ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 107–117
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-107-117

УДК 517.5, 514.17

ПОЛНОТА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ В ТЕРМИНАХ ПЛОЩАДИ

© 2024 г. Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, Е. Г. КУДАШЕВА

Аннотация. Установлены условия полноты экспоненциальной системы в пространствах функций, непрерывных на компакте со связным дополнением и голоморфных во внутренности этого компакта, в пространствах голоморфных функций в ограниченной односвязной области в терминах евклидовой площади выпуклой оболочки этого компакта или области, а также некоторых специальных характеристик или плотностей распределений показателей экспоненциальной системы.

Ключевые слова: полнота, экспоненциальная система, евклидова площадь, выпуклая оболочка, опорная функция, целая функция экспоненциального типа, распределение корней.

COMPLETENESS OF EXPONENTIAL SYSTEMS IN FUNCTION SPACES IN TERMS OF AREA

© 2024 B. N. KHABIBULLIN, E. G. KUDASHEVA

Abstract. In this paper, we establish completeness conditions for exponential systems in spaces of functions that are continuous on a compact set with connected complement and holomorphic inside this compact set, in spaces of holomorphic functions in a bounded simply connected domain in terms of the Euclidean area of the convex hull of this compact set or a domain and in terms of some special characteristics or distribution densities of the exponents of the exponential system.

Keywords and phrases: completeness, exponential system, Euclidean area, convex hull, support function, entire function of exponential type, root distribution.

AMS Subject Classification: 30B60, 30D15, 52A38, 31A05

1. Введение.

1.1. Некоторые обозначения, понятия и соглашения. Пустое множество обозначаем через $\varnothing$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\overline{\mathbb{N}}_0 := \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ — расширение множества $\mathbb{N}_0$ со стандартным отношением порядка $\leqslant$ и точной верхней гранью $+\infty := \sup \mathbb{N}_0 \notin \mathbb{N}_0$, для которой неравенства $n \leqslant +\infty$ выполнены при всех $n \in \overline{\mathbb{N}}_0$. Множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с таким же отношением порядка $\leqslant$ рассматриваем и как вещественную ось в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с евклидовой нормой — модулем $|\cdot|$. Порядковое пополнение множества $\mathbb{R}$ верхней и нижней гранями $+\infty := \sup \mathbb{R} = \inf \varnothing \notin \mathbb{R}$ и $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \varnothing \notin \mathbb{R}$ определяет расширенную вещественную ось $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где, в дополнение к стандартным допустимым операциям, полагаем $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 := 0$. Величина

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

$c \in \overline{\mathbb{R}}$ рассматривается и как функция, тождественно равная c, как правило, на плоскости $\mathbb{C}$. Символом 0, наряду с $0 \in \overline{\mathbb{R}}$, обозначаем и нулевые функции, меры и т. п.

Промежутки с концами $a \in \overline{\mathbb{R}}$ и $b \in \overline{\mathbb{R}}$ — это множества $[a,b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ — отрезок в $\overline{\mathbb{R}}$, $(a,b] := [a,b] \setminus a$, $[a,b) := [a,b] \setminus b$, а $(a,b) := [a,b) \setminus a$ и $(a,+\infty]$, $[-\infty,b)$ — открытые промежутки в $\overline{\mathbb{R}}$, образующие базу открытых множеств при $a < b$. Используем также обозначение $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$ для положительной полуоси с расширением $\overline{\mathbb{R}}^+ := [0,+\infty]$. При этом величина $x \in \overline{\mathbb{R}}$ положительна при $x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, строго положительна при $0 \neq x \in \overline{\mathbb{R}}^+$, отрицательна при $x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$, строго отрицательна при $0 \neq x \in -\overline{\mathbb{R}}^+$, $x^+ := \sup\{0,x\} \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — положительная часть величины $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x^- := (-x)^+ \in \overline{\mathbb{R}}^+$ — её отрицательная часть.

Обозначим через $D(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ и $\overline{D}(r) := \{z' \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$, а также $\partial\overline{D}(r) := \overline{D}(r) \setminus D(r)$, соответственно, открытый и замкнутый круги, а также окружность с центром в нуле радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}^+$. Для $S \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{cl} S$, $\operatorname{int} S$, $\operatorname{bd} S$ и $\operatorname{co} S$ обозначаем соответственно замыкание, внутренность, границу и выпуклую оболочку множества S в $\mathbb{C}$. Таким образом, при $0 < r \in \overline{\mathbb{R}}^+$ имеют место равенства $\overline{D}(r) = \operatorname{cl} D(r)$ и $\partial\overline{D}(r) = \operatorname{bd} D(r)$, но не при $r = 0$, поскольку в этом случае это уже не так, а именно: $\operatorname{cl} D(0) = \operatorname{cl} \varnothing = \varnothing = \operatorname{bd} D(0) \neq \{0\} = \overline{D}(0) = \partial\overline{D}(0)$.

Для расширенной числовой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ через $f^+ : x \underset{x\in X}{\longmapsto} \bigl(f(x)\bigr)^+$ обозначаем её положительную часть, а через $f^- := (-f)^+$ — отрицательную часть. Если $f = f^+$, то функция f положительная, а если $f = -f^-$, то отрицательная. Если $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ и для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_1 < x_2$ следует нестрогое неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, строгое неравенство $f(x_1) < f(x_2)$), то функция f возрастающая (соответственно, строго возрастающая) на X; функция f убывающая (соответственно, строго убывающая) на X, если противоположная функция $-f$ возрастающая (соответственно, строго возрастающая) на X.

