ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 232 (2024). С. 3–12
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-232-3-12

УДК 517.9, 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

© 2024 г. **О. П. БАРАБАШ**

Аннотация. Работа посвящена построению приближенного решения параболического дифференциального уравнения с оператором Бесселя. Решение задачи ищется в виде линейной комбинации кусочно непрерывных базисных функций, имеющих компактный носитель. Построение решения осуществляется в два этапа. Первоначально проводится аппроксимация по пространственной переменной с использованием проекционно-сеточного метода Бубнова—Галеркина. Затем конечно-разностным методом проводится приближение по t. Возникающая при этом система уравнений имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

Ключевые слова: оператор Бесселя, метод Бубнова—Галеркина, финитные функции, проекционно-сеточный метод, конечно-разностный метод.

APPLICATION OF THE PROJECTION-GRID METHOD FOR SOLVING NONSTATIONARY PROBLEMS

© 2024 **O. P. BARABASH**

Abstract. The work is devoted to constructing approximate solutions of a parabolic differential equation with the Bessel operator. Solutions are sought in the form of a linear combination of piecewise continuous, compactly supported basis functions. The construction of the solution is performed in two stages. Initially, the approximation in a spatial variable is performed by using the Bubnov–Galerkin projection-grid method. Then the approximation in t is carried out by using the finite-difference method. The resulting system of equations is solved by the tridiagonal matrix algorithm.

Keywords and phrases: Bessel operator, Bubnov–Galerkin method, finite functions, projection-grid method, finite-difference method.

AMS Subject Classification: 65M60, 35K67

1. Введение. Проекционно-сеточные методы в настоящее время являются чрезвычайно действенными инструментами решения задач математической физики: теплообмена, гидродинамики, электродинамики, механики твердого деформируемого тела и топологической оптимизации.

Общая теория разностных методов разработана А. А. Самарским [11]. Различные приближенные методы решения краевых задач изложены в монографии Г. И. Марчука [8], также классический вариационный подход описан в книге С. Г. Михлина [9]. Наиболее обширные результаты, полученные при численном решении, относятся к регулярным краевым задачам, порождаемым невырожденными уравнениями с гладкими коэффициентами. Эти исследования опираются на теорию аппроксимаций в функциональных пространствах. Гораздо меньше изучены подобные вопросы для сингулярных уравнений.

В этой связи необходимо отметить работу [10], в которой рассмотрено уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(x^k p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x)$$

для $0\leqslant k\leqslant 5/2$, $p(x)>0$. В ней указан порядок аппроксимации в энергетическом пространстве, зависящий от k и гладкости функции f.

В работе [6] В. В. Катраховым и А. А. Катраховой изучена сходимость метода Галеркина для краевой задачи

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{k}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+qu=f(x,y),\quad \frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=0,\quad u\Big|_{\Gamma^+}=0,$$

где

$$\Gamma^+=\partial\Omega^+\{(x,y):x=0\},\quad \Omega^+\subset R^2_+.$$

Ю. Л. Гусманом и А. А. Оганесяном [3] был развит вариационно-разностный подход для двумерного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+qu=f(x,y),$$

где $0\leqslant\mu<1$. Получены точные по порядку оценки погрешности метода.

Работа [2] посвящена исследованию сингулярных краевых задач в контексте изучения сходимости приближенных методов решения.

Вопрос построения эффективных численных методов для сингулярных и вырождающихся краевых задач, несомненно, является актуальным. В настоящей статье на основе вариационного подхода устанавливается разрешимость сингулярного параболического уравнения, в котором по одной из переменных действует оператор Бесселя. Приводятся оценки погрешности аппроксимации точного решения методом Бубнова—Галеркина.

2. Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{du}{dt}+Lu=f,\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_{(0)},\quad \frac{du}{dx}\Big|_{x=0}=0, u(1)=0,\tag{2}$$

где $f=f(x,t)\in L_{2,\gamma}(\Omega)$ для всех t, $x\in\Omega=(0,1)$, $t\in[0,T]$, $u_{(0)}=u_{(0)}(x)$. Оператор L имеет вид

$$Lu=-x^{-\gamma}\frac{d}{dx}\left(x^\gamma p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u,$$

$$D(L)=\left\{v: v\in L_{2,\gamma},\ Lv\in L_{2,\gamma},\ \frac{dv}{dx}\in L_{2,\gamma},\ \frac{dv}{dx}(0)=v(1)=0\right\}.$$

Основы теории уравнений, содержащих подобные операторы, были заложены И. А. Киприяновым и Я. И. Житомирским (см. [5, 7, 12]).

