ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 89–98
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-89-98

УДК 517.548

ЗАДАЧИ ТИПА РИМАНА—ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ—РИМАНА С МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ИМЕЮЩИМ ОСОБЕННОСТЬ В ОКРУЖНОСТИ

© 2024 г. **А. Б. РАСУЛОВ, Ю. С. ФЕДОРОВ, А. М. СЕРГЕЕВА**

Аннотация. Целью работы является построение общего решения обобщенного уравнения Коши—Римана, коэффициент которого допускает особенность первого порядка на окружности, содержащейся в области, и исследование краевой задачи, объединяющей элементы задач Римана—Гильберта и линейного сопряжения.

Ключевые слова: уравнения Коши–Римана, особенность в коэффициенте, оператор Помпейю—Векуа, краевая задача.

RIEMANN–HILBERT-TYPE PROBLEMS FOR THE GENERALIZED CAUCHY–RIEMANN EQUATION WITH A LEADING COEFFICIENT HAVING A SINGULARITY IN A CIRCLE

© 2024 **A. B. RASULOV, Yu. S. FEDOROV, A. M. SERGEEVA**

Abstract. In this work, we construct a general solution of the generalized Cauchy–Riemann equation whose coefficient admits a first-order singularity on a circle contained in the domain, and study a boundary-value problem that combines elements of the Riemann–Hilbert problem and the linear conjugation problem.

Keywords and phrases: Cauchy–Riemann equations, singularity in the coefficient, Pompeiu—Vekua operator, boundary-value problem.

AMS Subject Classification: 30E20

1. История вопроса. В конечной области $0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ рассматривается эллиптическое уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + au + b\overline{u} = f, \tag{1_0}$$

с комплекснозначными функциями $a(z)$, $b(z)$, $f(z)$, заданными в ограниченной области D, причем коэффициенты a, b этих уравнений могут допускать в множестве $l \in D$ степенные особенности по z.

Обозначим через $C_\lambda(\overline{D}, 0)$, $\lambda < 0$, пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \to 0$. Оно снабжается нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|,$$

относительно которой указанное пространство является банаховым.

Классическая теория И. Н. Векуа обобщенных аналитических функций (см. [3]) охватывает случай, когда коэффициенты и правая часть уравнения (1_0) принадлежат пространству $L^p(D)$

с показателем $p > 2$ (везде далее считаем это условие выполненным). Коэффициенты таких систем могут допускать слабые особенности с требованием их p-интегрируемости в области D. Уравнения с коэффициентами $a \in C_{-\alpha-1}$, $\alpha \geqslant 0$, и $b \in C_{-1}$ не удовлетворяют этому условию.

В монографии Л. Г. Михайлова [5] решение уравнения (1_0) с коэффициентами $a, b \in C_{-1}(\overline{D}, 0)$ ищется в классе $C_{-\lambda}$, $0 < \lambda < 1$. Разрешимость интегрального уравнения, к которому сводится уравнение (1_0), доказывается при определенных условиях малости этих коэффициентов.

З. Д. Усмановым [11] построена теория уравнения (1_0) при $a = 0$, $b(z){=}\bar{z}^{-1}\beta e^{ik\varphi}$, $k \in Z$. Однако случай, когда $b(z) = \bar{z}^{-1}(\beta_1 e^{ik\varphi} + \beta_2 e^{im\varphi})$, где $\beta_1{\neq}\beta_2$, приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, исследование которой представляет собой весьма нетривиальную проблему и ранее не проводилось. Также показано, что для случая $a = 0$, $b = \lambda|z|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, существуют решения уравнения (1_0) в виде рядов Фурье, коэффициенты которых определяются через функции Бесселя и Макдональда.

На необходимость изучения уравнений с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка, впервые было указано И. Н. Векуа [3] и А. В. Бицадзе [2]. Понятие же сверхсингулярной особенности принадлежит Н. Р. Раджабову [8].

В последние время исследованию уравнения (1_0), а также других аналогичных уравнений с сингулярными коэффициентами были посвящены многочисленные работы (см., например, [8, 12, 14] и др.).

