ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 92–99
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-92-99

УДК 517.977.1

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ОБЫКНОВЕННЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2023 г. **М. П. ЭШОВ, Н. Н. КОДИРОВ, Т. К. ЮЛДАШЕВ**

Аннотация. В работе рассматриваются математические задачи управления автономными системами первого порядка. При помощи принципа максимума Понтрягина проанализирована математическая задача оптимизации получения доходов на рынке образовательных услуг с учетом отсрочки инвестирования.

Ключевые слова: задача управления, автономная система, принцип максимума, минимизация функционала, дифференциальное уравнение первого порядка, существование решения, единственность решения.

OPTIMIZATION PROBLEMS IN ORDINARY FIRST-ORDER AUTONOMOUS SYSTEMS

© 2023 **M. P. ESHOV, N. N. KODIROV, T. K. YULDASHEV**

Abstract. In this paper, we examine mathematical control problems for first-order autonomous systems. Using Pontryagin's maximum principle, we analyze the mathematical problem of optimizing the generation of income in the market for educational services, taking into account the deferment of investment.

Keywords and phrases: control problem, autonomous system, maximum principle, minimization of a functional, first-order differential equation, existence of a solution, uniqueness of a solution.

AMS Subject Classification: 49J15, 49K15, 49N10

1. Введение. Теория оптимального управления динамическими системами широко используется при решении различных задач науки, техники и экономики. В теории оптимального управления разрабатываются и эффективно используются различные аналитические и приближенные методы (см., например, [1–7,9–15,18]). В [8] в аналитической форме решается задача оптимального управления одноотраслевой экономикой при случайных изменениях основных фондов и трудовых ресурсов. В качестве критерия оптимальности выбрано максимальное среднее значение экономии на данном периоде производства. Решение этой задачи оптимального управления основано на методе динамического программирования.

Изучаются вопросы оптимизации процессов в высших учебных заведениях, связанных с поступлением от подготовки, переподготовки и повышения квалификации кадров на договорной основе. Присутствие двух компонентов в этой автономной системе позволяет самостоятельно вести траекторию ее движения в определенном порядке. Первая составляющая — это обучение студентов на платной основе. Вторая составляющая — это плата за обучение студентов. Пусть вход

$u(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(t) \in C[0;1]$ — непрерывная функция, показывающая количество студентов, оплативших контракт на обучение к моменту t. Выходная функция $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(t)$ является функцией дохода от договорных поступлений в данный момент времени t:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, u_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, показывающая денежную сумму, уплаченную студентами за обучение в момент времени t, m — число студентов, обучающихся по i-й специальности. Из уравнения (1) видно, что если количество студентов, обучающихся по контракту, увеличивается, то увеличивается и доход вуза. Точно так же, если стоимость контракта на обучение увеличивается, то увеличивается и доход данного университета. В частности, наличие «суперконтрактов» в значительной степени способствует устойчивому развитию высших учебных заведений в условиях рыночной экономики. Поэтому высшие профессиональные учебные заведения заинтересованы в росте количества суперконтрактов на обучение. Но количество сверхконтрактов не может нарушать определенный баланс в разрезе студентов, обучающихся на основе государственного гранта или обычного (льготного) контракта. Нарушение этого баланса в вузе может привести к ухудшению качества подготовки специалистов в целом. Дифференцируя формулу (1) по времени t, находим функцию, означающую скорость поступления договорных сумм:

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \dot{p}_{ij}(t)\, u_i(t) + \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, \dot{u}_i(t), \tag{2}$$

где $\dot{p}_{ij}(t)$ — функция, показывающая тенденции формирования стоимости обучения. Нас интересует случай, когда $\dot{y}_i(t) > 0$, т.е. рост доходов от договорных поступлений за каждый определенный период времени t. Из уравнения (2) видно, что это зависит от тенденции формирования стоимости договорных сумм $\dot{p}_{ij}(t)$ и ставки увеличения количества студентов $\dot{u}_i(t)$, уплативших определенную сумму в момент времени t. Но динамика формирования стоимости контрактных сумм $\dot{p}_{ij}(t)$ в целом определяется из баланса спроса и предложения на образовательном рынке к моменту t. Под спросом мы понимаем степень платежеспособности родителей, обучающих своих детей на платной основе. Темп роста числа студентов $\dot{u}_i(t)$, заплативших определенную сумму в момент времени t, определяется из следующего соотношения:

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t)\, z_i\bigl(t - \tau_i(t)\bigr), \tag{3}$$

где $z_i(t) \in C[0;1]$ — функция инвестиций, направленных на повышение качества образования, в частности, на расширение материально-технической базы вуза, $\alpha_i(t) \in C[0;1]$ — коэффициент-функция эффективности использования инвестиций, $\tau_i(t)$ — временная задержка (запаздывание), $0 < \alpha_i(t) < 1$, $0 < \tau_i(t) < t$. Величина инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода $z_i(t) = q_i(t)\, y_i(t)$, где $q_i(t) \in C[0,1]$ — доля прибыли в доходе, $0 < q_i(t) < 1$. В нашей работе функция инвестиций $z(t)$ монотонно возрастает. Если функция задержки $\tau(t)$ уменьшится, то вложений будет больше; это способствует тому, что скорость прироста числа учащихся $\dot{u}_i(t)$, кто заплатил определенную сумму к этому времени t, становится больше. Если $\tau_i(t) = t$, то процесс инвестирования остановится: $z_i(0) = 0$. Очевидно, что задержка $\tau_i(t)$ зависит от количества студентов, оплативших обучение по контракту к моменту t:

$$\tau_i(t) = \varepsilon(t)\, u_i^2(t), \quad 0 < \varepsilon(t) \in C[0,1].$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t)\, z_i\left(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\right). \tag{4}$$

Как сказано выше, сумма инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода

$$z_i(t) = q_i(t)\, y_i(t), \tag{5}$$

где $q_i(t)$ — доля прибыли в доходе, $0 < q_i(t) < 1$. Величина $q_i(t)$ характеризует рентабельность экономического процесса. Подставляя представление (5) в уравнение (4), получаем

$$\dot{u}_i(t) = \alpha_i(t)\, q_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big)\, y_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big). \tag{6}$$

Из формулы (6) следует, что значение коэффициента прироста числа студентов $\dot{u}_i(t)$, уплативших определенную сумму в момент времени t, взаимосвязано со значением рентабельности образовательного процесса. Задержка τ характеризуется количеством студентов, которые не в состоянии уплатить контрактную сумму к заданному времени t. Подставляя уравнение (6) в уравнение (2), получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{y}_i(t) = \beta_i(t)\, q_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big)\, y_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big) + \sum_{j=1}^{m} \dot{p}_{ij}(t)\, u_i(t), \tag{7}$$

где $\beta_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, \alpha_i(t)$. В уравнении (7) мы учитываем фактор внешнего воздействия. Этот фактор в первую очередь связан с государственным регулированием образовательного процесса. Если не учитывать малые и случайные внешние факторы, то дифференциальное уравнение (7) принимает вид

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t) + \gamma_i(t)\, u_i(t) + \beta_i(t)\, q_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big)\, y_i\big(t - \varepsilon(t)\, u_i^2(t)\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\gamma_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \dot{p}_{ij}(t)$. Функция $f_i(t) \in C[0; 1]$ может сильно изменить свойства решений дифференциального уравнения (8). Другими словами, свойства решений дифференциального уравнения с внешним воздействием (8) могут сильно отличаться от свойств решений однородного дифференциального уравнения (8). Это означает, что возмущающее воздействие (влияние государства и рынка) на образовательный процесс очень велико. Итак, мы получили задачу оптимального управления для дифференциального уравнения (8).

2. Функция задержки равна нулю: $\tau_i = 0$.

В этом случае имеет место уравнение (8)

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t) + \gamma_i(t)\, u_i(t) + \eta_i(t)\, y_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

где $\eta_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}(t)\, \alpha_i(t)\, q_i(t)$.

