ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 134–149
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-134-149

УДК 517.518

СТУПЕНЧАТЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ И СИСТЕМА КРЕСТЕНСОНА

© 2023 г. **Ю. А. ФАРКОВ**

Аннотация. Представлен обзор методов построения ступенчатых масштабирующих функций на положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$, ассоциированных с функциями Крестенсона. Обсуждаются условия, при которых эти ступенчатые функции порождают ортогональные вейвлеты и жёсткие фреймы. Приведена подробная библиография.

Ключевые слова: функция Уолша, система Крестенсона, формула Пуассона, группа Кантора, группа Виленкина, масштабирующая функция, вейвлет, жёсткий фрейм, дискретное вейвлет-преобразование.

STEP SCALING FUNCTIONS AND THE CHRESTENSON SYSTEM

© 2023 **Yu. A. FARKOV**

Abstract. A review of methods for constructing step scaling functions on the positive half-line $\mathbb{R}_+$ associated with the Chrestenson functions is presented. The conditions under which such step functions generate orthogonal wavelets and tight frames are discussed. A detailed bibliography is provided.

Keywords and phrases: Walsh function, Chrestenson system, Poisson formula, Cantor group, Vilenkin group, scaling function, wavelet, tight frame, discrete wavelet transform.

AMS Subject Classification: 42C15,42C40,43A15,65T60

1. Введение. При построении ортогональных вейвлетов и жёстких фреймов на локально компактных абелевых группах ключевым элементом является выбор подходящих масштабирующих функций (см., например, [2, 4, 28, 51]). Простейшей ступенчатой масштабирующей функцией является функция Хаара. Общий метод построения вейвлетов Хаара для широкого класса топологических пространств с мерой, содержащего группы Виленкина и аддитивную группу поля p-адических чисел, обсуждался в [5]. Хорошо известно (см. [63]), что функции Уолша могут быть определены как характеры группы Кантора, а характеры групп Виленкина являются обобщенными функциями Уолша. Ортогональные вейвлеты, масштабирующие функции которых представимы лакунарными рядами Уолша на локально компактной группе Кантора, изучались Лэнгом в [52, 53]. В то время как для вейвлетов Добеши (см. [2]) гладкость растет с увеличением длины носителя, вейвлеты Лэнга могут иметь сколь угодно высокую диадическую гладкость на фиксированном носителе (см. [9], [12, пример 4.3]). В книге [43] содержатся обобщения вейвлетов Лэнга на группы Виленкина и приведено несколько других конструкций вейвлетов в анализе Уолша, включая биортогональный, нестационарный и периодический случаи (см. также [28, гл. 8], [10, 13–15, 17, 32–36, 36–45, 55]).

Характеристические свойства ступенчатых масштабирующих функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ изучались в [48, 54]. Первый пример ступенчатой масштабирующей функции в анализе

Уолша, отличной от масштабирующей функции Хаара и порождающей кратномасштабный анализ, был найден в [31] (ср. [8, пример 3], [20, пример 2.32]). На группах Виленкина ступенчатые функции представимы конечными линейными комбинациями обобщенных функций Уолша и применяются в теории приближений и для обработки сигналов (см. [7, 8, 36, 40, 49, 50, 60, 61]).

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Для каждого целого $p \geqslant 2$ функции Крестенсона соответствуют обобщенным функциям Уолша в стандартной интерпретации группы Виленкина G_p на $\mathbb{R}_+$ (см., например, [1, § 1.5], [28, § 8.2], [62], [63, § 1.3]). В настоящей статье приведен обзор методов построения ступенчатых масштабирующих функций с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$, ассоциированных с функциями Крестенсона. Аналоги сформулированных в разделе 2 характеристических свойств ступенчатых масштабирующих функций для группы G_p доказаны в недавней статье [46]. В разделе 3 показано как теоремы из раздела 2 могут применяться для построения ортогональных масштабирующих функций и соответствующих им ортогональных вейвлетов на $\mathbb{R}_+$; при этом используются модифицированное условие Коэна, критерий отсутствия блокирующих множеств и метод N-валидных деревьев. Кроме того, в разделе 3 отмечаются некоторые недавние результаты о построении жёстких фреймов из ступенчатых функций с компактными носителями. Существенным элементом излагаемых конструкций является дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона, для которого формула Пуассона записывается в виде (12).

Как обычно, пусть $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{N}$ — множества целых, целых неотрицательных и натуральных чисел соответственно. Для любого $x \in \mathbb{R}_+$ цифры $x_j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ определим из разложения

$$x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j p^{-j} \tag{1}$$

(для p-ично рационального числа x берется разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Если для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$ в разложении (1) все $x_j = 0$ при $j < -m$, то пишут $x = x_{-m}x_{-m+1}\dots x_0, x_1x_2x_3\dots$. В частности, если $x \in [0, 1)$, то $x = 0, x_1x_2x_3\dots$.

Будем рассматривать полупрямую $\mathbb{R}_+$ с операцией $\oplus$ поразрядного сложения по модулю p. Напомним, что если $\langle s\rangle_p$ — остаток при делении целого числа s на p, то для любых $x, y \in \mathbb{R}_+$ равенство $z = x \oplus y$ означает, что

$$z = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle x_j + y_j\rangle_p p^{-j},$$

где x_j и y_j — цифры чисел x и y в p-ичной системе. При этом $z = x \ominus y$, если $z \oplus y = x$.

Числовые промежутки

$$I_l^{(m)} = \left[lp^{-m}, (l+1)p^{-m}\right), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

называются *p-ичными интервалами ранга m*. Топология на $\mathbb{R}_+$, определяемая семейством интервалов $\{I_l^{(m)} : m \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}_+\}$, называется *$W$-топологией* (при $p = 2$ — *диадической топологией*; см. [63, с. 11]). Класс функций из $L^2(\mathbb{R}_+)$, имеющих в W-топологии компактные носители на $\mathbb{R}_+$, обозначается через $L^2_c(\mathbb{R}_+)$. Для каждой функции $f \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ через $\operatorname{supp} f$ обозначается носитель функции f в W-топологии.

Пусть

$$\chi(x, y) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\, y_{1-j}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}_+,$$

где цифры x_j и y_j берутся из разложений вида (1). Известно (см. [1, § 1.5]), что равенство

$$\chi(x, y)\chi(z, y) = \chi(x \oplus z, y)$$

при фиксированных x и y имеет место для всех z из $\mathbb{R}_+$, кроме счетного множества значений.

Обобщенное преобразование Уолша—Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\overline{\chi(x, \omega)}\, dx, \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и стандартным образом продолжается на пространство $L^2(\mathbb{R}_+)$. Обозначим через $\mathcal{S}^{(m)}$ множество всех функций $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{C}$, принимающих постоянные значения на p-ичных интервалах ранга m. Для каждого целого m положим

$$\mathcal{S}_l^{(m)} := \{f\in\mathcal{S}^{(m)} : \operatorname{supp} f\subset[0,p^l)\},\quad l\in\mathbb{Z}.$$

Предложение 1 (см. [1, § 6.2])**.** *Имеют место следующие свойства*:

(a) *если* $f\in L^1(\mathbb{R}_+)\cap\mathcal{S}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$, *то* $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset[0,p^m)$;
(b) *если* $f\in L^1(\mathbb{R}_+)$ *и* $\operatorname{supp} f\subset[0,p^m)$, *то* $\widehat{f}\in\mathcal{S}^{(m)}(\mathbb{R}_+)$.

