



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 227 (2023). С. 51–60
DOI: 10.36535/0233-6723-2023-227-51-60

УДК 51-72, 517.97

ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ДВУМЕРНОГО УПРУТОГО ТЕЛА С ДВУМЯ КОНТАКТИРУЮЩИМИ ТОНКИМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2023 г. Н. П. ЛАЗАРЕВ, В. А. КОВТУНЕНКО

Аннотация. Предлагается новая нелинейная математическая модель, описывающая равновесие двумерного упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями. Задача формулируется в виде минимизации функционала энергии над невыпуклым множеством возможных перемещений, определенным в подходящем пространстве Соболева. Доказано существование вариационного решения задачи. Получены условия оптимальности и дифференциальные соотношения, характеризующие свойства решения в области и на включении, выполняющиеся при условии достаточной гладкости решения.

Ключевые слова: трещина, жесткое включение, условие непроникания, вариационная задача.

PROBLEM OF THE EQUILIBRIUM OF A TWO-DIMENSIONAL ELASTIC BODY WITH TWO CONTACTING THIN RIGID INCLUSIONS

© 2023 N. P. LAZAREV, V. A. KOVTUNENKO

ABSTRACT. A new nonlinear mathematical model is proposed that describes the equilibrium of a two-dimensional elastic body with two thin rigid inclusions. The problem is formulated as a minimizing problem for the energy functional over a nonconvex set of possible displacements defined in a suitable Sobolev space. The existence of a variational solution to the problem is proved. Optimality conditions and differential relations are obtained that characterize the properties of the solution in the domain and on the inclusion; these conditions are satisfied for sufficiently smooth solutions.

Keywords and phrases: crack, rigid inclusion, nonpenetration condition, variational problem.

AMS Subject Classification: 35A15, 74B99

Введение. Моделирование неоднородных тел с включениями представляет собой важное направление исследований в теории композитов. Наличие включений в нагруженных телах может обуславливать значительные концентрации напряжений ввиду разных физических свойств, в частности, из-за разности коэффициентов упругости. Это обстоятельство может приводить к отслоению включений и тем самым возникновению трещин на границе разных материалов. Трещины на стыке разных материалов в деталях инженерных конструкций могут возникать также по причине особенностей эксплуатационных режимов (например, из-за значительного перепада температур).

Разделы 1-2 выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2022-881). Раздел 3 выполнен Н. П. Лазаревым при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

Математические модели упругих тел с трещинами, учитывающие нелинейные эффекты механического взаимодействия противоположных берегов трещины активно изучаются с 1990-х гг. (см. [18]). Условия непроникания в виде неравенств на кривых или поверхностях трещин не допускают рассмотрение таких перемещений, которые соответствуют с физической точки зрения невозможному явлению — взаимному прониканию берегов трещины (см. [6, 11, 17, 22, 24]). Примеры решения некоторых линейных моделей с перемещениями вблизи трещины, которые противоречат физическому смыслу твердых тел, приведены, например, в [2]. Задачи для моделей упругих тел с трещинами вдоль части границ исследованы в ряде работ (см. [3, 13, 19, 27] и др.). Для таких моделей зависимость от изменения формы объектов исследовалась в [23, 28, 31, 32], зависимость от физических параметров изучена в [15, 16, 21, 26], численные методы решений представлены в [7, 29, 30].

Широкое применение условия непроникания нашли для класса задач о составных телах и композитах, содержащих жесткие включения. Так, обратная задача для пластины при наличии тонкого жесткого включения с шарнирным соединением и трещиной, проходящей вдоль включения, исследована в [25]. В том случае, когда в исходном состоянии тело содержит сломанное в одной точке тонкое включение, а именно, когда трещина пересекает включение, вариационная и дифференциальная задачи исследованы в [4, 19]. В [5] исследованы задачи для двумерных упругих тел содержащих тонкие упругие включения согласно моделей Бернулли—Эйлера и Тимошенко, исследованы предельные переходы по параметрам жесткости, а также проведена систематизация математических моделей в задачах равновесия упругих тел с тонкими включениями при наличии отслоения. Отслоение с двух сторон тонкого упругого включения исследовано для двумерной нелинейной модели в [20]. Асимптотическое разложение перемещений в окрестности вершины жесткого включения в случаях как с отслоением, т.е. при наличии трещины, так и без отслоения получено в [9]. В [10] на основе асимптотических представлений в виде степенного ряда исследована нелинейная задача для пороупругого тела с трещиной гидроразрыва, получены интегральные формулы, выражающие коэффициенты интенсивности напряжений. В [12] анализируется влияние взаимного расположения двух встроенных в упругую матрицу жестких линейных включений. Именно, с помощью метода граничных элементов получены численные решения для трех вариантов взаимного расположения прямолинейных включений: параллельная, коллинеарная и радиальная конфигурация. Более того, в этой работе проведено сравнение с экспериментальными данными в соответствии с методами фотоупругости. Метод исследования взаимодействия системы трещин и включений на основе интегральных уравнений предложен в [8].