В [13] изучалась разрешимость задачи Римана—Гильберта для уравнения

$$w_{\bar{z}} = \frac{Q(z)}{P(z)} w(z) + a(z)w + b(z)\overline{w}, \quad |z| < 1.$$

где полином $P(z)$ внутри круга $|z| \leqslant 1$ имеет простые корни, $a(z)$, $b(z) \in L^p(D)$. Показано, что число непрерывных решений зависит не только от индекса, но и от места расположения и типа особенностей.

В настоящей статье изучен эффект влияния неизолированных особенностей в младшем коэффициенте (т.е. когда младший коэффициент имеет особенность по замкнутой линии l, лежащей внутри области) уравнения (1_0) [ниже уранение (1)] на постановку краевых задач. Оказывается, условие задачи Римана—Гильберта по границе области недостаточно для ее корректной постановки. Естественной постановкой задачи является объединение элементы задач Римана—Гильберта на границе области и задачи линейного сопряжения на окружности — носителе сингулярности коэффициента лежащего внутри области.

2. Интегральное представление решения. Пусть область D ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки, содержит окружность $l = \{z : |z| = R\}$), и $D_0 = D \backslash (\{0\} \cup l)$. Кроме того, для связных компонент открытого множества D_0 используем обозначения $D_1 = \{z : |z| < R\}$, $D_2 = D \cap \{|z| > R\}$.

В открытом множестве D_0 рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{z a_0(z)}{|z|(|z| - R)} u + \frac{b_0(z)}{|z|^m} \overline{u} = f(z), \tag{1}$$

где функции $a_0, b_0 \in C(\overline{D})$. Относительно правой части f предполагаем, что она принадлежит классу $L^p(G_0)$, в каждой подобласти $G_0 \subseteq D_0$, лежащей вне некоторой окрестности точке $z = 0$ и границы Γ.

Напомним некоторые известные факты из теории эллиптических систем, изложенной в [1, 3].

Пусть в некотором открытом множестве Q на плоскости задана линейная эллиптическая система первого порядка с постоянными старшими коэффициентами, младшие коэффициенты и правая часть которой принадлежат $L^p_{\mathrm{loc}}(Q)$, $p > 2$, т.е. принадлежат $W^{1,p}(Q_0)$ в любой ограниченной области Q_0, лежащей в Q вместе со своей границей. Тогда на основании внутренней регулярности (см. [3]) любое слабое решение u этого уравнения регулярно в том смысле, что оно принадлежит классу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(Q)$ и удовлетворяют рассматриваемой системе. В силу теоремы вложения функция u в действительности принадлежит классу $C^\mu(\overline{Q_0})$ с показателем $\mu \leqslant (p-2)/p$. Этот факт был доказан И. Н. Векуа в [3]. В соответствии с этим в дальнейшем функция $u(z) \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D_0)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

Рассмотрим сначала случай

$$u_{\bar z} - au = f \tag{2}$$

с коэффициентом

$$a(z) = \frac{a_* z}{|z|(|z| - R)} + A_0(z), \quad a_* \in \mathbb{C}, \quad A_0(z) \in L^p(D).$$

При построении общего решения уравнения (2) и его описания существенную роль играет интегральный оператор Помпейю—Векуа:

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_D \frac{f(\zeta) d_2\zeta}{\zeta - z},$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, которая обладает свойством $(Tf)_{\overline{z}} = f$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади.

Лемма 1. *Одним из решений уравнения $\Omega_{\bar z} = a$ в множестве D_0 является функция*

$$\Omega(z) = 2a_* \ln \big||z| - R\big| + (TA_0)(z), \quad z \in D_0. \tag{3}$$

Доказательство непосредственно получится из равенств $\big(\ln\big||z| - R\big|\big)_{\bar z} = z(|z|(|z| - R))^{-1})$ и $(TA_0)_{\overline{z}} = A_0$.

Теорема 1. *Пусть функция $\Omega(z)$ имеет вид* (3) *и $e^{-\Omega} f \in L^p(D)$. Тогда общее решение уравнения* (2) *в классе $C(\overline{D} \setminus l)$ дается формулой*

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega} f)],$$

где $\phi \in C(\overline{D} \setminus l)$ — произвольная аналитическая функция в открытом множестве $D \setminus \{l\}$.

