ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 99–106
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-99-106

УДК 517.928

УРАВНЕНИЕ ВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С КВАДРАТИЧНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

© 2024 г. **В. И. УСКОВ**

Аннотация. Статья посвящена исследованию поведения решения при $\varepsilon \to 0$ задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с квадратичными операторными пучками при производной от искомой функции. Получено уравнение ветвления; для его решения применяется диаграмма Ньютона. Выявлены условия, при которых возникает погранслой вблизи начальной точки, и определяется вид функций погранслоя.

***Ключевые слова*:** уравнение ветвления, дифференциальное уравнение первого порядка, фредгольмов оператор, банахово пространство, квадратичное возмущение, малый параметр, явление погранслоя.

BRANCHING EQUATION FOR A FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION IN A BANACH SPACE WITH QUADRATIC PERTURBATIONS OF A SMALL PARAMETER

© 2024 **V. I. USKOV**

Abstract. This paper is devoted to the study of the behavior as $\varepsilon \to 0$ of solutions of the Cauchy problem for a first-order differential equation in a Banach space with quadratic operator pencils with the derivative of the unknown function. The branching equation is obtained and analyzed by using the Newton diagram. The conditions of the appearing of a boundary layer near the initial point are identified and the structure of boundary-layer functions is determined.

***Keywords and phrases*:** branching equation, first-order differential equation, Fredholm operator, Banach space, quadratic perturbation, small parameter, boundary layer.

***AMS Subject Classification*:** 34E15

1. Введение и необходимые сведения. Рассмотрим задачу Коши

$$(A - \varepsilon B - \varepsilon^2 C)\frac{du}{dt} = (D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)u(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon) \in X_1, \tag{2}$$

где A, B, C, D, E, F — замкнутые линейные операторы $X_1 \to X_2$, X_1, X_2 — банаховы пространства, $\overline{\operatorname{dom} A} = \overline{\operatorname{dom} B} = \overline{\operatorname{dom} C} = \overline{\operatorname{dom} D} = \overline{\operatorname{dom} E} = \overline{\operatorname{dom} F} = X_1$, $u^0(\varepsilon)$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{\max}]$, $\varepsilon \in \mathfrak{E} = (0;\varepsilon_0)$.

Оператор A полагается фредгольмовым с нулевым индексом (далее — фредгольмов), имеющим одномерное ядро. Рассматривается частный случай конечной D-жордановой цепочки оператора A.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается функция $u(t,\varepsilon)$, дифференцируемая по $t \in \mathfrak{T}$ при каждом $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ и удовлетворяющая (1), (2) в $\mathfrak{T} \times \mathfrak{E}$.

Уравнениями вида (1) описываются экономические процессы (динамическая модель Леонтьева межотраслевого баланса; см. [5], явления в электрических и гидравлических цепях (см. [10]), быстрых бимолекулярных реакций (см. [6]), процессы фильтрации, влагопереноса и т. д.

Задача Коши для уравнения

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C)u(t,\varepsilon) \tag{3}$$

с необратимым оператором A изучена в разных работах. Для фредгольмова оператора A случай одномерного ядра изучен в [12], где исследовались качественные свойства решения, и в [4], где для нее построено асимптотическое разложение решения; для оператора A, обладающего свойством иметь нуль нормальным собственным числом (0-Н.С.Ч.), в случае многомерного ядра в [11] изучено явление погранслоя. В [8] изучена задача Коши с правой частью уравнения (3), содержащей квадратичный операторный пучок $B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D$ перед u, с 0-Н.С.Ч. оператором A, имеющим двумерное ядро.

В настоящей работе задача обобщается наличием квадратичного пучка перед производной. Цель работы: выявление условий, при которых имеет место явление пограничного слоя (далее погранслоя). Такие условия называются *условиями регулярности вырождения*. Для этого выводится уравнение ветвления. Это уравнение решается с применением диаграммы Ньютона (см. [9]).

Приведем необходимые сведения.