В качестве следствия из предложения 1 для любых $m,l\in\mathbb{Z}$ имеем

$$f\in\mathcal{S}_l^{(m)} \iff \widehat{f}\in\mathcal{S}_m^{(l)}. \tag{2}$$

Система Крестенсона $\{w_l : l\in\mathbb{Z}_+\}$, совпадающая при $p=2$ с классической системой Уолша (см. [27]), определяется равенством

$$w_l(x)=\chi(x,l),\quad l\in\mathbb{Z}_+,\quad x\in[0,1].$$

Хорошо известно, что система $\{w_l : l\in\mathbb{Z}_+\}$ является ортонормированным базисом в $L^2[0,1]$. На полупрямую $\mathbb{R}_+$ функции Крестенсона продолжаются периодически:

$$w_l(x)=w_l(x+1)\quad \text{для всех } x\in\mathbb{R}_+.$$

При построении ортогональных вейвлетов с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$, определяемых с помощью функций Крестенсона, центральную роль играют масштабирующие уравнения вида

$$\varphi(x)=p\sum_{k=0}^{p^n-1}a_k\varphi(px\ominus k),\quad x\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Функции $\varphi\in L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющие уравнениям вида (3), называют *масштабирующими* функциями. Применяя обобщенное преобразование Уолша-Фурье, можем записать уравнение (3) в виде

$$\widehat{\varphi}(\omega)=m_0(\omega/p)\widehat{\varphi}(\omega/p),\quad \omega\in\mathbb{R}_+, \tag{4}$$

где

$$m_0(\omega)=\sum_{k=0}^{p^n-1}a_k\overline{w_k(\omega)}. \tag{5}$$

Функция m_0 называется *маской* масштабирующего уравнения (3) (или его решения φ). Отметим, что при условии $\widehat{\varphi}(0)\neq0$ из равенства (4) имеем $m_0(0)=1$. Обозначим через $\mathcal{M}_0^{(n)}$ множество таких 1-периодических функций m_0, что $m_0\in\mathcal{S}^{(n)}$ и $m_0(0)=1$.

В формуле (5) функции Крестенсона w_k постоянны на каждом интервале $I_l^{(n)}$, $0\leqslant l\leqslant p^n-1$. Поэтому маска m_0 имеет период 1 и принадлежит классу $\mathcal{S}^{(n)}$. Обратно, всякая 1-периодическая функция из класса $\mathcal{S}^{(n)}$ может быть записана в виде (5). Отметим также, что коэффициенты уравнения (3) восстанавливаются по значениям маски m_0 с помощью дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона. Действительно, если $b_l=m_0(l/p^n)$ для $0\leqslant l\leqslant p^n-1$, т.е.

$$b_l=\sum_{k=0}^{p^n-1}a_k\overline{w_k(l/p^n)},\quad l\in\{0,1,\dots,p^n-1\}, \tag{6}$$

то

$$a_k=\frac{1}{p^n}\sum_{l=0}^{p^n-1}b_lw_l(k/p^n),\quad k\in\{0,1,\dots,p^n-1\}; \tag{7}$$

обратно, из (7) следуют равенства (6). Эти дискретные преобразования могут быть выполнены с помощью быстрых алгоритмов (см., например, [1, § 11.2], [47]).

Теорема 1 (см. [31]). *Пусть функция $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению* (3), *$\widehat{\varphi}(0) = 1$, и пусть маска m_0 определена по формуле* (5). *Тогда* $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, p^{n-1})$, *$\widehat{\varphi}(k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega) \quad \textit{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

При условиях теоремы 1 имеем $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$; следовательно, $m_0(p^{-j}\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, p^{j-n})$. Поэтому произведение в формуле (8) конечно при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $\mathbf{1}_E$ — характеристическая функция множества E. Предположим, что функция φ удовлетворяет условиям теоремы 1 и существует такое $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\varphi \in \mathcal{S}^{(m)}$. В этом случае, поскольку $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, p^{n-1})$, функция φ принадлежит классу $\mathcal{S}^{(m)}_{n-1}$. В силу соотношения (2) имеем равенство

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \mathbf{1}_{I_0^{(n-1)}}(\omega) + \sum_{l=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) \mathbf{1}_{I_l^{(n-1)}}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

С помощью формулы

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{I_l^{(n-1)}}(\omega)\chi(x,\omega)\, d\omega = (1/p^{n-1})\mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1}) w_l(x/p^{n-1})$$

отсюда получается следующее выражение функции φ через функции Крестенсона—Леви:

$$\varphi(x) = (1/p^{n-1})\mathbf{1}_{[0,1)}(x/p^{n-1}) \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) w_l(x/p^{n-1})\right), \quad x \in \mathbb{R}_+, \tag{10}$$

где $\widehat{\varphi}(l/p^{n-1}) = 0$, для всех $l \geqslant p^{m+n-1}$. Кроме того, из теоремы 1 по формуле Пуассона

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = \widehat{\varphi}(k)\chi(x,k) \tag{11}$$

выводится следующее свойство разбиения единицы:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = 1 \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Приведем аналог формулы Пуассона для дискретного преобразования Виленкина—Крестенсона (ср. [11, теорема 1]). Пусть компоненты векторов $(a_0, a_1, \ldots, a_{p^n-1})$ и $(b_0, b_1, \ldots, b_{p^n-1})$ связаны равенствами (6) и (7). Предположим, что $a(j) = a_j$ и $b(j) = b_j$ для $0 \leqslant j \leqslant p^n - 1$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{p^m-1} b(p^l j) = p^m \sum_{k=0}^{p^l-1} a(p^m k), \tag{12}$$

где l и m — натуральные числа, $l + m = n$. В связи с формулами (11) и (12) отметим, что для вполне несвязных локально компактных групп (в частности, для групп Виленкина и для коммутативных дискретных групп) в [6] вместо унитарных представлений предлагается применять чисто алгебраические индуцированные представления, что может быть использовано при построении вейвлетов и фреймов (ср. [18, 22, 26, 29]).

Масштабирующая функция φ является *ортогональной*, если система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Предложение 2 (см. [31]). *Масштабирующая функция φ является ортогональной в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k \in \mathbb{R}_+} \left|\widehat{\varphi}(\omega \ominus k)\right|^2 = 1 \quad \textit{для п.в. } \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Подобный критерий для масштабирующих функций на прямой $\mathbb{R}$ хорошо известен (см., например, [4, предложение 1.1.12]).

2. Характеристические свойства ступенчатых масштабирующих функций. Следующее предложение является прямым следствием теоремы 1 и предложения 1.

Предложение 3. *Пусть функция* $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ *удовлетворяет уравнению* (3), $\widehat{\varphi}(0) = 1$ *и* $m \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\varphi \in \mathcal{S}^{(m)}_{n-1}$;

(ii) $\prod\limits_{j=1}^{m+n} m_0(p^{-j}\omega) = 0$ *для всех* $\omega \in [p^m, p^{m+1})$;

(iii) $\bigcup\limits_{k=-n+1}^{m} p^{m-k+1}E_k = [p^m, p^{m+1})$,

где m_0 — *маска уравнения* (3), E_k — *множество нулей маски* m_0 *на* $[p^{k-1}, p^k)$.

