ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 229 (2023). С. 22–32
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-229-22-32

УДК 519.6

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2023 г. С. Г. БУЛАНОВ

Аннотация. Разработан подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на условиях устойчивости в мультипликативной форме. При дополнительных ограничениях получены разновидности условий устойчивости на основе поведения правой части системы.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерный анализ устойчивости, численное моделирование устойчивости.

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE STABILITY OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© 2023 S. G. BULANOV

Abstract. In this paper, we develop an approach to the analysis of the Lyapunov stability for systems of ordinary differential equations based on stability conditions in the multiplicative form. Under additional restrictions, various versions of stability conditions are obtained based on the behavior of the right-hand side of the system.

Keywords and phrases: Lyapunov stability, computer analysis of stability, numerical modeling of stability.

AMS Subject Classification: 34D20

1. Введение. Исследование устойчивости по Ляпунову составляет актуальное направление в качественной теории дифференциальных уравнений. Хорошо известна возможность приложений этой теории в механике, физике, теории автоматического регулирования, теории сложных систем, теории управления, в радиоэлектронике и в других областях теоретических и прикладных исследований. Для технических приложений представляется важным обеспечить возможность компьютерного моделирования и компьютерного анализа устойчивости в режиме оперативного контроля за протеканием моделируемого физического процесса (см. [4]). В частности, такая задача возникает при моделировании энергетических систем большой мощности (см. [5]). Использование компьютерной техники для данного анализа целесообразно для ряда технологических, физических, механических, производственных и других процессов (см. [1, 6]).

В статье представлен подход, разрабатываемый с целью автоматизировать анализ устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В основе подхода лежат условия устойчивости, полученные первоначально на основе преобразования разностных схем численного интегрирования. Далее конструируются разновидности условий в аддитивной и интегральной форме, приводится схема анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций. При выполнении дополнительных ограничений с помощью условий в интегральной форме строятся условия устойчивости на основе поведения правой части системы и ее производных.

2. Условия устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$V' = U(t,V), \quad V_0 = V(t_0), \quad t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

которая имеет нулевое решение. Предполагается, что существует такое $\delta > 0$, что в области

$$R = \Big\{ t_0 \leqslant t < \infty;\ \forall \tilde{V}(t), V(t) : \big\|\tilde{V}_0 - V_0\big\| \leqslant \delta \Big\}$$

выполнены все условия существования и единственности решения системы (1). Вектор-функция $U(t,V)$ определена, непрерывна в R и удовлетворяет условию Липшица:

$$\big\|U(t,\tilde{V}) - U(t,V)\big\| \leqslant L\big\|\tilde{V}(t) - V(t)\big\| \quad \forall \tilde{V}(t), V(t) \in R, \quad L = \mathrm{const}\,.$$

Требуется исследовать на устойчивость в смысле Ляпунова (см. [12]) решение системы (1).

2.1. Условия устойчивости в мультипликативной форме. Величина возмущения решения задачи (1) методом Эйлера в форме с остаточным членом на произвольном промежутке $[t_0, t]$ определяется из соотношения

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \tilde{v}_{ki} - v_{ki} + h\frac{u_k(t_i,\tilde{V}_i) - u_k(t_i,V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}}(\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki},$$

или

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \big(1 + hD_i^{(k)}\big)(\tilde{v}_{ki} - v_{ki}) + w_{ki}, \quad k \in \overline{1,n}, \tag{2}$$

где

$$D_i^{(k)} = \frac{u_k(t_i,\tilde{V}_i) - u_k(t_i,V_i)}{\tilde{v}_{ki} - v_{ki}}, \quad t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Рекуррентное преобразование (2) влечет выражение для возмущения на текущем шаге через возмущение начальных данных:

$$\tilde{v}_{k(i+1)} - v_{k(i+1)} = \prod_{\ell=0}^{i}\big(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\big)(\tilde{v}_{k0} - v_{k0}) + R_i^{(k)}, \quad k \in \overline{1,n},$$

$$R_i^{(k)} = \sum_{r=0}^{i-1}\prod_{\ell=0}^{r}\big(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\big)w_{k(i-r-1)} + w_{ki}.$$