Утверждение показывает, что $u(z) = O(1)(|z| - R|^{2a_*})$ при $|z| \to R$. Используя обозначение $f_0 = e^{-\Omega} f$, уравнение (1) с ненулевыми $a_0(z)$ и $b_0(z)$ с помощью леммы 1 по отношению к функции $\varphi = e^{-\Omega} u \in L^p(D)$ можно свести к уравнению

$$\varphi_{\bar z} + b_0 c \overline{\varphi} = f_0,$$

которое эквивалентным образом редуцируется к интегральному уравнению

$$\varphi + T(b_1 \overline{\varphi}) = \phi + T f_0, \tag{4}$$

где $b_1 = b_0 c$, $c(z) = e^{-2i \operatorname{Im} \Omega(z)}$, функция $\phi \in H(\overline{D})$ аналитична в D. Для исследования уравнения (4) необходимо предварительно изучить действие в различных пространствах интегрального оператора вида

$$(K_0 \varphi)(z) = \int\limits_D \frac{\varphi(\zeta) d_2\zeta}{|\zeta|^m |\zeta - z|^\alpha}, \quad z \in D,$$

где положительные m, α удовлетворяют условиям

$$0 < m < 1 \leqslant \alpha < \frac{3 - m}{2},$$

так что $0 < 3 - m - 2\alpha < 1$.

Лемма 2 (см. [15])**.** *Пусть*

$$p > \frac{2}{3 - m - 2\alpha}, \quad \mu = 3 - m - 2\alpha - \frac{2}{p}.$$

Тогда оператор $K_0 : L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$ ограничен.

Из леммы 2 следует, что при $m + \mu + 2/p < 1$ оператор $Tb_1 : L^p(D) \to C^\mu(\overline{D})$ ограничен и компактен в каждом из пространств $L^p(D)$, $C^\mu(\overline{D})$, принадлежащих классу C^μ в каждой из компонент связности множества D_0. Согласно (4) в представлении общего решения уравнения (2) важную роль играет линейный интегральный оператор $K\varphi = Tb_1\overline{\varphi}$, а также связанное с ним уравнение Фредгольма $\varphi + K\varphi = f$.

Теорема 2.

(a) *Однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ в классе $C(\overline{D})$ имеет конечное число линейно независимых (над полем $\mathbb{R}$) решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H(\overline{D})$ и существуют такие линейно независимые суммируемые функции $h_1, \dots, h_n$, что условия ортогональности*

$$\operatorname{Re}\int\limits_D f(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{5}$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$.

(b) *При выполнении условий (5) любое решения уравнения $\varphi + K\varphi = f$ дается формулой $\varphi = f + Pf$, с оператором*

$$(Pf)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \frac{[p_1(z,\zeta)f(\zeta) + p_2(z,\zeta)\overline{f(\zeta)}]d_2\zeta}{|\zeta|^m|\zeta - z|^\alpha}, \tag{6}$$

где $1 \leqslant \alpha < (3-m)/2$, который действует из пространства $C(\overline{D})$ в пространство $H(\overline{D})$.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 любое решение и уравнения (1) с правой частью $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p(D)$ представимо в виде*

$$u = e^{\Omega}\left[\phi + Tf_0 + P(\phi + Tf_0) + \sum_1^n \xi_j\varphi_j\right] \tag{7}$$

с произвольными $\xi_j \in \mathbb{R}$, и функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$, аналитическая в области D, удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re}\int\limits_D (\phi + Tf_0)(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Схемы доказательства теорем 2, 3 приведены в [15].

3. Постановка краевой задачи. Для уравнения (2), исследуем краевую задачу, объединяющую элементы задач Римана—Гильберта на Γ и линейного сопряжения на l.

Задача R. Найти регулярное решение уравнения (2) в классе $e^{-\Omega}u \in H(\overline{D_j})$, $j = 1, 2$, по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t)u\Big|_\Gamma = g(t), \quad t \in \Gamma; \tag{A}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) - G_1(t)(e^{-\Omega}u)^-(t) = g_1(t), \quad t \in l, \tag{B}$$

где знаки $+$ и $-$ указывают на граничные значения со стороны D_1 и D_2.

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на ее данные:

(i) $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$;

(ii) коэффициенты $G(t) \in H(\Gamma)$, $G_1(t) \in H(l)$ всюду отличны от нуля, причем $\ln G_1 \in H(l)$;

(iii) правые части краевых условий удовлетворяют условиям $g(t) \in H(\Gamma)$, $g_1(t) \in H(l)$.