1.2. Постановка задачи. Всюду далее через Z обозначаем распределение точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, среди которых могут быть повторяющиеся. Распределение точек Z однозначно определяется функцией, действующей из $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{N}}_0$ и равной в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ количеству повторений этой точки z в Z. Для такой функции, которую часто называют функцией кратности распределения точек Z (см. [13, пп. 0.1.2–0.1.3]), или его дивизором, сохраняем то же самое обозначение Z. Другими словами, $Z(z)$ — это количество вхождений точки $z \in \mathbb{C}$ в распределение точек Z; пишем $z \in Z$, если $Z(z) > 0$. Распределение точек Z можно эквивалентным образом трактовать и как распределение масс, или меру, со значениями в $\overline{\mathbb{N}}_0$ с тем же самым обозначением:

$$Z(S) := \sum_{z\in S} Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0 \quad \text{для любого } S \subset \mathbb{C}. \tag{1}$$

Если считающая радиальная функция

$$Z^{\mathsf{rad}}(r) := Z\bigl(\overline{D}(r)\bigr) \overset{(1)}{=} \sum_{z\in\overline{D}(r)} Z(z) \in \overline{\mathbb{R}}^+, \quad r \in \overline{\mathbb{R}}^+, \tag{2}$$

для Z конечна при каждом $r \in \mathbb{R}^+$, т.е. $Z^{\mathsf{rad}}(r) < +\infty$ для всех $r \in \mathbb{R}^+$, то Z — локально конечное распределение.

Евклидову площадь множества $S \subset \mathbb{C}$ обозначаем через

$$\operatorname{area}(S) := \iint_S dx\,dy = \iint_S r\,dr\,d\theta, \quad x + iy = re^{i\theta}, \quad x, y, \theta \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

если двойные интегралы справа корректно определены, или множество S измеримо по плоской мере Лебега на $\mathbb{C}$. В частности, это всегда имеет место для выпуклых ограниченных $S \subset \mathbb{C}$.

Система векторов из топологического векторного пространства полна в нём, если замыкание линейной оболочки этой системы совпадает с этим пространством. Для распределения точек Z

на $\mathbb{C}$ в данной статье далее исследуется полнота лишь экспоненциальных систем

$$\operatorname{Exp}^Z := \Bigl\{ w \underset{w\in\mathbb{C}}{\longmapsto} w^p \exp(zw) \Bigm| z \in Z,\ Z(z) - 1 \geqslant p \in \mathbb{N}_0 \Bigr\} \tag{3}$$

с распределением показателей Z, что, в частности, актуально в спектральной теории операторов.

Для функции f на $S \subset \mathbb{C}$ со значениями в $\mathbb{C}$ или в $\overline{\mathbb{R}}$ полагаем

$$\|f\|_S := \sup\Bigl\{ |f(z)| \Bigm| z \in S \Bigr\}, \tag{4}$$

а через $C(S)$ обозначаем пространство непрерывных функций $f\colon S \to \mathbb{C}$ с sup-нормой (4). Для открытого подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\operatorname{Hol}(S)$ обозначаем пространство голоморфных функций $f\colon S \to \mathbb{C}$ с топологией равномерной сходимости на всех компактах $K \subset S$, определяемой sup-полунормами $\|f\|_K$. Для компакта $S \subset \mathbb{C}$ с внутренностью $\operatorname{int} S$ через $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ обозначаем банахово пространство непрерывных на S и голоморфных на внутренности $\operatorname{int} S$ функций $f\colon S \to \mathbb{C}$ с sup-нормой $\|f\|_S$. Таким образом, если в последнем случае $\operatorname{int} S = \varnothing$ — пустое множество, то $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ — это банахово пространство $C(S)$ непрерывных на S функций со значениями в $\mathbb{C}$. Книга [13, п. 3.2] содержит детальный обзор по вопросам полноты экспоненциальных систем Exp^Z по состоянию вплоть до 2012 г. в разнообразных функциональных пространствах — в значительной мере именно для пространств $\operatorname{Hol}(S)$ или $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ функций соответственно на области $S \subset \mathbb{C}$ или компакте $S \subset \mathbb{C}$. Основная задача — получить условия полноты экспоненциальной системы Exp^Z из (3) в функциональных пространствах $\operatorname{Hol}(S)$ или $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$, когда соответственно для ограниченной области S или компакта S априори известна лишь евклидова площадь $\operatorname{area}(\operatorname{co} S)$ его выпуклой оболочки $\operatorname{co} S$ или площадь $\operatorname{area}(S)$ в случае выпуклой соответственно области или компакта $S \subset \mathbb{C}$. Естественно требовать, чтобы эти условия выражались через соотношения между какими-либо характеристиками распределения точек-показателей Z и площадью $\operatorname{area}(\operatorname{co} S)$ и были точны. В данной работе мы не останавливаемся на подтверждении точности наших результатов, хотя это так и есть, например, для любых выпуклых S. Требуемые для этого примеры основаны на построении довольно тонких примеров целых функций экспоненциального типа и очень регулярного роста, особенно для компактов S. Построение таких примеров предполагается обсудить в другой работе.

