ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 37–46
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-37-46

УДК 517.912, 514.1

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С КОМПЛЕКСНЫМИ, ДВОЙНЫМИ И ДУАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

© 2023 г. **В. А. КЫРОВ**

Аннотация. В статье решается задача вложения трёх двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(3, 2)$, связанных с комплексными, двойными и дуальными числами, в двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств ранга $(4, 2)$, задаваемую функцией пары точек $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. Задача сводится к поиску невырожденных решений трех особых систем функциональных уравнений, имеющих прямую связь с комплексными, двойными и дуальными числами.

***Ключевые слова*:** функциональное уравнение, жорданова форма матриц, комплексные числа, двойные числа, дуальные числа.

SOLUTIONS OF SOME SYSTEMS OF FUNCTIONAL EQUATIONS RELATED TO COMPLEX, DOUBLE, AND DUAL NUMBERS

© 2023 **V. A. KYROV**

Abstract. In this paper, we solve the problem on the embedding of three two-metric, phenomenologically symmetric geometries of two sets of rank $(3, 2)$ related to complex, double, and dual numbers, into a two-metric, phenomenologically symmetric geometry of two sets of rank $(4, 2)$ determined by a functions of two points $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. The problem is reduced to the search for nondegeenerate solutions of three special systems of functional equations immediately related to complex, double, and dual numbers.

***Keywords and phrases*:** functional equation, Jordan form, complex numbers, double numbers, dual numbers.

***AMS Subject Classification*:** 30D05

1. Введение.

Пусть M и N — двумерное и $2n$-мерное дифференцируемые многообразия. Рассмотрим дифференцируемую функцию

$$f : M \times N \to \mathbb{R}^2, \quad f : \langle i, \alpha\rangle \mapsto \big(f^1(i,\alpha), f^2(i,\alpha)\big)$$

с открытой и плотной областью определения в $M \times N$, а также функцию

$$F : M^n \times N \to \mathbb{R}^{2n}, \quad F : \langle i_1, \dots, i_n, \alpha\rangle \mapsto \big(f^1(i_1,\alpha),\ f^2(i_1,\alpha),\ \dots,\ f^1(i_n,\alpha),\ f^2(i_n,\alpha)\big),$$

где $i_1, \dots, i_n \in M$, $\alpha \in N$. Очевидно, область определения функции F открыта и плотна, а сама функция дифференцируема в этой области определения. Естественным образом строятся функции

$$\begin{aligned} &f_\beta : M \to \mathbb{R}^2, && f_\beta : i \mapsto (f^1(i,\beta), f^2(i,\beta)),\\ &F_{j_1,\dots,j_n} : N \to \mathbb{R}^{2n}, && F_{j_1,\dots,j_n} : \alpha \mapsto \big(f^1(j_1,\alpha),\ f^2(j_1,\alpha),\ \dots,\ f^1(j_n,\alpha),\ f^2(j_n,\alpha)\big),\end{aligned}$$

где $j_1, \dots, j_n \in M$, $\beta \in N$ — произвольные фиксированные точки. Из построений следует, что функции f_β и $F_{j_1,\dots,j_n}$ дифференцируемы, а их области определения открыты и плотны.

Определение 1. Дифференцируемая функция $f : M \times N \to \mathbb{R}^2$ с открытой и плотной областью определения задаёт на многообразиях M и N *двуметрическую феноменологически симметричную геометрию двух множеств* (ДФС ГДМ) *ранга* $(n+1, 2)$, где $n \in \mathbb{N}$, если выполняются следующие аксиомы:

Аксиома 1. Функции f_β и $F_{\langle j_1,\dots,j_n\rangle}$ являются локальными диффеоморфизмами для плотных подмножеств точек из областей определения.

Аксиома 2. Для плотного множества точек $\langle i_1, i_2, \dots, i_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ в $M^{n+1} \times N^2$ все $4(n+1)$ значений функции f связаны уравнением

$$\Phi\Big(f^1(i_1,\alpha_1),\ f^2(i_1,\alpha_1),\ \dots,\ f^1(i_{n+1},\alpha_2),\ f^2(i_{n+1},\alpha_2)\Big) = 0,$$

где $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ — двухкомпонентная функция $4(n+1)$ переменных с $\operatorname{rank}\Phi = 2$.

В работах [1, 3, 6, 7] приведена полная классификация ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ с точностью до замены координат в многообразиях и масштабного преобразования.

Рассмотрим $2(n-1)$-мерное дифференцируемое многообразие N' и двумерное дифференцируемое многообразие L. Пусть

$$\pi_1 : N' \times L \to N', \quad \pi_2 : N' \times L \to L$$

— проекции. Определим проекции

$$\begin{aligned} p_1 &: M \times N \to M, \qquad p_1 : \langle i, \alpha\rangle \mapsto i \\ p_2 &: M \times N \to N, \qquad p_2 : \langle i, \alpha\rangle \mapsto \alpha. \end{aligned}$$

Пусть существует дифференцируемое отображение $h : N \to N' \times L$, в некоторой окрестности произвольной точки из N задающее диффеоморфизм на некоторую окрестность из $N' \times L$, а также функция $g : M \times N' \to \mathbb{R}^2$, определяющая ДФС ГДМ ранга $(n, 2)$, причём

$$f = \chi\left(g\Big(p_1, \pi_1\big(h(p_2)\big)\Big),\ \pi_2\big(h(p_2)\big)\right),$$

где $\chi : \mathbb{R}^2 \times L \to \mathbb{R}^2$ — некоторая дифференцируемая функция во всех точках своей открытой и плотной области определения.