Рассматриваемые модели упругих тел, пластин и балок сформулированы в рамках теории инфинитезимальных перемещений. Условие непроникания Синьорини, широко применяемое для описания контакта упругого тела, также является линеаризованным соотношением, полученным при малых деформациях. С другой стороны, жесткое перемещение включения может вызвать проникание в основание или другое жесткое включение даже при бесконечно малом перемещении. Например, в точке соприкосновения или разлома. Данное противоречие обуславливает необходимость для композитов и составных тел ставить не только условие контакта Синьорини на внешней границе и границе с упругой матрицей, но и геометрические условия, которые будут предотвращать взаимное проникание между жесткими включениями.

Новизна настоящей работы обусловлена тем, что в рамках задач с односторонними ограничениями предложена математическая модель, описывающая равновесие тела с двумя жесткими включениями, которые могут контактировать вблизи точки разрыва. Именно, в исходном состоянии включения прикасаются друг друга в одной точке разрыва, а в результате деформации могут приходить в контакт разными точками. Вариационная задача формулируется в виде минимизации над невыпуклым множеством. Как следствие, не удастся вывести условия оптимальности в общем виде. Доказано существование решения с помощью трех вспомогательных задач, для которых получены необходимые и достаточные условия оптимальности решения и установлены дифференциальные соотношения, характеризующие свойства гладкого решения.

1. Постановка задачи равновесия. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей Γ , которая состоит из двух кривых $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\text{meas}(\Gamma_0) \geq 0$. Предположим, что прямолинейная кривая $\gamma = (a, 1) \times \{0\}$, $a < 0$, расположена внутри области Ω ; разобьем ее на части следующим

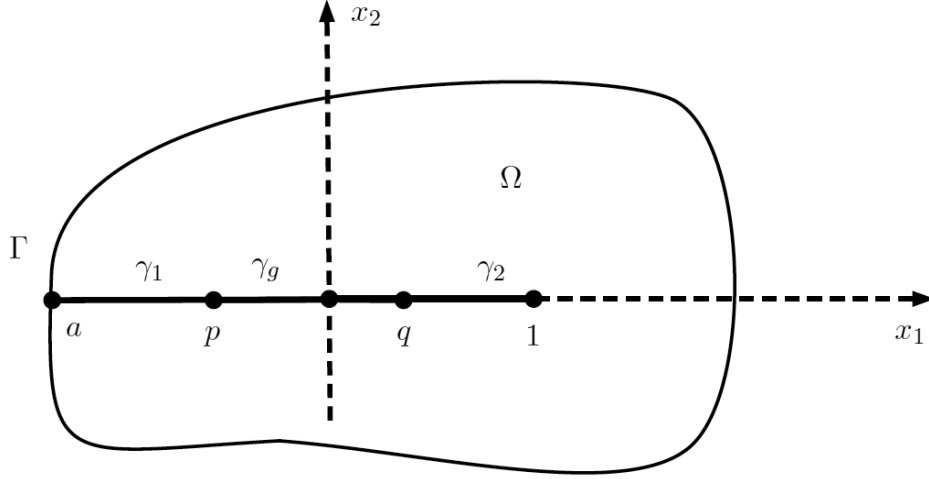


Рис. 1. Геометрия упругого тела с двумя жесткими включениями

образом: $\gamma_1 = (a, 0) \times \{0\}$, $\gamma_2 = [0, 1] \times \{0\}$, $(a, 0) \in \Gamma$, $\gamma_g = (p, q) \times \{0\}$, где $a < p < 0 < q < 1$ — фиксированные числа (см. рис. 1). Введем область с разрезом $\Omega_g = \Omega \setminus \bar{\gamma}_g$. Предположим, что область Ω можно разбить продолжением γ на две области Ω_1 , Ω_2 с липщицевыми границами $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$.