Скалярное произведение и норма в $L_{2,\gamma}(0,1)$ задаются следующим образом:

$$(u,v)_{L_{2,\gamma}(0,1)}=\int_0^1 x^\gamma u(x)v(x)dx,\quad \|f\|_{L_{2,\gamma}(0,1)}=\left(\int_0^1 x^\gamma f^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Будем считать, что $p(x)\in C^1[0,1]$, $q(x)\in C[0,1]$, $p(x)\geqslant p_0>0$, $q(x)\geqslant 0$, $p_0=\mathrm{const}$, $\gamma>0$, $\gamma\neq 1$.

Энергетическое пространство, соответствующее оператору L, будем обозначать H_L. Скалярное произведение в H_L имеет вид

$$[u,v)]=\int_0^1 x^\gamma\left(p\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t}+quv\right)dx.\tag{3}$$

Весовые пространства $H^m_\gamma(0,1)$ (пространства И. А. Киприянова) определяются как замыкание класса $C^\infty_{\text{чет}}([0,1]) \subset C^\infty([0,1])$, состоящего из четных функций по норме

$$\|f\|_{m,\gamma} = \left(\sum_{\substack{0\leqslant i_1+2i_2\leqslant m\\ i=0,1}} \int\limits_0^1 x^\gamma \left|D_x^{i_1} B_x^{i_2} f(x)\right|^2 \right)^{1/2} dx,$$

где $D_x = \dfrac{d}{dx}$, $B_x = \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{\gamma}{x}\dfrac{d}{dx}$ — оператор Бесселя.

Произвольно выберем функцию из $v(x,t)$ из пространства $H^1_\gamma((0,1)\times\Omega)$, удовлетворяющую условию $v(x,T)=0$. Умножим (1) на $x^\gamma v$, проинтегрируем по области $(0,T)\times\Omega$:

$$\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^1 x^\gamma \frac{\partial u}{\partial t} v dx - \int\limits_0^1 \left(x^\gamma x^{-\gamma} \frac{d}{dx}\left(x^\gamma p(x) \frac{du}{dx}\right) v + x^\gamma q(x) uv - x^\gamma f v \right) dx \right] dt = 0.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_0^T \left[-\left(u, \frac{\partial v}{\partial t}\right) + [u,v] - (f,v) \right] dt = (u_{(0)}, v(x,0)), \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L_{2,\gamma}(\Omega)}$.

Будем называть обобщенным решением задачи (1)–(2) функцию $u \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$, которая имеет производную $\partial u/\partial x \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$ и удовлетворяет уравнению (4) для любой такой функции $v \in H^1_\gamma((0,T)\times\Omega)$, что $\partial v(0,t)/\partial x = v(1,t) = 0$.

Приближение решения при такой постановке можно производить как по переменной x, так и по переменной t в виде рядов с базисными функциями $\phi_i(x)$, $\phi_j(t)$. В этом случае по временной переменной получаются, как правило, неявные схемы, и затруднено использование удобных на практике разностных схем для аппроксимации производной по t.

Пусть такое решение существует и $\partial u/\partial t \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$. Примем $v(x,t) = w(x)\Psi(t)$, где $w(x) \in H^1_\gamma(\Omega), w(0) = 0$, $d\Psi/dt \in L_{2,\gamma}(0,T)$, $\Psi(T) = 0$. После подстановки $v(x,t)$ в (4) и интегрирования по частям получим

$$\int\limits_0^T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w\right) + [u,w] - (f,w) \right] \Psi(t) dt + \Psi(0)\left(u(x,0) - u_{(0)}, w\right) = 0.$$

Учтем произвольность $\Psi(t)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, w\right)(t) + [u,w](t) = (f,w)(t), \quad (u(x,0),w) = (u_{(0)}, w). \tag{5}$$

Будем называть обобщенным решением задачи (1) –(2) функцию $u(x,t)$, которая почти при каждом $t \in (0,T)$ принадлежит энергетическому пространству H_L со скалярным произведением вида (3), имеет производную $\partial u/\partial t \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$ и почти всюду на $(0,T)$ удовлетворяет равенствам (5) при любом выборе $w(x) \in H_L$. Второе определение обобщенного решения требует наличия производной $\partial u/\partial t \in L_{2,\gamma}((0,T)\times\Omega)$, однако при такой постановке переменную t можно рассматривать как параметр.

