиями (4.4)–(4.6), вполне управляем на промежутке времени $[0, T]$ тогда и только тогда, когда для любых значений величин C_{1k} , C_{2k} и $C_{1k}(t_i)$, $C_{2k}(t_j)$, $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m/2$, $k = \overline{1, n}$, определяемых условиями (4.9), можно найти управления $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющие условию (4.8).*

5. Решение задачи. Вообще говоря, функционал (2.9) можно рассматривать как квадрат нормы соответствующего линейного нормированного пространства. Так как интегральные соотношения (4.8), порожденные функциями $\mu(t)$ и $\nu(t)$, $0 \leq t \leq T$, линейны, то задачу определения оптимального управления для n ($n = 1, 2, \dots$) можно рассматривать как проблему моментов (см. [2, 3, 9]). Следовательно, для решения этой задачи можно воспользоваться алгоритмом решения проблемы моментов.

Таким образом, для решения конечномерной (при $k = \overline{1, n}$) проблемы моментов (2.9) и (4.8), следуя [2, 9], нужно найти такие величины p_k , q_k , γ_{ik} , γ_{jk} , $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m/2$, связанные условием

$$\sum_{k=1}^n \left[p_k C_{1k} + q_k C_{2k} + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik} C_{1k}(t_i) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk} C_{2k}(t_j) \right] = 1, \quad (5.1)$$

для которых

$$(\rho_n^0)^2 = \min_{(5.1)} \int_0^T \left[h_{1n}^2(\tau) + h_{2n}^2(\tau) \right] d\tau, \quad (5.2)$$

где

$$h_{1n}(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[p_k \sin \lambda_k(T - \tau) + q_k \cos \lambda_k(T - \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik} h_k^{(i)}(\tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk} g_k^{(j)}(\tau) \right],$$

$$h_{2n}(\tau) = \sum_{k=1}^n E_k \left[p_k \sin \lambda_k(T - \tau) + q_k \cos \lambda_k(T - \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik} h_k^{(i)}(\tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk} g_k^{(j)}(\tau) \right].$$

Для поиска величин p_k^0 , q_k^0 , γ_{ik}^0 , γ_{jk}^0 , $k = \overline{1, n}$, $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m/2$, минимизирующих (5.2), применим метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого введем

$$F_n = \int_0^T \left[(h_{1n}(\tau))^2 + (h_{2n}(\tau))^2 \right] d\tau +$$

$$+ \beta_n \left[\sum_{k=1}^n \left(p_k C_{1k} + q_k C_{2k} + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik} C_{1k}(t_i) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk} C_{2k}(t_j) \right) - 1 \right],$$

где β_n — неопределенный множитель Лагранжа. Используя указанный метод, выполним вычисление производных функции F_n по p_k , q_k , γ_{ikk} , γ_{jkk} , $k = \overline{1, n}$, $i = 2\alpha - 1$, $j = 2\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m/2$.

Далее, приравняв полученные выражения нулю, получаем следующую систему интегральных равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^T [h_{1n}(\tau) + E_k h_{2n}(\tau)] \sin \lambda_k(T - \tau) d\tau &= -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}, \quad \int_0^T [h_{1n}(\tau) + E_k h_{2n}(\tau)] h_k^{(i)}(\tau) d\tau = -\frac{\beta_n}{2} C_{1k}(t_i), \\ \int_0^T [h_{1n}(\tau) + E_k h_{2n}(\tau)] \cos \lambda_k(T - \tau) d\tau &= -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}, \quad \int_0^T [h_{1n}(\tau) + E_k h_{2n}(\tau)] g_k^{(j)}(\tau) d\tau = -\frac{\beta_n}{2} C_{2k}(t_j), \\ i &= 2\alpha - 1, \quad \alpha = 1, \dots, \frac{m}{2}, \quad j = 2\alpha, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Дальнейшие построения решения не приводятся, так как они аналогичны действиям, приведенным в [1, 20, 24–26]. Отметим, что в результате указанных построений получим оптимальные управления $\mu_n^0(\tau)$ и $\nu_n^0(\tau)$ для любого $n = 1, 2, \dots$, которые представляются в следующем виде:

