ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 225 (2023). С. 73–86
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-225-73-86

УДК 517.9

ОБ ОСНОВНОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2023 г. **Д. КАРАХАН, Х. Р. МАМЕДОВ, И. Ф. ХАШИМОГЛУ**

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для оператора Штурма—Лиувилля с разрывным коэффициентом. Получено основное уравнение обратной задачи для краевой задачи и доказана единственность его решения.

Ключевые слова: основное уравнение, разрывный оператор Штурма—Лиувилля, обратная задача.

ON MAIN EQUATION FOR INVERSE STURM–LIOUVILLE OPERATOR WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

© 2023 **D. KARAHAN, Kh. R. MAMEDOV, I. F. HASIMOGLU**

Abstract. In this work, a boundary-value problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous coefficient is examined. The main equation for the inverse problem for the boundary-value problem is obtained and the uniqueness of its solution is proved.

Keywords and phrases: main equation, discontinuous Sturm–Liouville operator, inverse problem.

AMS Subject Classification: 34A55, 34K10

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2\rho(x)y, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in L_{2,\rho}(0,\pi)$ — вещественнозначная функция, λ — комплексный параметр и

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant a, \\ \alpha^2, & a < x \leqslant \pi, \end{cases} \tag{3}$$

— кусочно постоянная функция. Предположим, что $a(1+\alpha) > \pi\alpha$.

Математические модели физических проблем, связанных с неоднородными средами, колебаниями, диффузией и т. д. представляют собой дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами (см. [1, 7–9, 12, 15, 20, 25]). Анализ таких проблем основан на спектральных свойствах задачи Штурма—Лиувилля с разрывными коэффициентами (см. [3, 16, 17, 19, 24]). Случай $\rho(x) \equiv 1$ был рассмотрен в [2, 4, 6, 18, 22]. Спектральные свойства оператора Штурма—Лиувилля с разрывными коэффициентами при различных граничных условиях были рассмотрены в [10, 11, 13, 14, 21, 23]. В [21] были рассмотрены спектральные свойства краевой задачи (1), (2), построен резольвентный оператор, получено разложение по собственным функциям и проведено обсуждение решения Вейля и функции Вейля.

В данной работе получено основное уравнение для краевой задачи (1), (2) и доказана единственность её решения. Кроме того, получена теорема единственности для решения обратной задачи со спектральными данными и функцией Вейля (см. [21]). Аналогичные задачи для уравнения (1) с различными граничными условиями анализировались в [11].

В [10] доказано, что решение $\varphi(x,\lambda)$ уравнения (1) с начальными данными $\varphi(0,\lambda) = 0$ и $\varphi'(0,\lambda) = 1$ можно представить следующим образом:

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \int\limits_0^{\mu^+(x)} A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt, \tag{4}$$

где $A(x,t)$ лежит в классе $L_2(0,\pi)$ для каждого фиксированного $x \in (0,\pi]$. Эта функция выражается через коэффициент $q(x)$ уравнения (1) формулой

$$\frac{d}{dx}A(x,\mu^+(x)) = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x), \tag{5}$$

где

$$\varphi_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\frac{\sin\lambda\mu^+(x)}{\lambda} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\frac{\sin\lambda\mu^-(x)}{\lambda} \tag{6}$$

— решение уравнения (1) при $q(x) \equiv 0$,

$$\mu^+(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a\big(1 \mp \sqrt{\rho(x)}\big). \tag{7}$$

Характеристическая функция $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$\Delta(\lambda) := \langle\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\rangle = \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda),$$

где $\Delta(\lambda)$ не зависит от $x \in [0,\pi]$. Подставляя $x = 0$ и $x = \pi$ в уравнение, получим

$$\Delta(\lambda) = \psi(0,\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda).$$

Квадраты нулей λ_n характеристической функции совпадают с собственными значениями краевой задачи (1), (2). Краевая задача (1), (2) имеет счетное множество простых собственных значений $\{\lambda_n^2\}$. Для каждого λ_n существует такая последовательность β_n, что

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n \neq 0, \tag{8}$$

где $\psi(x,\lambda_n)$ и $\varphi(x,\lambda_n)$ — собственные функции краевой задачи (1), (2), соответствующие собственному значению λ_n^2. Нормировочные коэффициенты равны

$$\alpha_n := \int\limits_0^{\pi} \rho(x)\varphi^2(x,\lambda_n)dx.$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны. Собственные значения краевой задачи (1), (2) простые и