В рассматриваемых условиях

$$\lim_{i\to\infty} R_i^{(k)} = 0 \quad \forall t \in [t_0,\infty),\ \forall k \in \overline{1,n}$$

(см. [7, 8]). Отсюда следует

$$\tilde{v}_k(t) - v_k(t) = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\big(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\big)\big(\tilde{v}_k(t_0) - v_k(t_0)\big) \quad \forall t \in [t_0,\infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{3}$$

Из соотношения (3) следует, что величина возмущения равна бесконечному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Следовательно, для устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно существование такого Δ_1, $0 < \Delta_1 \leqslant \delta$, что для любой функции $\tilde{V}(t)$, удовлетворяющей условию $\tilde{V}(t_0) = \tilde{V}_0$, где $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \Delta_1$, выполняется неравенство

$$\left|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\big(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\big)\right| \leqslant c_1, \quad c_1 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty),\ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{4}$$

Для асимптотической устойчивости решения системы (1) необходимо и достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_2 \leqslant \Delta_1$, что условие $\|\tilde{V}_0 - V_0\| \leqslant \Delta_2$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\left|\lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\bigl(1+hD_{i-\ell}^{(k)}\bigr)\right| = 0 \quad \forall k\in\overline{1,n}. \tag{5}$$

Практическая значимость условий (4), (5) заключается в возможности выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела позволяет выполнить программную реализацию условий (4), (5) и осуществить компьютерный анализ устойчивости систем нелинейных ОДУ. Предложенный подход можно использовать для анализа устойчивости систем линейных ОДУ с переменной и постоянной матрицей коэффициентов, систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой (см. [2]). При компьютерном анализе устойчивости систем линейных ОДУ на основе предложенного подхода не требуется находить приближенное решение системы, достаточно на вход программы подать матрицу из правой части системы.

Соотношение (3) эквивалентно

$$\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)} = \lim_{i\to\infty}\prod_{\ell=0}^{i}\bigl(1+hD_{i-\ell}^{(k)}\bigr) \quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n}.$$

Следовательно, имеют место следующие разновидности условий устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1):

$$\left|\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)}\right| \leqslant c_1, \quad c_1=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty),\ \forall k\in\overline{1,n},$$
$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\tilde{v}_k(t)-v_k(t)}{\tilde{v}_k(t_0)-v_k(t_0)}\right| = 0 \quad \forall k\in\overline{1,n}.$$

Для анализа устойчивости на основе полученных условий целесообразно вычисление возмущенного и невозмущенного решения с более высокой точностью, чем на основе разностных методов (см. [7]). С этой целью используется метод варьируемого кусочно-полиномиального приближения решения задачи Коши для ОДУ (см. [3]). При этом в качестве приближающего полинома используется полином Лагранжа, преобразованный описанным ниже способом (см. [13]).

В формуле полинома Лагранжа

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\left[\prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t-t_r)\Big/\prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t_j-t_r)\right]$$

выполним следующие преобразования. Пусть $(t-t_0)/h = x$, $t_j = t_0 + jh$; тогда

$$\prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t-t_r) = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(x-r)h, \quad \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(t_j-t_r) = \prod_{\substack{r=0\\ r\neq j}}^{n_0}(j-r)h.$$

В результате

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\,\frac{P_{n_0 j}(x)}{G_{n_0 j}(j)},$$

где

$$P_{n_0 j}(x) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(x-x_r), \quad G_{n_0 j}(j) = \prod_{r=0}^{n_0-1}(j-x_r), \quad x_r = \begin{cases} r, & r<j;\\ r+1, & r\geqslant j.\end{cases}$$

Переменную $P_{n_0 j}(x)$ можно представить в виде полинома

$$P_{n_0 j}(x) = d_{0j} + d_{1j}x + d_{2j}x^2 + \cdots + d_{n_0 j}x^{n_0};$$

аналогично, $G_{n_0 j}(j)$ преобразуется к виду

$$G_{n_0 j}(j) = d_{0j} + d_{1j} j + d_{2j} j^2 + \cdots + d_{n_0 j} j^{n_0} \quad \text{или} \quad G_{n_0 j}(j) = (-1)^{n_0 - j}\, j!\,(n_0 - j)!.$$