Определение 1 (см. [3]). Ограниченная функция $v(t,\varepsilon)$, определенная на $\mathfrak{T}$, называется функцией погранслоя вблизи точки $t = t_0$, если $v(t,\varepsilon) \rightrightarrows 0$ на $[t';t_{\max}]$ при каждом $t' \in (t_0;t_{\max})$ и $v(t,\varepsilon) \not\rightrightarrows 0$ по норме в банаховом пространстве X_1 на $\mathfrak{T}$ при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим предельную задачу для (1), (2):

$$A\frac{d\bar{u}}{dt} = D\bar{u}(t), \quad \bar{u}(t_0) = \bar{u}^0. \tag{4}$$

Определение 2 (см. [1]). В задаче (1), (2) имеет место явление погранслоя, если

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + v(t,\varepsilon),$$

где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи точки $t = t_0$.

Фредгольмов оператор $A : X_1 \to X_2$ вполне определяется следующим свойством (см. [7]):

$$X_1 = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Coim} A, \quad X_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{5}$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к нему, $\operatorname{Im} A$ — образ, $\operatorname{Coker} A$ — дефект; $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$; сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Введем проектор Q на $\operatorname{Coker} A$, полуобратный оператор

$$A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q) : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A.$$

Зафиксируем элементы $e \in \operatorname{Ker} A$, $e \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Coker} A$. В $\operatorname{Coker} A$ введем скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ так, что $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$.

Лемма 1 (см. [4]). *Уравнение $A\xi = \eta$, $\xi \in X_1 \cap \operatorname{dom} A$, $\eta \in X_2$, равносильно системе*

$$\xi = A^-\eta + ce \quad \forall c \in \mathbb{C}, \qquad \langle Q\eta, \varphi \rangle = 0.$$

Определение 3. Последовательность таких элементов $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$, что

$$\xi_0 = e, \quad A\xi_i = D\xi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

назовем D-жордановой цепочкой присоединенных элементов оператора A, отвечающих нулевому собственному значению.

Лемма 2 (см. [2]). *D-Жорданова цепочка имеет конечную длину тогда и только тогда, когда существует такое число $p < \infty$, что*

$$\left\langle QD(A^-D)^i e, \varphi\right\rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad \left\langle QD(A^-D)^p e, \varphi\right\rangle \neq 0.$$

В настоящей работе будем рассматривать случай $p \geqslant 1$.

Наложим следующее условие.

Условие 1. Операторы QB, QC, QD, QE, QF, A^-B, A^-C, A^-D, A^-E, A^-F ограничены.

Приведем решение задачи (4).

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть выполнено условие 1. Пусть выполнена лемма 2. Тогда решение задачи (4) существует при выполнении условий*

$$\left\langle QD(A^-D)^i \bar{u}^0, \varphi\right\rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, p.$$

Оно единственно и равно

$$\bar{u}(t) = e^{tT_p}\bar{u}^0$$

в обозначении

$$T_p(\cdot) = A^-D(\cdot) - \frac{\left\langle QD(A^-D)^{p+1}(\cdot), \varphi\right\rangle}{\left\langle QD(A^-D)^p e, \varphi\right\rangle} e.$$

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Пусть K_j, $j = 1, 2, \dots, r$, — линейные операторы, действующие в одном пространстве. Обозначим через $S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r}$ сумму по всевозможным перестановкам из i_j элементов K_j. Также введем следующие обозначения:

$$\Gamma^m_r = \Big\{(i_1; i_2; \dots; i_r) \;\Big|\; i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ j = 1, 2, \dots, r,\ i_1 + i_2 + \dots + i_r = m\Big\};$$
$$\Gamma^\mu_{r,l} = \Gamma^\mu_r \setminus \big\{(0;\ \dots;\ 0; \underbrace{\mu;}_{l}\ 0;\ \dots;\ 0)\big\}.$$

Утверждение 1. *Пусть для любого $r \in \mathbb{N}$ выполнено равенство*

$$S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} = K_1 S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1-1,i_2,\dots,i_r} + K_2 S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2-1,\dots,i_r} + \dots + K_r S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r-1}. \tag{6}$$

Тогда для любых $m, r \in \mathbb{N}$ справедлива следующая формула:

$$(K_1 + K_2 + \dots + K_r)^m = \sum_{\Gamma^m_r} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r}. \tag{7}$$

