ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 56–74
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-56-74

УДК 517.984.3, 517.983.26

СЛЕД, ДЕТЕРМИНАНТ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ЯДЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2024 г. **О. И. РЕЙНОВ**

Аннотация. Показано, как новые результаты в теории детерминантов и следов, а также в теории квазинормированных тензорных произведений могут быть применены для получения новых теорем о распределении собственных чисел ядерных операторов в банаховых пространствах и о совпадении спектральных и ядерных следов таких операторов. В качестве примеров рассматриваются новые классы операторов — обобщенные ядерные операторы Лоренца—Лапресте $N_{(r,s),p}$.

Ключевые слова: ядерный оператор, след, детерминант, собственное число, квазинорма, тензорное произведение.

TRACE, DETERMINANT AND EIGENVALUES OF KERNEL OPERATORS

© 2024 **O. I. REINOV**

Abstract. In this paper, we show how new results in the theory of determinants and traces and in the theory of quasi-normed tensor products can be applied for obtaining new theorems on the distribution of eigenvalues of nuclear operators in Banach spaces and on the coincidence of the spectral and nuclear traces of such operators. As examples, we consider new classes of operators — generalized nuclear Lorentz–LaPreste operators $N_{(r,s),p}$.

Keywords and phrases: kernel operator, trace, determinant, eigenvalue, quasinorm, tensor product.

AMS Subject Classification: 47B10, 47A75

1. Введение. В 1950-х В. Б. Лидский [2] и А. Гротендик [5] независимо получили знаменитые формулы следа для некоторых классов ядерных операторов (В. Б. Лидский — в гильбертовых пространствах H, А. Гротендик — в общих банаховых пространствах X): *ядерный след соответствующего оператора равен его спектральному следу.* Напомним, что к классу ядерных операторов в X принадлежат операторы $T : X \to X$, которые допускают представления вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k, \quad x \in X,$$

где числа λ_k, функционалы $x'_k \in X^*$ и элементы $x \in X$ удовлетворяют некоторым условиям суммируемости (при этом $\sum |\lambda_k| < \infty$).

Напомним некоторые факты конечномерной теории. Для всякого конечномерного оператора

$$T : X \to X, \quad Tx = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes x_k$$

ядерный след $\operatorname{tr} T := \sum_{k=1}^{N} x'_k(x_k)$ вполне определен и не зависит от представления T. Также вполне определен детерминант оператора $1-T$:

$$\det(1-T) = \prod_j (1-\mu_j),$$

где (μ_j) — полный набор собственных чисел оператора T. В этом случае, естественно, имеем формулу следа

$$\operatorname{tr} T = \sum_j \mu_j.$$

Для получения формулы в случае ядерных операторов надо научиться продолжать функционалы «след» и «детерминант» с множества конечномерных операторов на соответствующие пространства ядерных операторов. Такое продолжение, в частности, — цель работы. Доказательства основных теорем о спектральных свойствах ядерных операторов основано как раз на возможности этих продолжений.

2. Предварительные сведения. Вся терминология и факты (в настоящее время классические), приводимые здесь без каких-либо объяснений, могут быть найдены в [4, 5, 13, 14].

Пусть X, Y — банаховы пространства. Для банахова пространства, сопряженного к X, используем обозначение X^*. Если $x \in X$ и$x' \in X^*$, то используем обозначение $\langle x', x\rangle$ для $x'(x)$.

Обозначим через $X^*\widehat{\otimes}Y$ пополнение тензорного произведения $X^* \otimes Y$ (рассматриваемого как линейное пространство всех конечномерных операторов из X в Y) по норме

$$\|w\| := \inf\left\{\left(\sum_{k=1}^{N} \|x'_k\|\,\|y_k\|\right) :\ w = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes y_k\right\}$$

(см., например, [5, 14]). Для $X = Y$, естественный непрерывный линейный функционал «trace» на $X^* \otimes X$ имеет единственное непрерывное продолжение на пространство $X^*\widehat{\otimes}X$, которое также будем обозначать «trace».