$$\mu_n^0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 \sin \lambda_k(t_i - \tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 \cos \lambda_k(t_j - \tau) \right], & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=2}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 \sin \lambda_k(t_i - \tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 \cos \lambda_k(t_j - \tau) \right], & t_1 < \tau \leq t_2, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \gamma_{mk}^0 \cos \lambda_k(t_m - \tau) \right], & t_{m-1} < \tau \leq t_m, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau), & t_m < \tau \leq t_{m+1} = T, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\nu_n^0(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n E_k \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 \sin \lambda_k(t_i - \tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 \cos \lambda_k(t_j - \tau) \right], & 0 \leq \tau \leq t_1, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n E_k \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=2}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 \sin \lambda_k(t_i - \tau) + \sum_{\substack{j=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 \cos \lambda_k(t_j - \tau) \right], & t_1 < \tau \leq t_2, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n E_k \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \gamma_{mk}^0 \cos \lambda_k(t_m - \tau) \right], & t_{m-1} < \tau \leq t_m, \\ \frac{1}{(\rho_n^0)^2} \sum_{k=1}^n E_k G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau), & t_m < \tau \leq t_{m+1} = T, \end{cases} \quad (5.4)$$

где

$$G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) = p_k^0 \sin \lambda_k(T - \tau) + q_k^0 \cos \lambda_k(T - \tau).$$

Здесь через $p_k^0, q_k^0, \gamma_{ik}^0, \gamma_{jk}^0$ обозначены значения величин $p_k, q_k, \gamma_{ik}, \gamma_{jk}, k = \overline{1, n}, i = 2\alpha - 1, j = 2\alpha, \alpha = 1, \dots, m/2$, при которых (5.2) принимает минимальное значение с условием (5.1), а

$$(\rho_n^0)^2 = \int_0^T \left[(h_{1n}^0(\tau))^2 + (h_{2n}^0(\tau))^2 \right] d\tau,$$

$$h_{1n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 g_k^{(j)}(\tau) \right],$$

$$h_{2n}^0(\tau) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[G_k(p_k^0, q_k^0, \lambda_k, T, \tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha-1 \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{ik}^0 h_k^{(i)}(\tau) + \sum_{\substack{i=2\alpha \\ \alpha=1}}^{m/2} \gamma_{jk}^0 g_k^{(j)}(\tau) \right].$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *При согласовании исходных данных задачи, указанных в п. 1, и выполнении условий вполне управляемости задача оптимального управления (2.1)–(2.9) (или (3.13), (3.17)–(3.19), (2.9)) для произвольного числа первых n гармоник имеет решение, определяемое формулами (5.3) и (5.4).*

Подставляя выражения оптимальных управлений $\mu_n^0(t)$ и $\nu_n^0(\tau)$ в (4.3), а полученное для функций $F_k^0(\tau)$ выражение — в (4.7), получим функцию $V_k^0(t), t \in [0, T], k = \overline{1, n}$. Далее, из формулы (4.1) имеем

$$V_n^0(\xi, t) = \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} \xi, \quad (5.5)$$

а из (3.9)–(3.12) получим оптимальную функцию колебания для первых n гармоник $Q_n^0(\xi, t)$ в виде

$$Q_n^0(\xi, t) = V_n^0(\xi, t) + W_n^0(\xi, t), \quad (5.6)$$

где

$$W_n^0(\xi, t) = \frac{1}{2l} \left[(l - \xi) \mu_n^0(t) + (l + \xi) \nu_n^0(t) \right]. \quad (5.7)$$

С учетом принятого обозначения (3.1) и согласно (5.5)–(5.7), оптимальная функция $Q_n^0(x, t)$ при $-l_1 \leq x \leq l$ имеет вид

$$Q_n^0(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l_1} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l_1}\right) \mu_n^0(t) + \left(1 + \frac{x}{l_1}\right) \nu_n^0(t) \right], & -l_1 \leq x \leq 0, 0 \leq t \leq T, \\ \sum_{k=1}^n V_k^0(t) \sin \frac{\pi k}{l} x + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mu_n^0(t) + \left(1 + \frac{x}{l}\right) \nu_n^0(t) \right], & 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (5.8)$$

Легко убедиться, что для $Q_n^0(x, t)$ при $x = 0$ выполняются условия сопряжения (2.4).