Доказательство. Согласно (4) для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega) \prod_{j=1}^{m+n} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{13}$$

Пусть выполнено (i). Тогда $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}^{(n-1)}_m$ в силу (2) и из формулы (13) следует (ii) (действительно, если $\omega \in [p^m, p^{m+1})$, то $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ и $\widehat{\varphi}(p^{-m-n}\omega) = 1$, так как $\widehat{\varphi}(0) = 1$ и $p^{-m-n}\omega \in [p^{-n}, p^{-n+1}) \subset [0, p^{1-n})$). Пусть выполнено (ii). Тогда из (13) следует, что

$$\widehat{\varphi}(\omega) = 0 \quad \text{для всех } \omega \in [p^m, p^{m+1})$$

и по формуле (8) получаем $\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ для всех $\omega \geqslant p^m$. С другой стороны, согласно предложению 1 из включения $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, p^{n-1})$ следует, что $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}^{(n-1)}$. Таким образом, (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Далее, условие (ii) означает, что для любого $\omega \in [p^m, p^{m+1})$ найдется такой номер $j \in \{1, \dots, m+n\}$, что $m_0(p^{-j}\omega) = 0$. Здесь $p^{-j}\omega \in [p^{m-j}, p^{m-j+1})$, и если $k = m - j + 1$, то $k \in \{-n+1, -n+2, \dots, m\}$. Поскольку $E_k = \{\omega \in [p^{k-1}, p^k) : m_0(\omega) = 0\}$, отсюда следует эквивалентность (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Предложение 3 доказано. □

Пример 1. Предположим, что m_0 — такая маска уравнения (3), что $m_0(\omega) = 1$ для $\omega \in [0, p^{-r})$ и $m_0(\omega) = 0$ для $\omega \in [p^{-r}, p^{-r+1})$, где $r \in \{1, \dots, n\}$. Тогда $\varphi = p^{1-r}\mathbf{1}_{[0,p^{r-1})}$ (в случае Хаара $r = 1$).

Пусть $m_0 \in \mathcal{M}^{(n)}_0$. Тогда для любого $\omega \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$m_0(\omega) = m_0(0, \omega_1 \dots \omega_n), \tag{14}$$

где $\omega_1, \dots, \omega_n$ — цифры дробной части числа ω. Полагая

$$b[s_1 \dots s_n] := m_0(0, s_1 \dots s_n), \quad s_j \in \{0, \dots, p-1\},$$

в силу формул (6) и (7) замечаем, что множество всех значений $b[s_1 \dots s_n]$ однозначно определяет функцию m_0. Кроме того, если m_0 — маска масштабирующей функции $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$, то по теореме 1 для каждого $\omega = \omega_{-m}\omega_{-m+1} \dots \omega_0, \omega_1\omega_2 \dots$ имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = b[\omega_0 \dots \omega_{n-1}]b[\omega_{-1} \dots \omega_{n-2}] \dots b[0 \dots 0\omega_{-m}]. \tag{15}$$

Для данного $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\sigma_r = \sigma_r(m_0)$ множество всех таких векторов

$$(s_0, s_1, \dots, s_r), \quad s_0 \neq 0, \quad s_j \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

что для каждого $l \in \{0, 1, \dots, r\}$ выполнено неравенство

$$b[s_{1-n+l} \dots s_l] \neq 0, \tag{16}$$

где $s_j = 0$ для $j < 0$. Далее, обозначим через $\sigma_\infty = \sigma_\infty(m_0)$ множество таких последовательностей

$$(s_0, s_1, \dots), \quad s_0 \neq 0, \quad s_j \in \{0, 1, \dots, p-1\},$$

что (16) верно для любого $l \in \mathbb{Z}_+$. Из определений видно, что если $\sigma_r = \varnothing$, то $\sigma_{r+1} = \varnothing$, а если $\sigma_\infty \neq \varnothing$, то $\sigma_r \neq \varnothing$ для каждого r.

Предложение 4. *Если функция $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ является маской ступенчатой масштабирующей функции φ с компактным носителем, то $\sigma_\infty = \varnothing$.*

Доказательство. Действительно, предположим, что σ_∞ содержит последовательность $(s_0, s_1, \dots)$ такую, что $s_0 \neq 0$. Согласно (15) тогда

$$\widehat{\varphi}(s_0 \dots s_M, s_{M+1} \dots s_{M+n-1}) = b[s_M \dots s_{M+n-1}]b[s_{M-1} \dots s_{M+n-2}] \dots b[0 \dots 0 s_0] \neq 0$$

для каждого натурального M. Поэтому носитель функции $\widehat{\varphi}$ не компактен, что в силу предложения 1 противоречит тому, что масштабирующая функция φ ступенчатая. □

Аналоги сформулированных ниже теорем 2–4 для группы Виленкина G_p доказаны в [46].

Теорема 2. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+$ и $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$. Для того чтобы функция m_0 была маской масштабирующей функции $\varphi \in S_{n-1}^{(r-n+1)}$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_r = \varnothing$.*

Теорема 3. *Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(n)}$ и $r = p^{n-1} - 1$, где $n \in \mathbb{N}$. Функция m_0 является маской ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем тогда и только тогда, когда $\sigma_r = \varnothing$.*

В качестве следствия из теоремы 3 имеем следующее предложение.

Предложение 5. *Предположим, что m_0 и r такие, как в теореме 3. Для того чтобы функция m_0 была маской ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем, необходимо и достаточно, чтобы*

— *либо $b[0 \cdots 0 s_0] = 0$ для каждого $s_0 \in \{1, \dots, p-1\}$;*
— *либо $b[0 \cdots 0 s_0 s_1] = 0$ для каждого $s_1 \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[0 \cdots 0 s_0] = 0$ для некоторого $s_0 \neq 0$;*
— *либо $b[0 \cdots 0 s_0 s_1 s_2] = 0$ для каждого $s_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[0 \cdots 0 s_0 s_1] = 0$ для некоторого вектора (s_0, s_1), $s_0 \neq 0$;*
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$;
— *либо $b[s_{l-n+2} \dots s_{l+1}] = 0$ для каждого $s_{l+1} \in \{0, \dots, p-1\}$ вместо того, чтобы $b[s_{l-n+1} \dots s_l] = 0$ для некоторого вектора $(s_{l-n+1}, \dots, s_l)$, $l < r$.*

Для иллюстрации формул (9), (10), предложений 2, 5 и теоремы 2 приведем следующие два примера.

Пример 2. Пусть $p = 3$ и $n = 2$.

(a) Если $b[01] = b[02] = 0$, то $\sigma_0 = \varnothing$ (так как $(1), (2) \notin \sigma_0$). Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_{-1}^{(1)}$ и $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[0,1/3)}$. Как в примере 1, отсюда получаем $\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)$.

(b) Если $b[01] = b[20] = b[21] = b[22] = 0$, то $\sigma_1 = \varnothing$ (так как $(1, s), (2, s) \notin \sigma_1$ для любого $s \in \{0, 1, 2\}$). Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_0^{(1)}$ и

$$\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[0,1/3)} + \widehat{\varphi}(1/3)\mathbf{1}_{[1/3,2/3)} + \widehat{\varphi}(2/3)\mathbf{1}_{[2/3,1)} = \mathbf{1}_{[0,1/3)} + b[01]\mathbf{1}_{[1/3,2/3)} + b[02]\mathbf{1}_{[2/3,1)},$$

где $b[01] = 0$. Следовательно,

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[02]w_2(x/3)).$$

(c) Если $b[02] = b[10] = b[11] = b[12] = 0$, то как в случае (b) (меняя ролями 1 и 2), имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3)).$$

(d) Если $b[20] = b[22] = b[10] = b[11] = b[12] = 0$, то $\sigma_2 = \varnothing$. Действительно, очевидно, $(1, s, s'), (2, s, s') \notin \sigma_2$ для всех $s, s' \in \{0, 1, 2\}$. Поэтому $\widehat{\varphi} \in S_1^{(1)}$ и

