ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 118–126
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-118-126

УДК 519.24

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕЧЕТКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

© 2024 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. В работе изучены непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. Основное внимание уделено классу стационарных нечетко-случайных процессов. Установлены свойства их числовых характеристик: нечетких ожиданий, ожиданий и корреляционных функций. Обосновано их спектральное представление и обобщенная теорема Винера—Хинчина. Полученные результаты опираются на свойства нечетко-случайных величин и числовых случайных процессов. В качестве примеров рассмотрены треугольные нечетко-случайные процессы.

Ключевые слова: непрерывный случайный процесс, нечеткое состояние, нечеткое ожидание, корреляционная функция, спектральное разложение.

ON SOME PROPERTIES OF STATIONARY STOCHASTIC PROCESSES WITH FUZZY STATES

© 2024 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. In this work, continuous stochastic processes with fuzzy states are studied. The main attention is paid to the class of stationary fuzzy stochastic processes. The properties of their numerical characteristics are established: fuzzy expectations, expectations, and correlation functions. Their spectral representation and the generalized Wiener–Khinchin theorem are substantiated. The results obtained are based on the properties of fuzzy stochastic variables and numerical stochastic processes. Triangular fuzzy stochastic processes are considered as examples.

***Keywords and phrases*:** continuous stochastic process, fuzzy state, fuzzy expectation, correlation function, spectral decomposition.

***AMS Subject Classification*:** 60G10

1. Введение. Нечеткое моделирование в последние десятилетия активно используется при решении различных прикладных задач, когда исходные данные неполны или слабо формализованы (см. [1,5]). С другой стороны, при исследовании динамических процессов в условии ограниченной исходной информации один из возможных подходов заключается в трактовке их параметров как реализации некоторых случайных процессов (см. [2,3]).

В данной работе сочетаются упомянутые подходы, а именно, исследуются непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко-случайные процессы). Точнее, мы считаем время и множество возможных нечетких состояний непрерывным. При этом сечение непрерывного нечеткого случайного процесса в любой момент времени представляет собой нечетко-случайную величину. В своем исследовании мы опираемся на известные результаты по теории нечетко-случайных величин (см. [7, 11, 12]) и классические результаты теории вещественных случайных процессов (см. [2, 3]).

В настоящей работе введены и исследованы стационарные нечетко-случайные процессы, в частности, их спектральное представление, обобщенная теорема Винера—Хинчина. Полученные в этой области результаты являются развитием на случай нечеткости известных (см. [2, гл. 1], [3, гл. 23]) для стандартных непрерывных случайных процессов. Подчеркнем, что в нашем случае важную роль играют нечеткие ожидания, отражающие тренды нечетко-случайных процессов. Отметим отличие нашего подхода и результатов от работ, посвященных случайным процессам с непрерывным временем и дискретными нечеткими состояниями (см., например, [4]).

Ниже под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел, будем понимать совокупность упорядоченных пар $(x, \mu_{\tilde{z}(x)})$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ определяет степень принадлежности каждого $x \in \mathbb{R}$ множеству $\tilde{z}$ (см. [1, гл. 5]).

Множество α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}(x)}$ определяется соотношением $Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}(x)} \geqslant \alpha\}$, $\alpha \in (0,1]$, $Z_0 = \mathrm{cl}\{x|\mu_{\tilde{z}(x)} > 0\}$ где cl обозначает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа — замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$, где $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ — левый и правый α-индексы нечеткого числа, соответственно. Ниже будем рассматривать совокупность нечетких чисел J, для которых индексы $z^\pm(\alpha)$ измеримы и ограничены на $[0,1]$.

2. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации нечетко-случайных величин. Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, где Ω — множество элементарных событий, Σ — σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P — вероятностная мера. Рассмотрим отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$. Его интервалы α-уровня $X_\alpha(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ определяются формулами

$$X_\alpha(\omega) = \{r \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) \geqslant \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1], \quad X_0(\omega) = \mathrm{cl}\,\{\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r) > 0\},$$

где $\mu_{\tilde{X}(\omega)}(r)$ — функция принадлежности нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$. Интервал $X_\alpha(\omega)$ представим в виде $X_\alpha(\omega) = [X^-(\omega,\alpha), X^+(\omega,\alpha)]$. Его границы $X^-(\omega,\alpha)$, $X^+(\omega,\alpha)$ называют левым и правым α-индексами для $\tilde{X}(\omega)$, соответственно.