Обозначим через $N(X, Y)$ образ тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}Y$ в пространстве $L(X, Y)$ всех ограниченных линейных отображений при каноническом фактор-отображении $X^*\widehat{\otimes}Y \to N(X, Y) \subset L(X, Y)$. Рассмотрим (гротендиковское) пространство $N(X, Y)$ всех ядерных операторов из X в Y с естественной нормой, индуцированной из $X^*\widehat{\otimes}Y$. Для тензорного элемента $u \in X^*\widehat{\otimes}Y$ обозначим через $\widetilde{u}$ соответствующий ядерный оператор из X в Y. Иногда норму проективного тензорного произведения обозначают через π, а инъективную норму (т.е. норму, индуцированную обычной операторной нормой) — через ε. Поэтому, например, $X^*\widehat{\otimes}_\pi Y = X^*\widehat{\otimes}Y$ и $X^*\widehat{\otimes}_\varepsilon Y$ — замыкание множества конечномерных операторов в $L(X, Y)$.

Примеры ядерных операторов (о квазинормах см. информацию ниже). Напомним их общий вид:

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k(x) x_k, \quad x \in X,$$

Например, если $0 < s \leqslant 1$, $\sum |\lambda_k|^s < \infty$ и $\{x'_k\}, \{x_k\}$ ограничены, то $T \in N_s(X)$ (s-ядерный оператор с естественной квазинормой).

Более общо, если $(\lambda_k) \in l_{s,u}, 0 < u \leqslant 1$ (пространство Лоренца), то $T \in N_{s,u}(X)$ ($l_{s,u}$-ядерный оператор с естественной квазинормой).

Если $0 < r \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $(\lambda_k) \in l_r$, т.е. $\sum |\lambda_k|^r < \infty$, $\{x'_k\}$ ограничена и $(x_k) \in l^w_{p'}(X)$ (см. ниже), т.е. для всякого $x' \in X^*$ ряд $\sum |x'(x_k)|^{p'}$ сходится, то $T \in N_{r,p}(X)$ ((r, p)-ядерный с естественной квазинормой).

Ядерный след оператора T определяется как сумма ряда:

$$\operatorname{tr} T := \sum \lambda_k x'_k(x_k),$$

спектральный след оператора T — как сумма $\sum \mu_n$, где $\{\mu_n\}$ — последовательность всех собственных чисел T.

Ядерный след определен не для каждого ядерного оператора. В условиях теоремы Лидского он определен всегда, а в условиях теоремы Гротендика — для случая, когда $\sum |\lambda_k|^{2/3} < \infty$.

Напомним общий вид проективного тензорного элемента:

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y'_k \otimes x_k \in Y^* \widehat{\otimes} X$$

Сопряженное к $Y^* \widehat{\otimes} X$ пространство есть $L(X, Y^{**})$. Двойственность задается следом.

Рассмотрим функционал $\widetilde{T} \in (Y^* \widehat{\otimes} X)^*$, определяемый оператором $T \in L(X, Y^{**})$. Имеем:

$$\langle \widetilde{T}, z \rangle := \operatorname{tr} T \circ z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T x_k(y'_k), \quad z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k y'_k \otimes x_k \in Y^* \widehat{\otimes} X.$$

Для $q \in (0, +\infty]$ обозначим через $l_q^w(X)$ пространство всех слабо q-суммируемых последовательностей $(x_i) \subset X$ (см., например, [13, 14]) с квазинормой

$$\varepsilon_q((x_i)) := \sup \left\{ \left(\sum_i |\langle x', x_i \rangle|^q \right)^{1/q} : \ x' \in X^*, \ \|x'\| \leqslant 1 \right\}$$

(в случае, когда $q = \infty$, предполагаем, что (x_i) — просто ограниченная, т.е. $\varepsilon_\infty((x_i)) = \sup_i \|x_i\|$).

