ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 53–82
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-53-82

УДК 517.984

СТРУКТУРА СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ЧЕТЫРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ В ПРИМЕСНОЙ МОДЕЛИ ХАББАРДА. ТРЕТЬЕ ТРИПЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2023 г. **С. М. ТАШПУЛАТОВ, Р. Т. ПАРМАНОВА**

Аннотация. Исследуется структура существенного спектра и дискретный спектр оператора энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда для третьего триплетного состояния системы. Доказаны следующие утверждения. а) Существенный спектр третьего триплета является объединением трех отрезков, а дискретный спектр третьего триплета пуст; б) существенный спектр третьего триплета является объединением восьми отрезков, а дискретный спектр третьего триплета состоит из трех собственных значений; в) существенный спектр третьего триплета является объединением шестнадцати отрезков, а дискретный спектр третьего триплета состоит из одиннадцати собственных значений.

Ключевые слова: модель Хаббарда, примесная модель Хаббарда, четырехэлектронная система, триплетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр.

STRUCTURE OF THE ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. THE THIRD TRIPLET STATE

© 2023 **S. M. TASHPULATOV, R. T. PARMANOVA**

Abstract. The structure of the essential spectrum and the discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Hubbard impurity model for the third triplet state of the system are examined. The following statements are proved. (a) The essential spectrum of the third triplet is the union of three segments and the discrete spectrum of the third triplet is empty. (b) The essential spectrum of the third triplet is the union of eight segments and the discrete spectrum of the third triplet consists of three eigenvalues. (c) The essential spectrum of the third triplet is the union of sixteen segments and the discrete spectrum of the third triplet consists of eleven eigenvalues.

Keywords and phrases: Hubbard model, Hubbard impurity model, four-electron system, triplet state, essential spectrum, discrete spectrum.

AMS Subject Classification: 62M15, 46L60, 47L90

1. Введение. В 1963 г. почти одновременно и независимо появились три работы [3, 4, 9], в которых была предложена простая модель металла, ставшая фундаментальной моделью теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривается единственная невырожденная зона электронов с локальным кулоновским взаимодействием.

Гамильтониан модели содержит всего два параметра: параметр B перескока электрона с узла на соседний узел решетки и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов в одном узле. В представлении вторичного квантования он записывается в виде

$$H = B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}. \tag{1}$$

Здесь через $a^+_{m,\gamma}$ $(a_{m,\gamma})$ обозначен ферми-оператор рождения (уничтожения) электрона со спином γ на узле m, суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Предложенная в [3, 4, 9] модель получила название модели Хаббарда в честь Дж. Хаббарда, внесшего фундаментальный вклад в изучение статистической механики этой системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия впервые введена Андерсоном для примесной модели в металле (см. [2]. Напоминим также, что модель Хаббарда является частным случаем полярной модели Шубина—Вонсовского (см. [15]), появившейся за тридцать лет до [3,4,9]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле, учитывается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, которое используется в физике твердого тела для описания перехода между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она представляет собой простейшую модель, описывающей взаимодействие частиц в решетке. Ее гамильтониан содержит только два слагаемых: кинетический член, соответствующий туннелированию («перескокам») частиц между узлами решетки, и слагаемое, соответствующее внутриузловому взаимодействию. Частицы могут быть фермионами, как в исходной работе Хаббарда, а также бозонами. Простота и достаточность гамильтониана (1) сделала модель Хаббарда весьма популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах, когда все частицы находятся в нижней блоховской зоне, а дальними взаимодействиями можно пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на разных узлах, то такую модель часто называют «расширенной моделью Хаббарда». Впервые эта модель была предложена для описания электронов в твердых телах, с тех пор она представляет особый интерес при изучении высокотемпературной сверхпроводимости. Позднее расширенная модель Хаббарда стала использоваться и при описании поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

При рассмотрении электронов в твердых телах модель Хаббарда можно считать усложнением модели сильно связанных электронов, которая учитывает только член гамильтониана, связанный с перескоками электронов. В случае сильных взаимодействиях эти две модели могут давать значительно отличающиеся друг от друга результаты. При этом модель Хаббарда точно предсказывает существование так называемых изоляторов Мотта, в которых проводимость отсутствует из-за сильного отталкивания между частицами.

Модель Хаббарда основана на приближении сильно связанных электронов. В приближении сильной связи электроны изначально занимают стандартные орбитали в атомах (узлах решетки), а затем перескакивают на другие атомы в процессе проведения тока. Математически это представляется так называемым интегралом перескока. Этот процесс можно рассматривать как физическое явление, благодаря которому появляются электронные зоны в кристаллических материалах. Однако в более общих зонных теориях взаимодействия между электронами не рассматривается. Кроме интеграла перескока, объясняющего проводимость материала, модель Хаббарда содержит так называемое внутриузловое отталкивание, соответствующее кулоновскому отталкиванию между электронами. Это проводит к конкуренции между интегралом перескока, зависящим от взаимного расположения узлов решетки, и внутриузловым отталкиванием, которое от расположения атомов не зависит. Благодаря этому факту модель Хаббарда объясняет переход проводник-диэлектрик в оксидах некоторых переходных металлов. При нагревании такого материала расстояния между ближайшими соседними узлами в нем увеличиваются, интеграл перескока уменьшается, и внутриузловое отталкивание становится доминирующим фактором.

В настоящее время модель Хаббарда является одной из наиболее интенсивно изучаемых многоэлектронных моделей металла (см. [8, 10–12, 18]). Однако до сих пор имеется очень мало точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, и получение соответствующих утверждений представляет большой интерес.

В [10] изучался спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух состояниях: триплетном и синглетном (см. [8, 10–12, 18]. В [10] доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, при некоторых значениях квазиимпульса существует единственное антисвязанное состояние (см. [10]). Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состояний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояния типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируется. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ реализуется, как нетрудно видеть, обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой полосы спектр не зависит от параметра U кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной полосой. Вторая полоса в гораздо большей степени определяется кулоновским взаимодействием: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама полоса исчезает при $U \to 0$, а при $U \to \infty$ неограниченно возрастает. Вторая полоса в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно движению двойки, т.е. двухэлектронным связанным состояниям.

В [1] изучался спектр и волновые функции системы трёх электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда. Известно, что трехэлектронные системы могут находиться в трех состояниях: квартетном и двух дублетных (см. [1]).

Квартетное состояние соответствует свободному движению трех электронов на решетке, и ему отвечают базисные функции

$$q^{3/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\uparrow} a^+_{p,\uparrow} \varphi_0.$$

В [1] доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из единственного отрезка, а трехэлектронное связанное состояние или трехэлектронное антисвязанное состояние отсутствуют.

Дублетному состоянию соответствуют базисные функции

$${}^1d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\downarrow} a^+_{p,\uparrow} \varphi_0, \quad {}^2d^{1/2}_{m,n,p} = a^+_{m,\uparrow} a^+_{n,\uparrow} a^+_{p,\downarrow} \varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого дублетного состояния $\widetilde{H}^d_1$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, т.е. в системе существует единственное антисвязанное состояние. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора первого дублетного состояния $\widetilde{H}^d_1$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора пуст, т.е., в системе антисвязанные состояние отсутствуют. В одномерном случае существенный спектр оператора второго дублетного состояния $\widetilde{H}^d_2$ является объединением трёх отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора второго дублетного состояния $\widetilde{H}^d_2$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, т.е. в системе существует не более одного антисвязанного состояния, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст, т.е., в системе антисвязанные состояния отсутствуют.

В [16] изучался спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в триплетном состоянии системы. Четырехэлектронные системы могут находиться в шести состояниях: квинтетном, трех триплетных и двух синглетных (см. [16]). Триплетным состояниям соответствуют следующие базисные функции:

$$^1t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}\varphi_0, \quad ^2t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0, \quad ^3t^1_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\downarrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0.$$

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в первом триплетном состоянии $^1\widetilde{H}^1_t$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора в первом триплетном состоянии $^1\widetilde{H}^1_t$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора второго дублетного состояния $^2\widetilde{H}^1_t$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора во втором триплетном состоянии $^2\widetilde{H}^1_t$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора в третьем триплетном состоянии $^3\widetilde{H}^1_t$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае либо существенный спектр оператора третьего триплетного состояния $^3\widetilde{H}^1_t$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр содержит не более одной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрехков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст. Итак, здесь существует три типа триплетных состояний, имеющих различное происхождение.