Отображение $\tilde{X} : \Omega \to J$ называют нечетко-случайной величиной (кратко н.с.в.; см., например, [11, 12]), если вещественнозначные функции $X^\pm(\omega,\alpha)$ измеримы по ω для всех $\alpha \in [0,1]$. В этом случае α-индексы являются вещественными случайными величинами при $\alpha \in [0,1]$.

В дальнейшем будем рассматривать класс $\mathfrak{X}$ н.с.в., для которых индексы $X^-(\omega,\alpha)$ и $X^+(\omega,\alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$. Положим

$$x^-(\alpha) = \int_\Omega X^-(\omega,\alpha)dP, \quad x^+(\alpha) = \int_\Omega X^+(\omega,\alpha)dP. \tag{1}$$

Нечеткое число с индексами, определяемыми в (1), называют нечетким ожиданием н.с.в. $\tilde{X}$ и обозначают $M(\tilde{X})$, а его индексы — $[M(\tilde{X})]^\pm_\alpha$.

Ожидание $m(\tilde{X})$ н.с.в. $\tilde{X} \in \mathfrak{X}$ определяют как среднее (см. [9]) нечеткого числа $M(\tilde{X})$ с α-индексами $[M(\tilde{X})]^\pm_\alpha)$, задаваемыми формулой (1):

$$m(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big([M(\tilde{X})]^-(\alpha) + [M(\tilde{X})]^+(\alpha)\Big). \tag{2}$$

Для н.с.в. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ ковариацию определяют равенством

$$\mathrm{cov}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(\mathrm{cov}(X^-_\alpha, Y^-_\alpha) + \mathrm{cov}(X^+_\alpha, Y^+_\alpha)\big)\,d\alpha \tag{3}$$

(см. [10]), а дисперсию — равенством $D(\tilde{X}) = \mathrm{cov}(\tilde{X},\tilde{X})$. В (3) ковариации вещественных случайных величин $X^\pm_\alpha$ и $Y^\pm_\alpha$ определены стандартной формулой (см. [11, гл. 23])

$$\mathrm{cov}(X^\pm_\alpha, Y^\pm_\alpha) = E\big(X^\pm_\alpha - E(X^\pm_\alpha)\big)\big(Y^\pm_\alpha - E(X^\pm_\alpha)\big).$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание случайной величины, т.е. для случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем

$$E\xi = \int_\Omega \xi(\omega)dP.$$

Свойства ковариаций и дисперсий н.с.в. обсуждаются в [10], [8, гл. 6].

3. Непрерывные случайные процессы с нечеткими состояниями. Пусть $[t_0, T]$ — расширенный отрезок числовой оси. Непрерывным случайным процессом с нечеткими состояниями или нечетко-случайным процессом (н.с.п.) $\tilde{X}(t)$ будем называть отображение $\tilde{X} : [t_0, T] \to \mathfrak{X}$, т.е. функцию $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при всех $t \in [t_0, T]$ являются н.с.в. из $\mathfrak{X}$.

Обозначим α-индексы н.с.п. $\tilde{X}(t)$ через $X^{\pm}_\alpha(\omega, t)$.

Ниже будем рассматривать н.с.п., для которых вещественные функции $X^{\pm}_\alpha(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0, 1] \times [t_0, T]$.

Определим нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t)) = M(\tilde{X}(\omega, t))$ н.с.п. $\tilde{X}(\omega, t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание (1) соответствующей н.с.в. с α-индексами

$$\Big[M(\tilde{X}(\omega, t))\Big]^{\pm}_\alpha = \int_\Omega X^{\pm}_\alpha(\omega, t)dP \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \tag{4}$$

Свойства нечетких ожиданий н.с.п. вытекают из свойств нечетких ожиданий н.с.в. (см., например, [6, 7]).