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = -2\lambda_n\alpha_n\beta_n, \tag{9}$$

где $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Теорема 1 (см. [21]). *Нули λ_n характеристической функции $\Delta(\lambda)$ имеют следующее асимптотическое разложение*:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{k_n}{n},$$

где λ_n^0 — нули функции

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}(\alpha+1)\cos\lambda\mu^+(\pi) - \frac{1}{2}(\alpha-1)\cos\lambda\mu^-(\pi)$$

и

$$d_n = -\frac{h^+ \sin\lambda_n^0\mu^+(\pi) + h^- \sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)}{-\frac{1}{2}(\alpha+1)\mu^+(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi) + \frac{1}{2}(\alpha-1)\mu^-(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)}$$

— ограниченная последовательность, $\{k_n\} \in l_2$.

Теорема 2 (см. [21]).

1. *Система собственных функций* $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geqslant 1}$ *краевой задачи* (1), (2) *полна в* $L_{2,\rho}(0,\pi)$.
2. *Если* $f(x)$ *— абсолютно непрерывная функция на отрезке* $[0,\pi]$ *и* $f(0) = f'(\pi) = 0$, *то*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi(x,\lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)\rho(t)dt, \tag{10}$$

   причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$.
3. *При* $f(x) \in L_{2,\rho}(0,\pi)$ *ряд в* (10) *сходится в* $L_{2,\rho}(0,\pi)$ *и, кроме того, выполняется равенство Парсеваля*:

$$\int_0^{\pi} \left|f(x)\right|^2 \rho(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left|a_n\right|^2.$$

2. Основное уравнение.

Теорема 3. *Для каждого фиксированного* $x \in (0,\pi]$ *ядро* $A(x,t)$ *из представления* (4) *удовлетворяет следующему линейному функционально-интегральному уравнению*:

$$\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A\big(x,\mu^+(t)\big) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(x,2a-t) + \\ + F(x,t) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi = 0, \quad 0<t<x, \tag{11}$$

где

$$F_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n x}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0 x}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right), \tag{12}$$

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)F_0\big(\mu^+(x),t\big) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)F_0\big(\mu^-(x),t\big), \tag{13}$$

$\lambda_n^{0^2}$ *— собственные значения,* α_n^0 *— нормировочные константы краевой задачи* (1), (2) *с* $q(x) \equiv 0$.

Доказательство. Согласно (4) имеем

$$\varphi_0(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) - \int_0^{\mu^+(x)} A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt. \tag{14}$$

Из (4) и (14) получаем:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} = \\ = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} + \frac{\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\frac{\sin\lambda_n\xi}{\lambda_n}d\xi\right) =$$

$$
= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0} +
$$

$$
+ \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi + \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}d\xi,
$$

$$
\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \int_0^{\mu^+(t)} A(t,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}d\xi.
$$

Используя последние два соотношения, находим

$$
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right) =
$$

$$
= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right) + \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}d\xi +
$$

$$
+ \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi + \int_0^{\mu^+(t)} A(t,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}d\xi,
$$

или

$$
\Phi_N(x,t) = I_{N1}(x,t) + I_{N2}(x,t) + I_{N3}(x,t) + I_{N4}(x,t), \tag{15}
$$

где

$$
\Phi_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right),
$$

$$
I_{N1}(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right),
$$

$$
I_{N2}(x,t) = \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}d\xi,
$$

$$
I_{N3}(x,t) = \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi,
$$

$$
I_{N4}(x,t) = \int_0^{\mu^+(t)} A(t,\xi)\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}d\xi.
$$

Из (12) и (13) легко находим

$$
F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right).
$$

Пусть $f(x) \in AC(0,\pi]$, $f(0) = f'(\pi) = 0$. Согласно формуле разложения (10) получаем, что

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} f(t)\rho(t)\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n}dt = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi} f(t)\rho(t)\frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}dt = f(x) \tag{16}
$$

равномерно на $x \in (0,\pi]$. Согласно (16) имеем

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left|\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\Phi_N(x,t)dt\right| =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left|\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^N\left(\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right)dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left|\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi(x,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_n)}{\alpha_n}dt - f(x)\right| +\right.$$
$$\left. + \max_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left|\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}dt - f(x)\right|\right\} = 0. \quad (17)$$