3. Построение проекционно-разностной схемы. Для приближенного решения задачи (1)–(2) будем в первую очередь выполнять аппроксимацию по пространственной переменнной с помощью проекционно-сеточного метода, а затем приближение по времени t с использованием конечно-разностного метода.

Введем на $[0,1]$ сетку $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, $i = 1,\ldots,n$, $h = x_i - x_{i-1}$. Для случая, когда $\gamma \neq 1$, базисные функции заданы следующим образом:

$$\phi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\gamma}-x_{i-1}^{1-\gamma}}{x_i^{1-\gamma}-x_{i-1}^{1-\gamma}}, & x\in(x_{i-1},x_i),\\ \dfrac{x_{i+1}^{1-\gamma}-x^{1-\gamma}}{x_{i+1}^{1-\gamma}-x_i^{1-\gamma}}, & x\in(x_i,x_{i+1}),\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_{i+1}),\ i=1,\ldots,n-1.\end{cases} \tag{6}$$

$$\phi_1(x)=\begin{cases}1, & x\in(x_0,x_1),\\ \dfrac{x_2^{1-\gamma}-x^{1-\gamma}}{x_2^{1-\gamma}-x_1^{1-\gamma}}, & x\in(x_1,x_2);\end{cases}\qquad \phi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{1-\gamma}-x_{n-1}^{1-\gamma}}{x_n^{1-\gamma}-x_{n-1}^{1-\gamma}}, & x\in(x_{n-1},x_n),\\ 0, & x\notin(x_{n-1},x_n).\end{cases} \tag{7}$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$u_h=\sum_{i=1}^{n-1}a_i(t)\phi_i(x).$$

Тогда коэффициенты, являющиеся функциями от $t\in(0,T)$, будем искать из системы ОДУ, полученной с помощью метода Бубнова—Галеркина из (5):

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t},\phi_i\right)(t)+[u_h,\phi_i](t)=(f,\phi_i)(t), \tag{8}$$

$$(u_h(x,0)-u_{(0)},\phi_i)=0,\quad i=1,\ldots,N. \tag{9}$$

Уравнения (8)–(9) могут быть записаны в матричном виде:

$$\widehat{B}\frac{da}{dt}+\widehat{A}a=F(t),\quad \widehat{B}a(0)=a_{(0)}, \tag{10}$$

где

$$a(t)=(a_1(t),\ldots,a_{n-1}(t))^T,\quad F(t)=(F_1(t),\ldots,F_{n-1}(t))^T,\quad F_i(t)=(f,\phi_i)(t),$$

$$a_{(0)}=\left(a_{(0),1},\ldots,a_{(0),n-1}\right)^T,\quad a_{(0),i}=(u_{(0)},\phi_i),\widehat{B}=(B_{ij}),\quad \widehat{A}=(A_{ij}),$$

$$A_{ij}=A_{ji}=[\phi_i,\phi_j]=\int\limits_{\Omega_{ij}}x^\gamma\left(p\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}+q\phi_i\phi_j\right)dx,\quad j=1,\ldots,n-1,$$

$$B_{ij}=B_{ji}=(\phi_i,\phi_j)=\int\limits_{\Omega_{ij}}x^\gamma\phi_i\phi_j dx,\quad \Omega_{ij}=(0,1)\cap\operatorname{supp}\phi_i\cap\operatorname{supp}\phi_j,\quad \Omega_j=(0,1)\cap\operatorname{supp}\phi_j.$$

$$F_i=\int\limits_{\Omega_j}x^\gamma f(x,t)\phi_i dx,\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Поскольку скалярное произведение базисных функций в пространстве $L_{2,\gamma}(\Omega)$ отлично от 0 только для соседних функций, то для матрицы $\widehat{A}$ требуется найти только элементы $A_{j-1,j}$, $A_{j,j}$, $A_{j+1,j}$ (см. [1]) по следующим формулам:

$$A_{j-1,j}=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma p\frac{d\phi_{j-1}}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma q\phi_{j-1}\phi_j\,dx, \tag{11}$$

$$A_{j,j}=\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx+\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}x^\gamma q\phi_j\phi_j\,dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\,dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}x^\gamma q\phi_j\phi_j\,dx, \tag{12}$$

$$A_{j+1,j}=\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma p\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d\phi_{j+1}}{dx}\,dx+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^\gamma q\phi_{j+1}\phi_j\,dx. \tag{13}$$