Утверждение 1. *Нечеткие ожидания н.с.п. обладают следующими свойствами*:

(i) *для неслучайной функции* $\tilde{z} : [t_0, T] \to J$ *справедливо*

$$M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t);$$

(ii) *если* $\phi : [t_0, T] \to \mathbb{R}$ — *неслучайный скалярный множитель, а* $\tilde{X}(t)$ — *н.с.п., то*

$$M(\phi(t)\tilde{X}(t)) = \phi(t)M(\tilde{X}(t));$$

(iii) *для н.с.п.* $\tilde{X}(t)$ *и* $\tilde{Y}(t)$ *справедливо равенство*

$$M(\tilde{X}(t) + \tilde{Y}(t)) = M(\tilde{X}(t)) + M(\tilde{Y}(t)).$$

Ожидание н.с.п. $\tilde{X}(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ согласно (2) определяется формулой

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big([M(\tilde{X}(t))]^-(\alpha) + [M(\tilde{X}(t))]^+(\alpha)\Big)d\alpha.$$

Пример 1. Пусть случайные числовые процессы $\xi_i(\omega, t)$ ($i = 1, 2, 3$; $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$) квадратично суммируемы на $\Omega \times [t_0.T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega, t) < \xi_2(\omega, t) < \xi_3(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$.

Рассмотрим н.с.п. $\tilde{X}(t)$, для которого при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ нечеткое число $\tilde{X}(\omega, t)$ имеет треугольный вид $(\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t))$, т.е. функция принадлежности $\tilde{X}(\omega, t)$ при всех $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$ дается формулой

$$\mu_{\omega,t}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \xi_1(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_1(\omega, t),} & \text{если } x \in [\xi_1(\omega, t), \xi_2(\omega, t)]; \\ \dfrac{x - \xi_3(\omega, t)}{\xi_2(\omega, t) - \xi_3(\omega, t),} & \text{если } x \in [\xi_2(\omega, t), \xi_3(\omega, t)]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае α-индексы $\tilde{X}(t)$ определяются выражениями

$$X^-(\omega, t) = (1 - \alpha)\xi_1(\omega, t) + \alpha\xi_2(\omega, t), \quad X^+(\omega, t) = (1 - \alpha)\xi_3(\omega, t) + \alpha\xi_2(\omega, t). \tag{5}$$

Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ задается формулами для α-индексов

$$[M(\tilde{X})]^-_\alpha(t) = (1-\alpha)E\xi_1(t) + \alpha E\xi_2(t), \quad [M(\tilde{X})]^+_\alpha(t) = (1-\alpha)E\xi_3(t) + \alpha E\xi_2(t)$$

для всех $\alpha \in [0,1]$).

Ниже рассмотрим понятие корреляционной функции н.с.п. и ее свойства. В соответствии с (3) корреляционной функцией н.с.п. $\tilde{X}(t)$ назовем величину

$$K_{\tilde{X}}(t,s) = \operatorname{cov}(\tilde{X}(t), \tilde{X}(s)) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(K_{X^-_\alpha}(t,s) + K_{X^+_\alpha}(t,s)\Big)\,d\alpha. \tag{6}$$

Здесь $K_{X^-_\alpha}(t,s)$ и $K_{X^+_\alpha}(t,s)$ — корреляционные функции случайных процессов $X^-_\alpha(\omega,t)$ и $X^+_\alpha(\omega,t)$. Дисперсия н.с.п. $\tilde{X}(t)$ определяется равенством $D_{\tilde{X}}(t) = K_{\tilde{X}}(t,t)$.

Согласно (6) и [10] имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2. *Корреляционная функция н.с.п. $\tilde{X}(t)$ обладает следующими свойствами:*

(i) *симметричность: $K_{\tilde{X}}(t_1,t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2,t_1)$ при всех $t_1,t_2 \in [t_0,T]$;*

(ii) *если $\phi(t)$ — неслучайная числовая функция и $\tilde{Y}(t) = \phi(t)\tilde{X}(t)$, то*

$$K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)$$

при $\phi(t_1)\phi(t_2) \geqslant 0$;

(iii) *если $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \phi(t)$, то*

$$K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1,t_2);$$

(iv) *справедливо соотношение*

$$|K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)| \leqslant \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1)D_{\tilde{X}}(t_2)}.$$

Пример 2. Пусть выполнены условия примера 1 и дополнительно случайные процессы $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$ попарно некоррелированны. Выразим корреляционную функцию $K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)$ н.с.п. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$ через корреляционные функции $K_{\xi_1}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_2}(t_1,t_2)$, $K_{\xi_3}(t_1,t_2)$ случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$.