Таким образом,

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{j=0}^{n_0} f(t_j)\, \frac{d_{0j} + d_{1j} x + d_{2j} x^2 + \cdots + d_{n_0 j} x^{n_0}}{d_{0j} + d_{1j} j + d_{2j} j^2 + \cdots + d_{n_0 j} j^{n_0}}. \tag{6}$$

Из соотношения (6) следует, что полином Лагранжа всегда можно представить в виде

$$\Psi_{n_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_\ell x^\ell, \quad \text{где} \quad a_\ell = \sum_{j=0}^{n_0} \frac{f(t_j) d_{\ell j}}{G_{n_0 j}(j)}, \quad x = \frac{t - t_0}{h}.$$

Приближение решения и правой части (1) на $[a,b] = \bigcup\limits_{i=0}^{R-1} [a_i, b_i]$ сводится к последовательному приближению на подынтервалах

$$[a_i, b_i] = \bigcup_{j=0}^{P-1} [t_j, t_{j+1}], \quad P = 2^{k_0}, \quad k_0 = \{0, 1, \ldots\}. \tag{7}$$

При каждом $i \geqslant 1$ полагаем $\tilde v_k(a_i) = \tilde v_{k-1}(b_{i-1})$, $\tilde v_k(a_0) = \tilde v_0$ и на каждом подынтервале из (7) строим кусочно полиномиальное приближение функции правой части (1). Количество подынтервалов $P = 2^{k_0}$ и степень интерполяционного полинома n_0 выбираются так, чтобы было минимальным значение

$$\delta_{kij}(t) = \Big|\psi_{kjn_0}(t) - u_k\big(t, z_{1j}(t), \ldots, z_{nj}(t)\big)\Big|, \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = \overline{0, P-1}, \quad k \in \overline{1, n},$$

где $\psi_{kjn_0}(t) \approx u_k(t, \tilde v_1, \ldots, \tilde v_n)$,

$$z_{kj}(t) = \tilde v_{kj} + \int\limits_{t_j}^{t} \psi_{kjn_0}(t)\,dt$$

— полином с числовыми коэффициентами, приближающий искомое решение. При этом значения в узлах интерполяции на каждом подынтервале априори вычисляются по методу Эйлера с излагаемыми ниже особенностями.

При каждом j подынтервал $[t_j, t_{j+1}]$ из (7) разобьем на n_0 равноотстоящих узлов с шагом h_0:

$$t_{jp} = t_j + p h_0, \quad p = \overline{0, n_0}, \quad h_0 = \frac{t_{j+1} - t_j}{n_0}. \tag{8}$$

В каждом из узлов (8) вычислим значения $u_k(t_{jp}, \bar v_{1jp}, \ldots, \bar v_{njp})$, где $\bar v_{kjp}$ определяется по методу Эйлера:

$$\bar v_{kjp} = \bar v_{kj(p-1)} + h_0 \cdot u_k\big(t_{j(p-1)}, \bar v_{1j(p-1)}, \ldots, \bar v_{nj(p-1)}\big), \quad p = \overline{0, n_0}, \quad k \in \overline{1, n}. \tag{9}$$

При этом в качестве $\bar v_{j0}$ берется значение на границе справа из окончательного приближения на предыдущем подынтервале: $\bar v_{kj0} = \bar v_{k(j-1)n0}$, для начального подынтервала из (7) $\bar v_{k00} = \tilde v_{k0}$. При этом значения в (9) можно получить и на основе разностных методов высокого порядка. Значения $u_k(t_{jp}, \bar v_{1jp}, \ldots, \bar v_{njp})$ принимаются за значения в узлах интерполяции:

$$\varphi_{kjp} = u_k\big(t_{jp}, \bar v_{1jp}, \ldots, \bar v_{njp}\big), \quad p = \overline{0, n_0}, \quad k \in \overline{1, n}. \tag{10}$$