Доказательство. Зафиксируем r и докажем утверждение методом математической индукции по m. Пусть оно верно для $m = \mu$. Покажем, что оно верно и для $m = \mu + 1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&(K_1 + K_2 + \dots + K_r)^{\mu+1} = \\
&\quad = (K_1 + K_2 + \dots + K_r)(K_1 + K_2 + \dots + K_r)^\mu = (K_1 + K_2 + \dots + K_r)\sum_{\Gamma^\mu_r} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} = \\
&\quad = K_1 \sum_{\Gamma^\mu_r} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} + K_2 \sum_{\Gamma^\mu_r} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} + \dots + K_r \sum_{\Gamma^\mu_r} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r}.
\end{aligned}$$

В каждой l-й сумме извлечем слагаемое по набору $(0; 0; \dots; \mu; \dots; 0)$, $l = 1, 2, \dots, r$:

$$\begin{aligned}
&K_1 S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{\mu,0,\dots,0} + K_1 \sum_{\Gamma^\mu_{r,1}} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} + \dots + K_l S^{K_1,K_2,\dots,K_l,\dots,K_r}_{0,0,\dots,\mu,\dots,0} + \\
&\quad + K_l \sum_{\Gamma^\mu_{r,l}} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} + \dots + K_r S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{0,0,\dots,\mu} + K_r \sum_{\Gamma^\mu_{r,r}} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r}.
\end{aligned}$$

Сделаем в них замену $i_l \to i_l - 1$, внесем под одну сумму и воспользуемся равенством (6):

$$S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{\mu+1,0,\dots,0} + S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{0,\mu+1,0,\dots,0} + \ldots + S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{0,0,\dots,\mu+1} +$$

$$+ \sum_{\bigcup\limits_{l=1}^{r} \Gamma^{\mu+1}_{r,l}} K_1 S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1-1,i_2,\dots,i_r} + K_2 S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2-1,\dots,i_r} + \ldots + K_r S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r-1} +$$

$$= S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{\mu+1,0,\dots,0} + S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{0,\mu+1,0,\dots,0} + \ldots + S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{0,0,\dots,\mu+1} + \sum_{\bigcup\limits_{l=1}^{r} \Gamma^{\mu+1}_{r,l}} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r} = \sum_{\Gamma^{\mu+1}_{r}} S^{K_1,K_2,\dots,K_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r},$$

что и требовалось доказать. □

2. Уравнение ветвления. Выведем уравнение ветвления. Подставив

$$u(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{t-t_0}{\lambda(\varepsilon)}\right) v(\varepsilon), \tag{8}$$

где $v(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная в $\mathfrak{E}$ функция, $v(\varepsilon) \neq 0$, в (1), получим спектральное уравнение

$$Av(\varepsilon) = \left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right] v(\varepsilon). \tag{9}$$

В силу леммы 1 оно равносильно системе

$$\Big(I - A^-\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right]\Big) v(\varepsilon) = e, \tag{10}$$

$$\Big\langle Q\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda\big(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F\big)\right] v(\varepsilon), \varphi \Big\rangle = 0. \tag{11}$$

Наложим следующее условие.

Условие 2. Числа $\lambda = \lambda(\varepsilon) \in \mathbb{C}$, отличные от нуля и достаточно малые по модулю, таковы, что при каждом $\varepsilon \in \mathfrak{E}$ выполнено неравенство

$$0 < \Big\| A^-\Big[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\Big]\Big\| < 1.$$

При выполнении условий 1, 2 уравнение (10) разрешимо:

$$v(\varepsilon) = \Big(I - A^-\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right]\Big)^{-1} e. \tag{12}$$

Подставив (12) в (11), получим искомое уравнение ветвления:

$$R(\lambda,\varepsilon)e = 0, \tag{13}$$

где

$$R(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \Big\langle Q\Big[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\Big]\Big(I - A^-\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right]\Big)^{-1}(\cdot), \varphi\Big\rangle.$$

3. Выявление условий регулярности вырождения в частном случае. Выявим условия регулярности вырождения в задаче (1), (2), для чего рассмотрим уравнение (13).