Согласно формуле (5) для левого индекса X^-_α треугольного нечеткого процесса и по предположению о некоррелированности $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ для корреляционной функции $K_{X^-_\alpha}(t_1,t_2)$ имеем

$$K_{X^-_\alpha}(t_1,t_2) = (1-\alpha)^2K_{\xi_1}(t_1,t_2) + \alpha^2K_{\xi_2}(t_1,t_2).$$

Аналогично

$$K_{X^+_\alpha}(t_1,t_2) = (1-\alpha)^2K_{\xi_3}(t_1,t_2) + \alpha^2K_{\xi_2}(t_1,t_2).$$

Тогда по определению (6) корреляционной функции н.с.п. получим

$$K_{\tilde{X}}(t_1,t_2) = \frac{1}{2}\left\{\int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha K_{\xi_1}(t_1,t_2) + 2\int_0^1 \alpha^2 d\alpha K_{\xi_2}(t_1,t_2) + \int_0^1 (1-\alpha)^2 d\alpha K_{\xi_3}(t_1,t_2)\right\} =$$
$$= \frac{1}{6}\Big\{K_{\xi_1}(t_1,t_2) + 2K_{\xi_2}(t_1,t_2) + K_{\xi_3}(t_1,t_2)\Big\}.$$

4. Стационарные нечетко-случайные процессы. К стационарным (в широком смысле) случайным процессам относятся такие, математические ожидания которых не зависят от времени, а корреляционные функции зависят лишь от разности аргументов (см. [2, гл. 8], [3, гл. 24]).

Назовем н.с.п. $\tilde{X}(t)$ *стационарным*, если его нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ и ожидание $m(\tilde{X}(t))$ постоянны, а корреляционная функция $K_{\tilde{X}}(t_1,t_2) = K_{\tilde{X}}(t_2-t_1)$ зависит от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$.

Теорема 1. *Пусть α-индексы н.с.п. $\tilde{X}(t)$ при всех $\alpha \in [0,1]$ являются стационарными случайными процессами. Тогда н.с.п. $\tilde{X}(t)$ является стационарным случайным процессом.*

Действительно, обозначим постоянные математические ожидания α-индексов $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ н.с.п. $\tilde{X}(t)$ при всех $\alpha \in [0,1]$ через $m^{\pm}_{\alpha}$. Согласно определению (4) они являются α-индексами нечеткого ожидания $m^{\pm}_{\alpha} = [M(\tilde{X}(t))]^{\pm}_{\alpha}$. Тогда нечеткое ожидание $M(\tilde{X}(t))$ постоянно. При этом

$$m(\tilde{X}(t)) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(m^+_{\alpha} + m^-_{\alpha}\right)d\alpha.$$

Обозначим корреляционные функции случайных процессов $X^{\pm}_{\alpha}(\omega,t)$ через $K_{X^{\pm}_{\alpha}}(t_1,t_2)$. По условию $K_{X^{\pm}_{\alpha}}(t_1,t_2) = K_{X^{\pm}_{\alpha}}(t_2-t_1)$. Тогда по определению (6) корреляционная функция н.с.п. $\tilde{X}(t)$ зависит от разности аргументов.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *корреляционная функция* $K_{\tilde{X}}(\tau)$ *н.с.п.* $\tilde{X}(t)$ *обладает следующими свойствами*:

(i) *корреляционная функция является четной, т.е.* $K_{\tilde{X}}(\tau) = K_{\tilde{X}}(-\tau)$;
(ii) *дисперсия н.с.п.* $\tilde{X}(t)$ *постоянна и равна* $D_{\tilde{X}} = K_{\tilde{X}}(0)$;
(iii) *для всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливо неравенство* $|K_{\tilde{X}}(\tau) \leqslant K_{\tilde{X}}(0)|$.