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_{[0,1/3)} &+ \widehat{\varphi}(1/3)\mathbf{1}_{[1/3,2/3)} + \widehat{\varphi}(2/3)\mathbf{1}_{[2/3,1)} + \widehat{\varphi}(1)\mathbf{1}_{[1,4/3)} + \widehat{\varphi}(4/3)\mathbf{1}_{[4/3,5/3)} + \\ &+ \widehat{\varphi}(5/3)\mathbf{1}_{[5/3,2)} + \widehat{\varphi}(2)\mathbf{1}_{[2,7/3)} + \widehat{\varphi}(7/3)\mathbf{1}_{[7/3,8/3)} + \widehat{\varphi}(8/3)\mathbf{1}_{[8/3,3)} = \\ = \mathbf{1}_{[0,1/3)} &+ b[01]\mathbf{1}_{[1/3,2/3)} + b[02]\mathbf{1}_{[2/3,1)} + b[01]b[10]\mathbf{1}_{[1,4/3)} + b[01]b[11]\mathbf{1}_{[4/3,5/3)} + \\ &+ b[01]b[12]\mathbf{1}_{[5/3,2)} + b[02]b[20]\mathbf{1}_{[2,7/3)} + b[02]b[21]\mathbf{1}_{[7/3,8/3)} + b[02]b[22]\mathbf{1}_{[8/3,3)}.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3) + b[02]w_2(x/3) + b[02]b[21]w_7(x/3)). \tag{17}$$

С помощью предложения 2 проверяется, что эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[01]|^2 + |b[21]|^2 = 1$ и $|b[02]| = 1$.

(e) Если $b[10] = b[11] = b[20] = b[21] = b[22] = 0$, то аналогично случаю (d) (меняя местами 1 и 2), имеем

$$\varphi(x) = (1/3)\mathbf{1}_{[0,1)}(x/3)(1 + b[01]w_1(x/3) + b[02]w_2(x/3) + b[01]b[12]w_5(x/3)). \tag{18}$$

Эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[01]| = 1$ и $|b[02]|^2 + |b[12]|^2 = 1$.

Известно (см. [46]), что при $p = 3$, $n = 2$ никаких других масштабирующих ступенчатых масштабирующих функций в $L^2_c(\mathbb{R}_+)$, кроме перечисленных в примере 2, не существует.

Пример 3. Пусть $p = 2$ и $n = 3$.

(a) Если $b[001] = 0$, то $\sigma_0 = \varnothing$ (так как $(1) \notin \sigma_0$). Следовательно, $\varphi \in S_2^{(-2)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4).$$

(b) Если $b[010] = b[011] = 0$, то $\sigma_1 = \varnothing$ (так как $(1,1) \notin \sigma_1$ и $(1,0) \notin \sigma_1$). Поэтому $\varphi \in S_2^{(-1)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4)).$$

(c) Если $b[011] = b[100] = b[101] = 0$, то $\sigma_2 = \varnothing$ (так как $(1,0,0) \notin \sigma_2$, $(1,0,1) \notin \sigma_2$ и $(1,1,s) \notin \sigma_2$, $s \in \{0,1\}$). Следовательно, $\varphi \in S_2^{(0)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[010]w_2(x/4)).$$

(d) Если $b[010] = b[110] = b[111] = 0$, то $\sigma_2 = \varnothing$ (так как $(1,1,0) \notin \sigma_2$, $(1,1,1) \notin \sigma_2$ и $(1,0,s) \notin \sigma_2$, $s \in \{0,1\}$). Поэтому $\varphi \in S_2^{(0)}$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[011]w_3(x/4)).$$

(e) Предположим, что $b[100] = b[101] = b[111] = 0$. Отметим, что в силу предложения 4 эти равенства необходимы для компактности носителя функции $\widehat{\varphi}$, если указанные в (a)–(d) условия на значения $b[s_1s_2s_3]$ не выполнены. Действительно, в противном случае $(1,0,0,0,\dots) \in \sigma_\infty$ или $(1,0,1,0,\dots) \in \sigma_\infty$ или $(1,1,1,1,\dots) \in \sigma_\infty$.

Поскольку $(1,0,0,s) \notin \sigma_3$, $(1,0,1,s) \notin \sigma_3$, $(1,1,1,s) \notin \sigma_3$ для $s \in \{0,1\}$, а также $(1,1,0,0) \notin \sigma_3$, $(1,1,0,1) \notin \sigma_3$, мы получаем $\sigma_3 = \varnothing$. Поэтому $\varphi \in S_2^{(1)}$ и аналогично предыдущим случаям имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[0,1)}(x/4)(1 + b[001]w_1(x/4) + b[001]b[010]w_2(x/4)) + \\ + b[001]b[011]w_3(x/4)) + b[001]b[011]b[110]w_6(x/4)).$$

По предложению 2 эта масштабирующая функция ортогональна, если $|b[001]| = |b[011]| = 1$ и $|b[010]|^2 + |b[110]|^2 = 1$ (ср. [8, пример 3] и [20, пример 2.32]).

Приведем описание ступенчатых масштабирующих функций для случая $n = 2$ при произвольном p. Согласно предложению 5, прежде всего следует рассмотреть случай, когда $b[0s] = 0$ для каждого $s \neq 0$. Тогда $\sigma_0 = \varnothing$ и m_0 является маской масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(-1)}$, для которой, как выше, получается формула $\varphi = (1/p)\mathbf{1}_{[0,p)}$. В этом случае шаг является максимально возможным. Семейство ступенчатых масштабирующих функций со всеми возможными шагами описывается следующей теоремой (случай $p = 3$ был рассмотрен в примере 2).

Теорема 4. *Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(2)}$, $r \in \{1, \dots, p-1\}$, и пусть $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ — такой вектор, что $\xi_k \in \{1, \dots, p-1\}$, $\xi_k \neq \xi_{k'}$ для $k \neq k'$. Предположим, что $b[ss'] = 0$ при $s \neq 0$ и $(s, s') \neq (\xi_k, \xi_{k+1})$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Тогда m_0 является маской масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(r-1)}$. Более того, если $b[\xi_k \xi_{k+1}] \neq 0$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$ и $b[0\xi_1] \neq 0$, то $\varphi \in S_1^{(r-1)} \setminus S_1^{(r-2)}$.*

Аналоги следующих двух предложений для группы Виленкина G_p доказаны в [46].

Предложение 6. *Пусть $m_0 \in \mathcal{M}_0^{(2)}$ является маской масштабирующей функции φ с компактным носителем. Для того чтобы функция φ принадлежала множеству $S_1^{(p-2)} \setminus S_1^{(p-3)}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $(\xi_1, \dots, \xi_{p-1})$, $\xi_k \in \{1, \dots, p-1\}$, что $b[\xi_k \xi_{k+1}] \neq 0$ для всех $k \in \{1, \dots, p-2\}$ и $b[0\xi_1] \neq 0$.*

Предложение 7. *Пусть m_0, r и вектор $(\xi_1, \dots, \xi_r)$ такие, как в теореме 4. Предположим, что $|b[\xi_k \xi_{k+1}]| = 1$ для $k \in \{1, \dots, r-1\}$, $|b[0s]| = 1$ для $s \notin \{\xi_2, \dots, \xi_r\}$ и пусть $b[0\xi_k] = 0$ для $k \in \{2, \dots, r\}$. Тогда m_0 является маской ортогональной ступенчатой масштабирующей функции $\varphi \in S_1^{(r-1)}$.*

3. Ступенчатые ортогональные вейвлеты и фреймы Парсеваля. Алгоритмы построения ортогональных вейвлетов в $L^2(\mathbb{R}_+)$ по данной ортогональной масштабирующей функции приведены в [28, § 8.2], [44] и [43, § 5.2]. Если масштабирующая функция φ ступенчатая, то и полученные по указанным алгоритмам ортогональные вейвлеты $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ будут ступенчатыми. Таким образом, для построения ортогональных ступенчатых вейвлетов $\psi_1, \dots, \psi_{p-1}$ достаточно найти ортогональную ступенчатую масштабирующую функцию в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Для нахождения таких масштабирующих функций наряду с предложением 7 применяются модифицированное условие Коэна, критерий отсутствия у маски блокирующих множеств и N-валидные деревья.