В [17] изучался спектр и волновые функции системы четырех электронов в кристалле, который описывается гамильтонианом Хаббарда в квинтетном и синглетных состояниях системы. В квинтетном состоянии свободные движения четырех электронов в решетке описываются следующими базисными функциями:

$$q^2_{m,n,p,r} = a^+_{m,\uparrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}\varphi_0.$$

В [17] доказано, что спектр системы в квинтетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с сегментом $[4A-8B\nu, 4A+8B\nu]$, и в системе отсутствуют четырехэлектронные связанные состояния или четырехэлектронные антисвязанные состояния. Синглетному состоянию соответствуют следующие базисные функции:

$$^1s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \quad ^2s^0_{p,q,r,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0,$$

и эти два синглетные состояния имеют различное происхождение.

Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора первого синглетного состояния $^1\widetilde{H}^s_4$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора первого синглетного состояния $^1\widetilde{H}^s_4$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр оператора $^1\widetilde{H}^s_4$ пуст. Если $\nu = 1$ и $U > 0$, то существенный спектр оператора второго синглетного состояния $^2\widetilde{H}^s_4$ является объединением ровно трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки. В двумерном случае имеем аналогичные результаты. В трехмерном случае существенный спектр оператора второго синглетного состояния

${}^2\widetilde{H}_4^s$ является объединением трех отрезков, а дискретный спектр состоит из единственной точки, либо существенный спектр является объединением двух отрезков, а дискретный спектр оператора пуст, либо существенный спектр состоит из единственного отрезка, а дискретный спектр пуст.

2. Гамильтониан системы. В настоящей работе рассматривается оператор энергии четырехэлектронных систем в примесной модели Хаббарда и описывается структура существенного и дискретного спектров системы для третьих триплетных состояний. Гамильтониан рассматриваемой модели имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + \\ + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}, \quad (2)$$

где A (A_0) — энергия электрона в узле решетке, B (B_0) — интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями); для удобства считаем, что $B > 0$ ($B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; U — параметр кулоновского взаимодействия двух электронов на одном узле, γ — спиновый индекс, $\gamma =\uparrow$ или $\gamma =\downarrow$; через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$; $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$.

Энергия системы зависит от ее полного спина S. В случае насыщенного ферромагнитного состояния ($S = N_e/2$, где N_e — число электронов в системе) решение задачи является точным и тривиальным для любого допустимого числа электронов N_e. В этом случае система представляет собой идеальный ферми-газ электронов с одним направлением проекции спинов.

Наряду с гамильтонианом H, N_e-электронная система характеризуется полным спином S, $S = S_{\max}, S_{\max} - 1, \ldots, S_{\min}$, $S_{\max} = N_e/2, S_{\min} = 0, 1/2$. Гамильтониан (2) коммутирует со всеми компонентами оператора $S = (S^+, S^-, S^z)$ полного спина системы, поэтому структура собственных функций и собственные значения системы зависят от S. Гамильтониан H действует в антисимметрическом пространстве Фока $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$.

Пусть φ_0 — вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{as}}$. Третье триплетное состояние соответствует свободному движению четырех электронов на решетке и их взаимодействие, и ему отвечают базисные функции

$${}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu} = a^+_{p\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r\uparrow}a^+_{k\uparrow}\varphi_0.$$

Подпространство ${}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$, соответствующее третьему триплетному состоянию, есть множество всех векторов вида

$${}^3\psi^1_t = \sum_{p,q,r,k\in Z^\nu} \widetilde{f}(p,q,r,k)\,{}^3t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}, \quad \widetilde{f} \in l_2^{\mathrm{as}},$$

где l_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из пространства $l_2((Z^\nu)^4)$.

Теорема 1. *Подпространство ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ инвариантно относительно оператора H, и сужение ${}^3H^1_t = H/_{{}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}}$ оператора H на подпространство ${}^3\mathcal{H}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ является ограниченным самосопряженным оператором. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор ${}^3\overline{H}^1_t$, действующий в пространстве l_2^{as} по формуле*

$$\big({}^3\overline{H}^1_t f\big)(p,q,r,k) = 4Af(p,q,r,k) + \\ + B\sum_\tau \Big[f(p+\tau,q,r,k) + f(p,q+\tau,r,k) + f(p,q,r+\tau,k) + f(p,q,r,k+\tau)\Big] + \\ + U\Big[\delta_{p,q} + \delta_{q,r} + \delta_{q,k}\Big] + (A_0 - A)\Big[\delta_{p,0} + \delta_{q,0} + \delta_{r,0} + \delta_{k,0}\Big]f(p,q,r,k) + \\ + (B_0 - B)\sum_\tau \Big[\delta_{p,0}f(\tau,q,r,k) + \delta_{q,0}f(p,\tau,r,k) + \delta_{r,0}f(p,q,\tau,k) + \delta_{k,0}f(p,q,r,\tau) +$$

$$+\,\delta_{p,\tau} f(0,q,r,k)+\delta_{q,\tau} f(p,0,r,k)+\delta_{r,\tau} f(p,q,0,k)+\delta_{k,\tau} f(p,q,r,0)\Big]+$$
$$+\,(U_0-U)\Big[\delta_{p,0}\delta_{p,q}+\delta_{q,0}\delta_{q,r}+\delta_{k,0}\delta_{q,k}\Big] f(p,q,r,k). \quad (3)$$

Сам оператор ${}^3H_t^1$ *на вектор* ${}^3\psi_t^1 \in {}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ *действует по формуле*

$$ {}^3H_t^{1\,3}\psi_t^1=\sum_{p,q,r,k\in Z^\nu}\big({}^3\overline{H}_t^1 f\big)(p,q,r,k)^3 t^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}. \quad (4)$$

Доказательство. Подействуем гамильтонианом H на векторы ${}^3\psi_t^1 \in {}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$ с использованием обычных антикоммутационных соотношений между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах

$$\{a_{m,\gamma},a^+_{n,\beta}\}=\delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}, \quad \{a_{m,\gamma},a_{n,\beta}\}=\{a^+_{m,\gamma},a^+_{n,\beta}\}=\theta,$$

а также учтем, что $a_{m,\gamma}\varphi_0=\theta$, где θ — нулевой элемент пространства ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_{p,q,r,k\in Z^\nu}$. Отсюда получается утверждение теоремы. □

Лемма 1. *Спектры операторов* ${}^3H_t^1$ *и* ${}^3\overline{H}_t^1$ *совпадают.*

Доказательство. Так как операторы ${}^3H_t^1$ и ${}^3\overline{H}_t^1$ являются ограниченными самосопряженными операторами, то из критерия Вейля (см. [13, гл. VII, раздел 3]) следует существование такой последовательности векторов ψ_i, что

$$\psi_i=\sum_{p,q,r,k} f_i(p,q,r,k)a^+_{p\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r\uparrow}a^+_{k\uparrow}\varphi_0, \quad \|\psi_i\|=1, \quad \lim_{i\to\infty}\big\|\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\big\|=0, \quad (5)$$

где $\lambda\in\sigma\big({}^3H_t^1\big)$. С другой стороны,

$$\Big\|\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\Big\|^2=\Big(\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i,\big({}^3H_t^1-\lambda\big)\psi_i\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}_t^1-\lambda\big)f_i(p,q,r,k)\Big\|^2\Big(a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}_t^1-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\Big\|^2\Big(a_{k,\uparrow}a_{r,\uparrow}a_{q,\downarrow}a_{p,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0,\varphi_0\Big)=$$
$$=\sum_{p,q,r,k}\big\|\big({}^3\overline{H}_t^1-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\big\|^2(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{p,q,r,k}\Big\|\big({}^3\overline{H}_t^1-\lambda\big)F_i(p,q,r,k)\Big\|^2\to 0,$$

при $i\to\infty$, где

$$F_i=\sum_{p,q,r,k} f_i(p,q,r,k), \quad \|F_i\|^2=\sum_{p,q,r,k}|f_i(p,q,r,k)|^2=\|\psi_i\|^2=1.$$

Это означает, что $\lambda\in\sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big)$. Следовательно, $\sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big)\subset\sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big)$.

Обратно, пусть $\overline{\lambda}\in\sigma(\overline{H}_2^q)$. Тогда в силу того же критерия Вейля существует такая последовательность $\{F_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$\|F_i\|=1, \quad \lim_{i\to\infty}\big\|({}^3\overline{H}_t^1-\overline{\lambda})\psi_i\big\|=0.$$

Полагая

$$F_i=\sum_{p,r,t,k} f_i(p,r,t,k), \quad \|F_i\|=\left(\sum_{p,r,t,k}|f_i(p,r,t,k)|^2\right)^{1/2},$$

получим

$$\|\psi_i\|=\|F_i\|=1, \quad \big\|({}^3\overline{H}_t^1-\overline{\lambda})F_i\big\|=\big\|({}^3\overline{H}_t^1-\overline{\lambda})\psi_i\big\|\to 0 \quad \text{при } i\to\infty.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{\lambda} \in \sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big)$ и, следовательно, $\sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big) \subset \sigma\big({}^3H_t^1\big)$. Эти два соотношения означают, что $\sigma\big({}^3H_t^1\big) = \sigma\big({}^3\overline{H}_t^1\big)$. □

Оператор ${}^3H_t^1$ будем называть оператором четырехэлектронного третьего триплета в примесной модели Хаббарда.

Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье

$$\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^3\widetilde{\mathcal{H}}_t^1,$$

где T^ν — ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, т.е. $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^3\widetilde{H}_t^1 = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}_t^1\mathcal{F}^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^3\overline{H}_t^1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{\rm as}((T^\nu)^4)$, где $L_2^{\rm as}$ — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Положим $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ и $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Теорема 2. *Преобразование Фурье оператора ${}^3\overline{H}_t^1$ есть оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1 = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}_t^1\mathcal{F}^{-1}$, который действует в пространстве $L_2^{\rm as}((T^\nu)^4)$ по формуле*

$$\begin{aligned}
{}^3\widetilde{H}_t^1\,{}^3\psi_t^1 &= h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)+\\
&+U\left[\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\gamma,\mu+\theta-s)ds\right]+\\
&+\varepsilon_1\left[\int\limits_{T^\nu} f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\right]+\\
&+2\varepsilon_2\Bigg[\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i+\cos s_i\big]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\mu_i+\cos t_i\big]f(\lambda,t,\gamma,\theta)dt+\\
&+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\gamma_i+\cos k_i\big]f(\lambda,\mu,k,\theta)dk+\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\theta_i+\cos\xi_i\big]f(\lambda,\mu,\gamma,\xi)d\xi\Bigg]+\\
&+\varepsilon_3\left[\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t,\gamma,\theta)\,ds\,dt+\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,t,\theta)\,ds\,dt+\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(\lambda,s,\gamma,t)\,ds\,dt\right], \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$h(\lambda,\mu,\gamma,\theta) = 4A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\lambda_i+\cos\mu_i+\cos\gamma_i+\cos\theta_i\big]$$

и $L_2^{\rm as}$ — подпространство антисимметричных функций в $L_2((T^\nu)^4)$.

Учитывая, что функция $f(\lambda,\mu,\gamma,\theta)$ является антисимметрической, и используя тензорные произведения гильбертовых пространств и тензорные произведения операторов в гильбертовых пространствах (см. [14]), нетрудно убедиться, что оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
{}^3\widetilde{H}_t^1\,{}^3\psi_t^1 &= \widetilde{H}_1\otimes I\otimes I\otimes I + I\otimes\widetilde{H}_1\otimes I\otimes I + I\otimes I\otimes\widetilde{H}_1\otimes I+\\
&+I\otimes I\otimes I\otimes\widetilde{H}_1 + U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt=\\
&=\left\{\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1+U\int\limits_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt\right\}\otimes I\otimes I+\\
&+I\otimes I\otimes\Big\{\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1\Big\}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где

$$(\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = \left\{ A + 2B \sum_{i=1}^{\nu} \cos\lambda_i \right\} f(\lambda) + \varepsilon_1 \int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2B \int\limits_{T^\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \big[\cos\lambda_i + \cos s_i \big] f(s)ds, \quad (8)$$

и I — единичный оператор в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ одноэлектронных состояний.

Спектр оператора $A \otimes I + I \otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [5–7]. В этих работах даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{\rm ess}(A \otimes I + I \otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\rm disc}(A \otimes I + I \otimes B)$ оператора $A \otimes I + I \otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{\rm disc}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{\rm disc}(B)$ оператора B:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rm disc}(A \otimes I + I \otimes B) = \Big\{ \sigma(A) \backslash \sigma_{\rm ess}(A) + \sigma(B) \backslash \sigma_{\rm ess}(B) \Big\} \backslash \\ \backslash \Big\{ \big(\sigma_{\rm ess}(A) + \sigma(B)\big) \cup \big(\sigma(A) + \sigma_{\rm ess}(B)\big) \Big\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_{\rm ess}(A \otimes I + I \otimes B) = \big(\sigma_{\rm ess}(A) + \sigma(B)\big) \cup \big(\sigma(A) + \sigma_{\rm ess}(B)\big). \quad (10)$$

Ясно, что

$$\sigma(A \otimes I + I \otimes B) = \big\{ \lambda + \mu : \lambda \in \sigma(A),\ \mu \in \sigma(B) \big\}.$$

Следовательно, сначала необходимо исследовать спектр оператора одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда $\widetilde{H}_1$.

3. Одноэлектронная система в примесной модели Хаббарда. Гамильтониан одноэлектронных систем в примесной модели Хаббарда имеет вид

$$H = A \sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma} a_{m+\tau,\gamma} + (A_0 - A) \sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma} a_{0,\gamma} + (B_0 - B) \sum_{\tau,\gamma} (a^+_{0,\gamma} a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma} a_{0,\gamma}), \quad (11)$$

где A (A_0) — энергия электрона в узле решетке, B (B_0) — интеграл переноса между соседними узлами (между электрона и примесями); для удобства считаем, что $B > 0$ ($B_0 > 0$), $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные орты, т.е. суммирование ведется по ближайшим соседям; γ — спиновый индекс ($\uparrow$ или $\downarrow$); $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ соответственно — операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, через $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначены значения спина $1/2$ и $-1/2$.

Через $\mathcal{H}_1$ обозначим гильбертово пространство, натянутое на векторы вида

$$\psi = \sum_p a^+_{p,\uparrow} \varphi_0.$$

Это пространство называется пространством одноэлектронных состояний оператора H. Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно действий оператора H. Обозначим через $H_1 = H|_{\mathcal{H}_1}$ сужение оператора H на подпространство $\mathcal{H}_1$.

Как и в доказательстве теоремы 2, используя антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электрона в узле решетке, докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пространство $\mathcal{H}_1$ инвариантно относительно оператора H. Сужение H_1 является линейным ограниченным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$ по формуле*

$$H_1 \psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow} \varphi_0, \quad \psi \in \mathcal{H}_1, \quad (12)$$

где $\overline{H}_1$ является линейным ограниченным оператором, действующим в пространстве l_2 по формуле

$$(\overline{H}_1 f)(p) = Af(p) + B \sum_\tau f(p+\tau) + \varepsilon_1 \delta_{p,0} f(p) + \varepsilon_2 \sum_\tau (\delta_{p,\tau} f(0) + \delta_{p,0} f(\tau)). \quad (13)$$

Лемма 2. *Спектры операторов $\overline{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Как и выше, обозначим через $\mathcal{F} : l_2(Z^\nu) \to L_2(T^\nu) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_1$ преобразование Фурье. Положим $\widetilde{H}_1 = \mathcal{F}\overline{H}_1\mathcal{F}^{-1}$. Оператор $\overline{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$.

Используя формулы (13) и свойства преобразования Фурье, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Оператор $\widetilde{H}_1$ действует в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ по формуле*

$$(\widetilde{H}_1 f)(\mu) = \left[A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\mu_i\right] f(\mu) + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\mu_i + \cos s_i\big]f(s)ds, \qquad (14)$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \in T^\nu$.

Известно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ не зависит от чисел ε_1 и ε_2 и заполняет весь отрезок

$$[m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu],$$

где

$$m_\nu = \min_{x\in T^\nu} h(x), \quad M_\nu = \max_{x\in T^\nu} h(x), \quad h(x) = A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos x_i).$$

Для нахождения собственных значений и собственных функций оператора $\widetilde{H}_1$ запишем (14) в следующем виде:

$$\left\{A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\mu_i - z\right\} f(\mu) + \varepsilon_1\int\limits_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\big[\cos\mu_i + \cos s_i\big]f(s)ds = 0, \qquad (15)$$

где $z \in R$.

Сначала рассмотрим случай $\nu = 1$. Введем обозначения

$$a = \int\limits_T f(s)ds, \quad b = \int\limits_T f(s)\cos s ds, \quad h(\mu) = A + 2B\cos\mu.$$

Из (15) следует, что

$$f(\mu) = -\frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos\mu)a + 2\varepsilon_2 b}{h(\mu) - z}. \qquad (16)$$

Используя (16), выразим a и b и получим следующую систему двух линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left(1 + \int\limits_T \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s}{h(s) - z}ds\right) a + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{ds}{h(s) - z} b = 0,$$

$$\int\limits_T \frac{\cos s(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s)}{h(s) - z} dsa + \left(1 + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{\cos sds}{h(s) - z}\right) b = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант системы $\Delta_1(z)$ равен нулю, где

$$\Delta_1(z) = \left(1 + \int\limits_T \frac{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\cos s)ds}{h(s) - z}\right)\cdot\left(1 + 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{\cos sds}{h(s) - z}\right) -$$

$$- 2\varepsilon_2\int\limits_T \frac{ds}{h(s) - z}\int\limits_T \frac{\cos s(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 coss)}{h(s) - z}ds.$$

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Действительное число $z \notin [m_1, M_1]$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_1(z)$.*

Следующая теорема описывает спектр оператора $\widetilde{H}_1$ в случае, когда $\nu = 1$.