2.1. Класс $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим дифференциальное уравнение (9) с начальным условием $y_i(0) = y_i^0$. Тогда решение начальной задачи можно записать в виде

$$y_i(t) = y_i^0 \exp\left\{\int_0^t \eta_i(s)\, ds\right\} + \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\theta)\, d\theta\right\} \big[\gamma_i(s)\, u_i(s) + f_i(s)\big]\, ds. \tag{10}$$

Чтобы найти управляющую функцию $u_i(t)$, из представления (10) при $t = 1$ получаем

$$y_i(1) = y_i^0 \exp\left\{\int_0^1 \eta_i(s)\, ds\right\} + \int_0^1 \exp\left\{\int_s^1 \eta_i(\theta)\, d\theta\right\} \big[\gamma_i(s)\, u_i(s) + f_i(s)\big]\, ds. \tag{11}$$

Введем обозначение

$$\mu_i = y_i^0 \exp\left\{\int_0^1 \eta_i(s)\, ds\right\} + \int_0^1 \exp\left\{\int_s^1 \eta_i(\theta)\, d\theta\right\} f_i(s)\, ds.$$

Заметим, что число μ_i — это состояние уравнения (9) в момент времени $t = 1$, в которое оно переводится с помощью нулевого управления $u_i(t) \equiv 0$. Тогда (11) принимает вид

$$y_i(1) = \mu_i + \int\limits_0^1 \exp\left\{\int\limits_s^1 \eta_i(\theta)\,d\theta\right\}\gamma_i(s)\,u_i(s)\,ds.$$

Пусть заданы некоторые величины $y_i(1) = y_i^1$. Вопрос о существовании функции управления, переводящей объект (9) в состояние y_i^1, сводится к существованию решения следующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int\limits_0^1 \exp\left\{\int\limits_s^1 \eta_i(\theta)\,d\theta\right\}\gamma_i(s)\,u_i(s)\,ds = \nu_i, \tag{12}$$

где $\nu_i = y_i^1 - \mu_i = \mathrm{const}$ — известные числа. Рассмотрим управляющую функцию $u_i(t)$ в классе непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$. В силу непрерывности функции $\gamma_{ij}(t)$ уравнение (12) имеет решение $u_i(t) = g_i(t)$ на отрезке $[0,1]$. Подставляя решения уравнения (12) в (10), находим искомую функцию $y(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i(t)$, где

$$y_i(t) = w_i(t) + \int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_s^t \eta_i(\theta)\,d\theta\right\}\gamma_i(s)\,g_i(s)ds,$$

$$w_i(t) = y_i^0 \exp\left\{\int\limits_0^t \eta_i(s)\,ds\right\} + \int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_s^t \eta_i(\theta)\,d\theta\right\} f_i(s)ds.$$

2.2. Класс $PC[0,1]$ кусочно-непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Класс $PC[0,1]$ кусочно-непрерывных функций есть линейное векторное пространство (см. [16, 17, 19, 20])

$$PC[0,1] = \Big\{y : [0,1] \to \mathbb{R};\ y(t) \in C(t_j, t_{j+1}],\ j = 1,\dots,m\Big\},$$

где $y(t_j^+)$ и $y(t_j^-)$ существуют и ограничены;

$$y(t_j^+) = \lim_{h\to 0^+} y(t_j + h), \quad y(t_j^-) = \lim_{h\to 0^-} y(t_j - h)$$

— право- и левосторонний пределы функции $x(t)$ в точках $t = t_j$; $y(t_j^-) = y(t_j)$.

Заметим, что линейное векторное пространство $PC\,[0,1]$ является банаховым пространством с нормой

$$\big\|y_i(t)\big\|_{PC} = \max\Big\{\big\|y_i(t)\big\|_{C((t_j,t_{j+1}])},\ j = 1,2,\dots,m\Big\}.$$

Найдем функцию $y(t) \in PC[0,1]$, которая для всех $t \in [0,1]$, $t \neq t_j$, $j = 1,2,\dots,m$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (9), начальному условию $y_i(0) = y_i^0$ и при $t = t_j$, $j = 1,2,\dots,m$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1$, удовлетворяет нелинейному предельному условию:

$$y_i(t_j^+) - y_i(t_j^-) = a_j + b_j y_i(t_j), \quad a_j, b_j = \mathrm{const}, \quad j = 1,2,\dots,m. \tag{13}$$