Ясно, что

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)I_{N1}(x,t)dt =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^N\left(\frac{\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n} - \frac{\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\right)dt = \int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)F(x,t)dt \quad (18)$$

равномерно на $x \in (0,\pi]$. Из (6) получаем, что

$$\frac{\sin\lambda\xi}{\lambda} = \begin{cases}\varphi_0(\xi,\lambda), & \xi < a,\\ \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\varphi_0\left(\dfrac{\xi}{\alpha}+a-\dfrac{a}{\alpha},\lambda\right) + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\varphi_0(2a-\xi,\lambda), & \xi > a.\end{cases} \quad (19)$$

Принимая во внимание (19) и (16), находим

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)I_{N2}(x,t)dt = \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\int\limits_0^{\mu^+(x)}A(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\,d\xi\,dt =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\int\limits_0^a A(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\,d\xi\,dt+$$
$$+ \frac{2\alpha}{1+\alpha}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt+$$
$$+ \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0(2a-\xi,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt =$$
$$= \int\limits_0^a A(x,\xi)\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}dtd\xi+$$
$$+ \frac{2\alpha}{1+\alpha}\int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)\int\limits_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0}dtd\xi+$$

$$+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\int\limits_{a}^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0(2a-\xi,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}dtd\xi=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}A(x,\xi)f(\xi)d\xi+\frac{2\alpha}{1+\alpha}\int\limits_{a}^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)f\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}\right)d\xi+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\int\limits_{a}^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)f(2a-\xi)d\xi.$$

Выполнив подстановку

$$\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}\to\xi',\quad 2a-\xi\to\xi''$$

получим

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)I_{N2}(x,t)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}A(x,\xi)f(\xi)d\xi+\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\int\limits_{a}^{x}A\big(x,\alpha\xi'-\alpha a+a\big)f(\xi')d\xi'+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a}A\big(x,2a-\xi''\big)f(\xi'')d\xi''.$$

Поскольку $A(x,2a-\xi'')\equiv 0$ при $2a-\xi>\alpha x-\alpha a+a$, имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)I_{N2}(x,t)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{a}A(x,t)f(t)dt+\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\int\limits_{a}^{x}A\big(x,\alpha t-\alpha a+a\big)f(t)dt+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\int\limits_{0}^{a}A(x,2a-t)f(t)dt.$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)I_{N2}(x,t)dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{x}\frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(x,\mu^+(t))f(t)dt+\int\limits_{0}^{x}\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(x,2a-t)f(t)dt \quad (20)$$

равномерно на $x\in(0,\pi]$. Из (12) заключаем, что следующее предельное соотношение выполняется равномерно на $x\in(0,\pi]$:

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)I_{N3}(x,t)dt=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)\int\limits_{0}^{\mu^+(x)}A(x,\xi)\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}-\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi\,dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)\int\limits_{0}^{\mu^+(x)}A(x,\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}-\frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi\,dt$$

$$=\int\limits_{0}^{\pi}f(t)\rho(t)\int\limits_{0}^{\mu^+(x)}A(x,\xi)F_0(\xi,t)\,d\xi\,dt. \quad (21)$$

При помощи теоремы о вычетах и формул (8) (9) находим:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)I_{N4}(x,t)dt=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sum_{n=1}^N\frac{\varphi(x,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n}\,d\xi\,dt=$$
$$=-2\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{|\lambda_n|\leqslant N}\frac{\psi\left(x,\lambda_n\right)}{\dot\Delta(\lambda_n)}\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda_n\xi\,d\xi\,dt=$$
$$=-2\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)\sum_{|\lambda_n|\leqslant N}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\left[\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]dt=$$
$$=-2\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda\xi d\xi d\lambda dt=$$
$$=-\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\exp\left\{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(t)|\right\}\exp\left\{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(t)\right\}\times$$
$$\times\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda\xi d\xi d\lambda dt=$$
$$=-\int_0^\pi f(t)\rho(t)\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\exp\left\{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(t)\right\}\exp\left\{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(t)\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda\xi d\xi d\lambda\right)dt,\quad(22)$$

где контур $\Gamma_N=\left\{\lambda:|\lambda|=|\lambda_N^0|+\beta/2\right\}$ ориентирован против часовой стрелки, а N — достаточно большое число. Принимая во внимание формулы

$$\psi(x,\lambda)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|(\mu^+(\pi)-\mu^+(x))}\right),\quad|\lambda|\to\infty,\qquad|\Delta(\lambda)|\geqslant C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)},\quad\lambda\in G_\delta,$$