Определение 2. l Будем говорить, что ДФС ГДМ ранга $(n, 2)$, задаваемая функцией $g : M \times N' \to \mathbb{R}^2$, *вложена* в ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$ с функцией $f : M \times N \to \mathbb{R}^2$, причём N локально диффеоморфно $N' \times L$, если выполняется функциональное соотношение

$$f\big(\lambda(i), \tau(\alpha)\big) = \chi\Big(g\big(i, \pi_1\big(h\big(p_2(\langle i, \alpha\rangle)\big)\big)\big),\ \pi_2\big(h\big(p_2(\langle i, \alpha\rangle)\big)\big)\Big),$$

где $\lambda : M \to M$ и $\tau : N \to N$ — локальные диффеоморфизмы.

В [3] доказано, что в каждую ДФС ГДМ ранга $(n+2, 2)$ вложена по крайней мере одна из ДФС ГДМ ранга $(n+1, 2)$, где $n = 1, 2, 3$.

В данной статье ставится задача о нахождении всех возможных вложений ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с функциями

$$g = (x\xi + \mu, x\eta + y\xi + \nu), \quad g = (x\xi + \mu, y\eta + \nu), \quad g = (x\xi - y\eta + \mu, x\eta + y\xi + \nu)$$

в ДФС ГДМ ранга $(4, 2)$ с функцией $f = (x\xi + y\mu + \rho, x\eta + y\nu + \tau)$. Решение этой задачи сводится к решению особых систем функциональных уравнений. Данная задача является продолжением задачи вложения ДФС ГДМ ранга $(2, 2)$ с функцией $g = (x + \xi, x + \eta)$ в ДФС ГДМ ранга $(3, 2)$ с функцией $f = (x\xi + y\mu, x\eta + y\nu)$, опубликованной в [5].

2. Постановка задачи. Согласно определению 2, сформулированная выше задача сводится к решению трёх систем функциональных уравнений

$$\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi+\mu,x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi+\mu,x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau);\end{cases}$$
$$\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi+\mu,y\eta+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi+\mu,y\eta+\nu,\rho,\tau);\end{cases}\tag{1}$$
$$\begin{cases}\bar{x}\bar{\xi}+\bar{y}\bar{\mu}+\bar{\rho}=\chi^1(x\xi-y\eta+\mu,x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\\ \bar{x}\bar{\eta}+\bar{y}\bar{\nu}+\bar{\tau}=\chi^2(x\xi-y\eta+\mu,x\eta+y\xi+\nu,\rho,\tau),\end{cases}$$

где $\bar{x}=\bar{x}(x,y)$, $\bar{y}=\bar{y}(x,y)$,

$$\bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\eta}=\bar{\eta}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\mu}=\bar{\mu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),$$
$$\bar{\nu}=\bar{\nu}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\rho}=\bar{\rho}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),\quad \bar{\tau}=\bar{\tau}(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau),$$

χ^1, χ^2 — дифференцируемые функции.

Авторы данной работы ранее изучалась связь двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств с гиперкомплексными числами (см. [4, 8, 9]). Анализируя уравнения (1), находим их связь с двумерными гиперкомплексными числами, которых всего три типа: комплексные числа, дуальные и двойные. Напомним, что комплексные, дуальные и двойные числа можно задать так: $z=x+Iy$, где $I^2=-1,0,1$ соответственно, $\bar{z}=x-Iy$ — сопряжённое число. Операции сложения и умножения определяются как и для комплексных чисел. Хорошо известно, что множество комплексных чисел образует поле, а множества дуальных и двойных чисел — ассоциативные и коммутативные алгебры над полем $\mathbb{R}$ с единицей и частичным делением. Поэтому правые части уравнений (1) можно записать в виде

$$\chi^1(w,\bar{w},\rho,\tau),\quad \chi^2(w,\bar{w},\rho,\tau),$$

где $w=(\xi+I\eta)(x+Iy)+(\mu+I\nu)$. Тогда для первой и третьей систем из (1): $u=\mathrm{Re}(w)$, $v=\mathrm{Im}(w)$, а для второй системы линейные комбинации действительной и мнимой частей $\mathrm{Re}(w)$, $\mathrm{Im}(w)$ двойного числа w дают выражения

$$u=x'\xi'+\mu',\quad v=y'\eta'+\nu'.$$

Заметим, что u и v — это первый и второй аргументы правых частей в системе (1).

Вложение оказывается возможным, если система (1) имеет хотя бы одно *невырожденное* решение, удовлетворяющее следующим двум условиям (определение 2):

$$\Delta=\frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(x,y)}\neq 0,\quad \Box=\frac{\partial(\bar{\xi},\bar{\eta},\bar{\mu},\bar{\nu},\bar{\rho},\bar{\tau})}{\partial(\xi,\eta,\mu,\nu,\rho,\tau)}\neq 0.\tag{2}$$

Из второго неравенства в данной системе вытекает

$$\bar{\xi}\bar{\nu}-\bar{\eta}\bar{\mu}\neq 0,\quad \bar{\xi}\neq 0,\quad \bar{\eta}\neq 0,\quad \bar{\mu}\neq 0,\quad \bar{\nu}\neq 0.$$

Основной целью настоящей работы является определение общего невырожденного решения системы (1) или доказательство того, что решения не существует.