Пусть функция $y(t) \in PC[0,1]$ является решением задачи (9), (13). Тогда интегрированием уравнения (9) на интервалах $(0,t_1]$, $(t_1,t_2]$, ..., $(t_m,t_{m+1}]$, получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t \Big[f_i(s) + \gamma_i(s)\,u_i(s) + \eta_i(s)\,y_i(s)\Big]\,ds = \int\limits_0^t \dot y_i(s)\,ds = \\ = \big[y_i(t_1) - y_i(0^+)\big] + \big[y_i(t_2) - y_i(t_1^+)\big] + \dots + \big[y_i(t) - y_i(t_m^+)\big] = \\ = -y_i(0) - \big[y_i(t_1^+) - y_i(t_1)\big] - \big[y_i(t_2^+) - y_i(t_2)\big] - \dots - \big[y_i(t_m^+) - y_i(t_m)\big] + y_i(t),\end{aligned}$$

где $t_{m+1} = 1$.

Учитывая начальное условие и условие (13), последнее равенство перепишем в виде

$$y_i(t) = h_i(t) + \int\limits_0^t \left[\gamma_i(s)\, u_i(s) + \eta_i(s)\, y_i(s)\right] ds + \sum_{0<t_j<t} \left[a_j + b_j y_i\left(t_j\right)\right], \tag{14}$$

где

$$h_i(t) = y_i^0 + \int\limits_0^t f_i(s)\, ds.$$

В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим норму

$$\left\|y_i(t)\right\|_C = \max_{t\in[0,1]} \left|y_i(t)\right|.$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} y_i^0(t) = h_i(t), \\ y_i^{k+1}(t) = y_i^0(t) + \int\limits_0^t \Big[\gamma_i(s)\, u_i(s) + \eta_i(s)\, y_i^k(s)\Big]\, ds + \sum\limits_{0<t_j<t} \big[a_j + b_j y_i^k(t_j)\big]. \end{cases}$$

Тогда существование и единственность решения уравнения (14) следует из следующих оценок при фиксированных значениях функции управления $u_i(t)$ и величины $\|\eta_i(t)\|_C + \sum\limits_{j=1}^m |b_j| < 1$:

$$\left\|y_i^0(t)\right\|_{PC} \leqslant \left|y_i^0\right| + \|f_i(t)\|_C < \infty,$$

$$\left\|y_i^{k+1}(t) - y_i^k(t)\right\|_{PC} \leqslant \left[\|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j|\right] \cdot \left\|y_i^k(t) - y_i^{k-1}(t)\right\|_{PC}.$$

Если задано $y_i(1) = y_i^1$, то возникает вопрос о существовании выходной функции, переводящей объект (14) в состояние y_i^1:

$$\int\limits_0^1 \big[\gamma_i(s)\, u_i(s) + \eta_i(s)\, y_i(s)\big]\, ds + \sum_{0<t_j<1} \big[a_j + b_j y_i(t_j)\big] = \omega_i, \tag{15}$$

где $\omega_i = y_i^1 - h_i(1)$.

Решение уравнения (14) ограничено; обозначим его $y_i(t) = r_i(t, u_i(t))$. Подставляя это решение в представление (15), получаем нелинейное уравнение относительно входной функции $u_i(t)$:

$$\int\limits_0^1 \gamma_i(s)\, u_i(s)\, ds = \omega_i - \int\limits_0^1 \eta_i(s)\, r_i\big(s, u_i(s)\big)\, ds - \sum_{0<t_j<1} \Big[a_j + b_j r_i\big(t_j, u_i(t_j)\big)\Big]. \tag{16}$$

Пусть выполняются следующие условия:

(i) $\left\|r_i(t, u_i(t))\right\|_C \leqslant M_i$, $0 < M_i = \text{const}$;

(ii) $\left|r_i(t, u_i^k(t)) - r_i(t, u_i^{k-1}(t))\right| \leqslant L_i\left|u_i^k(t) - u_i^{k-1}(t)\right|$, $0 < L_i = \text{const}$;