1.3. Основные результаты. В теории целых функций одной комплексной переменной (см. [5, 6, 18]) а также в некоторых других вопросах, связанных с геометрией на плоскости (см. [8, отдел третий, гл. 3, § 1], [11, гл. 1, § 2]), опорную функцию подмножества $S \subset \mathbb{C}$ чаще всего определяли как функцию

$$\operatorname{spf}_S\colon \theta \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\longmapsto} \sup_{s\in S} \operatorname{Re} s e^{-i\theta} \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{5}$$

По построению (5) 2π-периодические на $\mathbb{R}$ опорные функции множества $S \subset \mathbb{C}$, его замыкания $\operatorname{cl} S$ в $\mathbb{C}$, выпуклых оболочек $\operatorname{co} S$, $\operatorname{co}\operatorname{cl} S$ и замыкания $\operatorname{cl}\operatorname{co} S$ совпадают. Сдвиг компакта или ограниченной области S в $\mathbb{C}$ не влияет на полноту экспоненциальной системы Exp^Z соответственно в пространстве $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\operatorname{int} S)$ или $\operatorname{Hol}(S)$. Поэтому, не умаляя общности, всюду далее нам удобно считать, что, после сдвига ограниченного S и сохранении за ним того же обозначения S, нулевая точка принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества S, т.е. выполнено условие

$$0 \in \operatorname{cl}\operatorname{co} S. \tag{6}$$

Если $S \subset \mathbb{C}$ — компакт, то условие (6) эквивалентно условию $0 \in \operatorname{co} S$. Кроме того, по определению (5) для произвольного $S \subset \mathbb{C}$ условие (6) эквивалентно положительности опорной функции

$$\operatorname{spf}_S(\theta) \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\overset{(6)}{\geqslant}} 0. \tag{7}$$

При трактовке распределения точек Z как распределения масс (1) для любой положительной функции f на S можно корректно определить сумму

$$\sum_{\substack{z\in Z\\ z\in S}} f(z) := \int_S f\,dZ \in \overline{\mathbb{R}}^+. \tag{8}$$

Для точки $z\in\mathbb{C}$ через $\arg z\subset\mathbb{R}$ обозначаем множество значений всех её угловых аргументов. Для 2π-периодической функции на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ однозначно определены значения этой функции на $\arg z$ для любых $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. При ограниченном $S\subset\mathbb{C}$ считающую радиальную функцию для распределения точек Z по аргументам относительно S определяем как

$$Z_S^{\mathsf{rad}}(r) \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\overset{(8)}{:=}} Z(0)\|\operatorname{spf}_S\|_{\mathbb{R}} + \sum_{\substack{z\in Z\\ 0<|z|\leqslant r}} \operatorname{spf}_S(\arg z)\in\overline{\mathbb{R}}^+,\quad \|\operatorname{spf}_S\|_{\mathbb{R}} \overset{(4)}{:=} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \bigl|\operatorname{spf}_S(\theta)\bigr|. \tag{9}$$

При условии (6)–(7) функция Z_S^{rad} положительная, возрастающая и непрерывная справа на $\mathbb{R}^+$.

Для $S:=D(r)$ или $S:=\overline{D}(r)$ их опорные функции тождественно равны

$$\operatorname{spf}_{D(r)}(\theta) \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\equiv} \operatorname{spf}_{\overline{D}(r)}(\theta) \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\equiv} r \quad\text{и}\quad Z^{\mathsf{rad}}_{D(1)} = Z^{\mathsf{rad}}_{\overline{D}(1)} \overset{(2)}{=} Z^{\mathsf{rad}} \tag{10}$$

— считающая радиальная функция Z^{rad} из (2). В отличие от последней считающая радиальная функция для Z по аргументам относительно ограниченного $S\subset\mathbb{C}$ учитывает распределение точек из Z не только по радиусу, но и по аргументам.

Комплексно сопряжённое к $z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}$ с $r\in\mathbb{R}^+$ и $\theta\in\mathbb{R}$ число обозначаем через $\bar z:=re^{-i\theta}$, а для подмножества $S\subset\mathbb{C}$ сопряжённое подмножество, зеркально симметричное S относительно вещественной оси $\mathbb{R}$, обозначаем $\bar S:=\bigl\{\bar z \bigm| z\in S\bigr\}$ с опорной функцией $\operatorname{spf}_{\bar S}$.

Следующая теорема — частный случай результата, анонсированного в [14, основная теорема].

Теорема 1. *Пусть Z — распределение точек в $\mathbb{C}$. Если для компакта $S\subset\mathbb{C}$ со связным дополнением $\mathbb{C}\setminus S$ при оговорённом в (6)–(7) условии $0\overset{(6)}{\in}\operatorname{cl}\operatorname{co}S=\operatorname{co}S$ для некоторого строго положительного $r_0\in\mathbb{R}^+$ выполнено равенство*

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty}\left(\int_r^R \frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt - \frac{\operatorname{area}(\operatorname{co}S)}{\pi}\ln\frac{R}{r}\right) = +\infty, \tag{11}$$

то система Exp^Z из (3) полна в пространстве $C(S)\cap\operatorname{Hol}(\operatorname{int}S)$.

Следствие 1. *Если для произвольных распределения точек Z в $\mathbb{C}$ и ограниченной односвязной области $S\subset\mathbb{C}$ при условии (6)–(7) выполнено неравенство*

$$\limsup_{1<a\to+\infty}\frac{1}{\ln a}\limsup_{0<r\to+\infty}\int_r^{ar}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt \geqslant \frac{1}{\pi}\operatorname{area}(\operatorname{co}S), \tag{12}$$

то система Exp^Z из (3) полна в пространстве $\operatorname{Hol}(S)$.