Будем считать, что тонкие жесткие включения задаются с помощью кривых γ_1 , γ_2 . Включения в исходном состоянии соприкасаются друг с другом в точке разрыва с координатами $(0, 0)$. Упругая часть тела в исходном состоянии занимает область $\Omega \setminus \bar{\gamma}$. Кроме того, полагаем, что вблизи точки разрыва (слома) оба включения отслаиваются с обеих сторон от упругой матрицы, образуя тем самым трещины отслоения. Геометрия трещин описывается одной и той же кривой γ_g . В рамках настоящей модели это означает, что перемещения на кривой γ_g , вообще говоря, не совпадают (не клеятся). Условия, задаваемые на γ_g опишем далее. Через $W = (w_1, w_2)$ обозначим вектор перемещений. Предположим, что тело, занимающее область Ω , закреплено на части внешней границы Γ_0 , и на части $\gamma_1 \setminus \gamma_g$ тонкого неподвижного включения γ_1 , т.е.

$$W = (0, 0) \quad \text{на } \Gamma_0 \cup (\gamma_1 \setminus \gamma_g). \quad (1)$$

Данное условие позволяет применять неравенство Корна. Введем следующее пространство Соболева в соответствии с условием закрепления:

$$H^{1,0}(\Omega_g) = \left\{ v \in H^1(\Omega_g) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \cup (\gamma_1 \setminus \gamma_g) \right\}, \quad H(\Omega_g) = H^{1,0}(\Omega_g)^2.$$

Определим компоненты описывающие деформацию и напряжение упругой части неоднородного тела

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(W) &= \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{12}(W) = \varepsilon_{21}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{22}(W) = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}, \\ \sigma_{ij}(W) &= c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

где c_{ijkl} — заданный тензор упругости, предполагаемый симметричным и положительно определенным:

$$\begin{aligned} c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} = \text{const}, \\ c_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} &\geq c_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi : \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const}, \quad c_0 > 0. \end{aligned}$$

В соответствии с предположением о возможности разбиения области Ω_g на липщицевы подобласти, ввиду неравенства Корна (см. [18]) выполняется равномерная оценка снизу

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) d\Omega_g \geq c \|W\|_{H(\Omega_g)}^2 \quad \forall W \in H(\Omega_g), \quad (2)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от W . Функционал энергии для тела, нагруженного внешними объемными силами $F = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega)^2$, имеет вид

$$\Pi(W) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) - \int_{\Omega_g} FW$$

(см. [18]), где $FW = f_i w_i$, и по повторяющимся индексам производится суммирование.

Заметим, что неравенство (2) обеспечивает эквивалентность стандартной нормы в $H(\Omega_g)$ и полунормы, определяемой левой частью (2); кроме того, оно доставляет коэрцитивность $\Pi(W)$.

Тонкое жесткое включение, описываемое кривой γ_1 , считаем неподвижным и недеформируемым. Для того, чтобы задать подвижное (как единое целое) тонкое жесткое включение, соответствующее γ_2 , следуя подходу [13] потребуем специальную структуру перемещений на γ_2 так, чтобы $W|_{\gamma_2} = \rho$, $\rho \in R(\gamma_2)$, где

$$R(\gamma_2) = \left\{ \rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x_1, x_2) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); b, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, (x_1, x_2) \in \gamma_2 \right\},$$

— пространство инфинитезимальных жестких перемещений (см. [13]). Это означает, что точки, лежащие на кривой γ_2 , имеют перемещения

$$W(x_1, 0)|_{\gamma_2} = b(0, -x_1) + (c_1, c_2),$$

поскольку на γ_2 имеет место равенство $x_2 = 0$. При этом слагаемое (c_1, c_2) задает параллельный перенос всех точек γ_2 ; в то же время слагаемое $b(0, -x_1)$ описывает линейаризованный поворот относительно начала координат и зависит в данном случае только от первой координаты x_1 , $(x_1, 0) \in \gamma_2$.

Для того, чтобы описать отслоение трещины, заметим сначала, что следы функций, определенных в пространстве $H^{1,0}(\Omega_g)$, отличаются на берегах кривой γ_g . Именно, если обозначим следы функции v на γ_g со стороны полуплоскости $x_2 > 0$ через v^+ , аналогично, следы той же функции со стороны полуплоскости $x_2 < 0$ через v^- , то, вообще говоря, выполняется соотношение $v^+ \neq v^-$.

Условие непроникания для трещин отслоения будем описывать с помощью условий

$$w_2^+(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_1, \quad w_2^+(x_1, x_2) \geq c_2 - bx_1 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_2, \quad (3)$$

$$w_2^-(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_1, \quad w_2^-(x_1, x_2) \leq c_2 - bx_1 \quad \text{на } \gamma_g \cap \gamma_2, \quad (4)$$

где числа b, c_2 таковы, что

$$b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2) = W(x_1, x_2) \quad \text{на } \gamma_2 \setminus \gamma_g. \quad (5)$$

Для включения γ_2 соотношения (3)–(5) означают, что ее перемещения по оси Ox_2 в части $\gamma_g \cap \gamma_2$ (где есть трещина), определяются перемещениями части $\gamma_2 \setminus \gamma_g$, где включение сцеплено с упругой матрицей.