(iii) $\rho_i = \dfrac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C}\left[|\omega_i| + L_i\|\eta_i(t)\|_C + \sum\limits_{j=1}^m |b_j| L_i\right] < 1$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$u_i^0(t) = 0,$$

$$\int\limits_0^1 \gamma_i(s)\, u_i^{k+1}(s)\, ds = \omega_i - \int\limits_0^1 \eta_i(s)\, r_i\big(s, u_i^k(s)\big)\, ds - \sum_{0<t_j<1} \Big[a_j + b_j r_i\big(t_j, u_i^k(t_j)\big)\Big].$$

Тогда существование и единственность решения уравнения (16) следует из следующих оценок:

$$\big\|u_i^1(t)\big\|_{PC} \leqslant \frac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C}\bigg[|\omega_i| + M_i\|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m \Big[|a_j| + |b_j|M_i\Big]\bigg] < \infty,$$

$$\big\|u_i^{k+1}(t) - u_i^k(t)\big\|_{PC} \leqslant \frac{1}{\|\gamma_i(t)\|_C}\bigg[|\omega_i| + L_i\|\eta_i(t)\|_C + \sum_{j=1}^m |b_j|\,L_i\bigg]\cdot\big\|u_i^k(t) - u_i^{k-1}(t)\big\|_{PC}.$$

3. Функция задержки не равна нулю: $\tau_i > 0$. Интегрируя дифференциальное уравнение (8) с начальным условием $y_i(0) = y_i^0 = \text{const}$, получаем

$$y_i(t) = y_i^0 + \int_0^t \Big[f_i(s) + \gamma_i(s)\,u_i(s) + \beta_i(s)\,q_i\big(t - \varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)\Big]ds. \tag{17}$$

Рассмотрим задачу о нахождении управляющей функции

$$u_i^*(t) \in \Big\{u_i^* : |u_i^*(t)| \leqslant M_{i0},\ t \in [0,1]\Big\}$$

и соответствующего состояния $y_i^*(t)$, доставляющих минимум функционалу

$$J[u_i] = \int_0^1 \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\,dt. \tag{18}$$

Построим функцию Понтрягина

$$H\big(u_i(t), y_i(t)\big) = \psi_i(t)\Big[f_i(t) + \gamma_i(t)\,u_i(t) + \beta_i(t)\,q_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\Big] - \varepsilon(t)\,u_i^2(t),$$

где функция $\psi(t)$ будет определяться из уравнения

$$\dot\psi_i(t) = -\psi_i(t)\beta_i(t)q_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big). \tag{19}$$

Решая дифференциальное уравнение (19) с условием $\psi_i(0) = y_i^0 = \text{const}$, находим

$$\psi_i(t) = y_i^0 \exp\left\{-\int_0^t \beta_i(s)\,q_i\big(s - \varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)ds\right\}. \tag{20}$$

Условия оптимальности имеют вид

$$\psi(t)\Big\{\gamma_i(t) - 2\varepsilon(t)\,u_i(t)\beta_i(t)\Big[q_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big) + \\ + q_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\Big]\Big\} - 2\varepsilon(t)\,u_i(t) = 0, \tag{21}$$

$$\psi(t)\Big\{\gamma_i(t) - 2\varepsilon(t)\,\beta_i(t)\Big[q_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big) + q_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\Big] + \\ + 4\big[\varepsilon(t)\,u_i(t)\big]^2\beta_i(t)\Big[q_{iuu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big) + 2q_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_{iu}\,\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big) + \\ + q_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_{iuu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\Big]\Big\} - 2\varepsilon(t) \leqslant 0. \tag{22}$$

Подставляя представление (20) в уравнение (21), получим уравнение относительно функции управления $u_i(t)$:

$$u_i(t) = \frac{y_i^0}{2\varepsilon(t)}\exp\left\{-\int_0^t \beta_i(s)\,q_i\big(s - \varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)ds\right\}\Big\{\gamma_i(t) - 2\varepsilon(t)\,u_i(t)\beta_i(t)\times \\ \times\Big[q_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\,y_i\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big) + q_i\,y_{iu}\big(t - \varepsilon(t)\,u_i^2(t)\big)\Big]\Big\}. \tag{23}$$