Замечание 1. Величину в левой части неравенства (12) по аналогии с подобными плотностями из [19], [21, гл. 22], [13, гл. 3], [4], [9], [10] можно назвать верхней логарифмической блок-плотностью для Z относительно евклидовой площади выпуклой оболочки множества $\bar S$.

2. Доказательства результатов.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, а именно: в условиях теоремы 1 система Exp^Z не полна в пространстве $C(S)\cap\operatorname{Hol}(\int S)$. Тогда по теореме Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов на пространстве $C(S)$ вкупе с теоремой Хана—Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов с сохранением нормы — в данном случае с замкнутого подпространства $C(S)\cap\operatorname{Hol}(\operatorname{int}S)$ в $C(S)$, а также из известных следствий из неё, существует борелевская комплекснозначная мера $\mu \neq 0$ с носителем в S, аннулирующая экспоненциальную систему Exp^Z, но не аннулирующая хотя бы одну функцию из $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\int S)$. Последнее означает, что заданная преобразованием Фурье—Лапласа целая функция

$$F\colon z \underset{z\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \int\limits_S e^{zs}\, d\mu(s) \tag{13}$$

обращается в нуль на Z с учётом кратности, а именно: кратность корня функции F в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ не превышает $Z(z)$. В силу связности дополнения $\mathbb{C} \setminus S$ целая функция F из (13) ненулевая. Действительно, если $F = 0$, то согласно (13) мера μ аннулирует экспоненциальную систему $\bigl\{e^{zs} \bigm| z \in \mathbb{C}\bigr\}$, замыкание линейной оболочки которой содержит все многочлены (см. [3, теорема 1], [13, гл. 1, п. 1.1.1, пример 1.1.1]). Следовательно, мера μ аннулирует все многочлены. Но по теореме-критерию Мергеляна при условии связности $\mathbb{C} \setminus S$ множество всех многочленов плотно в $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\int S)$. Тогда мера μ аннулирует все функции из $C(S) \cap \operatorname{Hol}(\int S)$, что не согласуется с выбором меры μ. Таким образом, далее $F \neq 0$.

В обозначении $|\mu|$ для полной вариации меры μ и записи $z := re^{i\theta}$ в полярной форме с $r \in \mathbb{R}^+$ и $\theta \in \mathbb{R}$ для целой функции $F \neq 0$ из (13) имеет место оценка сверху

$$\bigl|F(re^{i\theta})\bigr| \underset{re^{i\theta}\in\mathbb{C}}{\leqslant} \int\limits_S \bigl|\exp(re^{i\theta}s)\bigr|\, d|\mu|(s) \underset{re^{i\theta}\in\mathbb{C}}{\leqslant} \sup_{s\in S}\bigl|\exp(re^{i\theta}s)\bigr||\mu|(S) \underset{re^{i\theta}\in\mathbb{C}}{=} \exp\Bigl(r \sup_{s\in S} \operatorname{Re} se^{i\theta}\Bigr)|\mu|(S),$$

где по определению опорной функции (5)

$$\sup_{s\in S} \operatorname{Re} se^{i\theta} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{=} \sup_{s\in S} \operatorname{Re} se^{-i(-\theta)} \underset{\theta\in\mathbb{R}}{\overset{(5)}{=}} \operatorname{spf}_{\bar{S}}(\theta)$$

— значения опорной функции сопряжённого компакта $\bar{S}$ в точках $\theta \in \mathbb{R}$. Следовательно, эта оценка после логарифмирования может быть продолжена как

$$\ln\bigl|F(re^{i\theta})\bigr| \underset{re^{i\theta}\in\mathbb{C}}{\leqslant} \operatorname{spf}_{\bar{S}}(\theta)r + \ln|\mu|(S), \quad |\mu|(S) \neq 0. \tag{14}$$

Поскольку целая функция F ненулевая, можем рассмотреть субгармоническую функцию

$$u := \ln|F| - \ln|\mu|(S) \neq -\infty \tag{15}$$

с распределением масс Рисса, или мер Рисса (см. [16, 17, 20])

$$\varDelta_u := \frac{1}{2\pi}\triangle u = \frac{1}{2\pi}\triangle \ln|F| \geqslant 0, \tag{16}$$

где $\triangle$ — оператор Лапласа, действующий на субгармоническую функцию u как обобщённую функцию на пространстве основных финитных функций на $\mathbb{C}$. В частности, ввиду обращения в нуль целой функции F на Z и известного вида [20, теорема 3.7.8] распределения масс Рисса субгармонической функции $\ln|F|$ при рассмотрении распределения точек Z как распределения масс в смысле (1) имеет место неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\triangle \ln|F| \geqslant Z$$

и, как следствие, приходим к неравенству

$$\varDelta_u \overset{(16)}{\geqslant} Z$$

для распределений масс $\varDelta_u$ и Z на $\mathbb{C}$. Это неравенство в силу положительности $\operatorname{spf}_{\bar{S}} \geqslant 0$ при условии (6) по условию-равенству (11) показывает, что

$$\sup_{r_0\leqslant r<R<+\infty} \Biggl(\int\limits_r^R \frac{(\varDelta_u)_{\bar{S}}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\, dt - \frac{\operatorname{area}(\bar{S})}{\pi} \ln\frac{R}{r}\Biggr) = +\infty, \tag{17}$$