Дифференцируя уравнения из (1) по переменным x, μ, ν, затем их комбинируем, чтобы справа исчезли производные функций χ^1 и χ^2 по их первому и второму аргументам, после чего фиксируя переменные ξ, η, μ, ν, ρ, τ, во всех трёх случаях получаем систему дифференциальных уравнений на функции $\bar{x}=\bar{x}(x,y)$, $\bar{y}=\bar{y}(x,y)$:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}=\bar{A}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}.\tag{3}$$

Произведём допустимое структурой функциональных уравнений систем (1) преобразование

$$\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}=U^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}'_x\\ \bar{y}'_x\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix} = UA\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + U\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = UAU^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix} + U\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix}\bar{x}'\\ \bar{y}'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha'\\ \gamma'\end{pmatrix}$$

с невырожденной матрицей U второго порядка. Система дифференциальных уравнений (3) в прежних обозначениях принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_x\\ \bar{y}_x\end{pmatrix} = UAU^{-1}\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно (см. [2, с. 485]), что ненулевая матрица A второго порядка с вещественными элементами преобразованием $A \to UAU^{-1}$ может быть приведена к одной их пяти вещественных форм:

$$1)\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad 2)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\quad 3)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & a\end{pmatrix},\quad 4)\ \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix},\quad 5)\ \begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}, \tag{4}$$

где в том же порядке: 2) $a \neq 0$, 3) a любое, 4) $a \neq d$, 5) $b \neq 0$. Решения системы уравнений (3), связанные с формулами (4), будут следующими:

$$1)\quad \bar{x} = \alpha x + \bar{x}(y), \quad \bar{y} = \gamma x + \bar{y}(y), \quad \alpha^2 + \gamma^2 \neq 0; \tag{5}$$

$$2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{ax} - \frac{\gamma}{a}; \tag{6}$$

$$3.1)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = (\bar{x}(y)x + \bar{y}(y))e^{ax} - \frac{\gamma}{a} + \frac{\alpha}{a^2}; \tag{7}$$

$$3.2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y) + \alpha x, \quad \bar{y} = \frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y); \tag{8}$$

$$4.1)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{dx} - \frac{\gamma}{a}; \tag{9}$$

$$4.2)\quad \bar{x} = \bar{x}(y)e^{ax} - \frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y} = \gamma x + \bar{y}(y); \tag{10}$$

$$4.3)\quad \bar{x} = \alpha x + \bar{x}(y), \quad \bar{y} = \bar{y}(y)e^{dx} - \frac{\gamma}{a}; \tag{11}$$

$$5)\quad \begin{cases} \bar{x} = \big(\bar{x}(y)\sin bx + \bar{y}(y)\cos bx\big)e^{ax} - \dfrac{a\alpha - b\beta}{a^2 + b^2}, \\ \bar{y} = \big(\bar{x}(y)\cos bx - \bar{y}(y)\sin bx\big)e^{ax} - \dfrac{a\beta + b\alpha}{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Введём матричные обозначения, которые будут использоваться в последующих решениях:

$$\bar{\Xi} = \begin{pmatrix}\bar{\xi} & \bar{\mu}\\ \bar{\eta} & \bar{\nu}\end{pmatrix}, \quad \tilde{\Xi} = \begin{pmatrix}\tilde{\xi} & \tilde{\mu}\\ \tilde{\eta} & \tilde{\nu}\end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \mathrm{const}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

$$\Upsilon_0 = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ \eta & \xi\end{pmatrix}, \quad \Upsilon_1 = \begin{pmatrix}\xi & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}, \quad \Upsilon_{-1} = \begin{pmatrix}\xi & -\eta\\ \eta & \xi\end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix}\rho\\ \tau\end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix}\bar{\rho}\\ \bar{\tau}\end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix}\tilde{\rho}\\ \tilde{\tau}\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi^1\\ \chi^2\end{pmatrix},$$

причем матрицы $\bar{\Xi}$, $\tilde{\Xi}$, Λ, Ω невырожденные, $a_{ij} = a_{ij}(\rho,\tau)$, $b_i = b_i(\rho,\tau)$ — дифференцируемые функции, $i,j = 1,2$. Заметим, что тогда системы функциональных уравнений (1) принимают общий вид:

$$\bar{\Xi}\bar{X} + \bar{R} = \chi.$$

Основной результат этой статьи сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Общее невырожденное решение системы* (1) *функциональных уравнений может быть представлено в следующем виде*:

$$\begin{aligned} &\bar{X} = \Lambda X + A_1, && \bar{\Xi} = \Omega\Upsilon_\varepsilon\Lambda^{-1}, \\ &\bar{R} = \Omega\big[R - \Upsilon_\varepsilon\Lambda^{-1}A_1\big] + B_1, && \chi = \Omega\big[\Upsilon_\varepsilon X + R\big] + B_1, \end{aligned} \tag{13}$$

причем для первой системы из (1) *$\varepsilon = 0$, для второй — $\varepsilon = 1$, а для третьей — $\varepsilon = -1$.*

Заметим, что множество матриц Υ_{-1} образует поле, изоморфное полю комплексных чисел (см. [2, с. 196]), множество матриц Υ_0 изоморфно алгебре дуальных чисел, а множество матриц Υ_1 изоморфно множеству матриц $\begin{pmatrix} m & n \\ n & m \end{pmatrix}$, которое в свою очередь изоморфно алгебре двойных чисел. Таким образом, в равенствах (13) прослеживается тесная связь с двумерными гиперкомплексными числами.