Перейдем к описанию условий, обеспечивающих взаимное непроникание точек включения. Они соответствуют трем возможным случаям конфигураций в состоянии равновесия. Первый случай, когда имеет место неравенство $c_1 \geq 0$, т.е. когда точки включения γ_2 не перемещаются левее точки разрыва. Во втором случае предположим, что крайняя левая точка включения γ_2 может перемещаться выше и левее точки разрыва

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_2 + bc_1 \geq 0. \quad (6)$$

Условие (6) получается ввиду того, что точка с координатой $(-c_1, 0) \in \gamma_2$ в исходном состоянии переходит в точку с координатами $(0, c_2 + bc_1)$, которая должна лежать не ниже (относительно выбранной системы координат) крайней правой точки $(0, 0)$ неподвижного тонкого жесткого включения γ_1 . Третье условие соответствует тому, что крайняя левая точка включения γ_2 в результате деформации оказывается левее и ниже точки разрыва $(0, 0)$:

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \leq 0, \quad c_2 + bc_1 \leq 0. \quad (7)$$

В соответствии с тремя случаями возможных перемещений точек жесткого включения γ_2 , определим следующие множества допустимых перемещений:

$$K_1 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \geq 0 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 + bc_1 \geq 0 \right\},$$

$$K_3 = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4), } W|_{\gamma_2} = \rho, \rho \in R(\gamma_2), c_1 \leq 0, c_2 \leq 0, c_2 + bc_1 \leq 0 \right\}.$$

Множество всех допустимых перемещений представляет собой объединение $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Отметим, что множества K_2, K_3 не являются выпуклыми в силу наличия слагаемого bc_1 . Задачу о равновесии упругого тела с двумя тонкими жесткими включениями сформулируем в виде минимизации функционала энергии:

$$\text{найти такое } U \in K_1 \cup K_2 \cup K_3, \text{ что } \Pi(U) = \inf_{W \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} \Pi(W). \quad (8)$$

Наряду с основной задачей (8) рассмотрим следующие три вспомогательные задачи:

$$\text{найти такое } U_l \in K_l, \text{ что } \Pi(U_l) = \inf_{W \in K_l} \Pi(W), \quad l = 1, 2, 3. \quad (9)$$

2. Существование вариационного решения. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Вариационная задача минимизации (8) имеет решение; оно может быть единственным.*

Доказательство. Для доказательства разрешимости задачи (8) сначала установим, что каждая из трех задач (9) имеет решение. Рассмотрим сначала задачу

$$\text{найти такое } U_1 \in K_1, \text{ что } \Pi(U_1) = \inf_{W \in K_1} \Pi(W). \quad (10)$$

Очевидно, что множество K_1 выпукло и замкнуто в рефлексивном пространстве $H(\Omega_g)$. Как следствие, K_1 — слабо замкнутое множество (см. [1]). Как известно, квадратичный функционал Π является слабо полунепрерывным снизу и коэрцитивным на $H(\Omega_g)$ (см. [18]). Указанные свойства множества K_1 и функционала Π гарантируют существование единственного решения задачи $U_1 \in K_1$.

Ввиду третьего неравенства в (6), содержащего произведение bc_1 , множество K_2 не является выпуклым, поэтому доказательство существования решения задачи

$$\text{найти такое } U_2 \in K_2, \text{ что } \Pi(U_2) = \inf_{W \in K_2} \Pi(W), \quad (11)$$

проводится несколько иначе. Для начала докажем, что множество K_2 является слабо замкнутым. Пусть произвольная последовательность $\{W_n\} \subset K_2$ слабо сходится к W в пространстве $H(\Omega_g)$. В силу теорем вложения отсюда следует, что найдется подпоследовательность $\{W_n\}$ (с прежним обозначением), сходящаяся почти всюду на $\Gamma \cup \gamma$ к W . Докажем, что предельная функция W также имеет структуру жесткого перемещения на γ_2 , т.е. существуют такие числа c_1, c_2, b , для которых выполняется

$$W(x_1, x_2)|_{\gamma_2} = \rho(x_1, x_2) = (c_1 + bx_2, c_2 - bx_1), \quad \rho(x_1, x_2) \in R(\gamma_2).$$

В силу включения $W_n \in K_2, n = 1, 2, \dots$, имеем следующие равенства:

$$W_n(x_1, x_2) = (c_{1n} + b_n x_2, c_{2n} - b_n x_1) \quad \text{на } \gamma_2.$$

Поскольку последовательность $\{W_n\}$ сходится почти всюду на γ_2 , отсюда следует, что найдутся такие вещественные числа c_1, c_2, b , что $c_{1n} \rightarrow c_1, c_{2n} \rightarrow c_2, b_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, на γ_2 имеет место равенство $W|_{\gamma_2} = \rho = (c_1 + bx_2, c_2 - bx_1), \rho(x) \in R(\gamma_2)$.