Пространство Лоренца $l_{p,q}$ ($0 < p < \infty$, $0 \leqslant \infty$) состоит из последовательностей $\alpha := (\alpha_n) \in c_0$, для которых

$$\|\alpha\|_{p,q} := \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{*q} n^{q/p-1} \right)^{1/q} < +\infty \text{ при } q < \infty; \qquad \|\alpha\|_{p\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^* n^{1/p} < +\infty,$$

где (α_n^*) — неубывающая перестановка последовательности α, n-й элемент α_n^* которой определяется так:

$$\alpha_n^* := \inf_{|J| < n} \sup_{j \notin J} |\alpha_j|.$$

С указанными квазинормами пространства $l_{p,q}$ являются полными квазинормированными пространствами. При $p = q < \infty$ получаем пространства l_p.

Введем еще несколько стандартных обозначений: $l_p(X)$ — пространство абсолютно суммируемых последовательностей из X, $L(X) := L(X, X)$, Π_p — идеалы абсолютно p-суммирующих операторов, N_s (для $s \in (0, 1]$) — квазинормированный идеал s-ядерных операторов (см. ниже более общее определения операторов из квазинормированного идеала $N_{r,p}$). Норма в банаховом пространстве X обозначается обычно просто $\| \cdot \|$, но если необходимо подчеркнуть, в каком пространстве берется норма, то мы пишем $\| \cdot \|_X$. Для последовательностей элементов некоторого множества используются обозначения типа (x_k), $(x_k)_k$, $(x_k)_{k=1}\infty$, $\{x_k\}$ и т. д.

Понятие детерминанта (Фредгольма) появится в своем месте. Отметим только, что для элемента $u \in X^* \widehat{\otimes} X$ его детерминант Фредгольма есть целая функция

$$\det(1 - zu) = 1 - \operatorname{tr} uz + \dots$$

с нулями, равными $1/\mu_k(\tilde{u})$, — обратным к ненулевым собственным значениям (каждое взятое с учетом кратности) оператора $\tilde{u}$ (см. [5]).

3. Основные определения и факты.

3.1. Квазинормы и операторные идеалы. Наше определение квазинормы несколько нестандартно. Пусть α — функция на некотором векторном пространстве E, $\alpha : E \to \widehat{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — *квазинорма* на E, если выполнены следующие условия:

(i) $\alpha(E) \subset [0, +\infty]$ и $\alpha(x) = 0$ влечет $x = 0$;

(ii) существует такая постоянная $C > 0$, что $\alpha(x + y) \leqslant C[\alpha(x) + \alpha(y)]$ для $x, y \in E$;

(iii) $\alpha(ax) = |a|\alpha(x)$ для $a \in \mathbb{K}$, $x \in E$.

Определение 3.1. Пусть дана пара (E,α), где α — квазинорма на векторном пространстве E.

(i) *Квазинормированным пространством, ассоциированным с парой* (E,α), называется квазинормированное векторное пространство
$$E_\alpha := \{x \in E : \ \alpha(x) < \infty\}.$$

(ii) Квазинормированное пространство E_α называется *полным* (или квазибанаховым пространством), если каждая последовательность Коши в E_α α-сходится к некоторому элементу из E_α.

Отметим, что E_α является квазинормированным пространством в смысле книги [10, с. 159]; мы можем рассматривать соответствующую топологию (см. [10, с. 159-160], [3, с. 445]).

Замечание 3.1.

1. Вполне может быть, что выполняется равенство $E_\alpha = E$.
2. Хорошо известно (см. [3, с. 445]), что если E_α — квазинормированное пространство, то существует число $\beta \in (0,1]$ и β-норма $\|\cdot\|$ на E_α, эквивалентная квазинорме α. Напомним, что β-норма на векторном пространстве F это квазинорма $\|\cdot\| : F \to \mathbb{R}$, для которой при всех $x,y \in F$ выполняется следующее β-неравенство треугольника $\|x+y\|^\beta \leqslant \|x\|^\beta + \|y\|^\beta$.