3. Доказательство теоремы. Отметим, что метод доказательства этой теоремы разработан и апробирован в [5]. В процессе доказательства некоторые подобные вычисления будут опускаться.

Случай 1. Здесь будет использоваться матричная система записей. Решение (5) подставим в уравнения первой системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным y и η:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\chi_v, \quad \bar{\Xi}_\eta \begin{pmatrix} \alpha x + \bar{x}(y) \\ \gamma x + \bar{y}(y) \end{pmatrix} + \bar{R}_\eta = x\chi_v,$$

где $u = x\xi + \mu$, $v = x\eta + y\xi + \nu$, откуда вытекает

$$x\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\bar{\Xi}_\eta \begin{pmatrix} \alpha x + \bar{x}(y) \\ \gamma x + \bar{y}(y) \end{pmatrix} + \xi\bar{R}_\eta.$$

Дифференцируя по x, получаем алгебраическую систему уравнений для производных $\bar{x}'(y)$ и $\bar{y}'(y)$:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix} \bar{x}'(y) \\ \bar{y}'(y) \end{pmatrix} = \xi\bar{\Xi}_\eta \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Как сказано выше, матрица $\bar{\Xi}$ невырождена, поэтому система (14) имеет единственное решение, в котором зафиксируем переменные ξ, η, μ, ν, ρ, τ:

$$\bar{x}'(y) = \beta = \mathrm{const}, \quad \bar{y}'(y) = \delta = \mathrm{const}\,.$$

Интегрируя эти уравнения и возвращаясь в (5), будем иметь $\bar{X} = \Lambda X + A_1$, причём согласно первому из условий (2) матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), получаем:

$$\tilde{\Xi}X + \tilde{R} = \chi, \tag{15}$$

где $\tilde{\Xi} = \bar{\Xi}\Lambda$, $\tilde{R} = \bar{R} + \bar{\Xi}A_1$.

Далее, продифференцируем (15) по переменным ξ, η, μ, ν:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\chi_u + y\chi_v, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = x\chi_v, \quad \tilde{\Xi}_\mu X + \tilde{R}_\mu = \chi_u, \quad \tilde{\Xi}_\nu X + \tilde{R}_\nu = \chi_v.$$

Второе и четвёртое соотношения, а также первое, третье и четвёртое, связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\tilde{\Xi}_\mu X + x\tilde{R}_\mu + y\tilde{\Xi}_\nu X + y\tilde{R}_\nu, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = x\tilde{\Xi}_\nu X + x\tilde{R}_\nu.$$

Далее, сравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями переменных x и y, будем иметь

$$\tilde{\xi}_\nu = \tilde{\mu}_\nu = \tilde{\xi}_\mu = \tilde{\mu}_\mu = \tilde{\eta}_\nu = \tilde{\nu}_\nu = \tilde{\eta}_\mu = \tilde{\nu}_\mu = \tilde{\mu}_\eta = \tilde{\nu}_\eta = \tilde{\rho}_\xi = \tilde{\rho}_\eta = \tilde{\tau}_\xi = \tilde{\tau}_\eta = 0.$$

С учётом последнего, в (15) дифференцируем по μ и ν:

$$\tilde{\rho}_\mu = \chi^1_u, \quad \tilde{\rho}_\nu = \chi^1_v, \quad \tilde{\tau}_\mu = \chi^2_u, \quad \tilde{\tau}_\nu = \chi^2_v.$$

Интегрируя, получаем четвёртое равенство из (13) при $\varepsilon = 0$. Затем найденное подставляя в (15), получаем остальные равенства из (13) при $\varepsilon = 0$.

Решение (5) подставим теперь в уравнения второй системы из (1), где $u = x\xi + \mu$, $v = y\eta + \nu$. Затем, дифференцируя по x и y, получаем $\chi^i_{uv} = 0$, следовательно,

$$\chi^i = P^i(x\xi + \mu, \rho, \tau) + Q^i(y\eta + \nu, \rho, \tau), \quad i = 1, 2.$$

Далее возвращаясь к системе (1), с учётом (5) будем иметь

$$P^i(x\xi + \mu, \rho, \tau) = p^i(\rho, \tau)(x\xi + \mu), \quad \alpha\bar{\xi} + \gamma\bar{\mu} = \xi p^1(\rho, \tau), \quad \alpha\bar{\eta} + \gamma\bar{\nu} = \xi p^2(\rho, \tau).$$

Тогда система (1) принимает следующий вид:

$$\bar{\Xi}\begin{pmatrix}\bar{x}(y)\\ \bar{y}(y)\end{pmatrix} + \bar{R} = \begin{pmatrix}Q^1\\ Q^2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}p^1\\ p^2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Затем, дифференцируя по y и ξ, учитывая первое неравенство из (2), с точностью до переобозначения получаем $\bar{y}'(y) = a\bar{x}'(y)$.