Теорема 2 следует из выполнения соответствующих свойств для корреляционных функций $K_{X^-_{\alpha}}(\tau)$, $K_{X^-_{\alpha}}(\tau)$ (см. [11, гл. 23]) и представления (6).

Пример 3. Пусть выполнены условия примера 2 и дополнительно все случайные процессы $\xi_j(t)$, $j = 1,2,3$, являются стационарными в широком смысле. Тогда треугольный н.с.п. $\tilde{X}(t)$ является стационарным. Это следует из выражений, полученных в примерах 1–2 для нечетких ожиданий и соответственно корреляционных функций треугольного н.с.п. $(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$.

Рассмотрим вопрос о спектральном разложении н.с.п. Как известно, спектральным разложением вещественного случайного процесса $\xi(t)$ называют представление вида

$$\xi(t) = m_{\xi} + \sum_{i=0}^{\infty}(\xi_i \cos\omega_i t + \eta_i \sin\omega_i t), \tag{7}$$

где m_{ξ} — вещественное число, ξ_i и η_i — случайные величины (коэффициенты), а $\omega_i = i\omega_1$ — относительные частоты гармоник, кратные основной частоте ω_1.

Лемма 1 (см. [2, гл. 8], [3, гл. 25]). *Пусть случайные коэффициенты* ξ_i *и* η_i *случайного процесса* (7) *взаимно некоррелированны и имеют математические ожидания* $E\xi_i = E\eta_i = 0$ *и дисперсии* $D\xi_i = D\eta_i = D_i$, $i = 0,1,2,\ldots$, *причем*

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i < \infty.$$

Тогда случайный процесс (7) *имеет постоянное математическое ожидание* $E\xi(t) = m_{\xi}$ *и корреляционную функцию* $K_{\xi}(t_1,t_2) = K_{\xi}(t)$, *зависящую только от разности* $\tau = t_2 - t_1$, *т.е. является стационарным в широком смысле. При этом*

$$K_{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} D_i \cos\omega_i\tau,$$

а дисперсия D_{ξ} *определяется равенством*

$$D_{\xi} = \sum_{i=0}^{\infty} D_i.$$

Отметим, что совокупность D_i, $i = 0,1,2,\ldots$, называют спектром стационарного случайного процесса.

Теорема 3. *Пусть α-индексы н.с.п. $\tilde{X}(t)$ при всех $\alpha \in [0,1]$ допускают спектральные разложения*

$$X_\alpha^\pm(t) = m_\alpha^\pm + \sum_{i=0}^{\infty}\big((\xi_\alpha^\pm)_i \cos\omega_i t + (\eta_\alpha^\pm)_i \sin\omega_i t\big), \tag{8}$$

причем при всех $\alpha \in [0,1]$ для случайных величин $(\xi_\alpha^\pm)_i$, $(\eta_\alpha^\pm)_i$ выполнены следующие условия:

(i) $E(\xi_\alpha^\pm)_i = E(\eta_\alpha^\pm)_i = 0$, $i = 0,1,2,\ldots$;

(ii) $E\big((\xi_\alpha^\pm)_i(\xi_\alpha^\pm)_j\big) = E\big((\eta_\alpha^\pm)_i,(\eta_\alpha^\pm)_j\big) = 0$, $i \neq j$;

(iii) $E\big((\xi_\alpha^\pm)_i(\eta_\alpha^\pm)_i\big) = 0$ *для всех* $i,j = 0,1,2,\ldots$. *Пусть*

$$D(\xi_\alpha^\pm)_i = D(\eta_\alpha^\pm)_i = (D_\alpha^\pm)_i, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}(D_\alpha^\pm)_i < \infty \quad \forall\alpha \in [0,1].$$

Тогда $\tilde{X}(t)$ — стационарный н.с.п.: его ожидание постоянно и имеет α-индексы, равные m_α^- и m_α^+, а корреляционная функция н.с.п. $\tilde{X}(t)$ имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^1 \Big((D_\alpha^-)_i + (D_\alpha^+)_i\Big)d\alpha \cos\omega_i\tau. \tag{9}$$