Аналогично, всюду ниже через $\bar v$ будем обозначать вычисляемое приближение точного решения $\tilde v$. По условиям интерполяции (10) строим полином Лагранжа степени n_0, который приводится к виду

$$\psi_{kjn_0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n_0} a_{kj\ell} \left(\frac{t - t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell}, \quad a_{kj\ell} = \sum_{p=0}^{n_0} \frac{\varphi_{kjp} d_{\ell p}}{G_{n_0 p}}. \tag{11}$$

Полином (11) приближает производную решения задачи (1). Приближение самого решения строится как первообразная от (11) с постоянной, принимающей значение $\bar{v}_{kj0}$. Семейство первообразных от полинома $\psi_{kjn_0}(t)$ на j-м подынтервале имеет вид

$$\int \psi_{kjn_0}(x)dx = C + h\sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{kj\ell}}{\ell+1} x^{\ell+1}.$$

Фиксация значения нижнего предела в правой части и замена константы C на $\bar{v}_{kj0}$ определяет функцию

$$z_{kj}(t) = \bar{v}_{kj0} + \int\limits_{t_{j0}}^{t} \psi_{kjn_0}(t)dt$$

или

$$z_{kj}(t) = \bar{v}_{kj0} + h_0 \sum_{\ell=0}^{n_0} \frac{a_{kj\ell}}{\ell+1}\left(\frac{t-t_{j0}}{h_0}\right)^{\ell+1}. \tag{12}$$

Полином (12) принимается за приближение решения $\tilde{v}_k(t)$ на j-м подынтервале: $\tilde{v}_k(t) \approx z_{kj}(t)$, $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Вычисление значений полинома (12) производится по схеме Горнера при $x = (t - t_{j0})/h_0$:

$$z_{kj}(x) = \bar{v}_{kj0} + h\left(\ldots\left(\left(\frac{a_{kjn_0}}{n_0+1}x + \frac{a_{kj(n_0-1)}}{n_0}\right)x + \frac{a_{kj(n_0-2)}}{n_0-1}\right)x + \ldots + a_{kj0}\right)x.$$

Значения $\bar{v}_{kjp} = z_{kj}(t_{jp})$, $p = \overline{1, n_0}$, из (12) в процессе компьютерной реализации оказываются более точными приближениями решения, чем получаемые непосредственно с помощью разностного метода. Эти значения целесообразно принять за новые уточненные значения в интерполяционных узлах для последующего интерполирования. Данный рекуррентный процесс позволяет существенно уточнить полученные приближения.

Аналогичное приближение строится на следующем подынтервале и т. д., до исчерпания интервала $[a_i, b_i]$. Полученное приближение по построению является непрерывным и непрерывно дифференцируемым на всем отрезке интегрирования. Также одновременно с приближением решения имеет место непрерывное на всем рассматриваемом интервале приближение производной от решения.

2.2. Условия устойчивости в аддитивной и интегральной форме. Далее приводится вывод условий устойчивости нулевого решения системы (1), при этом на ненулевое решение и его производную не ставится знак волны.

Для получения условий устойчивости системы (1) в аддитивной форме выполним следующее преобразование соотношения (3)

$$v_k(t) = \exp\left(\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i}\ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)\right)v_k(t_0) \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad D_{i-\ell}^{(k)} = \frac{u_k(t_{i-\ell}, V_{i-\ell})}{v_{k(i-\ell)}}.$$

С учетом того, что $hD_{i-\ell}^{(k)}$ — бесконечно малая, и соотношения

$$\frac{\ln\left(1 + hD_{i-\ell}^{(k)}\right)}{hD_{i-\ell}^{(k)}} \to 1 \quad \forall \ell \leqslant i, \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

получим аддитивную форму условий устойчивости нулевого решения системы (1):

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}, \quad \lim_{t\to\infty}\lim_{i\to\infty}\sum_{\ell=0}^{i} hD_{i-\ell}^{(k)} = -\infty.$$

Выражение в левой части аддитивных условий — предел интегральной суммы на $[t_0, t]$ элементами которой являются дискретные функции

$$D^{(k)}(t) = \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}, \quad k \in \overline{1,n}.$$