С учетом найденного продифференцируем систему (16) по переменным y и η:

$$\bar{x}'(y)(\bar{\xi} + a\bar{\mu}) = \eta Q^1_v, \qquad \bar{x}(y)(\bar{\xi}_\eta + a\bar{\mu}_\eta) + \bar{\rho}_\eta = yQ^1_v,$$
$$\bar{x}'(y)(\bar{\eta} + a\bar{\nu}) = \eta Q^2_v, \qquad \bar{x}(y)(\bar{\eta}_\eta + a\bar{\nu}_\eta) + \bar{\tau}_\eta = yQ^2_v,$$

откуда получаем следуют дифференциальные уравнения

$$y\bar{x}'(y)(\bar{\xi} + a\bar{\mu}) = \eta\bar{x}(y)(\bar{\xi}_\eta + a\bar{\mu}_\eta) + \eta\bar{\rho}_\eta, \quad y\bar{x}'(y)(\bar{\eta} + a\bar{\nu}) = \eta\bar{x}(y)(\bar{\eta}_\eta + a\bar{\nu}_\eta) + \eta\bar{\tau}_\eta,$$

которые имеют решения

$$\bar{x}(y) = \beta y + a_1, \quad \bar{y}(y) = \delta y + a_2.$$

Тогда получаем $\bar{X} = \Lambda X + A_1$, причём согласно первому из условий (2) матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), имеем тождество (15), в котором $u = x\xi + \mu$, $v = y\eta + \nu$.

Равенство (15), в котором $u = x\xi + \mu$, $v = y\eta + \nu$, продифференцируем по ξ, η, μ, ν:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\chi_u, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = y\chi_v, \quad \tilde{\Xi}_\mu X + \tilde{R}_\mu = \chi_u, \quad \tilde{\Xi}_\nu X + \tilde{R}_\nu = \chi_v.$$

Первое и третье соотношения, а также второе и четвёртое связаны следующим образом:

$$\tilde{\Xi}_\xi X + \tilde{R}_\xi = x\tilde{\Xi}_\mu X + x\tilde{R}_\mu, \quad \tilde{\Xi}_\eta X + \tilde{R}_\eta = y\tilde{\Xi}_\nu X + y\tilde{R}_\nu.$$

Далее, сравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями переменных x и y, будем иметь

$$\tilde{\xi}_\nu = \tilde{\mu}_\nu = \tilde{\xi}_\mu = \tilde{\mu}_\mu = \tilde{\eta}_\nu = \tilde{\nu}_\nu = \tilde{\eta}_\mu = \tilde{\nu}_\mu = \tilde{\xi}_\eta = \tilde{\rho}_\eta = \tilde{\rho}_\xi = \tilde{\mu}_\xi = \tilde{\eta}_\eta = \tilde{\tau}_\eta = \tilde{\nu}_\xi = \tilde{\tau}_\xi = 0,$$
$$\tilde{\rho}_\nu = \tilde{\mu}_\eta, \quad \tilde{\xi}_\xi = \tilde{\rho}_\mu, \quad \tilde{\nu}_\eta = \tilde{\tau}_\nu, \quad \tilde{\tau}_\mu = \tilde{\eta}_\xi.$$

С учётом последнего ещё получаем

$$\tilde{\rho}_\mu = \chi^1_u, \quad \tilde{\rho}_\nu = \chi^1_v, \quad \tilde{\tau}_\mu = \chi^2_u, \quad \tilde{\tau}_\nu = \chi^2_v.$$

Интегрируя найденное, затем подставляя в (15), окончательно получаем (13) при $\varepsilon = 1$. Наконец, решение (5) подставим в уравнения третьей системы из (1) (напомним, что $u = x\xi - y\eta + \mu$, $v = x\eta + y\xi + \nu$), которые затем продифференцируем по x, ξ, μ, ν:

$$\bar{\Xi}_\eta\begin{pmatrix}\alpha x + \bar{x}(y)\\ \gamma x + \bar{y}(y)\end{pmatrix} + \bar{R}_\eta = -y\chi_u + x\chi_v, \quad \bar{\Xi}_\xi\begin{pmatrix}\alpha x + \bar{x}(y)\\ \gamma x + \bar{y}(y)\end{pmatrix} + \bar{R}_\xi = x\chi_u + y\chi_v,$$
$$\bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\alpha x + \bar{x}(y)\\ \gamma x + \bar{y}(y)\end{pmatrix} + \bar{R}_\mu = \chi_u, \bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\alpha x + \bar{x}(y)\\ \gamma x + \bar{y}(y)\end{pmatrix} + \bar{R}_\nu = \chi_v,$$

откуда следуют равенства

$$\bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = \bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\alpha\\ \gamma\end{pmatrix} = \bar{\Xi}_\mu\begin{pmatrix}\bar{x}'(y)\\ \bar{y}'(y)\end{pmatrix} = \bar{\Xi}_\nu\begin{pmatrix}\bar{x}'(y)\\ \bar{y}'(y)\end{pmatrix} = 0.$$

Интегрируя найденное по μ и ν, после чего разделяя переменные, получаем

$$\bar{x}'(y) = \beta = \text{const}, \quad \bar{y}'(y) = \delta = \text{const};$$

следовательно, $\bar{X} = \Lambda X + A_1$, где матрица Λ невырождена. Подставляя найденное в систему (1), имеем равенство (15), в котором $u = x\xi - y\eta + \mu$, $v = x\xi + y\eta + \nu$. Далее, дифференцируя (15) по переменным ξ, η, μ, ν, после чего рассуждая как выше, получаем

$$\tilde{\xi}_\nu = \tilde{\mu}_\nu = \tilde{\xi}_\mu = \tilde{\mu}_\mu = \tilde{\eta}_\nu = \tilde{\nu}_\nu = \tilde{\eta}_\mu = \tilde{\nu}_\mu = \tilde{\rho}_\xi = \tilde{\rho}_\eta = \tilde{\tau}_\xi = \tilde{\tau}_\eta = 0,$$
$$\tilde{\rho}_\mu = -\tilde{\mu}_\eta, \quad \tilde{\rho}_\nu = \tilde{\xi}_\eta, \quad \tilde{\rho}_\mu = \tilde{\xi}_\xi, \quad \tilde{\rho}_\nu = \tilde{\mu}_\xi, \quad \tilde{\tau}_\mu = -\tilde{\nu}_\eta, \quad \tilde{\tau}_\nu = \tilde{\eta}_\eta,$$
$$\tilde{\tau}_\mu = \tilde{\eta}_\xi, \quad \tilde{\tau}_\nu = \tilde{\nu}_\xi, \quad \tilde{\rho}_\mu = \chi^1_u, \quad \tilde{\rho}_\nu = \chi^1_v, \quad \tilde{\tau}_\mu = \chi^2_u, \quad \tilde{\tau}_\nu = \chi^2_v.$$