При этом дисперсия н.с.п. $\tilde{X}(t)$ определяется формулой

$$D_{\tilde{X}} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^1 \Big((D_\alpha^-)_i + (D_\alpha^+)_i\Big)d\alpha.$$

Действительно, значения α-индексов нечеткого ожидания стационарного н.с.п. $\tilde{X}(t)$ следуют из формул (8) и определения (4) с учетом предположений теоремы на коэффициенты $(\xi_\alpha^\pm)_i$ и $(\eta_\alpha^\pm)_i$. Кроме того, в условиях теоремы 3 согласно лемме 1, справедливо представление

$$K_{X_\alpha^\pm}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty}(D_\alpha^\pm)_i \cos\omega_i\tau.$$

Поэтому формула (9) следует из определения (6) корреляционной функции н.с.п. Формула для дисперсии $D_{\tilde{X}}$ вытекает из теоремы 2.

Пример 4. Пусть в условиях примера 1 случайные величины $\xi_j(t)$, $j = 1,2,3$, допускают спектральные разложения

$$\xi_j(t) = m_j + \sum_{i=1}^{\infty}(\xi_{j,i}\cos\omega_i t + \eta_{j,i}\sin\omega_i t), \tag{10}$$

причем для всех $j = 1,2,3$ и всех $i = 0,1,2,\ldots$ выполнены условия

$$E(\xi_{j,i}) = E(\eta_{j,i}) = 0, \quad E(\xi_{j,i}\xi_{s,k}) = E(\eta_{j,i}\eta_{s,k}) = 0$$

во всех случаях, кроме одновременного выполнения равенств $j = s$, $i = k$. Пусть, кроме того, $E(\xi_{j,i}\eta_{s,k}) = 0$ для всех $j = 1,2,3$ и всех $i,s,k = 1,2,\ldots$, а также $D\xi_{j,i} = D\eta_{j,i} = D_{j,i}$ для всех $j = 1,2,3$ и всех $i = 0,1,2,\ldots$, причем

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_{j,i} \leqslant \infty, \quad j = 1,2,3.$$

Тогда корреляционная функция н.с.п. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$ представима формулой

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{\infty}\big(D_{1,i} + 2D_{2,i} + D_{3,i}\big)\cos\omega_i\tau.$$

Действительно, согласно (10) и (5), левый и правый индексы нечеткого треугольного процесса $\tilde{X}(t)$, порождаемого тройкой $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ имеют вид (8), где в обозначениях теоремы 3

$$m_\alpha^-(t) = (1-\alpha)m_1 + \alpha m_2, \quad (\xi_\alpha^-)_i = (1-\alpha)\xi_{1,i} + \alpha\xi_{2,i}, \quad (\eta_\alpha^-)_i = (1-\alpha)\eta_{1,i} + \alpha\eta_{2,i}.$$

Аналогично,

$$m_\alpha^+(t) = (1-\alpha)m_3 + \alpha m_2, \quad (\xi_\alpha^+)_i = (1-\alpha)\xi_{3,i} + \alpha\xi_{2,i}, \quad (\eta_\alpha^+)_i = (1-\alpha)\eta_{3,i} + \alpha\eta_{2,i}.$$

Тогда согласно предположениям примера 4

$$D(\xi_\alpha^-)_i = (1-\alpha)^2 D_{1,i} + \alpha^2 D_{2,i} = D(\eta_\alpha^-)_i, \quad D(\xi_\alpha^+)_i = (1-\alpha)^2 D_{3,i} + \alpha^2 D_{2,i} = D(\eta_\alpha^+)_i.$$

Поскольку в условиях примера выполнены предположения теоремы 3, то (9) влечет доказываемую формулу для $K_{\tilde{X}}(\tau)$.

5. Спектральная плотность стационарного н.с.п. Обобщенная теорема Винера—Хинчина. Рассмотренное выше спектральное представление (7) характерно для стационарных случайных процессов, заданных на конечном промежутке времени. Для стационарного скалярного случайного процесса, определенного на бесконечном интервале времени, вместо спектра дисперсий рассматривают спектральную плотность дисперсий.