Предварительно напомним хорошо известные результаты относительно классической задачи Римана—Гильберта в монографиях Н. И. Мусхелишвили [6] и Ф. Д. Гахова [4]:

Классическая задача Римана—Гильберта. Найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in H(\overline{D})$, которая на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} G\phi\Big|_{\Gamma} = g, \tag{8}$$

где функция $G = G_1 + iG_2 \in H(\Gamma)$ всюду отлична от нуля, H — класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем (см. [6]).

В дальнейшем воспользуемся компактным изложением А. П. Солдатова относительно решения задачи Римана—Гильберта (8) и вкратце приведем некоторые факты о разрешимости этой задачи в случае единичного круга $\mathbb{D}$ с границей $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$. С этой целью функцию ϕ продолжим в область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D} = \{|z| > 1\}$, полагая, что она удовлетворяет условию $\phi = \phi_*$, где ϕ_* определяется с помощью инверсии $\phi_*(z) = \overline{\phi(1/\overline{z})}$. Операция $\phi \to \phi_*$, являющаяся линейной, над полем $\mathbb{R}$ инволютивна, т.е. $(\phi_*)_* = \phi$. Видно, что $\phi_*^{\pm}(t) = \overline{\phi^{\mp}}$, $t \in \mathbb{T}$. Очевидно, задачу (8) с коэффициентом G можем представить в форме

$$\phi^+ - \widetilde{G}\phi^- = \widetilde{g} \tag{9}$$

по отношению к коэффициенту $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и правой части $\widetilde{g} = 2g/G$.

Исследование последней задачи с коэффициентом $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ осуществляется с помощью так называемой $\widetilde{G}$-канонической функции. По определению под ней понимается функция $X(z)$, которая аналитична в каждой связной компоненте $\mathbb{D}$, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ и продолжается по непрерывности на ее замыкание $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}}$ и всюду отлична от нуля, включая ее граничные значения $X^{\pm}$, вместе с $X^{-1}(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности и удовлетворяет соотношению

$$X^+ = \widetilde{G}X^-.$$

Лемма 3. *Пусть* $\varkappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G$, *так что функция* $\theta(t) = \arg G(t) - \varkappa \arg t \in H(\mathbb{T})$, *и пусть*

$$R(z) = \begin{cases} 1, & |z| < 1, \\ z^{2\varkappa}, & |z| > 1, \end{cases} \qquad \Theta(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\pi - 2\theta(t)}{t - z}dt.$$

Тогда функция

$$X(z) = R(z)e^{\Theta(z) - \Theta(0)/2}$$

является $\widetilde{G}$*-канонической и обладает свойством*

$$X_*(z) = X(z)z^{-2\varkappa}.$$

Теорема 4. *В условиях леммы* 3 *все решения задачи* (8) *в классе* $H(\overline{\mathbb{D}})$ *описываются формулой*

$$\phi(z) = Ig(z) + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa}, \quad Ig(z) \equiv \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{dt}{t - z}, \tag{10}$$

где функция g *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}q(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa - 2}, \tag{11}$$

где P^0_k — *класс многочленов степени* k.

Доказательство. Как уже отмечалось, при дополнительном условии $\phi = \phi_*$ задача (8) эквивалентна задаче (9). Последняя представляет собой задачу линейного сопряжения по отношению к $\widetilde{G} = -\overline{G}/G$ и $g = f/G$. Следовательно, мы приходим к теореме 4.

Очевидно, при $\varkappa \leqslant 0$ размерность пространства $P^0_{-2\varkappa}$ над полем $\mathbb{R}$ равна $-2\varkappa + 1$. Аналогично, при $\varkappa \geqslant 0$ размерность пространства $P^0_{2\varkappa - 2}$ равна $2\varkappa - 1$. Во всех случаях индекс задачи (8) равен $-2\varkappa + 1$ и, в частности, всегда отличен от нуля.