Пусть выполнено равенство (6) для $K_1 = A^-B$, $K_2 = A^-C$, $K_3 = A^-D$, $K_4 = A^-E$, $K_5 = A^-F$. Преобразуем выражение $\big(I - A^-[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)]\big)^{-1}$ по формуле Неймана, применив утверждение 1:

$$\Big(I - A^-\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right]\Big)^{-1} =$$

$$= I + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(A^-\left[\varepsilon B + \varepsilon^2 C + \lambda(D + \varepsilon E + \varepsilon^2 F)\right]\Big)^m =$$

$$= I + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\Gamma^m_5} \lambda^{i_3+i_4+i_5} \varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+2} S^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}.$$

Тогда выражение $R(\lambda,\varepsilon)(\cdot)$ можно записать в виде

$$R(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \varepsilon\big\langle QBe,\varphi\big\rangle + \varepsilon^2\big\langle QCe,\varphi\big\rangle + \lambda\big\langle QDe,\varphi\big\rangle + \lambda\varepsilon\big\langle QEe,\varphi\big\rangle + \lambda\varepsilon^2\big\langle QFe,\varphi\big\rangle + \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\Big[R_m^B(\lambda,\varepsilon) + R_m^C(\lambda,\varepsilon) + R_m^D(\lambda,\varepsilon) + R_m^E(\lambda,\varepsilon) + R_m^F(\lambda,\varepsilon)\Big](\cdot), \quad (14)$$

где

$$R_m^B(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m}\lambda^{i_3+i_4+i_5}\varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+3}\big\langle QBS_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}(\cdot),\varphi\big\rangle,$$

$$R_m^C(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m}\lambda^{i_3+i_4+i_5}\varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+4}\big\langle QCS_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}(\cdot),\varphi\big\rangle,$$

$$R_m^D(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m}\lambda^{i_3+i_4+i_5+1}\varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+3}\big\langle QDS_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}(\cdot),\varphi\big\rangle,$$

$$R_m^E(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m}\lambda^{i_3+i_4+i_5+1}\varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+4}\big\langle QES_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}(\cdot),\varphi\big\rangle,$$

$$R_m^F(\lambda,\varepsilon)(\cdot) = \sum_{\Gamma_5^m}\lambda^{i_3+i_4+i_5+1}\varepsilon^{i_1+2i_2+i_4+2i_5+5}\big\langle QFS_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5}^{A^-B,A^-C,A^-D,A^-E,A^-F}(\cdot),\varphi\big\rangle.$$

Запишем выражение (14) в виде

$$R(\lambda,\varepsilon) = \sum_{i,j=0}^{\infty}\lambda^i\varepsilon^j H_{ij}, \quad H_{00} = 0,$$

и введем обозначение $h_{ij} = H_{ij}e$.

Решим уравнение (13) при выполнении следующего условия.

Условие 3. Существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что

$$h_{ij} = 0, \qquad i = 0,1,2,\dots,p-1, \qquad j = 1,2,\dots,$$
$$h_{pj} = 0, \qquad j = 0,1,2,\dots,n-1, \qquad h_{pn} \neq 0.$$

В силу леммы 2 конечность D-жордановой цепочки оператора A влечет

$$h_{p+1,0} \neq 0.$$

Построим диаграмму Ньютона (см. рис. 1). Уравнение ветвления имеет вид

$$\lambda^p\varepsilon^n h_{pn} + \lambda^{p+1}h_{p+1,0} + o(\lambda^{p+1}) = 0,$$

где $o(\lambda^{p+1})$ вмещает в себя нормы ограниченных, в силу условия 1, операторов. Оно имеет решение

$$\lambda = -\frac{h_{pn}}{h_{p+1,0}}\varepsilon^n. \quad (15)$$

Подстановка (15) в (8) приводит к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 3*, лемма* 2 *и неравенство*

$$\operatorname{Re}\frac{h_{pn}}{h_{p+1,0}} > 0. \quad (16)$$

Тогда в задаче (1), (2) *наблюдается явление погранслоя, и функции погранслоя имеют переменную* $\tau = (t-t_0)/\varepsilon^n$*.*

Неравенство (16) является условием регулярности вырождения.