Аналогично для матрицы $\widehat{B}$ рассчитываются элементы $B_{j-1,j}$, $B_{j,j}$, $B_{j+1,j}$:

$$B_{j-1,j}=\frac{1}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_j^{3-\gamma}-x_{j-1}^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(x_j^2x_{j-1}^{1-\gamma}-x_{j-1}^2x_j^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right), \tag{14}$$

$$B_{j,j}=\frac{1}{\left(x_j^{1-\gamma}-x_{j-1}^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma}-\frac{x_{j-1}^{3-\gamma}(\gamma-1)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)}-x_{j-1}^{1-\gamma}x_j^2+\frac{x_{j-1}^{2-2\gamma}x_j^{\gamma+1}}{\gamma+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{x_{j+1}^{3-\gamma}(1-\gamma)^2}{(3-\gamma)(\gamma+1)}-\frac{x_j^{3-\gamma}}{3-\gamma}+x_{j+1}^{1-\gamma}x_j^2-\frac{x_j^{1+\gamma}x_{j+1}^{2-2\gamma}}{\gamma+1}\right), \tag{15}$$

$$B_{j+1,j}=\frac{1}{\left(x_{j+1}^{1-\gamma}-x_j^{1-\gamma}\right)^2}\left(\frac{(x_{j+1}^{3-\gamma}-x_j^{3-\gamma})(1-\gamma)}{2(3-\gamma)}+\frac{(\gamma-1)(x_{j+1}^2x_j^{1-\gamma}-x_j^2x_{j+1}^{1-\gamma})}{2(\gamma+1)}\right). \tag{16}$$

Нетрудно убедиться, что полученные матрицы являются положительно определенными и симметричными.

4. Численное решение системы ОДУ. Введем на отрезке $[0,T]$ равномерную сетку $t_j=j\tau$, $\tau=T/J$, $j=0,\dots,J$. Перепишем уравнения (10), используя для аппроксимации по времени неявную схему (см. [4]), имеющую первый порядок аппроксимации по τ:

$$\widehat{B}a_0=a(0), \tag{17}$$

$$\widehat{B}\frac{a_j-a_{j-1}}{\tau}+\widehat{A}a_j=F(t_j),\quad j=1,\dots,J, \tag{18}$$

где $a_j=(a_{1,j},\dots,a_{n-1,j})^T$. Сгруппируем в (18) значения по временным слоям:

$$(\widehat{B}+\widehat{A}\tau)a_j=\tau F(t_j)+\widehat{B}a_{j-1} \tag{19}$$

Матрица $\widehat{B}+\widehat{A}\tau$ имеет трехдиагональный вид и состоит из суммы элемнтов, рассчитанных по формулам (11)–(16):

$$\begin{bmatrix} B_{11}+\tau A_{11} & B_{12}+\tau A_{12} & & & \\ B_{21}+\tau A_{21} & B_{22}+\tau A_{22} & B_{23}+\tau A_{23} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & B_{n-2,n-1}+\tau A_{n-2,n-1} \\ & & & B_{n-1,n-2}+\tau A_{n-1,n-2} & B_{n-1,n-1}+\tau A_{n-1,n-1}\end{bmatrix}.$$