Проинтегрируя полученное и подставив в (15), получим (13) при $\varepsilon = -1$.

Случай 2. Теперь подставим решение (6) в уравнения первой системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным y и η:

$$(\bar{x}'(y)\bar{\xi}+\bar{y}'(y)\bar{\mu})e^{ax}=\xi\chi_v^1,\qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta=x\chi_v^1,$$
$$(\bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax}=\xi\chi_v^2,\qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\eta+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta=x\chi_v^2,$$

откуда следуют равенства

$$x(\bar{x}'(y)\bar{\xi}+\bar{y}'(y)\bar{\mu})e^{ax}=\xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta\right),$$
$$x(\bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax}=\xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\eta+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta\right),$$

и далее однородная алгебраическая система уравнений относительно производных $\bar{x}'(y)$ и $\bar{y}'(y)$:

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi}+\bar{y}'(y)\bar{\mu}=0,\quad \bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{y}'(y)\bar{\nu}=0,$$

которая имеет только нулевое решение $\bar{x}'(y)=0$, $\bar{y}'(y)=0$, поскольку, согласно второму из условий (2) матрица $\bar{\Xi}$ невырождена. Тогда $\bar{x}(y)=\mathrm{const}$, $\bar{y}(y)=\mathrm{const}$, что несовместимо с первым из условий (2).

Теперь подставим решение (6) в уравнения второй системы из (1), которые затем продифференцируем по переменным x и ξ:

$$a(\bar{x}(y)\bar{\xi}+\bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax}=\xi\chi_u^1,\qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi+\bar{\rho}_\xi=x\chi_u^1,$$
$$a(\bar{x}(y)\bar{\eta}+\bar{y}(y)\bar{\nu})e^{ax}=\xi\chi_u^2,\qquad \left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi+\bar{\tau}_\xi=x\chi_u^2,$$

откуда следуют равенства

$$ax(\bar{x}(y)\bar{\xi}+\bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax}=\xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi+\bar{\rho}_\xi\right),$$
$$ax(\bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{y}'(y)\bar{\nu})e^{ax}=\xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi+\bar{\tau}_\xi\right),$$

и далее однородная алгебраическая система уравнений относительно $\bar{x}(y)$ и $\bar{y}(y)$:

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}+\bar{y}(y)\bar{\mu}=0,\quad \bar{x}(y)\bar{\eta}+\bar{y}(y)\bar{\nu}=0,$$

которая имеет только нулевое решение $\bar{x}(y)=\bar{y}(y)=0$, поскольку матрица $\bar{\Xi}$ невырождена. Тогда для функций $\bar{x}$ и $\bar{y}$ первое из условий в (2) не выполняется.

Наконец, подставим решение (6) в уравнения третьей системы в (1), которые затем продифференцируем по переменным x, ξ, μ, ν:

$$a(\bar{x}(y)\bar{\xi}+\bar{y}(y)\bar{\mu})e^{ax}=\xi\chi_u^1+\eta\chi_v^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\xi+\bar{\rho}_\xi=x\chi_u^1+y\chi_v^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\mu+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\mu+\bar{\rho}_\mu=\chi_u^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\nu+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\mu}_\nu+\bar{\rho}_\nu=\chi_v^1,$$
$$a(\bar{x}(y)\bar{\eta}+\bar{y}(y)\bar{\nu})e^{ax}=\xi\chi_u^2+\eta\chi_v^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\xi+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\xi+\bar{\tau}_\xi=x\chi_u^2+y\chi_v^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\mu+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\mu+\bar{\tau}_\mu=\chi_u^2,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\eta}_\nu+\left(\bar{y}(y)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}\right)\bar{\nu}_\nu+\bar{\tau}_\nu=\chi_v^2.$$

Подставляя третье и четвёртое равенства во второе, а седьмое и восьмое в шестое, после чего сравнивая коэффициенты перед xe^{ax} и ye^{ax}, получаем:

$$\bar{x}(y)\bar{\xi}_\mu+\bar{y}(y)\bar{\mu}_\mu=0,\quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\mu+\bar{y}(y)\bar{\nu}_\mu=0,\quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\nu+\bar{y}(y)\bar{\mu}_\nu=0,\quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\nu+\bar{y}(y)\bar{\nu}_\nu=0;$$

следовательно функции χ_u^1, χ_v^1, χ_u^2, χ_v^2 зависят только от ξ, η, μ, ν, ρ, τ. Тогда из первого и пятого уравнений вытекает:
$$\bar{x}(y)\bar{\xi}+\bar{y}(y)\bar{\mu}=0, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta}+\bar{y}(y)\bar{\nu}=0;$$
следовательно, $\bar{x}(y)=\bar{y}(y)=0$, что приводит к противоречию с первым из неравенств в (2).