Известно (см. [33]), что если m_0 является маской такой ортогональной масштабирующей функции $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$, что $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то

$$m_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{p-1} |m_0(\omega + k/p)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{19}$$

Полагая $b_l = m_0(l/p^n)$, $0 \leqslant l \leqslant p^n - 1$, запишем условие (19) в виде

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 = 1 \quad \text{для всех } s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \tag{20}$$

Пример 4. Пусть $n = 2$, $p > 2$ и $l \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Предположим, что множества $E_l^{(0)}$ и $E_l^{(1)}$ образуют такое разбиение множества $\{0, 1, \dots, p-1\}$, что $E_l^{(0)} = \{j_1, j_2, \dots, j_l\}$ и $0 \in E_l^{(1)}$. Для фиксированного $j_0 \in E_l^{(1)}$, $j_0 \neq 0$, выберем в (20) такие числа b_s, $s = s_1 + s_2 p$, $s_1, s_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, что

1) $b_0 = 1$,
2) $|b_s| = 1$ для всех $s \in E_l^{(1)} \setminus \{0\}$,
3) $|b_{j_1 + j_0 p}| = |b_{j_2 + j_1 p}| = \dots = |b_{j_l + j_{l-1} p}| = 1$,
4) $b_s = 0$ в остальных случаях.

Согласно предложению 7 соответствующая данной маске m_0 масштабирующая функция φ ортогональна и принадлежит классу $\mathcal{S}_1^{(l)}$ (ср. [35, замечание 3.11] и [57, теорема 4.6]).

Для произвольной функции $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положим

$$\varphi_{j\,k}(x) = p^{j/2} \varphi(p^j x \ominus k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что функция φ порождает кратномасштабный анализ (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, подпространства

$$V_j := \overline{\operatorname{span}}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \{\varphi_{j\,k} : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

обладают свойствами

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad \bigcap V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup V_j} = L^2(\mathbb{R}_+).$$

Множество $E \subset \mathbb{R}_+$ называется *конгруэнтным* $[0,1)$ *по модулю* $\mathbb{Z}_+$, если мера Лебега множества E равна 1 и для каждого $x \in [0,1)$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $x \oplus k \in E$.

Теорема 5 (см. [14]). *Пусть функция $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ является решением уравнения* (3) *и маска m_0 этого уравнения удовлетворяет условию* (19). *Предположим, что существует множество $E \subset \mathbb{R}_+$, конгруэнтное $[0,1)$ по модулю $\mathbb{Z}_+$, состоящее из конечного числа p-ичных интервалов, содержащее интервал $[0,p^{-n})$ и такое, что выполнено модифицированное условие Коэна*

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_{\omega\in E} |m_0(p^{-j}\omega)| > 0. \tag{21}$$

Тогда функция φ порождает КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Если коэффициенты уравнения (3) выбраны так, чтобы выполнялись условия (19) и $m_0(\omega) \neq 0$ для всех $\omega \in [0,1/p)$, то в условии (21) можно выбрать $E = [0,1)$. Для маски m_0 из примера 4 модифицированное условие Коэна выполнено на множестве $E = \{\omega \in [0,1) : |m_0(\omega)| = 1\}$.

Блокирующее множество для маски m_0 определяется следующим образом (см. [8, 13]). Для произвольного $M \subset [0,1)$ положим

$$T_pM = \bigcup_{l=0}^{p-1} \Big\{ l/p + \omega/p : \omega \in M \Big\}.$$

Множество M называется *блокирующим для маски m_0*, если оно представимо в виде объединения p-ичных интервалов ранга $n-1$, не содержит интервала $[0,p^{-n+1})$ и удовлетворяет условию

$$T_pM \setminus M \subset \mathrm{Z}(m_0),$$

где $\mathrm{Z}(m_0) := \{\omega \in [0,1) \,:\, m(\omega) = 0\,\}$.

Теорема 6 (см. [13]). *Пусть функция $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}_+)$ является решением уравнения* (3) *и маска m_0 этого уравнения удовлетворяет условию* (19). *Тогда функция φ порождает КМА в том и только в том случае, когда маска m_0 не имеет блокирующих множеств.*

Примеры применения теорем 5 и 6 к построению ортогональных масштабирующих функций для малых p и n имеются в [8, 9, 35, 36, 43].

В [58] для построения ступенчатых масштабирующих функций на группе Виленкина G_p применялись (N,m)-элементарные множества и N-валидные деревья. Следуя краткому сообщению [39], сформулируем определения этих понятий для полупрямой $\mathbb{R}_+$ и проиллюстрируем их несколькими примерами.

Определение 1. Пусть $N, m \in \mathbb{N}$. Множество E называется *(N,m)-элементарным множеством*, если существуют такие числа ζ_j, $j = 0, 1, \dots, p^N - 1$, что

$$E = \bigcup_{j=0}^{p^N-1} \Delta^{(N)}(\zeta_j), \quad \Delta^{(N)}(\zeta_j) \cap \Delta^{(N)}(\zeta_{j'}) = \varnothing \quad \text{для } j \neq j',$$

где $\Delta^{(N)}(\zeta_j) := \big[\zeta_j/p^N, (\zeta_j+1)/p^N\big)$, $\zeta_0 = 0$, и для $\eta_j = [\zeta_j]$, $\xi_j = \{\zeta_j\}$ выполнены следующие условия:

(a) $\eta_j \in \{0, 1, \dots, p^m - 1\}$;
(b) $\xi_j \in \{0, 1/p^N, \dots, (p^N-1)/p^N\}$, $\xi_j \neq \xi_{j'}$ для $j \neq j'$;
(c) $E \cap [p^{-N+l}, p^{-N+l+1}) \neq \varnothing$ для $l = 0, 1, \dots, m+N-1$.

Заметим, что из условия (a) следует равенство

$$\bigcup_{j=0}^{p^N-1} [\xi_j, \xi_j + p^{-N}) = [0,1).$$

Кроме того, очевидно, всякое (N,m)-элементарное множество E имеет единичную меру Лебега и содержится в интервале $[0,p^m)$.

Определение 2. *Периодическим продолжением* $(N,1)$-элементарного множества $\widetilde{E}$ называется множество

$$P(\widetilde{E}) := \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{l=0}^{p^s-1} (\widetilde{E} + l\cdot p). \tag{22}$$

Отметим, что $P(\widetilde{E}) \supset \widetilde{E} \supset [0,p^{-N})$.