Напомним, что операторный идеал $\mathbb{A} := (A(X,Y) : X,Y$ — банаховы пространства) есть подкласс класса всех линейных ограниченных операторов, компоненты $A(X,Y) \subset L(X,Y)$ которого удовлетворяют следующим условиям:

($\mathrm{O_i}$) $1_K \in \mathbb{A}$, где K обозначает одномерное банахово пространство;
($\mathrm{O_{ii}}$) если $U,V \in A(X,Y)$, то $a_1U + a_2V \in A(X,Y)$ для всех скалярных a_1, a_2;
($\mathrm{O_{iii}}$) если $S \in L(Z,X)$, $U \in A(X,Y)$ и $T \in L(Y,W)$, то $TUS \in A(Z,W)$.

Операторный идеал $\mathbb{A}$ называется квазинормированным, если на нем определен класс a квазинорм (обозначим их снова a), которые на компонентах являются квазинормами, обладающими следующими свойствами:

($\mathrm{O_{iv}}$) $a(1_K) = 1$;
($\mathrm{O_v}$) если $S \in L(Z,X)$, $U \in A(X,Y)$ и $T \in L(Y,W)$, то $a(TUS) \leqslant \|T\|\, a(U)\, \|S\|$.

3.2. Проективные квазинормы и свойства аппроксимации. Пусть α — такая квазинорма на проективном тензорном произведении $X\widehat{\otimes}Y$, что $\alpha(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\|$ для $x \in X, y \in Y$. Ассоциированное квазинормированное тензорное произведение (которое мы будем обозначать через $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ и называть α-проективным тензорным произведением) является α-замыканием алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ в $(X\widehat{\otimes}Y)_\alpha$ (в конкретных случаях будем использовать некоторые специфические обозначения). Таким образом,
$$X\widehat{\otimes}_\alpha Y := \Big\{u \in X\widehat{\otimes}Y : \ \alpha(u) < \infty, \ \exists (u_n) \subset X \otimes Y : \ \alpha(u - u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}.$$

Определение 3.2.

I. Пусть $\widehat{\otimes}$ обозначает класс всех тензорных элементов проективных тензорных произведений произвольных банаховых пространств. Проективная тензорная квазинорма α — такое отображение из $\widehat{\otimes}$ в $\widehat{\mathbb{R}}$, что α является квазинормой на каждой компоненте $X\widehat{\otimes}Y$, обладающей следующими свойствами:
   ($\mathrm{Q_1}$) $\alpha(x \otimes y) = \|x\|\,\|y\|$ для $x \in X, y \in Y$;
   ($\mathrm{Q_2}$) существует такая постоянная $C > 0$, что $\alpha(u_1 + u_2) \leqslant C[\alpha(u_1) + \alpha(u_2)]$ для всех X, Y и $u_1, u_2 \in X\widehat{\otimes}Y$;
   ($\mathrm{Q_3}$) если $u \in X\widehat{\otimes}Y$, $A \in L(X,E)$ и $B \in L(Y,F)$, то $\alpha(A \otimes B(u)) \leqslant \|A\|\,\alpha(u)\,\|B\|$.
   ($\mathrm{Q_4}$) для всех X,Y тензорное произведение $X \otimes Y$ плотно в $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$.

II. Проективная тензорная норма α называется полной, если каждое α-проективное тензорное произведение $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ является полным, т.е. квази-банаховым.