Покажем далее, что для предельной функции выполняются условия непроникания включений (6). Для элементов последовательности $\{W_n\} \subset K_2$ имеют место неравенства

$$c_{1n} \leq 0, \quad c_{2n} \geq 0, \quad c_{2n} + b_n c_{1n} \geq 0, \quad (12)$$

где $W_n = (c_{1n} + b_n x_2, c_{2n} - b_n x_1)$ на γ_2 . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (12), с учетом того, что $c_{1n} \rightarrow c_1, c_{2n} \rightarrow c_2, b_n \rightarrow b$, находим

$$c_1 \leq 0, \quad c_2 \geq 0, \quad c_2 + bc_1 \geq 0.$$

Выполнение условий непроникания (3), (4) для предельной функции W можно проверить аналогично, с учетом сходимости почти всюду $W_n \rightarrow W$ на γ . Итак, множество K_2 слабо замкнуто

в $H(\Omega_g)$. Вспоминая свойства коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала энергии Π , получаем существование решения $U_2 \in K_2$ задачи (11).

Очевидно, что аналогично можно доказать, что множество K_3 также слабо замкнуто в $H(\Omega_g)$. Значит, третья задача (9), соответствующая $l = 3$, также разрешима. Наконец, решение U задачи (8) находится как функция, доставляющая минимум по трем оптимальным значениям, т.е.

$$\Pi(U) = \min\{\Pi(U_1), \Pi(U_2), \Pi(U_3)\}, \quad (13)$$

где U_l , $l = 1, 2, 3$, являются решениями соответствующих задач (9). Эта функция не единственна, например $\Pi(U_n) = \Pi(U_m)$ возможно при $U_n \neq U_m$, $n \neq m$. Теорема доказана. $\square$

3. Условия оптимальности решения. Далее получим соотношения, характеризующие свойства решения рассматриваемой задачи в области и на включении при условии дополнительной регулярности решения. Есть три возможных случая в зависимости от того, какому из множеств K_l , $l = 1, 2, 3$, принадлежит решение U задачи (8). Начнем с самого простого случая, а именно, предположим, что решение принадлежит множеству K_1 . Поскольку множество K_1 представляет собой выпуклый конус, соответствующая задача (9) эквивалентна вариационному неравенству

$$U_1 \in K_1, \quad \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_1) \varepsilon_{ij}(W - U_1) \geq \int_{\Omega_g} F(W - U_1) \quad \forall W \in K_1. \quad (14)$$

Подставляя в (14) пробные функции вида $W = U_1 + \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2$, получаем

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_1) \varepsilon_{ij}(\phi) \geq \int_{\Omega_g} F\phi \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2.$$

Это означает, что имеют место уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула Грина, которая справедлива для достаточно гладких функций V и $\bar{V} \in H(\Omega_g)$ в подобласти $O \subset \Omega_g$ (см. [18]):

$$\int_O \sigma_{ij}(V) \varepsilon_{ij}(\bar{V}) = - \int_O \sigma_{ij,j}(V) \bar{v}_i + \int_{\partial O} (\sigma_\nu(V) \bar{V} \nu + \sigma_\tau(V) \bar{V}_\tau), \quad (16)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂O ,

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(V) &= \sigma_{ij}(V) \nu_i \nu_j, \quad \sigma_\tau(V) = (\sigma_\tau^1(V), \sigma_\tau^2(V)) = (\sigma_{1j}(V) \nu_j, \sigma_{2j}(V) \nu_j) - \sigma_\nu(V) \nu, \\ \bar{V} \nu &= \bar{v}_i \nu_i, \quad \bar{V}_\tau = (\bar{V}_\tau^1, \bar{V}_\tau^2), \quad \bar{v}_i = (\bar{V} \nu) \nu_i + \bar{V}_\tau^i, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Применяя формулу Грина (16) для обеих областей Ω_1 , Ω_2 , с учетом уравнений равновесия и $\nu = (0, 1)$, $\tau = (1, 0)$ на γ , находим

$$U_1 = (u_{11}, u_{12}), \quad \int_\gamma \left[\sigma_{22}(U_1)(w_2 - u_{12}) + \sigma_{12}(U_1)(w_1 - u_{11}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (17)$$

Примем далее во внимание, что на $\gamma_1 \setminus \gamma_g$ выполняется $W = U_1 = 0$, а также то, что на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ скачки перемещений равны нулю, т.е. $[W] = [U_1] = 0$. Данные равенства позволяют переписать (17) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)](w_2 - u_{12}) + [\sigma_{12}(U_1)](w_1 - u_{11}) \right) + \\ & + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)(w_2 - u_{12}) + \sigma_{12}(U_1)(w_1 - u_{11}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (18) \end{aligned}$$