Случай 3.1. Подставим решение (7) в первое уравнение первой системы в (1) и продифференцируем его по переменным y и η:
$$\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi}+(\bar{x}'(y)x+\bar{y}'(y))\bar{\mu}\big)e^{ax}=\xi\chi_v^1,$$
$$\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta+\left((\bar{x}(y)x+\bar{y}(y))e^{ax}-\frac{\gamma}{a}+\frac{\alpha}{a^2}\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta=x\chi_v^1,$$
откуда следует соотношение
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi}+(\bar{x}'(y)x+\bar{y}'(y))\bar{\mu}\big)e^{ax}=$$
$$=\xi\left(\left(\bar{x}(y)e^{ax}-\frac{\alpha}{a}\right)\bar{\xi}_\eta+\left((\bar{x}(y)x+\bar{y}(y))\,e^{ax}-\frac{\gamma}{a}+\frac{\alpha}{a^2}\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta\right).$$
Сравнивая коэффициенты при x^2e^{ax}, xe^{ax}, e^{ax}, получаем
$$\bar{x}'(y)=0, \quad \bar{x}(y)=\beta, \quad \bar{y}'(y)=\delta=\frac{\beta\xi\bar{\mu}_\eta}{\bar{\mu}}=\mathrm{const}, \quad \bar{y}(y)=\delta y+b, \quad \beta\bar{\xi}_\eta+(\delta y+b)\bar{\mu}_\eta=0;$$
следовательно, $\beta\bar{\mu}_\eta=0$ и $\delta=0$. Тогда получаем решение
$$\bar{x}=\beta e^{ax}-\frac{\alpha}{a}, \quad \bar{y}=(\beta x+b)e^{ax}-\frac{\gamma}{a}+\frac{\alpha}{a^2},$$
которое не удовлетворяет первому неравенству из (2), что недопустимо.

Подобным образом рассуждая относительно второй и третий систем из (1), получаем отрицательный результат.

Случай 3.2. Подставим решение (8) в уравнения первой системы из (1) и продифференцируем по переменным y и η:
$$\bar{x}'(y)\bar{\xi}+(\bar{x}'(y)x+\bar{y}'(y))\bar{\mu}=\xi\chi_v^1, \quad (\alpha x+\bar{x}(y))\bar{\xi}_\eta+\left(\frac{\alpha x^2}{2}+\gamma x+\bar{x}(y)x+\bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta=x\chi_v^1,$$
$$\bar{x}'(y)\bar{\eta}+(\bar{x}'(y)x+\bar{y}'(y))\bar{\nu}=\xi\chi_v^1, \quad (\alpha x+\bar{x}(y))\bar{\eta}_\eta+\left(\frac{\alpha x^2}{2}+\gamma x+\bar{x}(y)x+\bar{y}(y)\right)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta=x\chi_v^1.$$
откуда следуют соотношения
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi}+\bar{x}'(y)x\bar{\mu}+\bar{y}'(y)\bar{\mu}\big)=\xi\left((\alpha x+\bar{x}(y))\bar{\xi}_\eta+\left(\frac{\alpha x^2}{2}+\gamma x+\bar{x}(y)x+\bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta\right),$$
$$x\big(\bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{x}'(y)x\bar{\nu}+\bar{y}'(y)\bar{\nu}\big)=\xi\left((\alpha x+\bar{x}(y))\bar{\eta}_\eta+\left(\frac{\alpha x^2}{2}+\gamma x+\bar{x}(y)x+\bar{y}(y)\right)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta\right).$$
Сравнивая коэффициенты при x^2 и x, получаем:
$$\bar{x}'(y)=\frac{\alpha\xi\bar{\mu}_\eta}{2\bar{\mu}}=\alpha p, \quad \bar{x}'(y)\bar{\xi}+\bar{y}'(y)\bar{\mu}=\alpha\xi\bar{\xi}_\eta+\xi\bar{x}(y)\bar{\mu}_\eta+\gamma\bar{\mu}_\eta, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta+\bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta=0,$$
$$\bar{x}'(y)=\frac{\alpha\xi\bar{\nu}_\eta}{2\bar{\nu}}=\alpha p, \quad \bar{x}'(y)\bar{\eta}+\bar{y}'(y)\bar{\nu}=\alpha\xi\bar{\eta}_\eta+\xi\bar{x}(y)\bar{\nu}_\eta+\gamma\bar{\nu}_\eta, \quad \bar{x}(y)\bar{\eta}_\eta+\bar{y}(y)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta=0,$$
со следующим решением:
$$\bar{x}(y)=\alpha py+b, \quad \bar{y}(y)=\alpha^2p^2y^2+\delta y+c,$$
которым дополним выражения (8):
$$\bar{x}=\alpha x+\alpha py+b, \quad \bar{y}=\frac{\alpha x^2}{2}+\alpha pxy+\alpha^2p^2y^2+\gamma x+\delta y+bx+c.$$
Следовательно,
$$(\alpha py+b)\bar{\xi}_\eta+(\alpha^2p^2y^2+\delta y+c)\bar{\mu}_\eta+\bar{\rho}_\eta=0, \quad (\alpha py+b)\bar{\eta}_\eta+(\alpha^2p^2y^2+\delta y+c)\bar{\nu}_\eta+\bar{\tau}_\eta=0,$$