где в порядке переноса определения (9) с распределений точек на распределения масс мы положили

$$(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(t) \underset{r\in\mathbb{R}^+}{\overset{(9)}{:=}} (\varDelta_u)\bigl(\overline{D}(r_0)\bigr)\|\operatorname{spf}_{\bar S}\|_{\mathbb{R}} + \int\limits_{r_0<|z|\leqslant t} \operatorname{spf}_S(\arg z)\, d(\varDelta_u)(z) \quad \text{при } t\in[r_0,+\infty) \tag{18}$$

— считающая радиальная функция для распределения масс $\varDelta$ по аргументам относительно $\bar S$ вне $\overline{D}(r_0)$, которая при (6)–(7) положительная, возрастающая и непрерывная справа на $[r_0,+\infty)$. Напомним, что для субгармонической на $\mathbb{C}$ и непрерывной функции (см. [2])

$$M\colon re^{i\theta} \underset{re^{i\theta}\in\mathbb{C}}{\longmapsto} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta) r \tag{19}$$

её распределение масс Рисса определяется как произведение мер [13, п. 3.3.1] через её плотность

$$d\varDelta_M(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\, dr \otimes dl_{\operatorname{co}\bar S}(\theta) \tag{20}$$

в полярных координатах, где $l_{\operatorname{co}\bar S}(\theta)$ — длина дуги границы $\operatorname{bd}\operatorname{co}\bar S$, отсчитываемой при движении по границе «против часовой стрелки» от последней точки опоры опорной к компакту $\operatorname{cl}\operatorname{co}\bar S$ прямой, ортогональной положительной полуоси $\mathbb{R}^+$, до последней точки опоры опорной к компакту $\operatorname{cl}\operatorname{co}\bar S$ прямой, ортогональной направлению радиус-вектора точки $e^{i\theta}$ (см. [1,11,13]). В частности, вычисление площади выпуклого компакта $\operatorname{co}\bar S \ni 0$ путём аппроксимации его выпуклыми описанными многоугольниками, площади которых вычисляются через сумму площадей внутренних треугольников с центрами в нулей как половины произведений длин апофем на длины соответствующих сторон, дают равенство для площади

$$\operatorname{area}(\bar S) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)\, dl_{\operatorname{co}\bar S}(\theta). \tag{21}$$

Отсюда для вычитаемого произведения с $\operatorname{area}(\bar S)$ из (17) при всех $r_0\leqslant r<R<+\infty$ имеем

$$\frac{\operatorname{area}(\bar S)}{\pi}\ln\frac{R}{r} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)\, dl_{\operatorname{co}S}(\theta)\int\limits_r^R \frac{1}{t}\,dt \overset{(20)}{=} \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{r}\, d\varDelta_M(re^{i\theta}), \tag{22}$$

а для интеграла из (17) при всех $r_0\leqslant r<R<+\infty$ интегрирование по частям даёт равенство

$$\int\limits_r^R \frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(t)}{t^2}\,dt = \frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(R)}{R} - \frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(r)}{r} + \int\limits_r^R \frac{1}{t}\, d(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(t). \tag{23}$$

При этом в силу (14) и (15) имеют место отграничения

$$u(re^{i\theta}) \leqslant \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta) r \overset{(19)}{=:} M(re^{i\theta}) \quad \text{при всех } re^{i\theta}\in\mathbb{C}, \tag{24}$$

откуда u — субгармоническая функция конечного типа при порядке 1 (см. [16, гл. 4]), для которой

$$\limsup_{z\to\infty}\frac{u(z)}{|z|} < +\infty, \quad \limsup_{r\to+\infty}\frac{\varDelta_u\bigl(\overline{D}(r)\bigr)}{r} < +\infty. \tag{25}$$

В частности, из последнего предельного соотношения ввиду ограниченности $\operatorname{spf}_{\bar S}$ на $\mathbb{R}$ получаем

$$\sup_{r\in[r_0,+\infty)} \frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(r)}{r} \overset{(18)}{\leqslant} \sup_{r\in[r_0,+\infty)} \|\operatorname{spf}_{\bar S}\|_{\mathbb{R}} \frac{\varDelta_u\bigl(\overline{D}(r)\bigr)}{r} < +\infty,$$

откуда для первых двух слагаемых в правой части (23) имеем

$$\sup_{r_0<r\leqslant R}\left|\frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(R)}{R} - \frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(r)}{r}\right| \leqslant 2\sup_{r\in[r_0,+\infty)}\frac{(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(r)}{r} < +\infty,$$

а последний интеграл в (23) согласно (18) можем записать как

$$\int\limits_r^R \frac{1}{t}\, d(\varDelta_u)^{\mathsf{rad}}_{\bar S}(t) = \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\varDelta_u(te^{i\theta}).$$

Отсюда согласно (17) и (22) получаем

$$\sup_{r_0<r<R<+\infty} \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\big(\varDelta_u - \varDelta_M\big)(te^{i\theta}) = +\infty. \tag{26}$$

Итоговая наша задача — получить противоречие между этим равенством и ограничением (24), показав,что из (24) следует конечность левой части (26). Для этого рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V_R\colon te^{i\theta} \xmapsto[te^{i\theta}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}]{} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big) &\overset{(5)}{=} \sup_{s\in S}\big(\operatorname{Re} se^{i\theta}\big)\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big) \\ &\underset{z:=te^{i\theta}\neq 0}{=} \sup_{s\in S}\operatorname{Re}\Big(\frac{s}{\bar z}-\frac{sz}{R^2}\Big) \underset{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}{=} V_R(z), \end{aligned} \tag{27}$$