Подставляя в неравенство (18) $W = 0$ и $W = 2U_1 = 2(u_{11}, u_{12})$, получим равенство

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]u_{12} + [\sigma_{12}(U_1)]u_{11} \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)u_{12} + \sigma_{12}(U_1)u_{11} \right] = 0. \quad (19)$$

Заметим, что W и U_1 на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ имеют структуру жестких перемещений:

$$W|_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} = \rho, \quad U_1|_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} = \rho^1, \quad \rho, \rho^1(x) \in R(\gamma_2).$$

В силу (19) неравенство (18) можно привести к следующему виду:

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]w_2 + [\sigma_{12}(U_1)]w_1 \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0 \quad \forall W \in K_1. \quad (20)$$

Проводя последующий анализ неравенства (20) с пробными функциями, удовлетворяющими равенству $W = (0, 0)$ на γ_2 , по аналогии с [19] получим

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^+(U_1) &\leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cap \gamma_g, \\ \sigma_{22}^-(U_1) &\leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_1 \cap \gamma_g. \end{aligned}$$

Для пробных функций, удовлетворяющих условию $W = (0, 0)$ на γ_1 , имеем

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]w_2 + [\sigma_{12}(U_1)]w_2 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0, \quad W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (21)$$

Выбирая в (21) функции со свойством $W = \rho = (0, 0)$ на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$, представим соотношения, выполненные на $\gamma_2 \cap \gamma_g$, в следующем виде:

$$w_2^+ \geq 0, \quad w_2^- \leq 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g$$

при этом неравенство примет вид

$$\int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)w_2 + \sigma_{12}(U_1)w_1 \right] \leq 0, \quad W = (w_1, w_2) \in K_1. \quad (22)$$

Отсюда с учетом произвольности функций $W \in K_1$ получаем соотношения

$$\sigma_{22}^+(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g, \quad (23)$$

$$\sigma_{22}^-(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_2 \cap \gamma_g. \quad (24)$$

Предположив теперь, что в (21) пробные функции удовлетворяют условию $W^+ = W^- = \rho = (\rho_1, \rho_2)$ на γ_2 , получим

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 + [\sigma_{12}(U_1)]\rho_1 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} [\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 \leq 0$$

для всех $\rho \in R(\gamma_2)$ таких, что $c_1 \geq 0$.

Подытоживая, выпишем полученные из (14) соотношения:

$$-\sigma_{ij,j}(U_1) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \overline{\gamma}, \quad i = 1, 2, \quad (25)$$

$$\sigma_{22}^+(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^+(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_g, \quad (26)$$

$$\sigma_{22}^-(U_1) \leq 0, \quad \sigma_{12}^-(U_1) = 0 \quad \text{на } \gamma_g, \quad (27)$$

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]u_{12} + [\sigma_{12}(U_1)]u_{11} \right) + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_1)u_{12} \right] = 0, \quad (28)$$

$$\int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 + [\sigma_{12}(U_1)]\rho_1 \right) + \int_{\gamma_2 \cap \gamma_g} [\sigma_{22}(U_1)]\rho_2 \leq 0 \quad (29)$$

для всех $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in R(\gamma_2)$ таких, что $c_1 \geq 0$. Отметим, что, подставляя в (29) пробные числа $c_1 = b = 0$, $c_2 = b = 0$ ($c_1 \geq 0$), $c_1 = c_2 = 0$, получим эквивалентные два равенства, выполненные на всем включении γ_2 , и неравенство на $\gamma_2 \setminus \gamma_g$ вне трещины:

$$\int_{\gamma_2} [\sigma_{22}(U_1)] = 0, \quad \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} [\sigma_{12}(U_1)] \leq 0, \quad \int_{\gamma_2} [\sigma_{22}(U_1)] x_1 = 0.$$

Интегральные соотношения (28), (29) соответствуют принципу виртуальных перемещений (см. [14]). Можно показать, что функция $U_1 = (u_{11}, u_{12}) \in K_1$ удовлетворяющая уравнениям равновесия (25) и условиям (26)–(29), будет также решением вариационного неравенства (14). Таким образом, задача, в которой требуется найти $U_1 \in K_1$, удовлетворяющую соотношениям (25)–(29), является эквивалентной дифференциальной формулировкой задачи минимизации (10).