где $G_\delta=\left\{\lambda:|\lambda-\lambda_n^0|\geqslant\delta\right\}$, δ — достаточно малое положительное число (см. [21]), а также [22, Lemma 1.3.1], т.е. соотношение

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\leqslant t\leqslant\pi}\exp\left\{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(t)\right\}\left|\int_0^{\mu^+(t)}A(t,\xi)\sin\lambda\xi d\xi d\lambda\right|=0,$$

получаем из (22) предельное равенство

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi f(t)\rho(t)I_{N4}(x,t)dt=0.\quad(23)$$

Умножая обе части (15) на $\rho(x)f(x)$, интегрируя от 0 до π, переходя к пределу при $N \to \infty$ и применяя (17), (18), (20), (21) и (23), получим

$$\int_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(x,\mu^+(t))f(t)dt + \int_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(x,2a-t)f(t)dt +$$
$$+ \int_0^\pi f(t)\rho(t)F(x,t)dt + \int_0^\pi f(t)\rho(t) \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)F_0(\xi,t)\,d\xi\,dt = 0.$$

Поскольку $f(x)$ можно выбрать произвольно, получаем

$$\frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}} A(x,\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}} A(x,2a-t) + F(x,t) + + \int_0^{\mu^+(x)} A(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi = 0. \quad \square$$

3. Теоремы для решения обратной задачи.

Лемма 1. *Для каждого фиксированного* $x \in (0,\pi]$ *уравнение* (11) *имеет единственное решение* $A(x,\cdot) \in L_2\left(0,\mu^+(x)\right)$.

Доказательство. При $x > a$ можем переписать уравнение (11) следующим образом:

$$L_x A(x,\cdot) + K_x A(x,\cdot) = -F(x,\cdot),$$

где

$$(L_x f)(t) = \begin{cases} f(t) + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} f(2a-t), & t \leqslant a < x, \\ \dfrac{2}{1+\alpha} f(\alpha t - \alpha a + a), & a < t < x, \end{cases} \tag{24}$$

$$(K_x f)(t) = \int_0^{\alpha x - \alpha a + a} f(\xi)F_0(\xi,t)d\xi, \quad 0 < t < x. \tag{25}$$

Докажем, что оператор L_x обратим, т.е. имеет ограниченный обратный оператор в $L_2(0,\pi)$.

Рассмотрим уравнение

$$(L_x f)(t) = \phi(t), \quad \phi(t) \in L_2(0,\pi),$$

т.е.

$$\begin{cases} f(t) + \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} f(2a-t) = \phi(t), & t \leqslant a < x, \\ \dfrac{2}{1+\alpha} f(\alpha t - \alpha a + a) = \phi(t), & a < t < x. \end{cases}$$

Таким образом, получаем

$$f(t) = \left(L_x^{-1}\phi\right)(t) = \begin{cases} \phi(t) - \dfrac{1-\alpha}{2}\phi\left(\dfrac{-t+\alpha a + a}{\alpha}\right), & t < a, \\ \dfrac{1+\alpha}{2}\phi\left(\dfrac{t+\alpha a - a}{\alpha}\right), & t > a. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\|f\|_{L_2} = \left\|L_x^{-1}\phi\right\|_{L_2} \leqslant C\|\phi\|_{L_2}.$$

Действительно,

$$\int_0^\pi |f(t)|^2 dt = \int_0^a \left|\phi(t) - \frac{1-\alpha}{2}\phi\left(\frac{-t+\alpha a + a}{\alpha}\right)\right|^2 dt + \int_a^\pi \left|\frac{1+\alpha}{2}\phi\left(\frac{t+\alpha a - a}{\alpha}\right)\right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^a |\phi(t)|^2\,dt + 2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\int\limits_0^a \left|\phi\left(\frac{-t+\alpha a+a}{\alpha}\right)\right|^2 dt + \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2\int\limits_a^\pi \left|\phi\left(\frac{t+\alpha a-a}{\alpha}\right)\right|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^\pi |\phi(t)|^2 dt + \frac{\alpha\,(1-\alpha)^2}{2}\int\limits_a^{\frac{\alpha a+a}{\alpha}} |\phi(t)|^2 dt + \alpha\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2\int\limits_a^{\frac{\pi+\alpha a-a}{\alpha}} |\phi(t)|^2 dt.$$