6. Построение решения в случае $m = 2$. Для иллюстрации полученных формул предположим, что в граничных условиях (2.3) $Q(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T$ (т.е. $\nu(t) = 0$), и в промежуточные моменты времени t_1 и t_2 ($0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 = T$) заданы функции

$$Q(x, t_1) = \varphi_1(x), \quad -l_1 \leq x \leq l, \quad (6.1)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_2} = \psi_2(x), \quad -l_1 \leq x \leq l. \quad (6.2)$$

Тогда из формулы (4.3) следует, что $F_k(t) = -\frac{a_2}{\lambda_k l} \ddot{\mu}(t)$. В этом случае интегральные условия (4.8) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \int_0^T \mu(\tau) \sin \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{1k}, & \int_0^T \mu(\tau) \cos \lambda_k (T - \tau) d\tau &= C_{2k}, \\ \int_0^T \mu(\tau) h_k^{(1)}(\tau) d\tau &= C_{1k}(t_1), & \int_0^T \mu(\tau) g_k^{(2)}(\tau) d\tau &= C_{2k}(t_2), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$\begin{aligned} C_{1k} &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k} + X_{1k} \right], & C_{1k}(t_1) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{1k}(t_1) + X_{1k}^{(1)} \right], \\ C_{2k} &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k} + X_{2k} \right], & C_{2k}(t_2) &= \frac{1}{\lambda_k^2} \left[\frac{\lambda_k l}{a_2} \tilde{C}_{2k}(t_2) + X_{2k}^{(2)} \right], \end{aligned}$$

Постоянные $\tilde{C}_{1k}$, $\tilde{C}_{2k}$, $\tilde{C}_{1k}(t_1)$, $\tilde{C}_{2k}(t_2)$, X_{1k} , X_{2k} , $X_{1k}^{(1)}$, $X_{2k}^{(2)}$ определяются из формулы (4.9).

Для простоты изложения выберем $n = 1$ ($k = 1$) и построим функцию $\mu_n^0(\tau)$ оптимального граничного управления. В выделенном случае из (5.3) получим

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \mu_1^{(1)0}(t) = \frac{1}{(\rho_1^0)^2} \left[p_1^0 \sin \lambda_1 (T - t) + q_1^0 \cos \lambda_1 (T - t) + \right. \\ \quad \left. + \gamma_{11}^0 \sin \lambda_1 (t_1 - t) + \gamma_{21}^0 \cos \lambda_1 (t_2 - t) \right], & 0 \leq t \leq t_1, \\ \mu_1^{(2)0}(t) = \frac{1}{(\rho_1^0)^2} \left[p_1^0 \sin \lambda_1 (T - t) + q_1^0 \cos \lambda_1 (T - t) + \right. \\ \quad \left. + \gamma_{21}^0 \cos \lambda_1 (t_2 - t) \right], & t_1 < t \leq t_2, \\ \mu_1^{(3)0}(t) = \frac{1}{(\rho_1^0)^2} \left[p_1^0 \sin \lambda_1 (T - t) + q_1^0 \cos \lambda_1 (T - t) \right], & t_2 < t \leq t_3 = T. \end{cases}$$