Обозначим через f вектор-столбец, стоящий в правой части уравнения (19):

$$\tau F(t_j)+\widehat{B}a_{j-1}=f_{n-1\times 1}=\begin{bmatrix}\tau(f,\phi_1)(t_j)+B_{11}a_{1,j-1}+B_{12}a_{2,j-1}\\ \tau(f,\phi_2)(t_j)+B_{21}a_{1,j-1}+B_{22}a_{2,j-1}+B_{23}a_{3,j-1}\\ \vdots \\ \tau(f,\phi_i)(t_j)+B_{i,i-1}a_{i-1,j-1}+B_{i,i}a_{i,j-1}+B_{i,i+1}a_{i+1,j-1}\\ \vdots \\ \tau(f,\phi_{n-1})(t_j)+B_{n-1,n-2}a_{n-2,j-1}+B_{n-1,n-1}a_{n-1,j-1}\end{bmatrix}$$

Такую систему можно записать в виде

$$c_ia_{i-1,j}+d_ia_{i,j}+e_ia_{i+1,j}=f_i,\quad i=2,\dots,n-2,$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & d_2 & e_2 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

и применять для решения метод последовательного исключения неизвестных (метод прогонки).

5. Оценки сходимости. Для получения априорной оценки u_h обобщенного решения умножим каждое из уравнений (8) на функцию $a_i(t)$ и просуммируем по всем $i = 1, \dots, n-1$:

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i \right) + \left[u_h, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i \right] = \left(f, \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\phi_i \right),$$

а затем проинтегрируем по $t' \in (0, t)$:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' + \int_0^t [u_h, u_h]\, dt' = \int_0^t (f, u_h)\, dt'. \tag{20}$$

Применим интегрирование по частям:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' = \int_0^1 \int_0^t \frac{\partial u_h}{\partial t} u_h x^\gamma dt' dx = \left(\int_0^1 u_h x^\gamma u_h dx \right) \Big|_0^1 -$$

$$- \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h = \right) dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0) - \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt'.$$

Тогда

$$2 \int_0^t \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h \right) dt' = \|u_h\|^2(t) - \|u_h\|^2(0).$$

Перепишем равенство (20):

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t')dt' = \int_0^t (f, u_h)\, dt' + \frac{1}{2}\|u_h\|^2(0).$$

Из (9) вытекает равенство

$$(u_h(x,0), u_h(x,0)) = \left(u_{(0)}, u_h(x,0) \right),$$

откуда получаем $\|u_h\|(0) \leqslant \|u_0\|$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int_0^t [u_h]^2(t')dt' \leqslant \left(\int_0^t \|f\|^2(t')dt' \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u_h\|^2(t')dt' \right)^{1/2} + \frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2. \tag{21}$$

Рассмотрим норму в энергетическом пространстве:

$$[u, u] = \int_0^1 x^\gamma \left[p(x) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + q(x)u^2 \right] dx.$$

В последней формуле отбросим неотрицательное слагаемое $q(x)u^2$, а $p(x)$ заменим на p_0:

$$[u, u] \geqslant p_0 \int_0^1 x^\gamma \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx = p_0 \|u'_x\|^2. \tag{22}$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\|u\|^2_{L_{2,\gamma}} \leqslant \|u'\|^2_{L_{2,\gamma}} \frac{1}{2(1+\gamma)}. \tag{23}$$

Запишем с учетом $u(1) = 0$:

$$u(x) = -\int\limits_x^1 u'(\xi)d\xi, \quad u^2(x) = \int\limits_x^1 \left(u'(\xi)\xi^{-\gamma/2}\xi^{\gamma/2}\right)^2 d\xi.$$

С использованием неравенства Коши—Буняковского для $0 \leqslant x \leqslant 1$ получаем

$$u^2(x) \leqslant \left(\int\limits_x^1 (u'(\xi))^2\xi^\gamma d\xi\right)\left(\int\limits_x^1 \xi^{-\gamma}d\xi\right) \leqslant \left(\int\limits_0^1 (u'(\xi))^2\xi^\gamma d\xi\right)\frac{\xi^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_x^1 = \|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1-x^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

Проинтегрируем от 0 до 1 с весом x^γ:

$$\|u\|^2_{L_{2,\gamma}} \leqslant \|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\int\limits_0^1 \frac{x^\gamma(1-x^{1-\gamma})}{1-\gamma}dx = \|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \|u'\|^2_{L_{2,\gamma}}\frac{1}{2(1+\gamma)}.$$

Подставим оценку (23) в неравенство (22):

$$[u]^2 \geqslant 2p_0(1+\gamma)\|u\|^2. \tag{24}$$

С учетом (24) запишем (21):