Пример 5. В случае $N=1$, $p=3$ множество $\widetilde{E}$ в определении 2 имеет вид

$$\widetilde{E} = [0,1/3) \cup [\zeta_1/3,(\zeta_1+1)/3) \cup [\zeta_2/3,(\zeta_2+1)/3),$$

где числа ζ_1 и ζ_2 представимы в виде

$$\zeta_j = \eta_j + \xi_j, \quad \eta_j \in \{0,1,2\}, \quad \xi_j \in \{1/3,2/3\}, \quad j \in \{1,2\}, \quad \xi_1 \neq \xi_2.$$

Числа ζ_1 и ζ_2 выбираются так, чтобы пересечение множества $\widetilde{E}$ с каждым из интервалов $[1/3,1)$ и $[1,3)$ было не пустым. В частности, при $\eta_1=0$, $\xi_1=1/3$, $\eta_2=2$, $\xi_2=2/3$, получаем $(1,1)$-элементарное множество

$$\widetilde{E} = [0,1/3) \cup [1/3,2/3) \cup [8/3,3).$$

Периодическое продолжение этого множества есть

$$P(\widetilde{E}) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\widetilde{E}),$$

где

$$F_1(\widetilde{E}) = \widetilde{E} \cup (\widetilde{E}+3) \cup (\widetilde{E}+6),$$
$$F_2(\widetilde{E}) = F_1(\widetilde{E}) \cup (\widetilde{E}+9) \cup (\widetilde{E}+12) \cup (\widetilde{E}+15) \cup (\widetilde{E}+18) \cup (\widetilde{E}+21) \cup (\widetilde{E}+24),$$

и, вообще,

$$F_s(\widetilde{E}) = F_{s-1}(\widetilde{E}) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\widetilde{E}+3k) \right) \quad \text{для } s \geqslant 2.$$

Определение 3. Будем говорить, что задано N-*валидное дерево* T, если T ориентировано от листьев к корню и удовлетворяет следующим условиям:

(a) каждая вершина дерева T имеет значение из множества $\{0,1,\dots,p-1\}$;
(b) корень и все вершины дерева T до $(N-1)$-го уровня включительно имеют значение 0;
(c) любой путь длины $N-1$ встречается в T и притом только один раз.

Каждому N-валидному дереву T сопоставим множество индексов $I(T)$ по правилу:

$$s \in I(T) \iff s=0 \quad \text{или} \quad s = \sum_{k=0}^{N} s_k p^k,\ s_k \in \{0,1,\dots,p-1\},$$

при условии, что путь $s_0 \to s_1 \to \dots \to s_N$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей дерева T.

Предложение 8 (см. [58]). *Для любого N-валидного дерева T множество*

$$\widetilde{E}_T := \bigcup_{s\in I(T)} [sp^{-N},(s+1)p^{-N}) \tag{23}$$

является $(N+1,1)$-элементарным.

Пример 6. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T выбрано как на рис. 1 в [58], но с противоположной ориентацией. Дерево T имеет следующие пути, начинающиеся в листьях и оканчивающиеся в корне:

$$P_1 : \ 0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 0, \qquad P_2 : \ 1 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0,$$
$$P_3 : \ 2 \to 1 \to 0 \to 2 \to 0 \to 0, \quad P_4 : \ 2 \to 2 \to 0 \to 0.$$

Множество индексов

$$I(T) = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 19, 21\}$$

находится из условия

$$s \in I(T) \setminus \{0\} \iff s = s_0 + 3s_1 + 9s_2,$$

где $s_0 \to s_1 \to s_2$ встречается хотя бы один раз в каком-нибудь из путей P_1, P_2, P_3, P_4. Из формулы (23) для данного дерева T получается множество

$$\widetilde{E}_T = [0, 1/9) \cup [2/9, 1/3) \cup [4/9, 1) \cup [19/9, 20/9) \cup [7/3, 22/9).$$

Положим $n = 3$ и выберем в условии (20) отличные от нуля значения маски

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{26} a_k \overline{w_k(\omega)}$$

так, что $b_0 = 1$, $|b_2| = |b_4| = |b_5| = |b_6| = |b_7| = |b_8| = |b_{19}| = |b_{21}| = 1$. Отметим, что если все эти значения равны 1, то маска m_0 на интервале $[0, 1)$ совпадет с характеристической функцией множества $\widetilde{E}_T/3$. Кроме того, $m_0(\omega) = 1$ для всех $\omega \in [0, 1/27)$ и в силу предложения 3 формула

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{3} m_0(3^{-j}\omega), \quad \omega \in [0, 3),$$

задаёт масштабирующую функцию $\varphi \in \mathcal{S}_2^{(2)}$ (ср. [46, пример 4]). Для этой функции с помощью формулы (10) получается разложение

$$\varphi(x) = \frac{1}{9}\mathbf{1}_{[0,1)}(y)\Big(1 + b_2 w_2(y) + b_2 b_6 w_6(y) + b_2 b_7 w_7(y) + b_2 b_8 w_8(y) + \\ + b_2 b_6 b_{19} w_{19}(y) + b_2 b_7 b_{21} w_{21}(y) + b_2 b_4 b_6 b_{19} w_{58}(y) + b_2 b_5 b_6 b_{19} w_{59}(y)\Big),$$

где $y = x/9$, $x \in [0, 9)$. Видно, что функция φ отлична от нуля на множестве $\widetilde{E}_T$ и обращается в нуль на $\mathbb{R}_+ \setminus \widetilde{E}_T$. Более того, модифицированное условие Коэна

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \inf_{\omega \in E} |m_0(3^{-j}\omega)| > 0$$

выполнено для $E = \widetilde{E}_T$. Значит, по теореме 5 система $\{\varphi(\cdot \ominus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Построенная в примере 6 ступенчатая масштабирующая функция относится к случаю $p = n = 3$. Из предложения 4 следует, что если при $p = n = 3$ некоторое решение φ масштабирующего уравнения (3) является ступенчатой функцией, то среди нулевых значений маски m_0 уравнения (3) будут следующие: b_9, b_{10}, b_{13}, b_{18}, b_{20}, b_{26}.

Определение 4. Говорят, что множество E *порождено N-валидным деревом* T, если

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} p^k P(\widetilde{E}_T/p),$$

где множество $\widetilde{E}_T$ задано по формуле (23).

Предложение 9 (см. [58]). *Пусть множество E порождено N-валидным деревом T с высотой H. Тогда множество E представимо в виде*

$$E = \bigcap_{k=1}^{H-N+1} p^k P(\widetilde{E}_T/p)$$

и является (N, m)-элементарным множеством с $m = H - 2N + 1$.

Следующая теорема представляет собой переформулировку теоремы 4.1 из [58].

Теорема 7. *Пусть модуль маски m_0 масштабирующего уравнения* (3) *принимает только два значения*: 0 *или* 1, *причем $m_0(0) = 1$. Предположим, что решение φ уравнения* (3), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

таково, что $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}_m^{(N)}$ и $|\widehat{\varphi}| = \mathbf{1}_E$, где $N = n - 1$ и E является (N, m)-элементарным множеством. Тогда существует N-валидное дерево T с высотой $H = m + 2N - 1$, порождающее множество E.

При условиях предложения 9 имеем $E \subset [0, p^m)$ и

$$\mathbf{1}_E(\omega) = \prod_{k=1}^{m+N} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(p^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{24}$$

С другой стороны, для данной функции φ имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \widehat{\varphi}(p^{-m-N}\omega) \prod_{j=1}^{m+N} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Отметим, что формула (25) совпадает с (24), если $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$ и $m_0(\omega) = \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/p)}(\omega)$ для $\omega \in \widetilde{E}_T/p$ (при этом $p^{-m-N}E \subset [0, p^{-N}) \subset E$).