Для поиска значений p_1 , q_1 , γ_{11} , γ_{21} и β_1 будем иметь следующую линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1 + b_{11}q_1 + c_{111}^{(1)}\gamma_{11} + c_{211}^{(2)}\gamma_{21} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{11}, \\ d_{11}p_1 + e_{11}q_1 + f_{111}^{(1)}\gamma_{11} + f_{211}^{(2)}\gamma_{21} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}, \\ a_{11}^{(1)}p_1 + b_{11}^{(1)}q_1 + c_{111}^{(11)}\gamma_{11} + c_{211}^{(21)}\gamma_{21} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{11}(t_1), \\ d_{11}^{(2)}p_1 + e_{11}^{(2)}q_1 + f_{111}^{(12)}\gamma_{11} + f_{211}^{(22)}\gamma_{21} &= -\frac{\beta_1}{2}C_{21}(t_2), \\ p_1C_{11}(T) + q_1C_{21}(T) + \gamma_{11}C_{11}(t_1) + \gamma_{21}C_{21}(t_2) &= 1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{T}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, & b_{11} &= d_{11} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin^2 \lambda_1 T, & e_{11} &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 T, \\ a_{11}^{(1)} &= c_{111}^{(1)} = \frac{t_1}{2} \cos \lambda_1 (T - t_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \cos \lambda_1 T, \\ c_{211}^{(2)} &= d_{11}^{(2)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_2 \sin \lambda_1 T + \frac{t_2}{2} \sin \lambda_1 (T - t_2), \\ b_{11}^{(1)} &= f_{111}^{(1)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 T - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (T - t_1), & c_{111}^{(11)} &= \frac{t_1}{2} - \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_1, \end{aligned}$$

$$e_{11}^{(2)} = f_{211}^{(2)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_2 \sin \lambda_1 T + \frac{t_2}{2} \cos \lambda_1 (T - t_2),$$

$$c_{211}^{(21)} = f_{111}^{(12)} = \frac{1}{2\lambda_1} \sin \lambda_1 t_1 \sin \lambda_1 t_2 - \frac{t_1}{2} \sin \lambda_1 (t_2 - t_1), \quad f_{211}^{(22)} = \frac{t_2}{2} + \frac{1}{4\lambda_1} \sin 2\lambda_1 t_2.$$

7. Результаты вычислительного эксперимента. Для простоты предположим, что

$$a_1 = \frac{3}{5}a_2, \quad t_1 = 3\frac{l}{a_2}, \quad t_2 = 8\frac{l}{a_2}, \quad T = 12\frac{l}{a_2}, \quad l = 1, \quad l_1 = \frac{l}{a_2}a_1 = \frac{3}{5}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Пусть состояние струны и скорости точек при $t = 0$ заданы следующими функциями:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x^3 + l_1 x^2, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ x^3 - l x^2, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \psi_0(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}l_1 x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}l x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Пусть при $t = t_1 = 9$ задано промежуточное состояние струны в виде функции (6.1):

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -x^3 - l_1 x^2, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -x^3 + l x^2, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

при $t = t_2 = 24$ задана функция (6.2):

$$\psi_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}l_1 x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}l x, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

а при $t = T = 36$ задано следующее конечное состояние:

$$\varphi_T(x) = 0, \quad \psi_T(x) = 0, \quad -l_1 \leq x \leq l.$$

Из (6.3), (6.4) имеем

$$\begin{aligned} 18p_1 - \frac{9}{2}\gamma_{11} + \frac{456}{125\pi^3} &= 0, & 18q_1 + 12\gamma_{21} + \frac{918}{25\pi^4} &= 0, & -\frac{9}{2}p_1 + \frac{9}{2}\gamma_{11} &= 0, \\ 12q_1 + 12\gamma_{21} + \frac{612}{25\pi^4} &= 0, & p_1 \frac{912}{125\pi^3} + q_1 \frac{1836}{25\pi^4} + \gamma_{21} \frac{1224}{25\pi^4} &= 1. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Решение (7.1) имеет вид

$$p_1^0 = \gamma_{11}^0 = \frac{9500}{3(1755675 + 23104\pi^2)} \pi^5, \quad q_1^0 = \frac{95625}{4(1755675 + 23104\pi^2)} \pi^4,$$

$$\gamma_{21}^0 = 0, \quad \beta_1^0 = -\frac{46875}{4(1755675 + 23104\pi^2)} \pi^8,$$