Остановимся еще на граничном значении функции

$$A(z) = \Theta(z) - \Theta(0)/2, \quad z \in \mathbb{D},$$

фигурирующей в представлении канонической функции $X(z)$. В явном виде

$$A(z)=\frac{\pi i}{2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\theta(t)dt}{t-z}+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\theta(t)d_1t,\quad A(0)=\frac{\pi i}{2}-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\theta(t)d_1t.$$

По формуле Сохоцкого—Племеля отсюда

$$A^+(t_0)=\frac{\pi i}{2}-ia(t_0)-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\theta(t)dt}{t-t_0}+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\theta(t)d_1t.$$

Полагая $e^{2i\beta}=t_0/t$, можем записать

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{id_1t}{1-e^{2i\beta}}=\frac{i-\operatorname{ctg}\beta}{2}d_1t,$$

так что

$$A^+(t_0)=\frac{\pi i}{2}-ia(t_0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}[\theta(t)\operatorname{ctg}\beta]d_1t.$$

Следовательно, функцию A можем однозначно определить по условиям

$$\operatorname{Im}A^+=\frac{\pi}{2}-\theta,\quad \operatorname{Re}A(0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}\theta(t)d_1t. \tag{12}$$

Доказательство завершено. □

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma=\partial D$ принадлежит классу $C^{1,\mu}$; тогда по теореме Келлога конформное отображение $w=\omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ или, что равносильно, его производная удовлетворяет условию $\omega'\in H(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0\in D$; по условию $\omega(z_0)=0$.

Теорема 5. *Пусть $\varkappa=\operatorname{Ind}_\Gamma G$, так что $\theta(t)=\arg G(t)-\varkappa\arg t\in H(\Gamma)$, и пусть $X(z)=e^{\Theta(z)-\Theta(0)/2}$, где функция $\Theta\in H(\overline{D})$ определяется как решение задачи Дирихле*

$$\operatorname{Im}\left(\Theta-\frac{1}{2}\Theta(0)\right)^+=\frac{\pi}{2}-\theta,\quad \operatorname{Re}\Theta(z_0)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\theta(t)|\omega'(t)|d_1t. \tag{13}$$

Тогда все решения задачи (8) *в классе $H(\overline{D})$ описываются формулой*

$$\phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)dt}{\omega(t)-\omega(z)}+X(z)p[\omega(z)],\quad p\in P^0_{-2\varkappa}, \tag{14}$$

где функция g удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)}{G(t)X^+(t)}q[\omega(t)]\omega'(t)dt=0,\quad q\in P^0_{2\varkappa-2}. \tag{15}$$

Доказательство почти очевидно.

4. Решение задачи R.

Решения задачи **R** рассмотрим в двух случаях: (a) область D является единичным кругом $\mathbb{T}$; (b) D — произвольная конечная область, ограниченная гладким замкнутым контуром Γ.

Случай (a). Рассмотрим задачу **R** в случае единичного круга $\mathbb{T}$; тогда $l=\{z:|z|=R<1\}$. Рассмотрим задачу (B). Пусть $G_1(t)=1$, $g_1(t)=0$ для всех $t\in l$. Тогда она примет вид

$$(e^{-\Omega}u)\big|_l^+=(e^{-\Omega}u)\big|_l^-, \tag{B$_0$}$$

где $\Omega(z)=2a_*\ln\big||z|-R\big|+(TA_0)(z)$. Из формулы $u=e^{\Omega}[\phi+T(e^{-\Omega}f)]$ теоремы 1 видно, что аналитическая функция ϕ определяется по u однозначно и восстанавливается по формуле

$$\phi=e^{-\Omega}u-Te^{-\Omega}f.$$

Соответствие между решением $e^{-\Omega}u \in H(\overline{\mathbb{T}})$ уравнения (2) и аналитический в $\mathbb{T}$ функцией $\phi \in H(\overline{\mathbb{T}})$ является взаимно однозначным. Так как $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p$, $p > 2$, то $(Tf_0)^{\pm}(t) \in H(\overline{\mathbb{T}})$ и $(Tf_0)^{+}(t) = (Tf_0)^{-}(t)$, $t \in l$. Следовательно, задача (B_0) в данном случае сводится к эквивалентной задаче: $\phi^+(t) = \phi^-(t)$, $t \in l$, где через $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ соответственно обозначены предельные значения функций $\phi^+(z)$ и $\phi^-(z)$ соответственно из областей D_1 и D_2.