Пример 7. Пусть $N = 2$, $p = 3$, а дерево T и множество $\widetilde{E}_T$ как в примере 6. Тогда $H = 5$ и по предложению 9 множество

$$E = \bigcap_{k=1}^{4} 3^k P(\widetilde{E}_T/3), \quad E \subset [0, 9),$$

является $(2, 2)$-элементарным. Полагая $\widetilde{E}_0 = \widetilde{E}_T/3$, как в примере 5 определим множества

$$F_1(\widetilde{E}_0) = \widetilde{E}_0 \cup (\widetilde{E}_0 + 3) \cup (\widetilde{E}_0 + 6),$$

$$F_s(\widetilde{E}_0) = F_{s-1}(\widetilde{E}_0) \cup \left(\bigcup_{k=3^{s-1}-1}^{3^s-1} (\widetilde{E}_0 + 3k) \right) \quad \text{для } s \geqslant 2.$$

Тогда

$$P(\widetilde{E}_T/3) = \bigcup_{s=1}^{\infty} F_s(\widetilde{E}_0).$$

Если функция φ определена условием $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}_E$, то согласно (24) и (25) имеем

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{k=1}^{4} \mathbf{1}_{P(\widetilde{E}_T/3)}(3^{-k}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

и с помощью модифицированного критерия Коэна проверяется, что масштабирующая функция φ является ортогональной.

Произвольное N-валидное дерево T может быть записано в *векторной форме* $\widetilde{T}$ таким образом, что выполнены следующие условия:

(a) вершинами дерева $\widetilde{T}$ являются N-мерные векторы $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ с компонентами $s_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $i \in 1, 2. \dots, N$;

(b) дерево $\widetilde{T}$ ориентировано от листьев к корню, причем корнем дерева $\widetilde{T}$ является N-мерный нулевой вектор;

(c) для любой дуги $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ дерева $\widetilde{T}$ выполнено условие «суффикс-префикс»: первые $N-1$ компонент вектора $\boldsymbol{t}$ совпадают с последними $N-1$ компонентами вектора $\boldsymbol{s}$.

Высоты деревьев $\widetilde{T}$ и T связаны равенством $\widetilde{H} = H - N + 1$. Векторная форма применяется при $N \geqslant 2$; в случае $N = 1$ эти формы отождествляются: $\widetilde{T} = T$.

Вектору $\boldsymbol{t} = (t_N, t_{N-1}, \dots, t_1)$ поставим в соответствие число $t = t_1 + t_2 p + \dots + t_N p^{N-1}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Всем исходящим из вершины $\boldsymbol{s} = (s_N, s_{N-1}, \dots, s_1)$ дерева $\widetilde{T}$ дугам $\boldsymbol{s} \to \boldsymbol{t}$ приписываются положительные веса λ_t, сумма которых равна 1. Аналогом сформулированной в [3] теоремы является следующее предложение.

Предложение 10. *Пусть числа λ_t определены для N-валидного дерева $\widetilde{T}$ как указано выше, причем $N = n - 1$. Предположим, что ненулевые значения маски m_0 выбраны так, что $b_0 = 1$ и $|b_{t+kp^N}|^2 = \lambda_t$ для $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $t \in \{0, 1, \dots, p^N - 1\}$. Тогда решение φ уравнения* (3), *заданное по формуле*

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(p^{-j}\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

принадлежит классу $\mathcal{S}_N^{(m)}$, где $m = \widetilde{H} - N$.

Для группы Виленкина G_p необходимые и достаточные условия ортонормированности системы целых сдвигов масштабирующей функции, определяемой аналогично функции φ из предложения 10, доказаны в [24].

При построении фреймов Парсеваля (т.е. нормализованных жёстких фреймов; см. [65, определение 2.1]) вместо (20) применяется условие

$$b_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{p-1} |b_{s+kp^{n-1}}|^2 \leqslant 1 \quad \text{для всех } s \in \{0, 1, \dots, p^{n-1} - 1\}. \tag{26}$$

Это условие гарантирует принадлежность классу $L^2(\mathbb{R}_+)$ функции φ, заданной своим преобразованием Уолша—Фурье по формуле (8) (ср. [8, предложение 6] и [17, раздел 2]). В сочетании с приведенными в разделе 2 характеристическими свойствами условие (26) задает класс масок, для которых соответствующие нормализованные жёсткие фреймы состоят из ступенчатых функций. В [38] определены три типа вейвлет-фреймов на $\mathbb{R}_+$: КМА-фреймы, маски которых удовлетворяют условию (26) (см. [38, раздел 2]); фреймы, ассоциированные с «допустимым условием» типа Добеши (см. [38, теорема 3.3], [56]); и фреймы, ассоциированные с ядрами типа Дирихле—Уолша. Вычислительные алгоритмы для построения фреймов первого типа изложены в [35, 42, 46], а для группы Кантора фреймы второго и третьего типов рассматривались в [34] (в этих случаях условие (26) не требуется). Для фреймов на локальных полях аналоги «допустимого условия» типа Добеши содержатся в [56]. Недавно доказано (см. [19]), что для произвольного локального поля K множество жёстких вейвлет фреймов не плотно в $L^2(K)$. Известно, что в случае простого p группа Виленкина G_p изоморфна аддитивной группе поля формальных рядов Лорана над конечным полем $GF(p)$ (о соответствующих масштабирующих функциях см., например, [20, теорема 2.29], [21, 23, 59]). Изучение жёстких фреймов на поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ представляет особый интерес, поскольку не существует «нетривиального» ортогонального базиса в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, состоящего из ступенчатых вейвлетов с компактными носителями. Действительно, согласно [30, 64] любой такой ортогональный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ является модифицированным базисом Хаара. Подробная библиография о вейвлетах и фреймах на локальных полях имеется в [20] (см. также [21, 22, 25, 26]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. — М.: ЛКИ, 2008.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
3. *Лукомский С. Ф., Бердников Г. С., Крусс Ю. С.* Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 2. — С. 310–313.
4. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2006.
5. *Новиков И. Я., Скопина М. А. Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?* Мат. заметки. — 2012. — *91*, № 6. — С. 895-–898.
6. *Паршин А. Н.* Записки о формуле Пуассона// Алгебра анал. — 2011. — *23*, № 5. — С. 1—54.
7. *Протасов В. Ю.* Аппроксимация диадическими всплесками// Мат. сб. — 2007. — *198*, № 11. — С. 135–152.
8. *Протасов В. Ю., Фарков Ю. А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 10. — С. 129–160.
9. *Родионов Е. А., Фарков Ю. А.* Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 429—444.
10. *Скопина М. А., Фарков Ю. А.* Функции типа Уолша на M-положительных множествах в $\mathbb{R}^d$// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 4. — С. 631—635.
11. *Устинов А. В.* Дискретный аналог формулы суммирования Пуассона// Мат. заметки. — 2003. — *73*, № 1. — С. 106–112.
12. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — *69*, № 3. — С. 193–220.
13. *Фарков Ю. А.* Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 6. — С. 934—952.
14. *Фарков Ю. А.* Биортогональные всплески на группах Виленкина// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — *265*. — С. 110–124.
15. *Фарков Ю. А.* Дискретные вейвлеты и преобразование Виленкина—Крестенсона// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 6. — С. 914–928.
16. *Фарков Ю. А.* Ортогональные всплески в анализе Уолша// в кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. XI. Вып. 1. Математика. К 80-летию В. А. Скворцова. Обобщенные интегралы и гармонический анализ (Лукашенко Т. П., Солодов А. П., ред.). — М.: Изд-во МГУ, 2016. — С. 62–75.
17. *Фарков Ю. А.* Фреймы в анализе Уолша, матрицы Адамара и равномерно распределенные множества// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *199*. — С. 17—30.
18. *Чернов В. М.* Арифметические методы синтеза быстрых алгоритмов дискретных ортогональных преобразований. — М.: Физматлит, 2007.
19. *Behera B.* Density of frame wavelets and tight frame wavelets in local fields// Complex Anal. Oper. Theory. — 2021. — *15*, № 6. — 102.
20. *Behera B., Jahan Q.* Wavelet Analysis on Local Fields of Positive Characteristic. — Singapore: Springer, 2021.
21. *Benedetto J. J., Benedetto R. L.* A wavelet theory for local fields and related groups// J. Geom. Anal. — 2004. — *14*. — P. 423–456.
22. *Benedetto J. J., Benedetto R. L.* Frames of translates for number-theoretic groups// J. Geom. Anal. — 2020. — *30*, № 4. — P. 4126–4149.
23. *Benedetto R. L.* Examples of wavelets for local fields// Contemp. Math. — 2004. — *345*. — P. 27–47.
24. *Berdnikov G. S.* Necessary and sufficient condition for an orthogonal scaling function on Vilenkin groups// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2019. — *19*, № 1. — P. 24-–33.
25. *Berdnikov G., Kruss Yu., Lukomskii S.* How to construct wavelets on local fields of positive characteristic// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 4. — P. 615–621.
26. *Bownik M., Iverson J. W.* Multiplication-invariant operators and the classification of LCA group frames// J. Funct. Anal. — 2021. — *280*, № 2. — 108780.
27. *Chrestenson H. E.* A class of generalized Walsh functions// Pac. J. Math. — 1955. — *5*, № 1. — P. 17–32.
28. *Debnath L., Shah F. A.* Wavelet Transforms and Their Applications. — Springer, 2015.
29. *Evdokimov S.* Haar multiresolution analysis and Haar bases on the ring of rational adeles// J. Math. Sci. — 2013. — *192*, № 2. — P. 215–219.