Теорема 5. *Пусть $\nu = 1$.*

A. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B. *Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A - \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$ (соответственно, $z = A + \sqrt{4B^2 + \varepsilon_1^2}$), лежащее ниже (соответствено, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C. *Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A + \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1} \quad (\text{соответственно,} \quad z = A - \frac{2B(E^2 + 1)}{E^2 - 1}), \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее выше (соответственно, ниже) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; здесь $\alpha > 1$ — действительное число.

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение*

$$z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; здесь $\alpha > 1$ — действительное число.

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$\begin{aligned} z_1 &= A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \\ z_2 &= A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1, \end{aligned} \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра $\widetilde{H}_1$; здесь $0 < \alpha < 1$ — действительное число.

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения*

$$\begin{aligned} z_1 &= A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} < m_1, \\ z_2 &= A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1} > M_1, \end{aligned} \quad \text{где} \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра $\widetilde{H}_1$*; здесь* $0<\alpha<1$ *— действительное число.*

I. *Если* $-2B<\varepsilon_2<0$*, то оператор* $\widetilde{H}_1$ *не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$*.*

Доказательство. В случае, когда $\nu=1$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[m_1,M_1]=[A-2B,A+2B]$. Выражая все интегралы, входящие в уравнение $\Delta_1(z)=0$, через интеграл

$$J(z)=\int\limits_T \frac{ds}{A+2B\cos s-z}, \tag{17}$$

получаем, что уравнение $\Delta_1(z)=0$ эквивалентно уравнению

$$\Big[\varepsilon_1 B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)\Big]J(z)+(B+\varepsilon_2)^2=0. \tag{18}$$

Поскольку функция (17) является дифференцируемой на множестве $\mathbb{R}\setminus[m_1,M_1]$ и

$$J'(z)=\int\limits_T \frac{ds}{[A+2B\cos s-z]^2}>0,\quad z\notin[m_1,M_1],$$

функция $J(z)$ является монотонно возрастающей функцией z в $(-\infty,m_1)$ и в $(M_1,+\infty)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} &J(z)\to+0 \quad \text{при } z\to-\infty, && J(z)\to+\infty \quad \text{при } z\to m_1-0,\\ &J(z)\to-\infty \quad \text{при } z\to M_1+0, && J(z)\to-0 \quad \text{при } z\to+\infty. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon_1 B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)\neq 0$, то из (18) вытекает, что

$$J(z)=-\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Функция

$$\psi(z)=-\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)}$$

имеет точку разрыва $z_0=A-\dfrac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$. Так как

$$\psi'(z)=\frac{(B+\varepsilon_2)^2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)]^2}$$

для всех $z\neq z_0$, отсюда следует, что функция $\psi(z)$ является монотонно возрастающей (убывающей) функцией z в $(-\infty,z_0)$ и в $(z_0,+\infty)$ в случае, когда $\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2>0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2<0$). Кроме того, если $\varepsilon_2>0$ или $\varepsilon_2<-2B$, то

$$\begin{aligned} &\psi(z)\to+0 \quad \text{при } z\to-\infty, && \psi(z)\to+\infty \quad \text{при } z\to z_0-0,\\ &\psi(z)\to-\infty \quad \text{при } z\to z_0+0, && \psi(z)\to-0 \quad \text{при } z\to+\infty. \end{aligned}$$

Соответственно, если $-2B<\varepsilon_2<0$, то

$$\begin{aligned} &\psi(z)\to-0 \quad \text{при } z\to-\infty, && \psi(z)\to-\infty \quad \text{при } z\to z_0-0,\\ &\psi(z)\to+\infty \quad \text{при } z\to z_0+0, && \psi(z)\to+0 \quad \text{при } z\to+\infty. \end{aligned}$$

A. Если $\varepsilon_2=-B$ и $\varepsilon_1<-2B$ (соответственно, $\varepsilon_2=-B$ и $\varepsilon_1>2B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид

$$\big\{\varepsilon_1 B^2-B^2(z-A)\big\}J(z)=0. \tag{19}$$

Ясно, что $J(z)\neq 0$ для значений $z\notin\sigma_{\rm cont}(\widetilde{H}_1)$. Поэтому $\varepsilon_1-z+A=0$, т.е. $z=A+\varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1<-2B$, то это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$; если же $\varepsilon_1>2B$, то это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

B. Если $\varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид

$$\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0,$$

т.е. $J(z) = -1/\varepsilon_1$. Ясно, что интеграл $J(z)$ вычисляется в квадратурах, и ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем $J(z) > 0$ (соответственно, $J(z) < 0$); следовательно, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 0$). Вычисляя интеграл

$$J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$$

для z, лежащих ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1},$$

имеющее решение $z = A - \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Для значений z, лежащих выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеем уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{1}{\varepsilon_1};$$

его решение, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеет вид $z = A + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4B^2}$.

C. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, то уравнение для собственных значений и собственных функций принимает вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Положим $E = \dfrac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$; тогда $J(z) = -\dfrac{E}{z-A}$ или $J(z) = \dfrac{E}{A-z}$. Если z лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A-z},$$

имеющее решение вида

$$z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}}.$$

Ясно, что $E^2 > 1$. Это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если z лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение для собственных значений и его решение имеют соответственно вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z-A}, \quad z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2 - 1}};$$

это собственное значение лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}. \tag{20}$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Из (20) получаем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2B},$$

решения которого суть

$$z_1 = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A - 2B.$$

Неравенства $z_i < A-2B$, $i=1,2$, не выполняются. Рассмотрим уравнение (20) в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$:

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A+2B}.$$

Проверяя условия $z_i > A+2B$, $i=1,2$, обнаруживаем, что неравенство $z_1 > A+2B$ выполняется, а неравенство $z_2 > A+2B$ нет. Следовательно, в этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A+2B(E^2+1)/(E^2-1)$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Пусть $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$; тогда уравнение для собственных значений и собственных функций имеет вид

$$J(z)=-\frac{E}{z-A-2B},\quad \text{где}\quad E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}.$$

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение вида

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z+2B},$$

корни которого суть

$$z_1 = A-\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1},\quad z_2=A+2B.$$

Неравенство $z_1 < A-2B$ верно, а неравенство $z_2 < A-2B$ нет. В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2-4B^2}}=-\frac{E}{z-A-2B},\quad z_1=A-\frac{2B(E^2+1)}{E^2-1},\quad z_2=A+2B.$$

Неравенства $z_1 > A+2B$ и $z_2 > A+2B$ не выполняются. Поэтому в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

E. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ или, соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B)$, то, положив $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha>1$ — действительное число, получим уравнение для собственных значений в виде

$$\left\{\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}\cdot B^2+(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)\right\}J(z)+(B+\varepsilon_2)^2=0,$$

или

$$(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2\alpha B)J(z)+(B+\varepsilon_2)^2=0.$$

Отсюда находим

$$J(z)=-\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2\alpha B)}.$$

Положив $E=(B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$, запишем

$$J(z)=-\frac{E}{z-A+2\alpha B}. \tag{21}$$

Сначала рассмотрим это выражение в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, где

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}}=\frac{E}{A-z-2\alpha B};$$

решения имеют вид

$$z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},\quad z_2=A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Решение z_1 не удовлетворяет условию $z_1 < A-2B$, в то время как $z_2 < A-2B$, но неравенство $z_2 < A-2\alpha B$ не выполняется. Неравенство $z_1 > A+2B$ верно, а $z_2 > A+2B$ нет. Поскольку $A-2\alpha B < A+2B$, получаем, что $z_1 > A-2\alpha B$. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A+2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1)$, лежащее выше непрерывного спектра.

F. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ или, соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)}.$$

Положив $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, запишем

$$J(z) = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}. \tag{22}$$

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z + 2\alpha B}$$

примет вид

$$(E^2-1)(A-z)^2 - 4\alpha B(A-z) - 4B^2(E^2+\alpha^2) = 0.$$

Отсюда находим

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Проверим условия $z_i < m_1 = A - 2B$, $i = 1, 2$. Неравенство $z_1 < A - 2B$ верно, а $z_2 < A - 2B$ нет. Уравнение (22) в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A - 2\alpha B};$$

его корни суть

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(-\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Условие $z > A+2B$ не выполняется для z_1 и выполняется для z_2 верно. Неравенство $z_2 > A+2\alpha B$ не выполнено. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z_1 = A - 2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1) < m_1$, лежащее ниже непрерывного спектра.

G. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ или, соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то, положив $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$, получим уравнение для собственных значений

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{23}$$

Положив $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, перепишем уравнение (23) в виде (21). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2 - 4B^2}} = \frac{E}{A - z - 2\alpha B}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

корни которого суть

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Неравенства $z_1 < A - 2B$, $z_1 < A - 2\alpha B$, $z_2 < A - 2B$ и $z_2 < A - 2\alpha B$ выполняются, а неравенство $z_1 < A - 2B$ нет. В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение (23) принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 - 4B^2}} = -\frac{E}{z - A + 2\alpha B};$$

его корни равны

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}.$$

Неравенства $z_1 > A+2B$, $z_1 > A-2\alpha B$, $z_1 > A-2\alpha B$ выполнены, а неравенства $z_2 > A+2B$ и $z_2 > A+2\alpha B$ нет. Следовательно, в рассматриваемом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

H. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ или, соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$, то, полагая $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$, где $0<\alpha<1$, получаем уравнение для собственных значений

$$(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A-2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0<\alpha<1,$$

которое примет вид (22), где $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$. В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{(A-z)^2-4B^2}} = \frac{E}{A-z+2\alpha B}, \quad 0<\alpha<1,$$

с корнями

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

для которых $z_1 < A-2B$, $z_1 < A-2\alpha B$, $z_2 < A-2B$ и $z_1 < A-2B$, но неравенство $z_2 < A-2\alpha B$ не выполняется. В области выше непрерывного спектра имеем уравнение

$$-\frac{1}{\sqrt{(z-A)^2 4B^2}} = -\frac{E}{z-A+2\alpha B},$$

решения которого

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$$

удовлетворяют условиям для которых $z_1 > A-2\alpha B$, $z_2 > A+2B$, $z_2 > A+2\alpha B$. Следовательно, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственные значения

$$z_1 = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}, \quad z_2 = A - \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},$$

лежащие соответственно ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

I. Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, и функция

$$\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)}$$

является монотонно убывающей в интервалах $(-\infty, z_0)$ и $(z_0, +\infty)$. Кроме того,

$$\psi(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0-0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0+0]{} +\infty.$$

Для функции $J(z)$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} 0, \quad J(z) \xrightarrow[z\to m_1-0]{} +\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to M_1+0]{} -\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

Поэтому уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может имеет решения вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Следовательно, в этом случае, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. $\square$

Теперь рассмотрим двумерный случай. Уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$(\varepsilon_2+B)^2 + \Big\{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A)\Big\} J(z) = 0,$$

где

$$J(z) = \int\limits_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A+2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}.$$

В этом случае

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(z) \xrightarrow[z\to m_2-0]{} +\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to M_2+0]{} -\infty, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

В одномерном и двумерном случаях поведение функции $J(z)$ идентично. Поэтому имеем результаты, аналогичные результатам для одномерного случая.

Рассмотрим трехмерный случай. Обозначим через W интеграл Ватсона (см. [19])

$$W = \frac{1}{\pi^3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{3\,dx\,dy\,dz}{3-\cos x-\cos y-\cos z} \simeq 1{,}516. \tag{24}$$

Теорема 6. *Пусть $\nu = 3$.*

A. 1. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A+\varepsilon_1$, лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

2. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B. *Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leqslant -6B/W$, (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 (соответственно, z_2), лежащих ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ и $-6B/W \leqslant \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C. *Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), где $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\widetilde{z}$), лежащее ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z (соответственно, $\widetilde{z}$), лежащее выше (соответственно, ниже) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно выше и ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно выше и ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

I. *Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

Доказательство. В случае, когда $\nu = 3$, непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ представляет собой отрезок $[m_3, M_3] = [A - 6B, A + 6B]$. Выражая все интегралы, выходящие в уравнение

$$\Delta_3(z) = \left(1 + \int\limits_{T^3} \frac{\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i\right) ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}\right) \left(1 + 6\varepsilon_2 \int\limits_{T^3} \frac{\cos s_i \, ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}\right) -$$
$$- 6\varepsilon_2 \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z} \int\limits_{T^3} \frac{\left(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \sum_{i=1}^{3} \cos s_i\right) \cos s_1 \, ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z} = 0,$$

через интеграл

$$J(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z}, \tag{25}$$

получаем, что уравнение $\Delta_3(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\Big[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\Big] J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Функция (25) дифференцируема по z на множестве $\mathbb{R} \setminus [m_3, M_3]$ и

$$J'(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{\left[A + 2B \sum\limits_{i=1}^{3} \cos s_i - z\right]^2} > 0, \quad z \notin [m_3, M_3].$$

В трехмерном случае интеграл

$$\int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_2} = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_2}$$

имеет конечное значение. Выражая этот интеграл через интеграл Ватсона (24) и учитывая, что рассматриваемая мера нормирована, находим $J(z) = W/(6B)$. Кроме того, функция $J(z)$ монотонно возрастает на множестве $(-\infty, m_3) \cup (M_3, +\infty)$, и в трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad J(A - 6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0, \quad J(A + 6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Если $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, то из уравнения (18) следует

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}.$$

Функция в правой части последнего равенства имеет точку разрыва

$$z_0 = A - \frac{B^2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{[\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2}$$

для всех $z \neq z_0$, заключаем, что функция $\psi(z)$ монотонно возрастает на множестве $(-\infty, z_0) \cup (z_0, +\infty)$, в случае $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$). Кроме того, если $\varepsilon_2 > 0$ или $\varepsilon_2 < -2B$, то

$$\psi(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 - 0]{} +\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 + 0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0.$$

Соответственно, если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то

$$\psi(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 - 0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to z_0 + 0]{} +\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} +0.$$

A. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$), то уравнение для собственных значений и собственных функций (18) имеет вид (19). Ясно, что $J(z) \neq 0$ для значений $z \notin \sigma_{\mathrm{cont}}(\widetilde{H}_1)$. Следовательно, $\varepsilon_1 - z + A = 0$, т.е. $z = A + \varepsilon_1$. Если $\varepsilon_1 < -6B$, то это собственное значение лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, а если $\varepsilon_1 > 6B$ — то выше. Если $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$), то указанное собственное значение не лежит вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

B. Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то уравнение для собственных значений имеет вид

$$\varepsilon_1 B^2 J(z) + B^2 = 0 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{1}{\varepsilon_1}.$$

В трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Следовательно, для того, чтобы уравнение $J(z) = -1/\varepsilon_1$ в оласти ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имело решение, должно выполнятся неравенство $-1/\varepsilon_1 < W/(6B)$ (соответственно, $-1/\varepsilon_1 > -W/(6B)$), т.е. $\varepsilon_1 < -6B/W$, $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 > 6B/W$, $\varepsilon_1 > 0$). Если $-6B/W < \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 < 6B/W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

B. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$), то уравнение для собственных значений примет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2 \quad \text{или} \quad J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z-A)}.$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Тогда

$$J(z) = -\frac{E}{z-A} \quad \text{или} \quad J(z) = \frac{E}{A-z}.$$

В трехмерном случае

$$J(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Следовательно, для того, чтобы уравнение $J(z) = -E/(z-A)$ в области ниже (соответственно, выше) непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имело решение, должно выполняться неравенство $E/(6B) < W/(6B)$ (соответственно, $-E/(6B) > -W/(6B)$,) т.е. $E < W$. Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

D. Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2,$$

откуда получаем уравнение в виде (20):

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Положим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A-z-2B} \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad \frac{E}{A-z-2B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{4B},$$

$$J(z) \xrightarrow[z \to -\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z \to +\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A - z - 2B)$ имеет единственное решение, если $E/(4B) > W/(6B)$, т.е. $E > 2W/3$. Это неравенство неверно;

следовательно, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, это уравнение не имеет решения.

Теперь рассмотрим уравнение $J(z) = -E/(z - A + 2B)$ в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A-z-2B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad \frac{E}{A-z-2B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{8B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A - z - 2B)$ имеет единственное решение, если $-E/(8B) > -W/(6B)$, т.е. $E < 4W/3$. Это неравенство верно; следовательно, в рассматриваемой области уравнение имеет единственное собственное значение z.

Если $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, то уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2B)J(z) = -(B + \varepsilon_2)^2.$$

Отсюда получаем уравнение в виде (20):

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2B)}.$$

Положим $E = (B + \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Сначала рассмотрим уравнение (20) в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A-z+2B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad \frac{E}{A-z+2B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{8B},$$
$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение $J(z) = E/(A - z + 2B)$ имеет единственное решение, если $E/(8B) < W/(6B)$, т.е. $E < 4W/3$. Это неравенство верно; следовательно, в области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, уравнение имеет единственное решение.

Теперь рассмотрим уравнение для собственных значений $J(z) = -E/(z - A - 2B)$ в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. В этой области

$$\frac{E}{A-z+2B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad \frac{E}{A-z+2B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{4B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A+6B) = -\frac{W}{6B}.$$

Итак, в области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ уравнение $J(z) = E/(A - z + 2B)$ имеет единственное решение, если $-E/(4B) > -W/(6B)$, т.е. $E < 2W/3$. Это неравенство неверно. Следовательно, в рассматриваемой области уравнение не имеет решений.

E. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$), то положим $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Тогда уравнение для собственных значений имеет вид

$$\left\{\alpha\frac{2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)}{B}B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\right\}J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0,$$

или

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A + 2\alpha B)}.$$

Положив $E = (B + \varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$, получим уравнение (21). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B},$$
$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{(6-2\alpha)B}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, если $E/(6-2\alpha)B < W/(6B)$, т.е. $E < (3-\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений в области ниже своего непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем

$$J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad J(A-6B) = -\frac{W}{6B},$$

$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{6B+2\alpha B}.$$

Решение уравнения (21) единственно, если $-E/((6+2\alpha)B) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, расположенное выше непрерывного спектра.

F. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$, (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$), положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$, где $\alpha > 1$. Уравнение для собственных значений примет вид

$$J(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A-2\alpha B)}.$$

Пусть $E = (B+\varepsilon_2)^2/\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2$. Тогда получим уравнение вида (22). В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$ имеем уравнение

$$J(z) = \frac{E}{A+2\alpha B-z},$$

причем

$$-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z-A-2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{6B+2\alpha B}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, если $E/((6+2\alpha)B) < W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Поскольку это неравенство выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение, расположенное ниже непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A-2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A-2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{6B-2\alpha B}.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение в области выше непрерывного спектра, если $-E/(6B-2\alpha B) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3-\alpha)W/3$. Поскольку последнее неравенство не выполняется, оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений выше непрерывного спектра.

G. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$), то положим $\varepsilon_1 = 2\alpha(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда уравнение для собственных значений имеет вид (23):

$$(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)(z-A+2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Обозначим $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$; тогда уравнение (23) примет вид (21).

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{2B(3-\alpha)}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $E/((6-2\alpha)B) > W/(6B)$, т.е. $E > (3-\alpha)W/3$. Это неравенство верно, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 в области ниже непрерывного спектра.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z-A+2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z-A+2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{2B(3+\alpha)}.$$

Уравнение (21) имеет единственное решение, расположенное выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $-E/(2B(3+\alpha)) > -W/(6B)$, т.е. $E < (3+\alpha)W/3$. Это неравенство выполнено, поэтому в этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значений z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра.

H. Если $\varepsilon_2 > 0$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ (соотв., $\varepsilon_2 < -2B$ и $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$), то положим $\varepsilon_1 = -2\alpha(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$, где $0 < \alpha < 1$. Уравнение для собственных значений принимает вид (23):

$$(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A - 2\alpha B)J(z) = -(B+\varepsilon_2)^2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$. Тогда уравнение (23) примет вид (22).

В области ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}\Big|_{z=A-6B} = \frac{E}{2B(3+\alpha)}.$$

Уравнение (22) имеет единственное решение, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $E/((6+2\alpha)B) < W/(6B)$. Отсюда $E < (3+\alpha)W/3$. Это неравенство выполняется, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1 в области ниже непрерывного спектра оператора.

В области выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$

$$-\frac{E}{z - A - 2\alpha B} \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0, \quad -\frac{E}{z - A - 2\alpha B}\Big|_{z=A+6B} = -\frac{E}{2B(3-\alpha)}.$$

Уравнение (22) имеет единственное решение, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, если $-E/(2B(3-\alpha)) < -W/(6B)$, т.е. $E > (3-\alpha)W/3$. Это неравенство верно, так что оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значений z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше непрерывного спектра.

I. Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то $\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2 < 0$, функция

$$\psi(z) = -\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$$

монотонно убывает на множестве $(-\infty, z_0) \cup (z_0, +\infty)$ и

$$\psi(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} -0, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0-0]{} -\infty, \quad \psi(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} +0, \psi(z) \xrightarrow[z\to z_0+0]{} +\infty,$$

$$J(z) \xrightarrow[z\to-\infty]{} +0, \quad J(A-6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(A+6B) = \frac{W}{6B}, \quad J(z) \xrightarrow[z\to+\infty]{} -0.$$

Следовательно, уравнение $\psi(z) = J(z)$ не может имеет решения, лежащего вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, и указанный оператор не имеет собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра. □

Из полученных результатов очевидно, что спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и не более чем двух собственных значений.

4. Структура существенного спектра и дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$. Оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ представляется в виде

$$ {}^3\widetilde{H}_t^1 = \left\{\widetilde{H}_2^t + K(\lambda,\mu)\right\} \otimes I \otimes I + I \otimes I \otimes \widetilde{H}_2^t, \tag{26}$$

где $\widetilde{H}_2^t = \widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$ — оператор энергии двухэлектронной системы в примесной модели Хаббарда в триплетном состоянии. Используя полученные результаты и представления (7) и (26), опишем структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_2^s = \widetilde{H}_2^t + K(\lambda,\mu)$ и оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

Сначала рассмотрим оператор $\widetilde{H}(U) = \widetilde{H}_2^t + K_1$, где

$$(K_1 f)(s) = U \int\limits_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s)ds, \quad \Lambda_1 = \lambda + \mu.$$

Семейство операторов $\widetilde{H}(U)$ является семейством ограниченных операторнозначных аналитических функций, поэтому можно применить теорему Като—Реликса.

Теорема 7 (теорема Като—Реллиха)**.** *Пусть $T(\beta)$ — аналитическое семейство в смысле Като. Пусть E_0 — невырожденное собственное значение оператора $T(\beta_0)$. Тогда при β, близком к β_0, существует в точности одна точка $E(\beta) \in \sigma(T(\beta))$ вблизи E_0, причем эта точка изолирована и невырождена. При β, близких к β_0, функция $E(\beta)$ аналитична и существует аналитический собственный вектор $\Omega(\beta)$. Если при действительных $\beta - \beta_0$ оператор $T(\beta)$ самосопряжен, то $\Omega(\beta)$ можно выбрать так, что он будет нормирован при действительных $\beta - \beta_0$.*

Так как оператор $\widetilde{H}_2^t$ имеет невырожденное собственное значение вблизи собственного значения $2z_1$ оператора $\widetilde{H}_2^t$, то при U, близком к $U_0 = 0$, оператор $\widetilde{H}(U)$ имеет в точности одно собственное значение $E(U) \in \sigma(\widetilde{H}(U))$ вблизи $2z_1$, причем оно изолировано и невырождено. Таким образом, $E(U)$ — аналитическая функция при U вблизи $U_0 = 0$. При больших значениях существование не более одного дополнительного собственного значения оператора $\widetilde{H}(U)$ следует из того, что возмущение

$$(K_1\widetilde{f})(\lambda,\mu) = U \int\limits_{T^\nu} f_{\Lambda_1}(s)ds$$

есть одномерный оператор.

Теперь рассмотрим семейство операторов $\widetilde{H}(\varepsilon_3) = \widetilde{H}(U) + K_2$, где

$$(K_2 f)(\lambda,\mu) = \int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} f(s,t)\,ds\,dt.$$

Так как оператор $\widetilde{H}(U)$ имеет невырожденное собственное значение, то вблизи собственного значения $E(U)$ оператора $\widetilde{H}(U)$ оператор $\widetilde{H}(\varepsilon_3)$ вблизи точки $\varepsilon_3 = 0$ имеет в точности одно собственное значение $E(\varepsilon_3) \in \sigma(\widetilde{H}(\varepsilon_3))$ вблизи $E(U)$, которое изолировано и невырождено. Поэтому функция $E(\varepsilon_3)$ аналитична вблизи ε_3.

Обозначим через z_3 и z_4 дополнительные собственные значения оператора $\widetilde{H}_2^s$. Докажем следующие теоремы, описывающие спектр операторов $\widetilde{H}_2^s$ и ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

Теорема 8. *Пусть $\nu = 1$.*

A. *Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ & \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где $z = A + \varepsilon_1$, а z_3 и z_4 — дополнительные собственные значение оператора $\widetilde{H}_2^s$.

B. *Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z,\ 3A+6B+z] \cup \\ & \cup [2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z,\ A+2B+3z] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3] \cup \\ & \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z, 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где $z = A - \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ (*соответственно,* $z = A + \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$).