Известно, что условие $\phi^+ = \phi^-$ на l определяет аналитическую функция в области $D_1 \cup D_2 \cup l$. Этот факт позволяет нам переходить к изучению краевой задачи A и перевести ее к краевой задаче Гильберта со следующими данными:

$$\operatorname{Re} G_0\phi\big|_{\Gamma} = g_0,$$

с коэффициентом $G_0 = G(e^{\Omega})\big|_{\Gamma}$ и правой частью

$$g_0 = f - \operatorname{Re}\left[G(e^{\Omega}Te^{-\Omega}f)\big|_{\Gamma}\right],$$

и сформулировать ее решение в виде теоремы 5 в рассмотренном случае (а).

Переходим к второму случаю, когда $G_1(t) \neq 1$, $g_1(t) \neq 0$ для всех $t \in l$.

Теорема 6. *При выполнении условий теоремы* 1 *задача* $\boldsymbol{R}$ *является фредгольмовой в классе*

$$\left\{u : e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\right\} \tag{16}$$

и ее индекс равен

$$\operatorname{Ind} R = 1 - 2\varkappa, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi}\arg G(t)\big|_{\Gamma}.$$

Более точно, все решения задачи $\boldsymbol{R}$ *в классе* $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$u = e^{\Omega}\left[\phi + T(e^{-\Omega}f)\right],$$

где функция $\phi(z)$ *определяется по формуле*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_{l}\frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{dt}{t-z} + X(z)p(z), \quad p \in P^0_{-2\varkappa}, \tag{17}$$

где каноническая функция X *фигурирует в теореме* 4 *и функция* g_1^* *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)}p(t)dt = 0, \quad p \in P^0_{2\varkappa-2}, \tag{18}$$

причем $g_1^* = g - \operatorname{Re}\left[\alpha e^{\Omega}(Tf_0)\big|_{\Gamma}\right] - \operatorname{Re}[GX_1\psi]\big|_{\Gamma}$,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)}dt, \quad g_2 = g_1 - (1 - G_1)(Tf_0)\big|_{l}.$$

По теореме 1 общее решение u уравнения (2) в классе (16) представимо в виде

$$u = e^{\Omega}[\phi + T(e^{-\Omega}f)],$$

где аналитическая в $D \setminus l$ функция ϕ принадлежит $H(D_1 \cup D_2)$. Кроме того, в силу леммы 1, имеем $\Omega \in H(\Gamma)$. Поэтому, подставляя данное представление в (A) и (A), в результате для ϕ получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0\phi\big|_{\Gamma} = g_0, \quad (\phi^+ - G_1\phi^-)\big|_{l} = g_2, \tag{19}$$

с коэффициентом $G_0 = G(e^{\Omega})\big|_{\Gamma}$ и правыми частями

$$g_0 = f - \operatorname{Re}\left[G(e^{\Omega}Tf_0)\big|_{\Gamma}\right], \quad g_2 = g_1 - (1 - G_1(t)f_0\big|_{l}.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\arg G_0\big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi}\arg G\big|_{\Gamma} = \varkappa. \tag{20}$$

Согласно хорошо известным свойствам интеграла типа Коши (см. [6]) функция

$$X_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{\ln G_1(t)(t)dt}{t-z}\right), \quad z \in D_0 = D_1 \cup D_2, \tag{21}$$

принадлежит классу $H(\overline{D}_j)$, $j=1,2$, причем ее граничные значения $\ln X_1^\pm \in H(l)$ на окружности l удовлетворяет краевому условию $X_1^+ = G_1 X_1^-$. Поэтому второе краевое условие в (19) можно записать в виде

$$\frac{\phi^+}{X_1^+} - \frac{\phi_1^-}{X_1^-} = \frac{g_2}{X_1^+}.$$

Функция

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)}dt$$

принадлежит классу $H(\overline{D}_j)$, $j=1,2$, и удовлетворяет краевому условию

$$\psi^+(t) - \psi^-(t) = \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)}.$$

Следовательно, разность

$$\phi_1(z) = \frac{\phi(z)}{X_1(z)} - \psi(z) \tag{22}$$

аналитична в области D и принадлежит классу $H(\overline{D})$. В результате подстановки (22) в первое условие (18) приводит к эквивалентной задаче Римана—Гильберта

$$\mathrm{Re}(\alpha_1\phi_1)\big|_\Gamma = f_1,$$

где $\alpha_1 = G_0X_1\big|_\Gamma$ и $f_1 = f_0 - \mathrm{Re}[G_0X_1\psi]\big|_\Gamma$. Нетрудно видеть, что равенство (19) сохраняется и для G_1. Положим

$$g_1^* = g - \mathrm{Re}\left[G(e^\Omega T e^{-\Omega} f)\big|_\Gamma\right] - \mathrm{Re}[GX_1\psi]\big|_\Gamma, \tag{23}$$