которая по построению положительна на $\overline{D}(R)$ ввиду условия (6)–(7), обращается в нуль на окружности $\partial\overline{D}(R)$ и непрерывна ввиду непрерывности опорных функций ограниченных множеств. Кроме того, согласно последнему равенству в (27), функция V_R представляет собой точную верхнюю грань локально ограниченного сверху семейства гармонических на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функций

$$\Big\{\operatorname{Re}\Big(\frac{s}{\bar z}-\frac{sz}{R^2}\Big)\Big\}_{s\in S}.$$

Отсюда сразу следует, что функцияV_R субгармонична на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

При этом выпуклый компакт $\operatorname{co}\bar S\subset\mathbb{C}$ можно представить как пересечение последовательности выпуклых компактов $K_n \underset{n\in\mathbb{N}}{\supset} K_{n+1}$, вложенных друг в друга, для которых их опорные функции $k_n := \operatorname{spf}_{K_n}$ дважды непрерывно дифференцируемы. По построению убывающая последовательность положительных опорных функций k_n стремится к опорной функции $\operatorname{spf}_{\bar S}$ и функции

$$v_n\colon te^{i\theta} \xmapsto[te^{i\theta}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}]{} k_n(\theta)\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big), \tag{28}$$

согласно обоснованному выше, положительны на $\overline{D}(R)\setminus\{0\}$, а также субгармоничны и имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Далее нам потребуется следующее объединение двух утверждений из [12], которые могут быть выведены и по общим интегральным формулам из [7, теорема 2].

Лемма 1 (см. [12, леммы 2.2–2.3]). *Пусть $0<r<R<+\infty$ и функция V положительна на замкнутом кольце $\overline{D}(R)\setminus D(r)$, субгармонична в его внутренности $D(R)\setminus\overline{D}(r)$, тождественно равна нулю на окружности $\partial\overline{D}(R)$ и совпадает с сужением на $\overline{D}(R)\setminus D(r)$ некоторой дважды непрерывно дифференцируемой в окрестности кольца $\overline{D}(R)\setminus D(r)$ функции. Используя инверсию функции V относительно окружности $\partial\overline{D}(r)$, построим положительную на $\mathbb{C}$ функцию*

$$V^*(z) := \begin{cases} V(z), & r<|z|\leqslant R,\\ V(r^2/\bar z), & r^2/R<|z|\leqslant r,\\ 0, & |z|\leqslant r^2/R,\ |z|>R, \end{cases} \qquad z\in\mathbb{C}. \tag{29}$$

Тогда для любой пары субгармонических на окрестности круга $\overline{D}(R)$ функций $u \neq -\infty$ и M с распределениями масс Рисса соответственно Δ_u и Δ_M из неравенства $u \leqslant M$ на этой окрестности следует неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{C}} V^* \, d\Delta_u \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} V^* \, d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \bigl(u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})\bigr) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\mathrm{out}}}(re^{i\theta}) \, d\theta, \tag{30}$$

где $\partial/\partial\vec{n}_{\mathrm{out}}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ на $\partial\overline{D}(r)$.

Интегральное среднее функции $g \colon \partial\overline{D}(r) \to \overline{\mathbb{R}}$ по окружности $\partial\overline{D}(r)$ обозначим следующим образом:

$$g^{\circ}(r) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) \, d\theta. \tag{31}$$

Следующая лемма — предельная форма предшествующей леммы 1.

Лемма 2. *Пусть в убывающей последовательности функций $v_n \colon \overline{D}(R) \setminus D(r) \to \mathbb{R}$ каждая из них обладает теми же свойствами, что и функция V в предыдущей лемме, а также модули производных по радиусу от них равномерно по n ограничены сверху во всех точках на окружности $\partial\overline{D}(R)$ некоторым числом $N_r \in \mathbb{R}^+$. Обозначим теперь через V уже предельную функцию для последовательности v_n. Тогда для субгармонических на окрестности замкнутого круга $\overline{D}(R)$ функций $u \leqslant M$, где $u \neq -\infty$, имеет место неравенство*

$$\int\limits_{r<|z|\leqslant R} V \, d\Delta_u \leqslant \int\limits_{r<|z|\leqslant R} V \, d\Delta_M + \Delta_M\bigl(\overline{D}(r)\bigr) \sup_{r\leqslant|z|\leqslant R} V(z) + N_r \frac{r}{\pi}\bigl(|u|^{\circ}(r) + |M|^{\circ}(r)\bigr). \tag{32}$$

Доказательство леммы 2. Производная по внешней нормали $\partial/\partial\vec{n}_{\mathrm{out}}$ к кольцу $D(R) \setminus \overline{D}(r)$ на $\partial\overline{D}(r)$ — это, с точностью до знака, производная по радиусу на $\partial\overline{D}(r)$. Поэтому в силу положительности функции $V^* = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n^*$, известной теореме о монотонном пределе в интегралах, а также равномерных оценок на $\partial\overline{D}(r)$ через N_r на производные по радиусу функций v_n, переходя к пределу по $n \to +\infty$, из неравенства (30) леммы 1 получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\overline{D}(R)\setminus D(r)} V \, d\Delta_u \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} V^* \, d\Delta_u \leqslant \int\limits_{\mathbb{C}} V^* \, d\Delta_M + \frac{r}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \bigl(u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})\bigr) \frac{\partial V}{\partial \vec{n}_{\mathrm{out}}}(re^{i\theta}) \, d\theta \overset{(29)}{\leqslant} \\
&\overset{(29)}{\leqslant} \int\limits_{\overline{D}(R)\setminus D(r)} V \, d\Delta_M + \int\limits_{\overline{D}(r)\setminus D(r^2/R)} V\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) d\Delta_M(z) + \frac{r}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \bigl|u(re^{i\theta}) - M(re^{i\theta})\bigr| N_r \, d\theta \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{r<|z|\leqslant R} V \, d\Delta_M + \sup_{r^2/R\leqslant|z|\leqslant r} V\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right) \Delta_M\bigl(\overline{D}(r)\bigr) + \frac{r}{\pi} N_r \left(\int\limits_0^{2\pi} \bigl|u(re^{i\theta})\bigr| \, d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \bigl|M(re^{i\theta})\bigr| \, d\theta \right) \overset{(29),(31)}{=} \\
&\overset{(29),(31)}{=} \int\limits_{r<|z|\leqslant R} V \, d\Delta_M + \sup_{r\leqslant|z|\leqslant R} V(z) \Delta_M\bigl(\overline{D}(r)\bigr) + \frac{r}{\pi} N_r \bigl(|u|^{\circ}(r) + |M|^{\circ}(r)\bigr),
\end{aligned}$$