Дифференцируя (17) по управляющей функции $u_i(t)$, получаем

$$y_{iu}(t)=\int\limits_0^t\Big[\gamma_i(s)-2\varepsilon(s)\,u_i(s)\beta_i(s)\Big(q_{iu}\big(t-\varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)\,y_i\big(t-\varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)+\\
+q_i\big(t-\varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)\,y_{iu}\big(t-\varepsilon(s)\,u_i^2(s)\big)\Big)\Big]ds. \quad (24)$$

Решая систему уравнений (17), (23) и (24), определяем функцию управления и функцию состояния.

4. Заключение. В работе рассмотрена задача оптимизации получения доходов от договорных поступлений на учебу с учетом задержки инвестирования. Построены математические модели финансирования с задержкой (8) и без задержки (9), определены входная и выходная функции. В качестве функционала качества был взят функционал от функции задержки (18). При помощи принцип максимума Понтрягина получен критерий оптимальности. Входная и выходная функции определялись путем решения системы трех функционально-интегральных уравнений (17), (23) и (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Искендеров А. Д., Гамидов Р. А.* Задачи оптимизации с градиентом управления в коэффициентах эллиптических уравнений// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 9. — С. 1627–1636.
2. *Евтушенко Ю. Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление термическими и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975.
5. *Кротов В. Ф., Гурман В. И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973.
6. *Квитко А. Н.* Об одном методе решения локальной краевой задачи для нелинейной управляемой системы// Автомат. телемех. — 2020. — *81*, № 2. — С. 236–246.
7. *Миллер Б. М., Рубинович Е. Я.* Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований// Автомат. телемех. — 2013. — *74*, № 12. — С. 56–103.
8. *Параев Ю. И., Полуэктова К. О.* Оптимальное управление односекторной экономикой при случайном изменении основного капитала и трудовых ресурсов// Автомат. телемех. — 2020. — № 4. — С. 162–172.
9. *Рапопорт Е. Я.* Оптимальное управление системами с распределенным параметром. — М.: Высшая школа, 2009.
10. *Срочко В. А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000.
11. *Юлдашев Т. К.* Оптимальное управление обратными тепловыми процессами в параболическом уравнении с нелинейными отклонениями по времени// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2022. — *210*. — С. 117–135.
12. *Girsanov I. V.* Lectures on the Mathematical Theory of Extremum Problems. — New York: Springer-Verlag, 1972.
13. *Lions J. L.* Optimal control of systems governed by partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1971.
14. *Kerimbekov A. K.* On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semilinear parabolic equations// Proc. World Congr. Eng. — 2011. — *1*. — P. 270–275.
15. *Yuldashev T. K.* Nonlinear optimal control of thermal processes in a nonlinear inverse problem// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 1. — P. 124–136.
16. *Yuldashev T. K.* Periodic solutions for an impulsive system of nonlinear differential equations with maxima// Наносистемы: Физ. Хим. Мат. — 2022. — *13*, № 2. — С. 135–141.
17. *Yuldashev T. K.* Periodic solutions for an impulsive system of integro-differential equations with maxima// Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. — 2022. — *26*, № 2. — С. 368–379.
18. *Yuldashev T. K., Ashirbaev B. Y.* Optimal feedback control problem for a singularly perturbed discrete system// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*, № 2. — P. 661–668.

19. *Yuldashev T. K., Fayziev A. K.* On a nonlinear impulsive system of integro-differential equations with degenerate kernel and maxima// Наносистемы: Физ. Хим. Мат. — 2022. — *13*, № 1. — С. 36–44.
20. *Yuldashev T. K., Fayziev A. K.* Integral condition with nonlinear kernel for an impulsive system of differential equations with maxima and redefinition vector// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 8. — P. 2332–2340.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Эшов Мансур Пулатович
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: m.eshov@tsue.uz

Кодиров Нажмиддин Нематович
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: n.qodirov@tsue.uz

Юлдашев Турсун Камалдинович
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com