где

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{g_2(t)}{X_1^+(t)(t-z)}dt, \quad g_2 = g_1 - (1-G_1(t))[T(e^{-\Omega}f)]\big|_l.$$

Обратимся к общему случаю односвязной области D. Пусть простой контур $\Gamma \in C^{1,\mu}$; тогда по теореме Келлога конформное отображение $w=\omega(z)$ этой области на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Зафиксируем точку $z_0 \in D$ по условию $\omega(z_0)=0$. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *При выполнении условий теоремы* 1 *задача* $\boldsymbol{R}$ *является фредгольмовой в классе*

$$\{u : e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\}$$

и ее индекс

$$\mathrm{Ind}\, R = 1 - 2\varkappa, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi}\arg G(t)\big|_\Gamma.$$

Более точно, в обозначениях теоремы 6 *и* (21), (23) *все решения задачи* $\boldsymbol{R}$ *в классе* $H(\overline{D})$ *описываются формулой*

$$u = e^\Omega(\phi + Tf_0), \quad \phi(z) = X_1(z)\left[\frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)}\frac{\omega'(t)dt}{\omega(t)-\omega(z)} + \psi(z) + X(z)p[\omega(z)]\right],$$

где $p \in P^0_{-2\varkappa}$, *а функции* q, g_1^* *удовлетворяет условиям ортогональности*

$$\int\limits_\Gamma \frac{g_1^*(t)}{G(t)X^+(t)}q[\omega(t)]\omega'(t)dt = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2}.$$

5. Краевая задача для уравнения (1)**.** Теперь рассмотрим выше рассмотренную задачу для общего уравнения (1).

Задача $\mathbf{R}_1$. Найти регулярное решение u уравнения (1) в классе

$$e^{-\Omega}u \in H(\overline{D_j}), \quad j = 1, 2,$$

по краевым условиям

$$\operatorname{Re} G(t)u\big|_\Gamma = g(t), \quad t \in \Gamma; \tag{A}$$

$$(e^{-\Omega}u)^+(t) = (e^{-\Omega}u)^-(t), \quad t \in l, \tag{B$_0$}$$

где знаки $+$ и $-$ указывают на граничные значения со стороны D_1 и D_2.

Эту задачу рассматриваем при следующих требованиях на ее данные:

(i) $e^{-\Omega}f \in L^p(D)$;

(ii) коэффициент $G(t) \in H(\Gamma)$ всюду отличен от нуля;

(iii) правая часть краевого условия удовлетворяет условию $g(t) \in H(\Gamma)$.

Для решения этой задачи используем теорему 3 об интегральном представлении решений уравнения (1).

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $f_0 = e^{-\Omega}f \in L^p(D)$, $p > 2$. *Тогда задача* $\boldsymbol{R}$ *является фредгольмовой в классе* $\{u, e^{-\Omega}u \in H(\overline{D})\}$ *и ее индекс равен* $1 - 2\varkappa$. *Другими словами, однородная задача имеет конечное число m линейно независимых решений, неоднородная задача разрешима при выполнении некоторого числа m' условий ортогональности на правую часть f уравнения* (1) *и правой части g задачи* $\boldsymbol{R}_1$, *причем* $m - m' = 1 - 2\varkappa$.

Доказательство. Подставляя представление (7) в задачу $\mathbf{R}_1$, для аналитической функции ϕ вместе с дополнительными условиями

$$\operatorname{Re} \int_D (\phi + Tf_0)(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

получим краевую задачу

$$\operatorname{Re} G_0(\phi + R\phi)\big|_\Gamma + \sum_1^n \xi_j \operatorname{Re}(G_0\varphi_j)\big|_\Gamma = g_0, \quad \big[(1+P)\phi\big]^+ - \big[(1+P)\phi\big]^- = g_1 \tag{24}$$

с коэффициентом $G_0 = Ge^h\big|_\Gamma$ и правыми частями

$$g_0 = g - \operatorname{Re}\big[G_0(f_0 + Pf_0)\big]\big|_\Gamma, \quad g_1 = \big[(1+P)f_0\big]^+ - \big[(1+P)f_0\big]^-.$$

Неизвестными в этой задаче вместе с ϕ являются и вещественные числа ξ_j.