то есть $\alpha p = 0$. Согласно первому неравенству в (2) будем иметь $\alpha \neq 0$, $p = 0$. Значит,

$$\bar{x} = \alpha x + b, \quad \bar{y} = \frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \delta y + bx + c, \quad \delta = \frac{\alpha\xi\bar{\xi}_\eta}{\bar{\mu}} = \frac{\alpha\xi\bar{\eta}_\eta}{\bar{\nu}} \neq 0, \quad \bar{\mu}_\eta = \bar{\nu}_\eta = 0. \tag{17}$$

Подставляя найденное в выше полученные выражения, содержащие χ_v^1, будем иметь

$$\chi_v^1 = \alpha\bar{\xi}_\eta = \alpha\bar{\eta}_\eta;$$

следовательно, $\bar{\xi}_\eta = \bar{\eta}_\eta$. Учитывая выражения для δ, получаем $\bar{\mu} = \bar{\nu}$, поэтому во втором соотношении из (2) имеем $\Box = 0$, что недопустимо.

Подставим теперь решение (8) в первое уравнение второй системы из (1) и продифференцируем их по переменным x и ξ:

$$\alpha\bar{\xi} + (\alpha x + \gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu} = \xi\chi_u^1, \quad (\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\xi + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = x\chi_u^1,$$

откуда следуют соотношения

$$x\big(\alpha\bar{\xi} + (\alpha x + \gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}\big) = \xi\left((\alpha x + \bar{x}(y))\bar{\xi}_\xi + \left(\frac{\alpha x^2}{2} + \gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y)\right)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi\right).$$

Сравнивая коэффициенты при x^2 и x, получаем равенства

$$2\alpha\bar{\mu} = \alpha\xi\bar{\mu}_\xi, \quad \alpha\bar{\xi} + (\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu} = \alpha\xi\bar{\xi}_\xi + \xi(\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}_\xi, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\xi + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\xi + \bar{\rho}_\xi = 0.$$

Пусть $\alpha \neq 0$; тогда $\bar{\mu}_\xi = 2\bar{\mu}/\xi \neq 0$. Затем, дифференцируя второе и третье равенства по y, будем иметь $\bar{x}'(y) = \bar{y}'(y) = 0$, что противоречит первому неравенству из (2). Поэтому $\alpha = 0$ и тогда, согласно (2),

$$\bar{x}'(y) \neq 0, \quad \bar{\mu}_\xi = \frac{\bar{\mu}}{\xi} \neq 0.$$

Подставим теперь решение (8) в первое уравнение второй системы из (1) и продифференцируем их по переменным y и η:

$$\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu} = \eta\chi_v^1, \quad \bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + (\gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta = y\chi_v^1,$$

поэтому

$$y\big(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + (\bar{x}'(y)x + \bar{y}'(y))\bar{\mu}\big) = \eta\big(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + (\gamma x + \bar{x}(y)x + \bar{y}(y))\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta\big).$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$y\bar{x}'(y)\bar{\mu} = \eta(\gamma + \bar{x}(y))\bar{\mu}_\eta, \quad y(\bar{x}'(y)\bar{\xi} + \bar{y}'(y)\bar{\mu}) = \eta(\bar{x}(y)\bar{\xi}_\eta + \bar{y}(y)\bar{\mu}_\eta + \bar{\rho}_\eta).$$

Решая первое уравнение, получаем

$$\bar{x}(y) = -\gamma + y^c, \quad c = \frac{\eta\bar{\mu}_\eta}{\bar{\mu}} \neq 0.$$

Подставляя найденное в первое равенство, содержащее χ_u^1, получаем $\chi_u^1 = y^c\bar{\mu}/\xi$. Согласно построениям должно быть $\chi_u^1 = \varphi(u, v, \rho, \tau)$. Приравнивая правые части, дифференцируя по y, ν, x и сравнивая результаты, получаем $\bar{\mu} = 0$, что недопустимо.

Подставляя решение (8) в уравнения третьей системы из (1), после чего дифференцируя по всем переменным и рассуждая как выше, приходим к противоречию.

Случаи 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3 и 5 дают отрицательный результат. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданова Р. А., Михайличенко Г. Г.* Последовательное по рангу $(n+1, 2)$ вложение двуметрических феноменологически симметричных геометрий двух множеств// Изв. вузов. Мат. — 2020. — *6*. — С. 9–14.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.
3. *Кыров В. А.* О вложении двуметрических феноменологически симметричных геометрий// Вестн. Томск. гос. ун-та. Мат. мех. — 2018. — *56*. — С. 5–16.
4. *Кыров В. А.* Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств, II// Изв. вузов. Мат. — 2020. — *7*. — С. 39–54.

5. *Кыров В. А., Михайличенко Г. Г.* Невырожденные канонические решения одной системы функциональных уравнений// Изв. вузов. Мат. — 2021. — *8*. — С. 46–55.
6. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические физические структуры ранга $(n+1,2)$// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 3. — С. 132–143.
7. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. — Барнаул: Барнаул. гос. пед. ун-т, 2003.
8. *Михайличенко Г. Г., Кыров В. А.* Гиперкомплексные числа в некоторых геометриях двух множеств, I// Изв. вузов. Мат.. — 2017. — *7*. — С. 19–29.
9. *Kyrov V. A.* Commutative hypercomplex numbers and the geometry of two sets// Ж. СФУ. Сер. Мат. физ. — 2020. — *13*, № 3. — С. 373–382.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Кыров Владимир Александрович
Горно-Алтайский государственный университет
E-mail: kyrovVA@yandex.ru