Следовательно, выражения аддитивных условий включают определенные интегралы, и условия можно сформулировать в интегральной форме:

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}, \tag{13}$$

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{14}$$

Числитель переменной дроби $D^{(k)}(t)$ является производной возмущения решения и делится на само возмущение, поэтому существует первообразная

$$\int\limits_{t_0}^{t} D^{(k)}(t) dt = \ln \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right|.$$

Соответственно условия (13) (14) примут следующий вид:

$$\ln \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty} \ln \left| \frac{v_k(t)}{v_k(t_0)} \right| = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

2.3. Схема анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций.

Лемма 1. *Рассмотрим систему* (1), *где* $t_0 > 0$ *и* $v_k(t) \neq 0$ *при всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и всех* $k \in \overline{1,n}$. *Если для любого* $\Delta_1 > 0$ *найдется такое* V_0, *что* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_1$, *а также существуют* $k \in \overline{1,n}$ *и* $\rho > 0$, $\rho = \mathrm{const}$, *при которых* $u_k/v_k \geqslant \rho/t$ *при всех* $t \in [t_0, \infty)$, *то нулевое решение системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{t} dt = \rho \ln \frac{t}{t_0},$$

поэтому для произвольного $N > 0$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt > N,$$

если $t > t_0 e^{N/\rho}$, что противоречит (13). □

Лемма 2. *В условиях леммы* 1, *если существуют постоянные* $\alpha > -1$ *и* $\rho > 0$, *при которых* $u_k/v_k \geqslant \rho t^{\alpha}$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, *то нулевое решение системы* (1) *неустойчиво.*

Доказательство. В сколь угодно малой окрестности нулевого начального вектора имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} t^{\alpha} dt = \frac{\rho}{\alpha+1}(t^{\alpha+1} - t_0^{\alpha+1}) \to \infty \quad \text{при } t \to \infty$$

вопреки (13). □

Лемма 3. *Если в условиях леммы* 1 *существует такое* $\Delta_1 > 0$, *что для всех решений* $V(t)$ *с начальным вектором* V_0, *удовлетворяющих условию* $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_1$, *при некоторых постоянных* $\beta < -1$, ρ *и* $t_0 > 0$ *неравенства* $u_k/v_k \leqslant \rho t^\beta$ *выполняются для всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots, n$, *то нулевое решение системы* (1) *устойчиво.*

Доказательство. В данных условиях $\beta + 1 < 0$ и $t^{\beta+1} \leqslant t_0^{\beta+1}$, поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t} t^\beta dt = \frac{1}{\beta+1}(t^{\beta+1} - t_0^{\beta+1}) \leqslant \frac{t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|}.$$

Для всех решений $V(t)$, для которых $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, верны неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant \rho \int\limits_{t_0}^{t} t^\beta dt \leqslant \frac{\rho t_0^{\beta+1}}{|\beta+1|},$$

и (13) выполнено при $c_2 = \rho t_0^{\beta+1}/|\beta+1| = \mathrm{const}$. □

Из лемм 1–3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $t_0 > 0$ *и для произвольного* $t > t_0$ *при каждом* $k \in \overline{1,n}$ *функции* $f_k(t)$, $g_k(t)$ *интегрируемы на* $[t_0, t]$. *Если в рассматриваемых условиях существует такое* $\Delta_1 > 0$, *что для всех решений* $V(t)$, *удовлетворяющих условию* $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, *выполняются неравенства*

$$\frac{u_k}{v_k} \leqslant f_k(t), \quad \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t) dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

то нулевое решение системы (1) *устойчиво. Если для любого* $\Delta_1 > 0$ *существует такое* $V(t)$, *удовлетворяющее условию* $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_1$, *что* $u_k/v_k \geqslant g_k(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$ *при некотором* $k \in \overline{1,n}$, *причем*

$$\int\limits_{t_0}^{t} g_k(t) dt \to \infty \quad \textit{при } t \to \infty,$$

то нулевое решение системы (1) *неустойчиво.*

Доказательство. Если $u_k/v_k \leqslant f_k(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ и всех $k = 1, 2, \ldots, n$, то при тех же t и k выполнено неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t) dt \leqslant c_2, \quad c_2 = \mathrm{const}.$$