Из теоремы 3 следует, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $P : C(\overline{D}) \to C^\varepsilon(\overline{D})$ ограничен, функция $f_0 \in H(\overline{D})$, а функция $\phi(z) \in H(\overline{D})$ аналитична в области D. Отсюда следует, что второе условие задачи (24) эквивалентно к $\phi^+(t) = \phi^-(t)$, $t \in l$. Это позволяет нам записать соотношения (24) в следующем операторном виде:

$$R^0\phi + P^0\phi + \sum_1^n \xi_j\varphi_j^0 = g^0, \quad \operatorname{Re}\int_D \phi(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta = \eta_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{25}$$

где

$$R^0\phi = \operatorname{Re} G_0\phi\big|_\Gamma, \quad P^0\phi = \operatorname{Re} G_0(P\phi)\big|_\Gamma, \quad \varphi_j^0 = \operatorname{Re} G_0\varphi_j\big|_\Gamma, \quad g^0 = g_0, \quad \eta_j = -\operatorname{Re}\int_D f_0(\zeta)h_j(\zeta)d_2\zeta.$$

Обозначим X банахово пространство функций ϕ, которые аналитичны в D и принадлежат $H(\overline{D})$. Пусть $Y^0 = H(\Gamma)$ — пространство вещественных функций. Тогда при достаточно малом показателе Гельдера μ оператор $R^0 : X \to Y^0$ ограничен, а с учетом теоремы 3 оператор $P^0 : X \to Y^0$ компактен. Как видно из теоремы 8, оператор $R^0 : X \to Y^0$ фредгольмов и его индекс равен $1 - 2\varkappa$, поэтому на основании известных свойств (см. [7, 10]) фредгольмовых операторов это же верно и для оператора $N = (R^0 + P^0)$. С другой стороны, оператор системы (25) можно рассматривать как ограниченный оператор $\widetilde{N} : X \times \mathbb{R}^n \to Y^0 \times \mathbb{R}^n$, главная часть которого совпадает с N. Поэтому (см. [7, 10]) оператор $\widetilde{N}$ также фредгольмов и его индекс $\operatorname{Ind} \widetilde{N} = \operatorname{Ind} N = 1 - 2\varkappa$. Остается заметить (см. [6]), что система (25) эквивалентна исходной задаче $\mathbf{R}_1$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1959.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
5. *Михайлов Л. Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. — Душанбе, 1963.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
7. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
8. *Раджабов Н. Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. — Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
9. *Солдатов А. П.* Краевая задача линейного сопряжения теории функций// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — *43*, № 1. — С. 184–202.
10. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I// Совр. мат. Фундам. напр. — 2017. — *63*, № 1. — С. 1–189.
11. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши—Римана с сингулярной точкой. — Душанбе: Изд-во АН Тадж. ССР, 1993.
12. *Abdymanapov S. A., Tungatarov A. B.* Some classes of elliptic systems in the plane with singular coefficients. — Almaty: Nauka, 2005.
13. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity// J. Differ. Equations. — 2004. — *196.* — P. 67–90.
14. *Meziani A.* Representation of solutions of a singular CR equation in the plane// Complex Var. Ellipt. Equations. — 2008. — *53.* — P. 1111–1130.
15. *Rasulov A. B.* Representation of the general solution of an equation of the Cauchy–Riemann type with a supersingular circle and a singular point// Differ. Equations. — 2017. — *53.* — P. 809–817.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Расулов Абдурауф Бабаджанович (Rasulov Abdurauf Babadzhanovich)
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University "Moscow Power Engineering Institute," Moscow, Russia)
E-mail: `rasulzoda55@gmail.com, RasulovAB@mpei.ru`

Федоров Юрий Сергеевич (Fedorov Yurii Sergeevich)
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University "Moscow Power Engineering Institute," Moscow, Russia)
E-mail: `FedorovYS@mpei.ru`

Сергеева Анна Марксовна (Sergeeva Anna Marksovna)
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»
(Russian National Research University "Moscow Power Engineering Institute," Moscow, Russia)
E-mail: `hmelevs@ya.ru, HmelevsAM@mpei.ru`