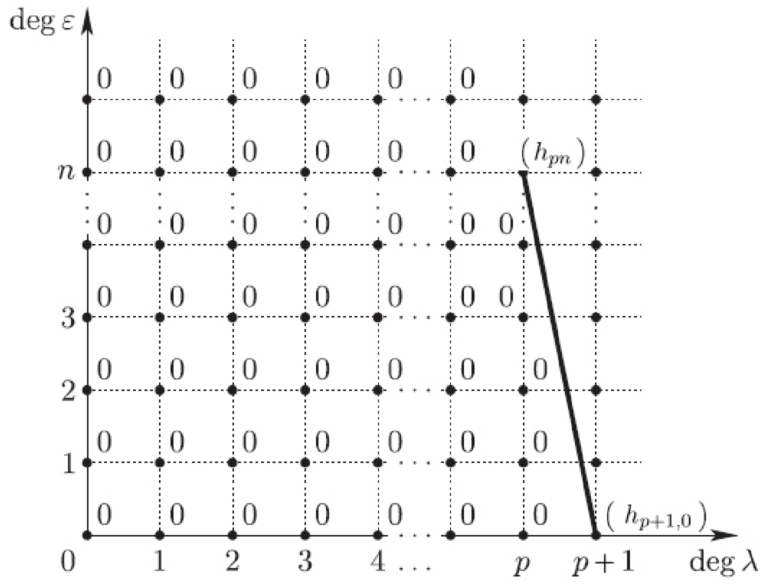

Рис. 1. Диаграмма Ньютона

4. О фредгольмовости одного оператора. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, задаваемый числовой матрицей

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ \alpha a_{11}+\beta a_{21} & \alpha a_{12}+\beta a_{22} & \alpha a_{13}+\beta a_{23}\end{pmatrix},$$

где $a_{ij}\neq 0$, отношения a_{2j}/a_{1j} попарно различны, $i=1,2$, $j=1,2,3$.

Утверждение 2. *Оператор $\mathcal{A}$ фредгольмов.*

Доказательство. Возьмем элементы $\xi=\big(\xi_1,\xi_2,\xi_3\big)^T$, $\eta=\big(\eta_1,\eta_2,\eta_3\big)^T\in\mathbb{R}^3$ (здесь ^{T} — знак транспонирования). Решив уравнение $\mathcal{A}\xi=0$, построим ядро оператора $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A}=\left\{\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\xi_3,\ \frac{\Delta_2}{\Delta}\xi_3,\ \xi_3\right)^T\right\},\quad \xi_3\neq 0,$$

где

$$\Delta_1=\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{pmatrix},\quad \Delta_2=-\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{pmatrix},\quad \Delta=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Разложив элемент $\xi\in X_1=\mathbb{R}^3$ в сумму $\xi_{\operatorname{Ker}\mathcal{A}}+\xi_{\operatorname{Coim}\mathcal{A}}$ элементов из $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Coim}\mathcal{A}$ соответственно, построим $\operatorname{Coim}\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Coim}\mathcal{A}=\left\{\left(\xi_1-\frac{\Delta_1}{\Delta}\xi_3,\ \xi_2+\frac{\Delta_2}{\Delta}\xi_3,\ 0\right)^T\right\}.$$

Приравнивая $\xi_{\operatorname{Ker}\mathcal{A}}=\xi_{\operatorname{Coim}\mathcal{A}}$, находим $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$; значит, имеет место разложение

$$X_1=\mathbb{R}^3=\operatorname{Ker}\mathcal{A}\oplus\operatorname{Coim}\mathcal{A}.$$

Образ оператора $\mathcal{A}$ равен

$$\operatorname{Im}\mathcal{A}=\left\{(\eta_1,\ \eta_2,\ \alpha\eta_1+\beta\eta_2)^T\right\}.$$

Разложив элемент $\eta\in X_2=\mathbb{R}^3$ в сумму $\eta_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}+\eta_{\operatorname{Coker}\mathcal{A}}$, построим $\operatorname{Coim}\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Coim}\mathcal{A}=\left\{(0,\ 0,\ -\alpha\eta_1-\beta\eta_2+\eta_3)^T\right\}.$$

Приравнивая $\eta_{\operatorname{Im}\mathcal{A}} = \eta_{\operatorname{Coker}\mathcal{A}}$, находим $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$; значит, имеет место разложение
$$X_2 = \mathbb{R}^3 = \operatorname{Im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Coker}\mathcal{A}.$$
Нетрудно видеть, что $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Coker}\mathcal{A} = 1$.