так что

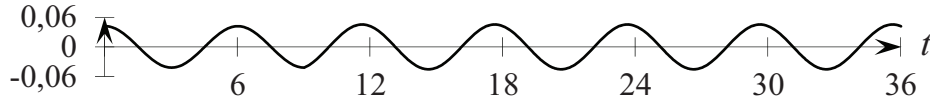
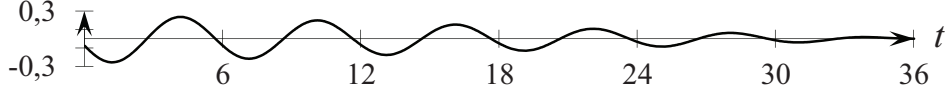
$$(\rho_k^0)^2 = \frac{46875}{8(1755675 + 23104\pi^2)} \pi^8.$$

Для функции колебания (5.8) $Q_1^0(x, t)$ получаем:

$$Q_1^0(x, t) = \begin{cases} V_1^{(1)0}(t) \sin \frac{5}{3}\pi x + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}x\right) \mu_1^{(1)0}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1^{(1)0}(t) \sin \pi x + \frac{1}{2}(1-x) \mu_1^{(1)0}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

при $0 \leq t \leq t_1$;

$$Q_1^0(x, t) = \begin{cases} V_1^{(2)0}(t) \sin \frac{5}{3}\pi x + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{6}x\right) \mu_1^{(2)0}(t), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ V_1^{(2)0}(t) \sin \pi x + \frac{1}{2}(1-x) \mu_1^{(2)0}(t), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

Рис. 1. График функции $\mu_1^0(t)$.Рис. 2. График функции $V_1^0(t)$.

при $t_1 < t \leq T$; здесь функция управления имеет вид

$$\mu_1^0(t) = \begin{cases} \frac{102}{25\pi^4} \cos \frac{1}{3}\pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{102}{25\pi^4} \cos \frac{1}{3}\pi t - \frac{608}{1125\pi^3} \sin \frac{1}{3}\pi t, & t_1 < t \leq T, \end{cases}$$

а функция $V_1^0(t)$ имеет вид

$$V_1^0(t) = \begin{cases} -\frac{304}{125\pi^3} \cos \frac{1}{3}\pi t + \frac{17(t-36)}{25\pi^4} \sin \frac{1}{3}\pi t, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{304(t-36)}{3375\pi^3} \cos \frac{1}{3}\pi t + \left(\frac{17t}{25\pi^4} - \frac{27844}{1125\pi^4} \right) \sin \frac{1}{3}\pi t, & t_1 < t \leq T. \end{cases}$$

Их графики представлены на рис. 1 и 2.

Выражения и графики (см. рис. 3–6) функций прогиба струны и ее производной представлены ниже. При $t = 0$ функции $Q_1^0(x, 0)$ и $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ равны соответственно

$$Q_1^0(x, 0) = \begin{cases} -\frac{304}{125\pi^3} \sin \frac{5}{3}\pi x + \frac{51}{25\pi^4} \left(1 - \frac{5}{3}x \right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{304}{125\pi^3} \sin \pi x + \frac{51}{25\pi^4} (1 - x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