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt' \leqslant \left(\int\limits_0^t \|f\|^2(t')dt'\right)^{1/2} c\left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt'\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2,$$

где $c = 2p_0(1+\gamma)$. К последнему соотношению применим ϵ-неравенство $|ab| \leqslant a^2/(4\epsilon) + \epsilon b^2$:

$$\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt' \leqslant \frac{c}{4\epsilon}\int\limits_0^t \|f\|^2(t')dt' + c\epsilon\left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt'\right) + \frac{1}{2}\|u_{(0)}\|^2(0). \tag{25}$$

Примем $\epsilon = c/2$. Имеем

$$\left(2 - \frac{c^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt'\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^t \|f\|^2(t')dt' + \|u_{(0)}\|^2\right),$$

$$\left(2 - \frac{c^2}{2}\right)\left(\|u_h\|^2(t) + 2\int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt'\right) \leqslant \left(\int\limits_0^t \|f\|^2(t')dt' + \|u_{(0)}\|^2\right),$$

$$\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [u_h]^2(t')dt' \leqslant C\left(\int\limits_0^t \|f\|^2(t')dt' + \|u_{(0)}\|^2\right),$$

$$\max_{t\in(0,T)}\|u_h\|^2(t) + \int\limits_0^T [u_h]^2(t')dt' \leqslant C\left(\int\limits_0^T \|f\|^2(t')dt' + \|u_{(0)}\|^2\right).$$

Отсюда следует непрерывная зависимость приближенного решения u_h задачи от f и $u_{(0)}$.

Оценим скорость сходимости u_h к $u(x,t)$ при $h \to 0$. Положим $\xi_h = u - u_h$; тогда для любой функции $v_h = \sum\limits_1^{n-1} b_i(t)\phi_i$ имеем

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, v_h\right)(t) + [\xi_h, v_h](t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h\right)(t) + [u, v_h](t) - \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right)(t) - [u_h, v_h](t),$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h\right)(t) + [u_h, v_h](t) = (f, v_h)(t),$$

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, v_h\right)(t) + [\xi_h, v_h](t) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_h\right)(t) + [u, v_h](t) - (f, v_h)(t) = 0,$$

$$(\xi_h, v_h)(0) = 0.$$

Значит,

$$\left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, \xi_h\right) + [\xi_h, \xi_h] = \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h\right) + [\xi_h, u - v_h].$$

Применяя к $\left(\dfrac{\partial \xi_h}{\partial t}, \xi_h\right)$ интегрирование по частям, получим

$$\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' = \int\limits_0^t [\xi_h, u - v_h] dt' + \int\limits_0^t \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h\right) dt' + \frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(0). \tag{26}$$

Вычислим

$$\int\limits_0^t \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial t}, u - v_h\right) dt' = (\xi_h, u - v_h)(t) - (\xi_h, u - v_h)(0) - \int\limits_0^t \left(\xi_h, \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right) dt'.$$

Для (26) справедлива оценка

$$\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' \leqslant \int\limits_0^t \left([\xi_h]^2 dt'\right)^{1/2} \int\limits_0^t \left([u - v_h]^2 dt'\right)^{1/2} + \|\xi_h(t)\|\|u - v_h\|(t) +$$
$$+ \|\xi_h(0)\|\|u_{(0)} - v_h(0)\| + \int\limits_0^t \left(\|\xi_h\|^2 dt'\right)^{1/2} * \int\limits_0^t \left(\left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt'\right)^{1/2} \frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(0). \tag{27}$$

Так как $u_h(x, 0)$ — ортогональная проекция u_0 на H_L, то

$$\|\xi_h(0)\| \leqslant \|u_{(0)} - v_h(0)\|.$$

Используя неравенство $|ab| \leqslant a^2/(4\epsilon) + \epsilon b^2$ и оценку (27), получаем:

$$\frac{1}{2}\|\xi_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' \leqslant \frac{1}{4\epsilon_1}\int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' + \epsilon_1 \int\limits_0^t [u - v_h]^2 dt' + \|u_{(0)} - v_h(0)\|^2 + \frac{1}{4\epsilon_2}\|\xi_h(t)\|^2 +$$
$$+ \epsilon_2\|u - v_h\|^2(t) + \frac{c}{4\epsilon_3}\int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' + \epsilon_3 \int\limits_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt' + \frac{1}{2}\|u_{(0)} - v_h(0)\|^2(0).$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4\epsilon_2}\right)\|\xi_h\|^2(t) + \left(1 - \frac{1}{4\epsilon_1} - \frac{c}{4\epsilon_3}\right)\int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' \leqslant \epsilon_2\|u - v_h\|^2(t) +$$
$$+ \epsilon_1 \int\limits_0^t [u - v_h]^2 dt' + \epsilon_3 \int\limits_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt' + \frac{3}{2}\|u_{(0)} - v_h(0)\|^2(0). \tag{28}$$

Пусть $\epsilon_2 = 1$, $\epsilon_1 = 1$, $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4\epsilon_2} = 1 - \dfrac{1}{4\epsilon_1} - \dfrac{c}{4\epsilon_3}$; тогда $\epsilon_3 = \dfrac{c}{2}$. С учетом введенных значений перепишем (28):

$$\|\xi_h\|^2(t) + \int\limits_0^t [\xi_h]^2 dt' \leqslant 4\|u - v_h\|^2(t) + 4\int\limits_0^t [u - v_h]^2 dt' + 2c\int\limits_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt' + 6\|\xi_h\|^2(0) \leqslant$$
$$\leqslant 4\|u - v_h\|^2(t) + \widehat{c}\left(\int\limits_0^t [u - v_h]^2 dt' + \int\limits_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt' + \|u_{(0)} - v_h(0)\|^2(0)\right),$$

$$\max_{t\in(0,T)} \|\xi_h\|^2(t) + \int\limits_0^T [\xi_h]^2 dt' \leqslant$$
$$\leqslant 4\max_{t\in(0,T)} \|u - v_h\|^2(t) + \widehat{c}\left(\int\limits_0^T [u - v_h]^2 dt' + \int\limits_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_h}{\partial t}\right\|^2 dt' + \|u_{(0)} - v_h(0)\|^2\right). \quad (29)$$

Пусть теперь v_h имеет коэффициенты $b_i = u(x_i, t)$. Из (29), учитывая свойства базисных функций, получаем сходимость u_h к u при $h \to 0$:

$$\max_{t\in(0,T)} \| u - u_h\|^2(t) + \int\limits_0^T [u - u_h]^2 dt' \to 0, \quad h \to 0.$$

6. Заключение. Рассмотренная в работе форма применения проекционно-сеточного метода для нестационарной задачи объединяет преимущества разностных и проекционных методов. При решении начально-краевых задач целесообразно вводить сетку по оси времени, а затем, после приближения производной по времени, применять схему аппроксимации по пространственной переменной на каждом временном слое. Использование метода Бубнова—Галеркина для аппроксимации по x с финитными базисными функциями приводит к простой вычислительной схеме с достаточно хорошей точностью. Для приближения по t ипользовалась неявная схема с первым порядком аппроксимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барабаш О. П.* Некоторые особенности реализации метода конечных элементов для сингулярного дифференциального уравнения// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 2. — С. 27–35.
2. *Виноградова Г. А.* О решении сингулярной задачи вариационным методом// Вестн. фак-та ПММ. — 2015. — № 10. — С. 39–42.
3. *Гусман Ю. А.* Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 1965. — № 2. — С. 351–357.
4. *Емельянов В. Н.* Введение в теорию разностных схем. — СПб., 2006.
5. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36 (78)*, № 2. — С. 299–310.
6. *Катрахов В. В.* Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1984. — *279*, № 4. — С. 799–802.
7. *Киприянов И. А.* Краевые задачи сингулярных эллиптических операторов в частных производных// Докл. АН СССР. — 1970. — *195*, № 1. — С. 32–35.
8. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1977.
9. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. — М.: Наука, 1966.
10. *Михлин С. Г.* Некоторые вопросы сеточной аппроксимации и их приложения к вариационно-сеточному методу// в кн.: Вариационно-разностные методы в математической физике (Михлин С. Г., ред.). — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973.
11. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

12. *Ситник С. М.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Барабаш Ольга Павловна (Barabash Olga Pavlovna)
Воронежский государственный университет
(Voronezh State University, Voronezh, Russia)
E-mail: navyS9@yandex.ru