В случае, когда решение задачи минимизации принадлежит множествам K_2 или K_3 , не удастся получить полную дифференциальную постановку стандартными рассуждениями. Тем не менее, можно получить уравнение равновесия и интегральное неравенство, характеризующее решение. Рассмотрим случай, когда решение принадлежит K_2 , при этом случай, соответствующий множеству K_3 , рассматривается аналогично. Чтобы выписать условия оптимальности, понадобится рассмотреть вспомогательную задачу минимизации, которая допускает эквивалентную постановку в виде вариационного неравенства ввиду того, что она формулируется на выпуклом подмножестве K_2 . Будем опираться на тот факт, что задача (9) при $l = 2$ имеет хотя бы одно решение U_2 . Зафиксируем значение b^2 , которое задает структуру решения на γ_2 , т.е.

$$U_2(x_1, x_2) = \rho^2(x_1, x_2) = b^2(x_2, -x_1) + (c_1^2, c_2^2) \in R(\gamma_2).$$

Отметим, что в выражениях b^2 , c_1^2 , c_2^2 число 2 сверху — это индекс, а не степень. Функция U_2 доставляет минимум также для следующей вспомогательной задачи:

$$\text{найти такое } U_2 \in \hat{K}_2(b^2), \text{ что } \Pi(U_2) = \inf_{W \in \hat{K}_2(b^2)} \Pi(W), \quad (30)$$

где

$$\hat{K}_2(b^2) = \left\{ W \in H(\Omega_g) \mid W \text{ удовлетворяет (3), (4),} \right.$$

$$\left. W|_{\gamma_2} = \rho, \rho(x) \in R(\gamma_2), b = b^2, c_1 \leq 0, c_2 \geq 0, c_2 + bc_1 \geq 0 \right\},$$

т.е. на множестве, в котором дополнительно к условиям заложенным в определении K_2 , включено равенство $b = b^2$. Геометрически это значит, что мы фиксируем оптимальный угол поворота жесткого включения. Очевидно, что $\hat{K}_2(b^2) \subset K_2$; кроме того, множество будет выпуклым. Благодаря этому преимуществу, следующее вариационное неравенство имеет единственное решение, которое доставляет минимум (30):

$$U_2 \in \hat{K}_2(b^2), \quad \int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_2) \varepsilon_{ij}(W - U_2) \geq \int_{\Omega_g} F(W - U_2) \quad \forall W \in \hat{K}_2(b^2). \quad (31)$$

Подставляя в (31) пробные функции вида $W = U_2 + \phi$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2$, получаем

$$\int_{\Omega_g} \sigma_{ij}(U_2) \varepsilon_{ij}(\phi) \geq \int_{\Omega_g} F\phi, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2.$$

Это означает, что имеют место уравнения равновесия

$$-\sigma_{ij,j}(U_2) = F_i \quad \text{п.в. в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad i = 1, 2.$$

Кроме того, с помощью формулы Грина (16) из (31) можно получить вариационное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_2 \setminus \gamma_g} \left([\sigma_{22}(U_2)](w_2 - u_{22}) + [\sigma_{12}(U_2)](w_1 - u_{21}) \right) + \\ & + \int_{\gamma_g} \left[\sigma_{22}(U_2)(w_2 - u_{22}) + \sigma_{12}(U_2)(w_1 - u_{21}) \right] \leq 0 \quad \forall W = (w_1, w_2) \in \hat{K}_2(b^2), \end{aligned} \quad (32)$$

где $U_2 = (u_{21}, u_{22})$.

Заметим, что из (32) не удастся вывести равенство вида (19), поскольку множество $\hat{K}_2(b^2)$ не является конусом.