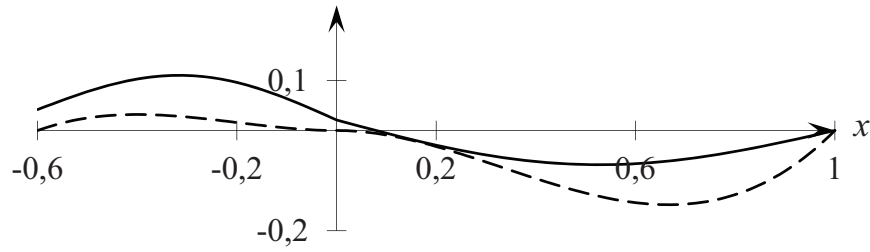
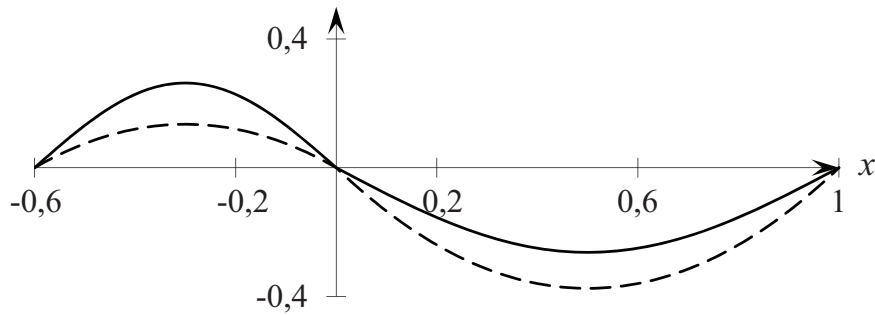
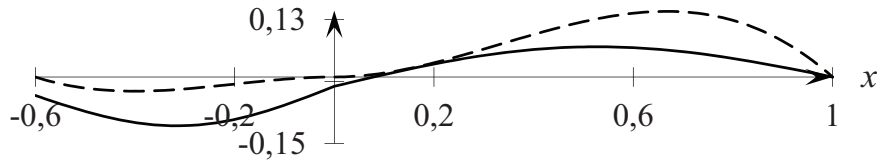
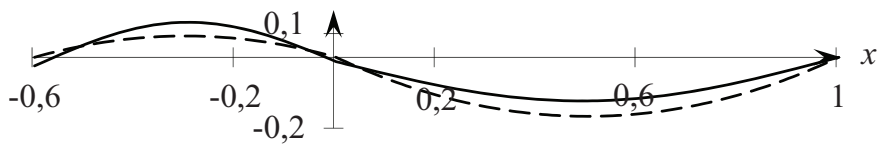
$$\left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{204}{25\pi^3} \sin \frac{5}{3}\pi x, & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{204}{25\pi^3} \sin \pi x, & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = 9$ функция $Q_1^0(x, 9)$ равна

$$Q_1^0(x, 9) = \begin{cases} \frac{304}{125\pi^3} \sin \frac{5}{3}\pi x - \frac{51}{25\pi^4} \left(1 - \frac{5}{3}x \right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{304}{125\pi^3} \sin \pi x - \frac{51}{25\pi^4} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

При $t = 24$ функция $\dot{Q}_1^0(x, 24)$ равна

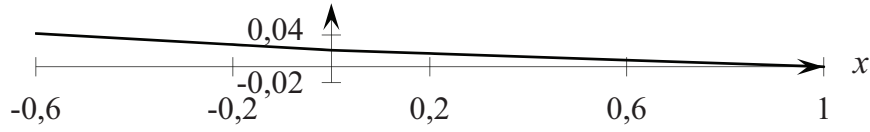
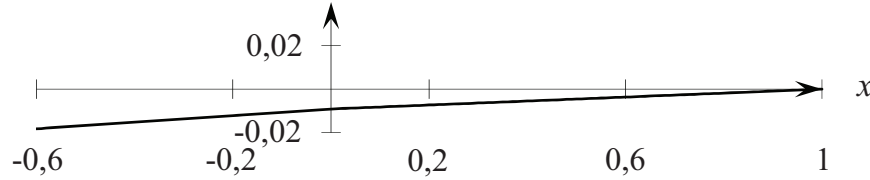
$$\left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=24} = \begin{cases} -\frac{68}{25\pi^3} \sin \frac{5}{3}\pi x - \frac{304}{3375\pi^2} \left(1 - \frac{5}{3}x \right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{68}{25\pi^3} \sin \pi x - \frac{304}{3375\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Рис. 3. Графики $Q_1^0(x, 0)$ (сплошная линия) и $\varphi_0(x)$ (пунктирная линия).Рис. 4. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x, 0)$ (сплошная линия) и $\psi_0(x) = 0$ (пунктирная линия).Рис. 5. Графики функций $Q_1^0(x, 9)$ (сплошная линия) и $\varphi_1(x)$ (пунктирная линия).Рис. 6. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x, 24)$ (сплошная линия) и $\psi_2(x)$ (пунктирная линия).