Лемма 2 (теорема Винера—Хинчина; см. [2, гл. 8]; [3, гл. 25]). *Ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ и спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье*

$$K_\xi(\tau) = \int_0^\infty S_\xi(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \quad S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_\xi(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Приведем обобщение этого утверждения на случай стационарных н.с.п. Пусть стационарный н.с.п. $\tilde{X}(t)$, заданный на $(-\infty, \infty)$, имеет α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ и пусть $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ — спектральные плотности стационарных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$ для всех $\alpha \in [0,1]$, причем функции $S_{X_\alpha^\pm}(\omega)$ суммируемы по α на $[0,1]$.

Спектральной плотностью стационарного н.с.п. $\tilde{X}(t)$ назовем функцию

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(S_{X_\alpha^+}(\omega) + S_{X_\alpha^-}(\omega)\big)d\alpha. \tag{11}$$

Пример 5. Пусть выполнены условия примера3. Обозначим через $S_i(\omega)$ спектральные плотности случайных процессов $\xi_i(t)$, $i = 1,2,3$. Тогда спектральная плотность н.с.п. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ описывается формулой

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{6}\big(S_1(\omega) + 2S_2(\omega) + S_3(\omega)\big).$$

Действительно, согласно (5) и в силу предположения о попарной некоррелированности случайных процессов ξ_1 и ξ_2, а также ξ_2 и ξ_3 для α-индексов $X_\alpha^\pm$ н.с.п. $\tilde{X}(t)$ можем записать

$$D_{X_\alpha^-} = (1-\alpha)^2 D_{\xi_1} + \alpha^2 D_{\xi_2}, \quad D_{X_\alpha^+} = (1-\alpha)^2 D_{\xi_3} + \alpha^2 D_{\xi_2}.$$

По определению спектральная плотность дисперсий случайного процесса $\xi(t)$ равна

$$S_\xi(\omega) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{D_\omega}{\Delta\omega},$$

где D_ω — дисперсия, приходящаяся на интервал частот $\Delta\omega$ в окрестности ω. Тогда на основании формул для дисперсий случайных процессов $X_\alpha^\pm$ имеем

$$S_{X_\alpha^-} = (1-\alpha)^2 S_1(\omega) + \alpha^2 S_2(\omega), \quad S_{X_\alpha^+} = (1-\alpha)^2 S_3(\omega) + \alpha^2 S_2(\omega).$$

Поэтому в соответствии с (11) спектральная плотность н.с.п. $\tilde{X}(t)$ треугольного типа $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ имеет вид

$$S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 (1-\alpha)^2\, d\alpha\, S_1(\omega) + \int\limits_0^1 \alpha^2\, d\alpha\, S_2(\omega) + \int\limits_0^1 (1-\alpha)^2\, d\alpha\, S_3(\omega) + \int\limits_0^1 \alpha^2\, d\alpha\, S_2(\omega)\right) = \\ = \frac{1}{6}(S_1(\omega) + 2S_2(\omega) + S_3(\omega)).$$

Отметим, что по определению (11) и в силу свойств спектральных плотностей скалярных случайных процессов выполнены следующие свойства спектральной плотности н.с.п.:

(i) спектральная плотность н.с.п. $\tilde{X}(t)$ неотрицательна, т.е. $S_{\tilde{X}}(\omega) \geqslant 0$;

(ii) интеграл от спектральной плотности н.с.п. $\tilde{X}(t)$ в пределах от нуля до бесконечности равен дисперсии н.с.п. $\tilde{X}(t)$:

$$\int\limits_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega) d\omega = D_{\tilde{X}}.$$

Целесообразность данного выше определения (11) спектральной плотности н.с.п. подтверждается приводимой ниже обобщенной теоремой Винера—Хинчина.