Положим $\phi(t)=0$ для $t>\pi$. Тогда

$$\int\limits_0^\pi |f(t)|^2\,dt \leqslant C\int\limits_0^\pi |\phi(t)|^2\,dt = C\|\phi(t)\|_{L_2(0,\pi)}.$$

Таким образом, оператор L_x обратим в $L_2(0,\pi)$. Согласно [5, Theorem 3] достаточно доказать, что уравнение

$$\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) + \int\limits_0^{\mu^+(x)} A(\xi)F_0(\xi,t)d\xi = 0 \tag{26}$$

имеет лишь тривиальное решение $A(t)=0$.

Пусть $A(t)$ — нетривиальное решение уравнения (26). Тогда

$$\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2 dt +$$

$$+\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)\cdot\int\limits_0^{\mu^+(x)} A(\xi)F_0(\xi,t)\,d\xi\,dt = 0.$$

Из (12) следует, что

$$\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2 dt +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^{\mu^+(x)} A(\xi)\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi\,dt +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^{\mu^+(x)} A(\xi)\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{\varphi_0(t,\lambda_n)\sin\lambda_n\xi}{\alpha_n\lambda_n} - \frac{\varphi_0(t,\lambda_n^0)\sin\lambda_n^0\xi}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right)d\xi\,dt = 0.$$

Из (7) и (19) получаем

$$\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) + \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2 dt +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^a A(\xi)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^a A(\xi)\sum_{n=1}^\infty\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt +$$

$$+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n\right)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n\right)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(2a-\xi,\lambda_n\right)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(2a-\xi,\lambda_n\right)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_0^{a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_0^{a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(2a-\xi,\lambda_n^0\right)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-$$

$$-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0\left(2a-\xi,\lambda_n^0\right)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt=0.$$

После подстановки

$$\xi\to\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}$$

в третьем, четвертом, девятом и десятом интегралах и подстановки

$$\xi\to 2\alpha-\xi$$

в пятом, шестом, одиннадцатом и двенадцатом двойных интегралах получим

$$\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2 dt+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t)) \int\limits_0^{a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+$$

$$+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t) \int\limits_0^{a} A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+$$

$$
\begin{aligned}
&+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_a^x A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_a^x A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^a A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^a A(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_a^x A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_a^x A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha^2}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-\\
&-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_{-\alpha x+\alpha a+a}^{a} A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1+\sqrt{\rho(\xi)}}A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0\left(\xi,\lambda_n\right)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1+\sqrt{\rho(\xi)}}A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1+\sqrt{\rho(2a-\xi)}}A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt+\\
&+\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1+\sqrt{\rho(2a-\xi)}}A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0(t,\lambda_n)}{\alpha_n}\,d\xi\,dt-
\end{aligned}
$$

$$
-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1+\sqrt{\rho(\xi)}}A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-
$$

$$
-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^x \frac{2\rho(\xi)}{1+\sqrt{\rho(\xi)}}A(\mu^+(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0(t,\lambda_n^0)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-
$$

$$
-\int\limits_0^x \frac{2\rho(t)}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1+\sqrt{\rho(2a-\xi)}}A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0\left(t,\lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt-
$$

$$
-\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\int\limits_0^x \frac{1-\sqrt{\rho(2a-\xi)}}{1+\sqrt{\rho(2a-\xi)}}A(2a-\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0\left(t,\lambda_n^0\right)}{\alpha_n^0}\,d\xi\,dt=0.
$$

Таким образом,

$$
\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)^2 dt+
$$

$$
+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\right)^2-
$$

$$
-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho\,(2a-t)}}A(2a-t)\right)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}dt\right)^2=0.
$$

Используя равенство Парсеваля

$$
\int\limits_0^x \rho(t)f^2(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int\limits_0^x \rho(t)f(t)\varphi_0(t,\lambda_n^{)}dt\right)^2
$$

для функции

$$
f(t)=\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\in L_2(0,x),
$$

получим

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)\varphi_0(t,\lambda_n)dt\right)^2=0
$$

или

$$
\int\limits_0^x \rho(t)\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)\right)\varphi_0(t,\lambda_n)dt=0,\quad n\geqslant 1.
$$