При $t = T = 36$

$$Q_1^0(x, 36) = \begin{cases} \frac{51}{25\pi^4} \left(1 - \frac{5}{3}x\right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ \frac{51}{25\pi^4} (1 - x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial Q_1^0(x, t)}{\partial t} \right|_{t=36} = \begin{cases} -\frac{304}{3375\pi^2} \left(1 - \frac{5}{3}x\right), & -l_1 \leq x \leq 0, \\ -\frac{304}{3375\pi^2} (1 - x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Рис. 7. Графики функций $Q_1^0(x, 36)$ (сплошная линия) и $\varphi_T(x) = 0$.Рис. 8. Графики функций $\dot{Q}_1^0(x, 36)$ (сплошная линия) и $\psi_T(x) = 0$.

Для сравнительного анализа полученных результатов введем величины

$$\varepsilon_1(x, t_i) = |Q_1^0(x, t_i) - \varphi_i(x)|, \quad \hat{\varepsilon}_1(x, t_j) = |\dot{Q}_1^0(x, t_j) - \psi_j(x)|,$$

где $i = 0, 1, 3$, $j = 0, 2, 3$ ($i = j = 3$ соответствуют моменту времени $t_3 = T$). Имеем

$$\begin{aligned} \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 0) &= \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 9) \approx 0,091, & \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \varepsilon_1(x, 36) &\approx 0,042, \\ \int_{-3/5}^1 \varepsilon_1(x, 0) dx &= \int_{-3/5}^1 \varepsilon_1(x, 9) dx \approx 0,082, & \int_{-3/5}^1 \varepsilon_1(x, 36) dx &\approx 0,029, \\ \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \hat{\varepsilon}_1(x, 0) &\approx 0,128, & \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \hat{\varepsilon}_1(x, 24) &\approx 0,029, & \max_{-3/5 \leq x \leq 1} \hat{\varepsilon}_1(x, 36) &\approx 0,018, \\ \int_{-3/5}^1 \hat{\varepsilon}_1(x, 0) dx &\approx 0,129, & \int_{-3/5}^1 \hat{\varepsilon}_1(x, 24) dx &\approx 0,033, & \int_{-3/5}^1 \hat{\varepsilon}_1(x, 36) dx &\approx 0,013. \end{aligned}$$

На основе представленных результатов вычислительного эксперимента можно сделать вывод, что даже при $n = 1$ поведение функции прогиба (под воздействием построенного оптимального граничного управления) достаточно близко к заданным исходным функциям.

8. Заключение. В данной статье предложен и проиллюстрирован на конкретном примере конструктивный метод построения оптимального граничного управления колебательным процессом распределенной неоднородной системы с известными условиями в начальный, промежуточные и конечный моменты времени. При этом форма прогиба и скорости точек были заданы в разные промежуточные моменты времени. Критерий качества задавался на весь интервал времени. Эффективность предлагаемого метода проиллюстрирована на модельном примере. Результаты вычислительного эксперимента показали хорошее согласование решения с исходными данными. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимального граничного управления процессами распределенных неоднородных колебаний в физических и технологических системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барсегян В. Р. Оптимальное граничное управление смещением на двух концах при колебании стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости // Диффер. уравн. процессы управл. — 2022. — № 2. — С. 41–54.