Проектор на $\operatorname{Coker}\mathcal{A}$
$$Q(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\beta & 1 \end{pmatrix}$$
является идемпотентным.

Решение уравнения $\mathcal{A}\xi_{\operatorname{Coim}\mathcal{A}} = \eta_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}$ влечет взаимно однозначное соответствие между $\operatorname{Coim}\mathcal{A}$ и $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, и
$$\mathcal{A}^{-} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
ограничен. Тем самым, фредгольмовость оператора $\mathcal{A}$ доказана. □

5. Пример. Рассмотрим задачу (1), (2) со следующими операторами $A, B, C, D, E, F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & d & 5 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} g_1 & 8 & g_2 \\ -10 & 0 & -6 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} -45 & 80 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix},$$
где d, g_1, g_2 — параметры. В силу утверждения 2 оператор A фредгольмов. Возьмем
$$e = \bigl(1,\ -2,\ 1\bigr)^T \in \operatorname{Ker} A, \quad \varphi = \bigl(0,\ 0,\ 1\bigr)^T \in \operatorname{Coker} A.$$
Так как $QB = QC = 0$, то $h_{0j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$,
$$\begin{aligned} h_{10} &= \bigl\langle QDe, \varphi\bigr\rangle = 4d + 4, \\ h_{11} &= \bigl\langle QDA^{-}Be, \varphi\bigr\rangle + \bigl\langle QEe, \varphi\bigr\rangle = -2g_1 - 2g_2 - 22d - 50, \\ h_{12} &= \bigl\langle QEA^{-}Be, \varphi\bigr\rangle + \bigl\langle QFe, \varphi\bigr\rangle = 30g_1 + 180, \\ h_{20} &= \bigl\langle QDA^{-}De, \varphi\bigr\rangle = 12d^2 - 26d - 468. \end{aligned}$$

При $d \neq -1$ имеем $h_{10} \neq 0$, что влечет равномерную сходимость решения задачи (1), (2) к решению задачи (4), поскольку диаграмма Ньютона вырождается в точку $(1; 0)$.

Применим результаты теоремы 2. Пусть $d = -1$; тогда $h_{11} = -2g_1 - 2g_2 - 28$, $h_{20} = -430$. При выполнении условия $h_{11} < 0$, т.е. $g_1 + g_2 > -14$, функции погранслоя имеют переменную $\tau = (t - t_0)/\varepsilon$.

Если $h_{11} = 0$, т.е. $g_1 + g_2 = -14$, то при $30g_1 + 180 < 0$, т.е. $g_1 < -6$ и $g_2 > -8$, функции погранслоя имеют переменную $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
2. *Зубова С. П.* Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной/ Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. — Воронеж, 1973.
3. *Зубова С. П.* О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной// Докл. Акад. наук. — 2014. — *454*, № 4. — С. 383–386.
4. *Зубова С. П., Усков В. И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай// Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 3. — С. 392–403.
5. *Кузнецова А. В.* Экономико-математические методы и модели. — Минск: БГЭУ, 2000.

6. *Нефедов Н. Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция-диффузия-адвекция: теория и применение// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2021. — *61*, № 12. — С. 2074–2094.
7. *Никольский С. М.* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1943. — *7*, № 3. — С. 147–166.
8. *Усков В. И.* Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части// Вестн. росс. ун-тов. Мат. — 2021. — *26*, № 134. — С. 172–181.
9. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. — М.: Либроком, 2009.
10. *Christiansen P. L., Lomdahl P. S., Muto V.* On a Toda lattice model with a transversal degree of freedom// Nonlinearity. — 1991. — *4*, № 2. — P. 477–501.
11. *Uskov V. I.* Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side// J. Math. Sci. — 2020. — *250*, № 1. — P. 175–181.
12. *Zubova S. P., Raetskaya E. V.* A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space// J. Math. Sci. — 2015. — *208*, № 1. — P. 119–124.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Усков Владимир Игоревич
Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова
E-mail: vum1@yandex.ru