Поскольку система $\left\{\varphi_0(t,\lambda_n)\right\}_{n\geqslant 1}$ полна в $L_{2,\rho}(0,\pi)$, имеем

$$
\frac{2}{1+\sqrt{\rho(t)}}A(\mu^+(t))+\frac{1-\sqrt{\rho(2a-t)}}{1+\sqrt{\rho(2a-t)}}A(2a-t)=0,
$$

т.е. $(L_xA)(t)=0$, где оператор L_x определен в (24). Обратимость оператора L_x в $L_2(0,\pi)$ влечет $A(x,\cdot)=0$. □

Теорема 4. *Пусть L и $\widetilde{L}$ – две краевых задачи и*

$$\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n, \quad \alpha_n = \widetilde{\alpha}_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$q(x) = \widetilde{q}(x) \quad a.e.\ in\ (0, \pi).$$

Доказательство. Согласно (12) и (13), $F_0(x,t) = \widetilde{F}_0(x,t)$ и $F(x,t) = \widetilde{F}(x,t)$. Из основного уравнения (11) получаем $A(x,t) = \widetilde{A}(x,t)$. Из (5) следует, что $q(x) = \widetilde{q}(x)$ почти всюду на $(0, \pi)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахтямов А. М.* Теория идентификации краевых условий и ее приложения. — М.: Физматлит, 2009.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма—Лиувилля. — М.: Наука, 1984.
3. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 2 (116). — С. 3–63.
4. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
6. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма—Лиувилля. — Киев: Наукова думка, 1972.
7. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла. — М.: Наука, 1964.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
9. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. — Саратов: Изд-во Сарат. пед. ин-та, 2001.
10. *Akhmedova E. N.* On representation of solution of Sturm–Liouville equation with discontinuous coefficients// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2002. — *16*, № 24. — P. 5–9.
11. *Akhmedova E. N., Huseynov H. M.* The main equation of the inverse Sturm–Liouville problem with discontinuous coefficients// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2007. — *26*, № 34. — P. 17–32.
12. *Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies// Inv. Probl. Sci. Eng. — 2004. — *12*, № 4. — P. 393–408.
13. *Aliev B. A., Yakubov Ya. S.* Solvability of boundary value problems for second-order elliptic differential-operator equations with a spectral parameter and with a discontinuous coefficient at the highest derivative// Differ. Equat. — 2014. — *50*, № 4. — P. 464–475.
14. *Altinisik N., Kadakal M., Mukhtarov O.* Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions// Acta Math. Hung. — 2004. — *102*, № 1-2. — P. 159–175.
15. *Anderssen R. S.* The effect of discontinuities in destiny and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth// Geophys. J. R. Astr. Soc. — 1977. — *50*. — P. 303–309.
16. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe// Acta Math. — 1946. — *78*. — P. 1–96.
17. *Carlson R.* An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with discontinuous coefficients// Proc. Am. Math. Soc. — 1994. — *120*, № 2. — P. 5–9.
18. *Freiling G., Yurko V.* Inverse Sturm–Liouville problems and Their Applications. — Nova Science Publ., 2008.
19. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — *37*. — P. 539–577.
20. *Hao D. N.* Methods for Inverse Heat Conduction Problems. — Frankfurt/Main etc.: Peter Lang Verlag, 1998.
21. *Karahan D., Mamedov Kh. R.* Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm–Liouville operator// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2014. — *40*. — P. 233–244.
22. *Marchenko V. A.* Strum–Liouville Operators and Their Aplications. — Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser Verlag, 1986.

23. *Nabiev A. A., Amirov R. K.* On the boundary value problem for the Sturm–Liouville equation with the discontinuous coefficient// Math. Meth. Appl. Sci. — 2013. — *36*, № 13. — P. 1685–1700.
24. *Poschel J., Trubowitz E.* Inverse Spectral Theory. — New York: Academic Press, 1987.
25. *Sedipkov A. A.* The inverse spectral problem for the Sturm–Liouville operator with discontinuous potential// J. Inv. Ill-Posed Probl. — 2012. — *20*. — P. 139–167.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Karahan Döne
Harran University, Sanliurfa, Turkey
E-mail: dkarahan@harran.edu.tr

Мамедов Ханлар Рашид
Igdir University, Igdir, Turkey
E-mail: hanlar.residoglu@igdir.edu.tr

Hashimoglu Ilyas F.
Karabük University, Karabük, Turkey
E-mail: i.hasimoglu@karabuk.edu.tr