2. Барсегян В. Р. Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. — М.: Наука, 2016.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975.
4. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Об управляемости упругих колебаний последовательно соединенных объектов с распределенными параметрами// Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — 17, № 1. — С. 85–92.
5. Зверева М. Б., Найдюк Ф. О., Залукаева Ж. О. Моделирование колебаний сингулярной струны// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 2. — С. 111–119.
6. Zubov V. I. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975.
7. Ильин В. А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2011. — 440, № 2. — С. 159–163.
8. Ильин В. А. О приведении в произвольно заданное состояние колебаний первоначально покоящегося стержня, состоящего из двух разнородных участков// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 6. — С. 732–735.
9. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
10. Кулешов А. А. Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня и уравнения поперечных колебаний неоднородной струны, состоящих из двух участков разной плотности и упругости// Докл. РАН. — 2012. — 442, № 5. — С. 594–597.
11. Львова Н. Н. Оптимальное управление некоторой распределенной неоднородной колебательной системой// Автомат. телемех. — 1973. — № 10. — С. 22–32.
12. Провоторов В. В. Построение граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы струн// Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Прикл. мат. Информ. Процессы управл. — 2012. — № 1. — С. 62–71.
13. Рогожников А. М. Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами// Докл. РАН. — 2012. — 444. — С. 488–491.
14. Amara J. Ben, Beldi E. Boundary controllability of two vibrating strings connected by a point mass with variable coefficients// SIAM J. Control Optim. — 2019. — 57, № 5. — P. 3360–3387.
15. Amara J. Ben, Bouzidi H. Null boundary controllability of a one-dimensional heat equation with an internal point mass and variable coefficients// J. Math. Phys. — 2018. — 59, № 1. — P. 1–22.
16. Barseghyan V. R. Control problem of string vibrations with inseparable multipoint conditions at intermediate points of time// Mech. Solids. — 2019. — 54, № 8. — P. 1216–1226.
17. Barseghyan V. R. The problem of optimal control of string vibrations// Int. Appl. Mech. — 2020. — 56(4). — P. 471–48.
18. Barseghyan V. R. String vibration observation problem// Proc. 1 Int. Conf. “Control of Oscillations and Chaos” (Cat. No. 97TH8329), Vol. 2 (St. Petersburg, Russia, August 27-29, 1997). — St. Petersburg, 1997. — P. 309–310.
19. Barseghyan V. R. The problem of boundary control of displacement at two ends by the process of oscillation of a rod consisting of two sections of different density and elasticity// Mech. Solids. — 2023. — 58, № 2. — P. 483–491.
20. Barseghyan V. R. Optimal boundary control of a distributed heterogeneous vibrating system with given states at intermediate times// Comput. Math. Math. Phys. — 2022. — 62. — P. 2023–2032.
21. Barseghyan V. R. On the controllability and observability of linear dynamic systems with variable structure// Proc. Int. Conf. “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (Moscow, Russia, June 1-3, 2016). — IEEE, 2016. — P. 1–3.
22. Barseghyan V. R. Control of stage by stage changing linear dynamic systems// Yugoslav. J. Oper. Res. — 2012. — 22, № 1. — P. 31–39.
23. Barseghyan V. R., Barseghyan T. V. On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions// Automat. Remote Control. — 2015. — 76, № 4. — P. 549–559.
24. Barseghyan V., Solodusha S. On the optimal control problem for vibrations of the rod/string consisting of two non-homogeneous sections with the condition at an intermediate time// Mathematics. — 2022. — 10, № 23. — P. 4444.
25. Barseghyan V., Solodusha S. Optimal boundary control of string vibrations with given shape of deflection at a certain moment of time// Lect. Notes Comput. Sci. — 2021. — 12755. — P. 299–313.
26. Barseghyan V., Solodusha S. On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time// Proc. Int. Russian Automation Conference (RusAutoCon) (Sochi, September 5-11, 2021). — IEEE, 2021. — P. 343–349.

27. *Barseghyan V. R., Solodusha S. V.* On one boundary control problem of string vibrations with given velocity of points at an intermediate moment of time// J. Phys. Conf. Ser. — 2021.
28. *Mercier D., Regnier V.* Boundary controllability of a chain of serially connected Euler–Bernoulli beams with interior masses// Collect. Math. — 2009. — 60, № 3. — P. 307–334.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа С. В. Солодуши выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FWEU-2021-0006, тема No. АААА-А21-121012090034-3).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барсегян Вая Рафаелович

Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения;

Ереванский государственный университет

E-mail: barseghyan@sci.am

Солодуша Светлана Витальевна

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

E-mail: solodusha@isem.irk.ru