Теорема 4. *Пусть $\tilde{X}(t)$ — стационарный н.с.п. и для его α-индексов $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ при любом $\alpha \in [0,1]$ определены ковариационная функция $K_{X^{\pm}_{\alpha}}(\tau)$ и спектральная плотность $S_{X^{\pm}_{\alpha}}(\omega)$, причем они суммируемы по совокупности переменных на $[0,\infty)\times[0,1]$. Тогда ковариационная функция и спектральная плотность стационарного н.с.п. $\tilde{X}(t)$ связаны между собой взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье*:

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{\tilde{X}}(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \quad S_{\tilde{X}}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{\tilde{X}}(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{12}$$

Покажем первую из формул (12). Для скалярных стационарных процессов $X^{\pm}_{\alpha}(t)$ по лемме 2 имеем

$$K_{X^-_{\alpha}}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{X^-_{\alpha}}(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \quad K_{X^+_{\alpha}}(\tau) = \int\limits_0^\infty S_{X^+_{\alpha}}(\omega)\cos\omega\tau d\omega.$$

Сложим обе части этих равенств, а затем проинтегрируем полученные результаты по α от 0 до 1. Тогда

$$\int\limits_0^1 (K_{X^-_{\alpha}}(\tau) + K_{X^+_{\alpha}}(\tau)) d\alpha = \int\limits_0^1\int\limits_0^\infty \Big(S_{X^-_{\alpha}}(\omega) + S_{X^+_{\alpha}}(\omega)\Big)\cos\omega\tau d\omega d\alpha.$$

Меняя в правой части порядок интегрирования на основании теоремы Фубини и используя (6), (11), установим формулу для $K_{\tilde{X}}(\tau)$. Кроме того, по лемме 2

$$S_{X^{\pm}_{\alpha}}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{X^{\pm}_{\alpha}}(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Отсюда, аналогично предыдущему, с учетом (6), (11) следует вторая из формул (12).

Пример 6. Пусть выполнены условия примера 2, причем каждый из случайных процессов $\xi_i(t)$, $i = 1,2,3$, является стационарным белым шумом, а именно, $\xi_i(t)$ — стационарный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью S_i, $i = 1,2,3$. Как известно (см. [3, гл. 25]), в этом случае корреляционная функция $\xi_i(t)$ имеет вид $K_{\xi_i}(\tau) = 2\pi S_i \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$ — дельта-функция

Дирака. Тогда в соответствии с примером 2 корреляционная функция н.с.п. $\tilde{X}(t)$ треугольного вида, порождаемого тройкой $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$, имеет вид

$$K_{\tilde{X}}(\tau) = \frac{\pi}{3}(S_1 + 2S_2 + S_3)\delta(\tau).$$

6. Заключение. Существенное содержание и научную новизну данной работы составляют теоремы 1–4. Подчеркнем значимость введенного в данной статье понятия спектральной плотности стационарного н.с.п. Примеры 1–6 показывают возможность применения развитой теории к треугольным н.с.п.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аверкин А. Н.* Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. — М.: Наука, 1986.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и их инженерные приложения. — М.: Кнорус, 2016.
3. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 2003.
4. *Деменков Н. П., Микрин Е. А., Мочалов И. А.* Марковские процессы с нечеткими состояниями// Информ. технол. — 2020. — *26*, № 6. — С. 323–334.
5. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ, 2015.
6. *Хацкевич В. Л.* О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко-случайных величин// Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 11. — С. 97–109.
7. *Шведов А. С.* Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин// Прикл. эконометрика. — 2016. — *42*. — С. 121–138.
8. *Язенин А. В.* Основные понятия теории возможностей. — М.: Физматлит, 2016.
9. *Dubois D., Prade H.* The mean value of fuzzy number// Fuzzy Sets Syst. — 1987. — *24*, № 3. — P. 279–300.
10. *Feng Y., Hu. L., Shu H.* The variance and covariance of fuzzy random variables// Fuzzy Syst. — 2001. — *120*. — P. 487–497.
11. *Nguyen H. T., Wu. B.* Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
12. *Puri M. L., Ralescu D. A.* Fuzzy random variables// J. Math. Anal. Appl. — 1986. — *114*. — P. 409–422.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хацкевич Владимир Львович

Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж

E-mail: `vlkhats@mail.ru`