C. *Если* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 > 0$ *или* $\varepsilon_1 = 0$ *и* $\varepsilon_2 < -2B$, *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1]\cup\\ \cup[3A-6B+z_2,\ 3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+z_1]\cup\\ \cup[2A-4B+2z_2,\ 2A+4B+z_2]\cup[2A-4B+z_1+z_2,\ 2A+4B+z_1+z_2]\cup\\ \cup[A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1]\cup[A-2B+3z_2,\ A+2B+3z_2]\cup\\ \cup[A-2B+z_1+2z_2,\ A+2B+z_1+2z_2]\cup[A-2B+2z_1+z_2,\ A+2B+2z_1+z_2]\cup\\ \cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup\\ \cup[A-2B+z_1+z_3,\ 2A+4B+z_1+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_4,\ 2A+4B+z_1+z_4]\cup\\ \cup[A-2B+z_2+z_3,\ 2A+4B+z_2+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_4,\ 2A+4B+z_2+z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 4z_2,\ 2z_1+2z_2,\ z_1+3z_2,\ 2z_1+z_3,\\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},\end{gathered}$$

где

$$z_1 = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}},\quad z_2 = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}},\quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}.$$

D. *Если* $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ (*соответственно,* $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z,\ 3A+6B+z]\cup\\ \cup[2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,\ A+2B+3z]\cup\\ \cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3]\cup\\ \cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где соответственно

$$z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}\quad \text{или}\quad z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1},\quad E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}.$$

E. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$ (*соответственно,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)/B$), *то существенный спектр оператор* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z,\ 3A+6B+z]\cup\\ \cup[2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,\ A+2B+3z]\cup\\ \cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3]\cup\\ \cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],\end{gathered}$$

а дискретный спектр оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2z,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где

$$z = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}, \quad \alpha > 1.$$

F. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *(соответственно,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z,\ 3A + 6B + z] \cup \\ & \cup [2A - 4B + 2z,\ 2A + 4B + 2z] \cup [A - 2B + 3z,\ A + 2B + 3z] \cup \\ & \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z + z_3,\ A + 2B + z + z_3] \cup \\ & \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z + z_4,\ A + 2B + z + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператор ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z,\ 2z + z_3,\ 2z + z_4\big\},$$

где

$$z = A - \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}, \quad \alpha > 1.$$

G. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *(соотв.,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1,\ 3A + 6B + z_1] \cup \\ & \cup [3A - 6B + z_2,\ 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1,\ 2A + 4B + z_1] \cup \\ & \cup [2A - 4B + 2z_2,\ 2A + 4B + z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2,\ 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup \\ & \cup [A - 2B + 3z_1,\ A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2,\ A + 2B + 3z_2] \cup \\ & \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2,\ A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2,\ A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup \\ & \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup \\ & \cup [A - 2B + z_1 + z_3,\ 2A + 4B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4,\ 2A + 4B + z_1 + z_4] \cup \\ & \cup [A - 2B + z_2 + z_3,\ 2A + 4B + z_2 + z_3] \cup [A - 2B + z_2 + z_4,\ 2A + 4B + z_2 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{ & 4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 4z_2,\ 2z_1 + 2z_2,\ z_1 + 3z_2, \\ & 2z_1 + z_3,\ z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\big\},\end{aligned}$$

где

$$z_1 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad z_2 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2 - 1 + \alpha^2})}{E^2 - 1}, \quad E = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$$

и $0 < \alpha < 1$.

H. *Если* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ *(соотв.,* $\varepsilon_2 < -2B$ *и* $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$*), то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = {} & [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1,\ 3A + 6B + z_1] \cup \\ & \cup [3A - 6B + z_2,\ 3A + 6B + z_2] \cup [2A - 4B + 2z_1,\ 2A + 4B + z_1] \cup \\ & \cup [2A - 4B + 2z_2,\ 2A + 4B + z_2] \cup [2A - 4B + z_1 + z_2,\ 2A + 4B + z_1 + z_2] \cup \\ & \cup [A - 2B + 3z_1,\ A + 2B + 3z_1] \cup [A - 2B + 3z_2,\ A + 2B + 3z_2] \cup \\ & \cup [A - 2B + z_1 + 2z_2,\ A + 2B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 2B + 2z_1 + z_2,\ A + 2B + 2z_1 + z_2] \cup \\ & \cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup \\ & \cup [A - 2B + z_1 + z_3,\ 2A + 4B + z_1 + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_4,\ 2A + 4B + z_1 + z_4] \cup\end{aligned}$$

$$\cup\,[A-2B+z_2+z_3,\ 2A+4B+z_2+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_4,\ 2A+4B+z_2+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из одиннадцати собственных значений*:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\big\{4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 4z_2,\ 2z_1+2z_2,\ z_1+3z_2,\\ 2z_1+z_3,\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},$$

где

$$z_1=A+\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},\quad z_2=A+\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1},\quad E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$$

и $0<\alpha<1$.

I. *Если* $-2B<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *пуст*: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\varnothing$.

Доказательство. **A.** Из представлений (7) и (26) и формул (9) и (10) следует, что в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из одного отрезка $\sigma_{\mathrm{cont}}(\widetilde{H}_1)=[A-2B,\ A+2B]$, а дискретный спектр состоит из единственного собственного значения $z=A+\varepsilon_1$. Оператор K является двумерным; поэтому существенные спектры операторов $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2^s$ совпадают (см. [19, гл. XIII, § 4]) и состоят из отрезков $[2A-4B,\ 2A+4B]$ и $[A-2B+z,\ A+2B+z]$. При возмущении двумерным оператором K оператор $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ имеет не более двух собственных значений z_3 и z_4.

B. В этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение z_1, лежащее вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Поэтому существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ является объединением двух отрезков, а дискретный спектр состоит из единственного собственного значения. Остальные утверждения теоремы доказывается аналогично. □

Следующие теоремы описывают структуру существенного спектра и дискретный спектр оператора $\widetilde{H}_2^s$ в трехмерном случае.

Теорема 9. *Пусть* $\nu=3$.

A. 1. *Если* $\varepsilon_2=-B$ *и* $\varepsilon_1<-6B$ (*соответственно*, $\varepsilon_2=-B$ *и* $\varepsilon_1>6B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением восьми отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z,\ 3A+6B+z]\cup\\ \cup\,[2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,\ A+2B+3z]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *состоит из трех собственных значений*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\big\{4z,\ 2z+z_3,\ 2z+z_4\big\},$$

где $z=A+\varepsilon_1$, *а* z_3 *и* z_4 — *дополнительные собственные значение оператора* $\widetilde{H}_2^s$.

2. *Если* $\varepsilon_2=-B$ *и* $-6B\leqslant\varepsilon_1<-2B$ (*соответственно*, $\varepsilon_2=-B$ *и* $2B<\varepsilon_1\leqslant 6B$), *то существенный спектр оператора* ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=[4A-8B,\ 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup\\ \cup\,[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ *пуст*: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big)=\varnothing$.

B. *Если $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_1 \leqslant -6B/W$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -2B$ или $\varepsilon_2 = 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 6B/W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) &= [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1]\cup\\ &\cup[2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+2z_1]\cup[A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3,\ A+2B+z_1+z_3]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4,\ A+2B+z_1+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) &= [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z_2,\ 3A+6B+z_2]\cup\\ &\cup[2A-4B+2z_2,\ 2A+4B+2z_2]\cup[A-2B+3z_2,\ A+2B+3z_2]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_3,\ A+2B+z_2+z_3]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4,\ A+2B+z_2+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ z_3,\ z_4\big\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_2,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z_1 (соответственно, z_2) является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$.

Если $-6B/W \leqslant \varepsilon_1 < 0$ (соответственно, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B/W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup&\\ \cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]&,\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

C. *Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E < W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 < -2B$, $E < W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) &= [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+z,\ 3A+6B+z]\cup\\ &\cup[2A-4B+2z,\ 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,\ A+2B+3z]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,\ A+2B+z+z_3]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,\ A+2B+z+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\rm ess}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) &= [4A-8B,\ 4A+8B]\cup[3A-6B+\widetilde{z},\ 3A+6B+\widetilde{z}]\cup\\ &\cup[2A-4B+2\widetilde{z},\ 2A+4B+2\widetilde{z}]\cup[A-2B+3\widetilde{z},\ A+2B+3\widetilde{z}]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+\widetilde{z}+z_3,\ A+2B+\widetilde{z}+z_3]\cup\\ &\cup[2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+\widetilde{z}+z_4,\ A+2B+\widetilde{z}+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2z,\ z_3,\ z_4\big\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\rm disc}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2\widetilde{z},\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z (соответственно, $\widetilde{z}$) является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ и

$$E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

Если $\varepsilon_1 = 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, $E > W$ (соответственно, $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, $E > W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков:

$$\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

D. *Если $\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$ (соответственно, $\varepsilon_1 = -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < 4W/3$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4];\end{aligned}$$

соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+\widetilde{z}, 3A+6B+\widetilde{z}] \cup \\ \cup [2A-4B+2\widetilde{z}, 2A+4B+2\widetilde{z}] \cup [A-2B+3\widetilde{z}, A+2B+3\widetilde{z}] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_3, A+2B+\widetilde{z}+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+\widetilde{z}+z_4, A+2B+\widetilde{z}+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2z,\ z_3,\ z_4\big\};$$

соответственно,

$$\sigma_{\text{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{2\widetilde{z},\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z (соответственно, $\widetilde{z}$) является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ и

$$E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}.$$

E. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $\varepsilon_1 > 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B,\ 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1,\ 3A+6B+z_1] \cup \\ \cup [2A-4B+2z_1,\ 2A+4B+2z_1] \cup [A-2B+3z_1,\ A+2B+3z_1] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3,\ 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3,\ A+2B+z_1+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4,\ 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4,\ A+2B+z_1+z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\text{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \big\{2z_1,\ z_3,\ z_4\big\},$$

где z_1 — собственное значение оператора $\widetilde{H}_1$.

F. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 + \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $\varepsilon_1 < -2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1+\alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A - 8B,\ 4A + 8B] \cup [3A - 6B + z_1,\ 3A + 6B + z_1] \cup \\ &\cup [2A - 4B + 2z_1,\ 2A + 4B + 2z_1] \cup [A - 2B + 3z_1,\ A + 2B + 3z_1] \cup \\ &\cup [2A - 4B + z_3,\ 2A + 4B + z_3] \cup [A - 2B + z_1 + z_3,\ A + 2B + z_1 + z_3] \cup \\ &\cup [2A - 4B + z_4,\ 2A + 4B + z_4] \cup [A - 2B + z_1 + z_4,\ A + 2B + z_1 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из трех собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\widetilde{H}_2^s) = \bigl\{2z_1,\ z_3,\ z_4\bigr\},$$

где z_1 — собственное значение оператора $\widetilde{H}_1$.

G. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 - \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ и $E < (1 - \alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A - 48B, 4A + 48B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup \\ &\cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup \\ &\cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup \\ &\cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup \\ &\cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A - 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A - 6B + z_1 + 2z_2] \cup \\ &\cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup \\ &\cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup \\ &\cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{disc}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = \bigl\{&4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 2z_1 + z_2,\ z_1 + 3z_2,\ 4z_2, \\ &2z_1 + z_3,\ z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\bigr\},\end{aligned}$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

H. *Если $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1 + \alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1 + \alpha/3)W$), то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков*:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{ess}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) &= [4A - 48B, 4A + 48B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup \\ &\cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup \\ &\cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup \\ &\cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup \\ &\cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A - 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A - 6B + z_1 + 2z_2] \cup \\ &\cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup \\ &\cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup \\ &\cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4],\end{aligned}$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{disc}}\bigl({}^3\widetilde{H}_t^1\bigr) = \bigl\{&4z_1,\ 3z_1 + z_2,\ 2z_1 + z_2,\ z_1 + 3z_2,\ 4z_2, \\ &2z_1 + z_3,\ z_1 + z_2 + z_3,\ 2z_2 + z_3,\ 2z_1 + z_4,\ z_1 + z_2 + z_4,\ 2z_2 + z_4\bigr\},\end{aligned}$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

I. *Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков*:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-48B, 4A+48B] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup \\ \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

Доказательство.

A.1. Для $\nu = 3$ из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -6B$ (соответственно, $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 6B$) оператор $\widetilde{H}_1$ имеет единственное собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее вне области непрерывного спектра. Кроме того, непрерывный спектр является отрезком $[A-6B, A+6B]$, поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением восьми отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup \\ \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup \\ \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup \\ \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4].$$

Числа $4z$, $2z+z_3$, $2z+z_4$ являются собственными значениями оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$.

A.2. Из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 = -B$ и $-6B \leqslant \varepsilon_1 < -2B$ (соответственно, при $\varepsilon_2 = -B$ и $2B < \varepsilon_1 \leqslant 6B$) оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений, лежащих вне области непрерывного спектра, представляющего собой отрезок $[A-6B, A+6B]$. Поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением трех отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4],$$

где z_3 и z_4 — дополнительные собственные значения оператора $\widetilde{H}_2^s$, а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ пуст: $\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \varnothing$.

H. Из теоремы 6 следует, что при $\varepsilon_2 > 0$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1+\alpha/3)W$ (соответственно, $\varepsilon_2 < -2B$, $-2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B < \varepsilon_1 < 0$ и $E < (1+\alpha/3)W$) оператор $\widetilde{H}_1$ имеет ровно два собственных значения z_1 и z_2, лежащих соответственно ниже и выше области непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, представляющего собой отрезок $[A-6B, A+6B]$. Поэтому существенный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ является объединением шестнадцати отрезков:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = [4A-48B,\ 4A+48B] \cup [3A-18B+z_1,\ 3A+18B+z_1] \cup \\ \cup [3A-18B+z_2,\ 3A+18B+z_2] \cup [2A-12B+2z_1,\ 2A+12B+2z_1] \cup \\ \cup [2A-12B+2z_2,\ 2A+12B+2z_2] \cup [2A-12B+z_1+z_2,\ 2A+12B+z_1+z_2] \cup \\ \cup [A-6B+3z_1,\ A+6B+3z_1] \cup [A-6B+3z_2,\ A+6B+3z_2] \cup \\ \cup [A-6B+2z_1+z_2,\ A-6B+2z_1+z_2] \cup [A-6B+z_1+2z_2,\ A-6B+z_1+2z_2] \cup \\ \cup [2A-12B+z_3,\ 2A+12B+z_3] \cup [A-6B+z_1+z_3,\ A+6B+z_1+z_3] \cup \\ \cup [A-6B+z_2+z_3,\ A+6B+z_2+z_3] \cup [2A-12B+z_4,\ 2A+12B+z_4] \cup \\ \cup [A-6B+z_1+z_4,\ A+6B+z_1+z_4] \cup [A-6B+z_2+z_4,\ A+6B+z_2+z_4],$$

а дискретный спектр оператора ${}^3\widetilde{H}_t^1$ состоит из одиннадцати собственных значений:

$$\sigma_{\mathrm{disc}}\big({}^3\widetilde{H}_t^1\big) = \big\{4z_1,\ 3z_1+z_2,\ 2z_1+z_2,\ z_1+3z_2, \\ 4z_2,\ 2z_1+z_3,\ z_1+z_2+z_3,\ 2z_2+z_3,\ 2z_1+z_4,\ z_1+z_2+z_4,\ 2z_2+z_4\big\},$$

где z_1 и z_2 — собственные значения оператора $\widetilde{H}_1$.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ташпулатов С. М.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда// Теор. мат. физ. — 2014. — *179*, № 3. — С. 387–405.
2. *Anderson P. W.* Localized magnetic states in metals// Phys. Rev. — 1961. — *124.* — С. 41–53.
3. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals// Phys. Rev. Lett. — 1963. — *10.* — P. 159–162.
4. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. Roy. Soc. A. — 1963. — *276.* — P. 238–257.
5. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235.* — P. 75–113.
6. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 2. The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237.* — P. 223–254.
7. *Ichinose T.* On the spectral properties of tensor products of linear operators in Banach spaces// in: Spectral Theory. — Warsaw: PWN-Polish Scientific Publishers, 1982. — *8.* — P. 294–300.
8. *Izyumov Yu. A., Skryabin Yu. N.* Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems. — Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
9. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals// Prog. Theor. Phys. — 1963. — *30.* — P. 275–289.
10. *Karpenko B. V., Dyakin V. V., Budrina G. L.* Two electrons in the Hubbard Model// Phys. Met. Metallogr. — 1986. — *61.* — P. 702–706.
11. *Lieb E.* Two theorems on the Hubbard Model// Phys. Rev. Lett. — 1989. — *62.* — P. 1201–1204.
12. *Mattis D.* The few-body problems on a lattice// Rev. Mod. Phys. — 1986. — *58.* — P. 370–379.
13. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional Analysis. — New York: Acad. Press, 1972.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4. Operator Analysis. — New York: Academic Press, 1982.
15. *Shubin S. P., Wonsowsky S. V.* On the electron theory of metals// Proc. Roy. Soc. A. — 1934. — *145.* — P. 159–172.
16. *Tashpulatov S. M.* Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard Model// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *697*, № 012025. — P. 1–25.
17. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state// Lobachevskii J. Math. — 2017. — *38*, № 3. — P. 530–541.
18. *Tsvelick A. M., Wiegman P. B.* Exact results in the theory of magnetic alloys// Adv. Phys. — 1983. — *32*, № 4. — P. 453–713.
19. *Valkov V. V., Ovchinnikov S. G., Petrakovskii O. P.* The Excitation Spectra of two-magnon systems in easy-axis quasidimensional Ferromagnets// Sov. Phys. Solid State. — 1986. — *30.* — P. 3044–3047.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Ташпулатов Садулла Мамаражабович
Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@mail.ru

Парманова Рухсат Тогаймурадовна
Институт ядерной физики Академии наук Республики Узбекистан,
Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: toshpul@mail.ru