Закключение. Отметим, что в рамках предложенного подхода могут быть рассмотрены следующие обобщения задачи. Возможен случай, когда отслоение имеет место по всей длине γ_1 , (т.е. случай $p = a < 0 < q < 1$), при этом тело должно быть закреплено на Γ_0 с положительной мерой $\text{meas}(\Gamma_0) > 0$ так, чтобы неравенство Корна выполнялось в каждой из областей Ω_1, Ω_2 . Также следует отметить, что аналогичные результаты могут быть получены в том случае, когда отслоения сверху и снизу имеют место на разных участках вблизи точки разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байocchi К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. — М.: Физматлит, 1988.
2. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. — М.: Наука, 1984.
3. Неустроева Н. В., Лазарев Н. П. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко с упругим включением// Мат. заметки СВФУ. — 2021. — 28, № 4. — С. 58–70.
4. Николаева Н. А. О равновесии упругих тел с трещинами, пересекающими тонкие включения// Сиб. ж. индустр. мат. — 2019. — 22, № 4. — С. 68–80.
5. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах// Мат. заметки СВФУ. — 2016. — 23, № 1. — С. 87–107.
6. Furtsev A. I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion// J. Math. Sci. — 2019. — 237, № 4. — P. 530–545.
7. Hintermüller M., Kovtunen V. A., Kunisch K. A. Papkovich–Neuber-based numerical approach to cracks with contact in 3D// IMA J. Appl. Math. — 2009. — 74, № 3. — P. 325–343.
8. Hu K. X., Chandra A. Interactions among general systems of cracks and anticracks: An integral equation approach// J. Appl. Mech. — 1993. — 60, № 4. — P. 920–928.
9. Itou H., Khludnev A. M., Rudoy E. M., Tani A. Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity// Z. Angew. Math. Mech. — 2012. — 92, № 9. — P. 716–730.
10. Itou H., Kovtunen V. A., Lazarev N. P. Asymptotic series solution for plane poroelastic model with non-penetrating crack driven by hydraulic fracture// Appl. Eng. Sci. — 2022. — 10. — P. 100089.
11. Itou H., Kovtunen V. A., Rudoy E. M. Three-field mixed formulation of elasticity model nonlinear in the mean normal stress for the problem of non-penetrating cracks in bodies// Appl. Eng. Sci. — 2021. — 7. — P. 100060.
12. Jobin T. M., Ramji M., Khaderi S. N. Numerical evaluation of the interaction of rigid line inclusions using strain intensity factors// Int. J. Mech. Sci. — 2019. — 153–154. — P. 10–20.
13. Khludnev A. M. Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions// Eur. J. Mech. A. Solids. — 2010. — 29, № 3. — P. 392–399.
14. Khludnev A. M. Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies// Arch. Appl. Mech. — 2013. — 83, № 10. — P. 1493–1509.
15. Khludnev A. M. Junction problem for thin elastic and volume rigid inclusions in elastic body// Phil. Trans. Roy. Soc. A. — 2022. — 380, № 2236. — P. 20210360.
16. Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions// J. Optim. Theory Appl. — 2020. — 184, № 1. — P. 293–314.
17. Khludnev A. M., Itou H. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies// Math. Meth. Appl. Sci. — 2016. — 39, № 17. — P. 4980–4993.
18. Khludnev A. M., Kovtunen V. A. Analysis of Cracks in Solids. — Southampton, Boston: WIT-Press, 2000.
19. Khludnev A., Leugering G. On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks// Math. Meth. Appl. Sci. — 2010. — 3. — P. 1955–1967.
20. Khludnev A. M., Leugering G. Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies// Math. Mech. complex Syst. — 2014. — 2, № 1. — P. 1–21.
21. Khludnev A. M., Popova T. S. On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body// Z. Angew. Math. Mech. — 2020. — 100, № 8. — 202000063.

22. *Khudnev A. M., Shcherbakov V. V.* A note on crack propagation paths inside elastic bodies// *Appl. Math. Lett.* — 2018. — 79, № 1. — P. 80–84.
23. *Kovtunen V. A., Kunisch K.* Shape derivative for penalty-constrained nonsmooth-nonconvex optimization: cohesive crack problem// *J. Optim. Theory Appl.* — 2022. — 194. — P. 597–635.
24. *Kovtunen V. A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model// *SIAM J. Control Optim.* — 2016. — 54, № 3. — P. 1329–1351.
25. *Lazarev N.* Inverse problem for cracked inhomogeneous Kirchhoff–Love plate with two hinged rigid inclusions// *Bound. Value Probl.* — 2021. — 2021, № 1. — P. 88.
26. *Lazarev N., Neustroeva N.* Optimal control of rigidity parameter of elastic inclusions in composite plate with a crack// in: *Mathematics and Computing (Ghosh D., Giri D., Mohapatra R., Sakurai K., Savas E., Som T., eds.)*. — Singapore: Springer, 2018. — 253. — P. 67–77.
27. *Lazarev N., Rudoy E.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies// *J. Comput. Appl. Math.* — 2022. — 403. — P. 113710.
28. *Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A.* On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack// *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* — 2021. — 14, № 1. — P. 28–41.
29. *Popova T. S.* Numerical solution of the equilibrium problem for a two-dimensional elastic body with a thin semirigid inclusion// *Math. Notes NEFU.* — 2021. — 28, № 1. — P. 51–66.
30. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion// *Sib. Electron. Math. Rep.* — 2016. — 13, № 1. — P. 395–410.
31. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks// *Appl. Math. Optim.* — 2021. — 84. — P. 2775–2802.
32. *Shcherbakov V. V.* Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks// *Z. Angew. Math. Phys.* — 2016. — 67, № 3. — P. 71.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Разделы 1-2 выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2022-881). Раздел 3 выполнен Н. П. Лазаревым при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания (проект № FSRG-2023-0025).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Нюргун Петрович Лазарев

Северо-Восточный Федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

E-mail: nyurgun@ngs.ru

Виктор Анатольевич Ковтуненко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева

Сибирского отделения РАН, Новосибирск;

Institute for Mathematics and Scientific Computing,

Karl-Franzens University of Graz, Austria

E-mail: kovtunen@hydro.nsc.ru