что и даёт требуемую оценку (32), завершая доказательство леммы 2. □

Для применения леммы 2 к убывающей последовательности функций (28) с предельной функцией V_R из (27) отметим, что функции v_n удовлетворяют всем требованиям леммы 2 по установленным выше перед леммой 1 их свойствам и для них выполнены равномерные по n неравенства для производных по радиусу:

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial r}(re^{i\theta})\right| \overset{(28)}{\leqslant} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} k_n(\theta)\left|-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right| \leqslant \frac{2}{r^2}\sup_{\theta\in[0,2\pi]} k_1(\theta) = \frac{a}{r^2} =: N_r, \tag{33}$$

где число $a := \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]} k_1(\theta)$, очевидно, не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, заключительная оценка (32) леммы 2 может быть записана для функций $V \overset{(27)}{=} V_R$ и $M \overset{(24)}{\geqslant} u$ из (19) как

$$\int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big)\, d\varDelta_u(te^{i\theta}) \overset{(32),(27),(33)}{\leqslant} \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big)\, d\varDelta_M(re^{i\theta})+$$
$$+\varDelta_M\big(\overline{D}(r)\big)\sup_{r\leqslant t\leqslant R}\Big(\frac{1}{t}-\frac{t}{R^2}\Big)\|\operatorname{spf}_{\bar S}\|_{\mathbb{R}} + \frac{ar}{\pi r^2}\big(|u|^{\circ}(r)+|M|^{\circ}(r)\big).$$

Отсюда, учитывая явный вид функции M из (19) и её распределения масс Рисса из (20), имеем

$$\int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\varDelta_u(te^{i\theta}) \overset{(19),(20)}{\leqslant} \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)t}{R^2}\, d\varDelta_u(te^{i\theta}) + \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\varDelta_M(re^{i\theta})+$$
$$+r\frac{l_{\operatorname{co}\bar S}(2\pi)-l_{\operatorname{co}\bar S}(0)}{2\pi}\frac{1}{r}\|\operatorname{spf}_{\bar S}\|_{\mathbb{R}} + \frac{a}{\pi r}\big(|u|^{\circ}(r)+|M|^{\circ}(r)\big). \tag{34}$$

Первое, третье и четвёртое слагаемые из правой части этого неравенства оцениваются сверху числом, не зависящим от значений радиуса $r \geqslant r_0 > 0$. Действительно, для первого получаем

$$\int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)t}{R^2}\, d\varDelta_u(te^{i\theta}) \leqslant \|\operatorname{spf}_{\bar S}\|\frac{1}{R}\varDelta_u\big(\overline{D}(R)\big) \leqslant C_1,$$

где число $C_1 \in \mathbb{R}^+$ не зависит от $R \geqslant r_0$, поскольку для субгармонической функции u конечного типа при порядке 1 выполнено (25). В третьем слагаемом r просто исчезает и оно оценивается сверху через некоторое число $C_3 \in \mathbb{R}^+$. Наконец, $|M|^{\circ}(r) \overset{(19)}{\leqslant} \|\operatorname{spf}_{\bar S}\| r$ при всех $r \in \mathbb{R}^+$, а для интегральных средних $|u|^{\circ}(r)$ по окружностям $\partial\overline{D}(r)$ модуля субгармонической функции $u \not\equiv -\infty$ конечного типа при порядке 1 удовлетворяет, как следует, например, из [15, лемма 6.2], соотношению $|u|^{\circ}(r) \underset{R\to+\infty}{=} O(r)$. Это даёт возможность оценить сверху четвёртое слагаемое числом $C_4 \in \mathbb{R}^+$, не зависящим от $r \geqslant r_0 > 0$. Таким образом, полагая $C := C_1 + C_3 + C_4$ из (34) с учётом (21) получаем оценку

$$\int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\varDelta_u(te^{i\theta}) \overset{(34)}{\leqslant} \int\limits_{r<|te^{i\theta}|\leqslant R} \frac{\operatorname{spf}_{\bar S}(\theta)}{t}\, d\varDelta_M(re^{i\theta}) + C \quad \text{для всех } r \geqslant r_0. \tag{35}$$