С учетом условия и соотношения (13) это неравенство означает устойчивость нулевого решения. Если $u_k/v_k \geqslant g_k(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \geqslant \int\limits_{t_0}^{t} g_k(t) dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} dt \to \infty \quad \text{при } t \to \infty,$$

что противоречит (13). □

Следствие 1. *В тех же условиях нулевое решение системы* (1) *устойчиво, если* $u_k/v_k \leqslant t^\beta$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и всех* $k = 1, 2, \ldots, n$ *при некотором* $\beta < -1$, *и неустойчиво, если хотя бы при одном* k *неравенство* $u_k/v_k \geqslant t^\beta$ *выполнено для всех* $t \in [t_0, \infty)$, *где* $\beta \geqslant -1$.

Теорема 2. *Если выполнено условие устойчивости теоремы* 1 *и существует такое* Δ_2, $0 < \Delta_2 \leqslant \Delta_1$, *что для всех решений* $V(t)$, *удовлетворяющих условию* $0 < \|V(t_0)\| \leqslant \Delta_2$, *неравенство* $u_k/v_k \leqslant f_k(t)$ *верно для всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и при этом*

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} f_k(t)dt = -\infty \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

то нулевое решение системы (1) *асимптотически устойчиво. В частности, это справедливо, если при тех же* k *и* t *для некоторых постоянных* $\beta \geqslant -1$ *и* $\rho > 0$ *выполняется неравенство* $u_k/v_k \leqslant -\rho t^{\beta}$.

Доказательство. В условиях теоремы для всех $N > 0$ выполнены неравенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} f_k(t)dt \leqslant -N \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Переходя к пределу в неравенстве при $N \to \infty$, получим

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt = -\infty,$$

что с учетом условий и соотношения (14) означает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). В случае $\beta \geqslant -1$, $\rho > 0$ имеем

$$-\rho \int\limits_{t_0}^{t} t^{\beta}dt \to -\infty \quad \text{при } t \to \infty,$$

и в данных условиях неравенство $u_k/v_k \leqslant -\rho t^{\beta}$ влечет асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1). □

Представленную схему анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций можно использовать для априорного и апостериорного анализа устойчивости, если известно аналитическое решение в окрестности начального вектора (см. [8]).

2.4. Условия устойчивости по характеру поведения правой части системы. Ниже дополнительно предполагается существование и непрерывность в R второй производной решения системы (1) и выполнение для $U'(t,V)$ условия Липшица. Кроме того, предполагается что существует такое $\Delta_3 \leqslant \delta$, что для каждого $V(t)$, удовлетворяющего условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_3$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt \leqslant c_3 \int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)}dt, \quad c_3 = \text{const}, \quad c_3 > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n} \tag{15}$$

(см. [9]), или следующее неравенство, из которого следует (15):

$$\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)} \leqslant c_4 \frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)}, \quad c_4 = \text{const}, \quad c_4 > 0, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{16}$$

При выполнении данных ограничений и неравенства (15) или (16) для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_4, $0 < \Delta_4 \leqslant \delta$, что для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_4$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)}dt \leqslant c_5, \quad c_5 = \text{const}, \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad \forall k \in \overline{1,n}. \tag{17}$$

Для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_5 \leqslant \Delta_4$, что неравенство $\|V_0\| \leqslant \Delta_5$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)}dt=-\infty. \tag{18}$$

Условия устойчивости (17), (18) можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Для устойчивости нулевого решения системы (1) достаточно существование такого Δ_4, $0 < \Delta_4 \leqslant \delta$, что для любого $V(t)$, удовлетворяющего условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_4$, выполняется соотношение

$$\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_6, \quad c_6=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad u_k(t_0,V_0)\neq 0, \quad \forall k\in\overline{1,n}. \tag{19}$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы решение было устойчиво и существовало такое $\Delta_5 \leqslant \Delta_4$, что условие $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_5$ влечет

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_k(t,V)}{u_k(t_0,V_0)}\right|=0, \quad u_k(t_0)\neq 0, \quad \forall k\in\overline{1,n}. \tag{20}$$

Если для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_6$, дополнительно потребовать выполнение неравенства

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k'(t,V)}{u_k(t,V)}dt-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt\right| \leqslant c_0, \quad c_0=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad \forall k\in\overline{1,n} \tag{21}$$

то условия (17) – (20) будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости.