30. *Evdokimov S., Skopina M.* On orthogonal p-adic wavelet bases// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *424*, № 2. — P. 952–965.
31. *Farkov Yu. A.* Orthogonal p-wavelets on $\mathbb{R}_+$// Proc. Int. Conf. on Wavelets and Splines (St. Petersburg, Russia, July 3–8, 2003). — Saint Petersburg: St. Petersburg Univ. Press, 2005. — P. 4–26.
32. *Farkov Yu. A.* Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups// Facta Univ. Ser. Electr. Energ. — 2008. — *21*, № 3. — P. 309–325.
33. *Farkov Yu. A.* On wavelets related to the Walsh series// J. Approx. Theory. — 2009. — *161*. — P. 259–279.
34. *Farkov Yu. A.* Examples of frames on the Cantor dyadic group// J. Math. Sci. — 2012. — *187*, № 1. — P. 22–34.
35. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis// Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 13–36.
36. *Farkov Yu. A.* On the best linear approximation of holomorphic functions// J. Math. Sci. — 2016. — *218*, № 5. — P. 678–698.
37. *Farkov Yu. A.* Nonstationary multiresolution analysis for Vilenkin groups// Proc. Int. Conf. on Sampling Theory and Applications (Tallinn, Estonia, July 3-7, 2017), 2017. — P. 595–598.
38. *Farkov Yu. A.* Wavelet frames related to Walsh functions// Eur. J. Math. — 2019. — *5*, № 1. — P. 250–267.
39. *Farkov Yu. A.* Chrestenson–Levy system and step scaling functions// Bull. Gumilyov Eurasian Natl. Univ. Ser. Math. Comput. Sci. Mech. — 2020. — *130*, № 1. — P. 59–72.
40. *Farkov Yu. A.* Discrete wavelet transforms in Walsh analysis// J. Math. Sci. — 2021. — *257*, № 1. — P. 127–137.
41. *Farkov Yu. A.* Finite Parseval frames in Walsh analysis// J. Math. Sci. — 2022. — *263*, № 4. — P. 579–589.
42. *Farkov Yu. A., Lebedeva E. A., Skopina M. A.* Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — *13*, № 5. — 1550036.
43. *Farkov Yu. A., Manchanda P., Siddiqi A. H.* Construction of Wavelets through Walsh Functions. — Singapore: Springer, 2019.
44. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* Algorithms for wavelet construction on Vilenkin groups// p-Adic Num. Ultrametr. Anal. Appl. — 2011. — *3*, № 3. — P. 181–195.
45. *Farkov Yu. A., Rodionov E. A.* On biorthogonal discrete wavelet bases// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — *13*, № 1. — 1550002.
46. *Farkov Yu. A., Skopina M. A.* Step wavelets on Vilenkin groups// J. Math. Sci. — 2022. — *266*, № 5. — P. 696–708.
47. *Gajić D. B., Stanković R. S.* Computation of the Vilenkin–Chrestenson transform on a GPU// J. Mult.-Val. Log. Soft Comput. — 2015. — *24*, № 1-4. — P. 317–340.
48. *Hirn M. J.* The refinability of step functions// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — *136*, № 3. — P. 899–908.
49. *Karapetyants M. A., Protasov V. Yu.* Spaces of dyadic distributions// Funct. Anal. Appl. — 2020. — *54*, № 4. — P. 272–277.
50. *Krivoshein A. V., Lebedeva E. A.* Uncertainty principle for the Cantor dyadic group// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *423*, № 2. — P. 1231–1242.
51. *Krivoshein A., Protasov V., Skopina M.* Multivariate Wavelet Frames. — Singapore: Springer, 2016.
52. *Lang W. C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group// SIAM J. Math. Anal. — 1996. — *27*, № 1. — P. 305–312.
53. *Lang W. C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group// Houston J. Math. — 1998. — *24*, № 3. — P. 533–544.
54. *Lawton W., Lee S. L., Shen Z.* Characterization of compactly supported refinable splines// Adv. Comput. Math. — 1995. — *3*, № 1-2. — P. 137–145.
55. *Lebedeva E. A.* Approximation properties of systems of periodic wavelets on the Cantor group// J. Math. Sci. — 2020. — *244*, № 4. — P. 642–648.
56. *Li D., Jiang H.* The necessary condition and sufficient conditions for wavelet frame on local fields// J. Math. Anal. Appl. — 2008. — *344*, № 1. — P. 500–510.
57. *Lukomskii S. F.* Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups// J. Fourier Anal. Appl. — 2014. — *20*. — P. 42–65.
58. *Lukomskii S. F., Berdnikov G. S.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups// Int. J. Wavelets Multires. Inf. Process. — 2015. — *13*, № 5. — 1550037.

59. *Mahapatra P., Singh D.* Construction of MRA and non-MRA wavelet sets on the Cantor dyadic group// Bull. Sci. Math. — 2021. — *167*. — 102945.
60. *Mallat S.* A Wavelet Tour of Signal Processing. The Sparse Way. — Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2009.
61. *Platonov S. S.* Some problems in the theory of approximation of functions on locally compact Vilenkin groups// p-Adic Num. Ultrametr. Anal. Appl. — 2019. — *11*, № 2. — P. 163–175.
62. *Plotnikov M.* On the Vilenkin-Chrestenson systems and their rearrangements// J. Math. Anal. Appl. — 2020. — *492*, № 1. — 124391.
63. *Schipp F., Wade W. R., Simon P.* Walsh Series: An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. — New York: Adam Hilger, 1990.
64. *Skopina M.* p-Adic wavelets// Poincaré J. Anal. Appl. — 2015. — № 2. — P. 53–63.
65. *Waldron S.* An Introduction to Finite Tight Frames. — New York: Springer, 2018.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Фарков Юрий Анатольевич
Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте РФ, Москва
E-mail: farkov-ya@ranepa.ru