Это противоречит равенству (26), что и завершает доказательство теоремы 1. □

Доказательство следствия 1. Для ограниченной односвязной области $S \subset \mathbb{C}$ существует последовательность $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ компактов $S_n \subset S$ со связными дополнениями $\mathbb{C}\setminus S_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, объединение которых совпадает с односвязной областью S. При этом для выпуклой оболочек $\operatorname{co} S_n$ этих компактов имеем $\operatorname{area}(\operatorname{co} S_n) < \operatorname{area}(\operatorname{co} S)$. Для полноты системы Exp^Z в $\operatorname{Hol}(S)$ с топологией равномерной сходимости на компактах достаточно показать, что система Exp^Z полна в каждом из пространств $C(S_n)\cap\operatorname{Hol}(\operatorname{int} S_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$d_n \underset{n\in\mathbb{N}}{:=} \frac{1}{2}\big(\operatorname{area}(\operatorname{co} S) - \operatorname{area}(\operatorname{co} S_n)\big) > 0.$$

При фиксированном $n\in\mathbb N$ из равенства (11) следует существование возрастающей неограниченной последовательности $(a_k)_{k\in\mathbb N}$ чисел $a_k>1$, для которой

$$\limsup_{0<r\to+\infty}\int_r^{a_kr}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt\geqslant\frac{1}{\pi}\bigl(\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)+d_n\bigr)\ln a_k\quad\text{при всех } k\in\mathbb N.$$

Отсюда для каждого $k\in\mathbb N$ найдётся достаточно большое $r_k\geqslant 1$, для которого

$$\int_{r_k}^{a_kr_k}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt\geqslant\frac{1}{\pi}\bigl(\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)+d_n\bigr)\ln a_k-1=\frac{1}{\pi}\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)\ln\frac{a_kr_k}{r_k}+\frac{1}{\pi}d_n\ln a_k-1,$$

что может быть записано как неравенства

$$\int_{r_k}^{a_kr_k}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt-\frac{\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)}{\pi}\ln\frac{a_kr_k}{r_k}\geqslant\frac{1}{\pi}d_n\ln a_k-1.$$

Применяя операцию sup по k к обеим частям, получаем

$$\sup_{k\in\mathbb N}\Biggl(\int_{r_k}^{a_kr_k}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt-\frac{\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)}{\pi}\ln\frac{a_kr_k}{r_k}\Biggr)\geqslant\frac{d_n}{\pi}\sup_{k\in\mathbb N}\ln a_k-1=+\infty,$$

поскольку $d_n>0$. Тем более, имеет место равенство

$$\sup_{1<r<R<+\infty}\Biggl(\int_r^{R}\frac{Z_{\bar S}^{\mathsf{rad}}(t)}{t^2}\,dt-\frac{\operatorname{area}(\operatorname{co}S_n)}{\pi}\ln\frac{R}{r}\Biggr)=+\infty.$$

Отсюда по теореме 1 система Exp^Z полна в пространстве $C(S_n)\cap\operatorname{Hol}(\operatorname{int}S_n)$. В силу произвола в выборе $n\in\mathbb N$ получаем и полноту системы Exp^Z в пространстве $\operatorname{Hol}(S)$, что и требовалось. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. — М.: Фазис, 2002.
2. *Гришин А. Ф., Малютин К. Г.* Тригонометрически выпуклые функции. — Курск: Юго-Западный гос. ун-т, 2015.
3. *Громов В. П.* О полноте системы значений голоморфной вектор-функции в пространстве Фреше// Мат. заметки. — 2003. — *73*, № 6. — С. 827–840.
4. *Каримов М. Р., Хабибуллин Б. Н.* Совпадение некоторых плотностей распределения множеств и полнота систем целых функций// (*Мерзляков С. Г., 2000*, ред.) Тр. Междунар. конф. «Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы». III. Анализ и дифференциальные уравнения. — Уфа: Ин-т мат. с ВЦ УНЦ РАН, 2000. — С. 29–34.
5. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Физматгиз, 1956.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1978.
7. *Меньшикова Э. Б.* Интегральные формулы типа Карлемана и Левина Б. Я. для мероморфных и субгармонических функций// Изв. вузов. Мат. — 2022. — № 6. — С. 37–53.
8. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. — М.: Наука, 1978.
9. *Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса// Уфим. мат. ж. — 2020. — *12*, № 2. — С. 35–48.
10. *Салимова А. Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости// Уфим. мат. ж. — 2021. — *13*, № 3. — С. 116–128.
11. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. — М.: Наука, 1983.
12. *Хабибуллин Б. Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка// Мат. сб. — 1991. — *182*, № 6. — С. 811–827.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: БГУ, 2012.

14. *Хабибуллин Б. Н.* Смешанные площади и полноты систем экспоненциальных функций// Мат. Междунар. конф. «Современные методы теории краевых задач». Воронежская весенняя мат. школа «Понтрягинские чтения–XXXIV» (Воронеж, 3–9 мая 2023 г.). — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2023. — С. 390–392.
15. *Хабибуллин Б. Н., Шмелёва А. В.* Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. Классический случай// Алгебра анал. — 2019. — *31*, № 1. — С. 156–210.
16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980.
17. *Hörmander L.* Notions of Convexity. — Boston: Birkhäuser, 1994.
18. *Levin B. Ya.* Lectures on Entire Functions. — Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc., 1996.
19. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros// Bull. Soc. Math. France. — 1961. — *89*, № 2. — P. 175–201.
20. *Ransford T.* Potential Theory in the Complex Plane. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
21. *Rubel L. A., Colliander J. E.* Entire and Meromorphic Functions. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Хабибуллин Булат Нурмиевич
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Кудашева Елена Геннадьевна
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа
E-mail: lena_kudasheva@mail.ru