Неравенство (21) преобразуется к виду

$$e^{-c_0} \leqslant \left|\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}\right| \Big/ \left|\frac{u_k(t_0,V_0)}{v_k(t_0)}\right| \leqslant e^{c_0}, \quad c_0>0, \quad c_0=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad \forall k\in\overline{1,n}. \tag{22}$$

Выполнение соотношения (22) при $u_k(t,V)\to 0$ возможно только если $v_k(t)\to 0$, иначе не выполнится левое неравенство в (22), а если $v_k(t)\to 0$, то необходимо $u_k(t,V)\to 0$, иначе нарушится правое неравенство.

Предложенный подход допускает конструировать условия устойчивости для производных правой части системы (1) произвольного порядка $\ell \geqslant 2$, если эти производные существуют (см. [10]). В этом случае условия устойчивости и асимптотической устойчивости примут вид

$$\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}dt \leqslant c_7, \quad c_7=\mathrm{const}, \quad \forall t\in[t_0,\infty), \quad \forall k\in\overline{1,n},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_4$, и

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}dt=-\infty \quad \forall k\in\overline{1,n},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $\|V_0\| \leqslant \Delta_5$.

Полученные условия будут необходимыми и достаточными условиями устойчивости и асимптотической устойчивости при ограничении

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k^{(\ell)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}dt-\int\limits_{t_0}^{t}\frac{u_k(t,V)}{v_k(t)}dt\right| \leqslant c_0, \quad c_0=\mathrm{const},$$

для всех $V(t)$, удовлетворяющих условию $0 < \|V_0\| \leqslant \Delta_6$. При этом дополнительно потребуется выполнение для $U^{(\ell-1)}(t,V)$ условия Липшица.

При переходе к первообразным условия устойчивости и асимптотической устойчивости примут следующий вид:

$$\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| \leqslant c_8, \quad c_8 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in [t_0,\infty), \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0) \neq 0, \quad \forall k \in \overline{1,n},$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_k^{(\ell-1)}(t,V)}{u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0)}\right| = 0, \quad u_k^{(\ell-1)}(t_0,V_0) \neq 0 \quad \forall k \in \overline{1,n}.$$

Для компьютерной реализации условий устойчивости достаточно с высокой точностью находить приближенное решение системы, правой части системы вместе с производными требуемого порядка. Повышение точности разностного приближения решения и его производных, входящих в конструкцию условий, особенно необходимо при анализе устойчивости жестких систем ОДУ. В этом случае можно воспользоваться методами, представленными в [11] или методом варьируемого кусочно полиномиального приближения решения (см. [3]). Требуемые приближения находятся на основе кусочно-полиномиальной аппроксимации интерполяционными полиномами Лагранжа, преобразованными к форме полинома с числовыми коэффициентами. Компьютерная аппроксимация подынтегральных функций повышает точность вычисления интеграла. В результате повышается точность вычисления выражений в конструкции условий, как следствие повышается достоверность анализа устойчивости. Далее через заданный интервал времени вычисляется значение из левой части условия устойчивости. По характеру поведения этих значений делается вывод о характере устойчивости исследуемой системы. Ограниченное изменение соответствует устойчивости, стремление к нулю свидетельствует об асимптотической устойчивости, неограниченный рост является признаком неустойчивости решения системы ОДУ.

Для анализа устойчивости систем нелинейных ОДУ наряду с данным методом целесообразно применять методы описанные в [14, 15]. Эти методы, основанные на построении функций Ляпунова, предполагают аналитическое применение, в отдельных разновидностях допускают компьютерную реализацию.

3. Заключение. Представлен подход к анализу устойчивости по Ляпунову систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Основой служат условия устойчивости, полученные на основе рекуррентных преобразований разностных схем численного интегрирования. Условия получены в мультипликативной, аддитивной и интегральной формах в виде необходимых и достаточных условий. Условия в интегральной форме допускают использование схемы анализа устойчивости на основе сравнения подынтегральных функций. Кроме этого в границах дополнительных ограничений представлены необходимые и достаточные условия устойчивости на основе поведения правой части системы ОДУ. Представлены ограничения, при которых получены условия устойчивости, выполнено их математическое обоснование.

Полученные условия устойчивости отличаются от известных построением на основе разностных схем. Для случая систем линейных ОДУ подход принципиально не использует преобразований правой части системы (см. [2]). В случае постоянной матрицы коэффициентов не требуется вычисления корней характеристического многочлена, при переменной матрице коэффициентов не нужно нахождение характеристических показателей. При выводе условий устойчивости для нелинейных систем не используются методы качественной теории дифференциальных уравнений. Предложенный подход допускает линеаризацию нелинейной системы, которая связана непосредственно с исследуемым решением. В этом случае подход опирается на предположение, что устойчивость решения системы общего вида эквивалентна устойчивости линеаризованной системы в достаточно малой окрестности возмущения начальных данных (см. [13]).

Помимо построения, отличие достигается в программируемости условий устойчивости для систем ОДУ в общем случае. Компьютерный анализ, исходя из необходимых и достаточных условий, должен позволить однозначно определить характер устойчивости, неустойчивости либо асимптотической устойчивости систем ОДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоглазов В. В., Бирюк Н. Д., Глухов И. Л.* Численный анализ устойчивости параметрического контура первым методом Ляпунова// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2012. — № 1. — С. 13–20.
2. *Буланов С. Г.* Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем// Мехатрон. Автомат. Управл. — 2019. — *20*, № 9. — С. 542–549.
3. *Джанунц Г. А., Ромм Я. Е.* Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2017. — *57*, № 10. — С. 1641–1660.
4. *Куликов Л. И.* Синтез автоматического управления посадкой БЛА самолетного типа и анализ устойчивости желаемых режимов движения// Фундам. прикл. мат. — 2018. — № 2. — С. 209–220.
5. *Орлов А. И., Волков С. В.* Анализ устойчивости синхронных генераторов, оснащенных устройством автоматического регулирования возбуждения// Вестн. Иркут. гос. техн. ун-та. — 2017. — *21*, № 1. — С. 120–128.
6. *Поляк Б. Т., Кузнецов О. Н., Чумаченко В. В.* Исследование устойчивости энергосистемы с однополярным магнитным тормозом// Автомат. телемех. — 2016. — № 9. — С. 58–69.
7. *Ромм Я. Е., Буланов С. Г.* Численное моделирование устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоем. технол. — 2021. — № 7. — С. 42–60.
8. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости на основе рекуррентных преобразований разностных решений обыкновенных дифференциальных уравнений// Киберн. сист. анал. — 2015. — *51*, № 3. — С. 107–124.
9. *Ромм Я. Е.* Компьютерно-ориентированный анализ устойчивости по знакам компонентов решения дифференциальной системы и их двух производных// Совр. наукоем. технол. — 2021. — № 9. — С. 100–124.
10. *Ромм Я. Е.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости по Ляпунову// Совр. наукоем. технол. — 2022. — № 2. — С. 92–109.
11. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999.
12. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964.
13. *Bulanov S. G.* Computer analysis of differential systems stability based on linearization and matrix multiplicative criteria// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — *1902.* — 012101.
14. *Hafstein S.* A constructive converse Lyapunov theorem on asymptotic stability for nonlinear autonomous ordinary differential equations// Dynam. Syst. — 2005. — *20.* — P. 281–299.
15. *Zhaolu T., Chuanqing G.* A numerical algorithm for Lyapunov equations// J. Appl. Math. Comput. — 2008. — *202*, № 1. — P. 44–53.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Буланов Сергей Георгиевич
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО
«Ростовский государственный экономический университет (РИНХ)»
E-mail: bulanovtgpi@mail.ru