Для каждой проективной тензорной квазинормы α существуют такие $\beta \in (0,1]$ и эквивалентная β-норма $\|\cdot\|_\beta$ на $\widehat{\otimes}$, что $X\widehat{\otimes}_\alpha Y = X\widehat{\otimes}_{\|\cdot\|_\beta} Y$ (т.е. существует такая квазинорма $\|\cdot\|_\beta$ с β-неравенством треугольника, что для некоторых положительных постоянных C_1, C_2 и для всех проективных тензорных элементов u выполняются неравенства $C_1\alpha(u) \leqslant \|u\|_\beta \leqslant C_2\alpha(u)$). Таким образом, можем предполагать, если нужно, что a priori α есть β-норма.

Мы не будем здесь рассматривать детально свойства введенных объектов. Однако нам понадобится ниже тот факт, что отображение включения $X\widehat{\otimes}_\alpha Y \hookrightarrow X\widehat{\otimes} Y$ непрерывно для всех банаховых пространств X, Y (в основных примерах 3.1 ниже это будет автоматически выполнено). Доказательство можно найти в работе автора [19, Proposition 4.1].

Так как $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ — линейное подпространство в $X\widehat{\otimes} Y$, то пространство $L(Y, X^*)$ разделяет точки $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$. Если $u \in X\widehat{\otimes}_\alpha Y$, то $u = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{trace} U \circ u = 0$ для каждого $U \in L(Y, X^*)$. В частности, сопряженное пространство к $(X\widehat{\otimes}_\alpha Y)^*$ разделяет точки $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$.

Ясно, что каждый тензорный элемент $u \in X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ порождает ядерный оператор $\widetilde{u} : X^* \to Y$. Если X является сопряженным пространством, скажем E^*, то получаем каноническое отображение $j_\alpha : E^*\widehat{\otimes}_\alpha Y \to L(E, Y)$. Обозначим через $N_\alpha(E, Y)$ образ отображения j_α и снабдим его «α-ядерной» квазинормой ν_α: это квазинорма, индуцированная из $E^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$ фактор-отображением $E^*\widehat{\otimes}_\alpha Y \to N_\alpha(E, Y)$. Если проективная тензорная квазинорма α полна, то $N_\alpha(E, Y)$ является квази-банаховым пространством, а N_α — квази-банахов операторный идеал.

Определение 3.3. Пусть α — полная проективная тензорная квазинорма. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством аппроксимации AP_α, если для любого банахова пространства E каноническое отображение $E^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to N_\alpha(E, X)$ взаимно однозначно (другими словами, если $E^*\widehat{\otimes}_\alpha X = N_\alpha(E, X)$).

Заметим, что если $\alpha = \|\cdot\|_\wedge$, то получаем классическое свойство аппроксимации AP А. Гротендика (см. [5]). Должно быть понятно, что AP влечет AP_α для любой проективной тензорной квазинормы.

Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Банахово пространство X имеет свойство AP_α тогда и только тогда, когда каноническое отображение $X^*\widehat{\otimes}_\alpha X \to L(X)$ взаимно однозначно.*

Доказательство леммы 3.1 дословно повторяет доказательство предложения 6.1 из [19].

Пример 3.1. Пусть $0 < r, s \leqslant 1$, $0 < p, q \leqslant \infty$ и $1/r + 1/p + 1/q = 1/\beta \geqslant 1$. Определим тензорное произведение $X\widehat{\otimes}_{r,p,q} Y$ как линейное подпространство проективного тензорного произведения $X\widehat{\otimes} Y$, состоящее из всех тензорных элементов z, которые допускают представления вида

$$z = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k x_k \otimes y_k, \quad (\alpha_k) \in l_r, \quad (x_k) \in l_{w,p}(X), \quad (y_k) \in l_{w,q}(Y);$$

мы снабжаем его квазинормой

$$\|z\|_{r,p,q} := \inf \|(\alpha_k)\|_r \, \|(x_k)\|_{w,p} \, \|(y_k)\|_{w,q},$$

где инфимум берется по всем представлениям z в указанной выше форме. Отметим, что это тензорное произведение β-нормировано (см. [11], где рассмотрена версия рассматриваемого тензорного произведения как пополнение алгебраического тензорного произведения по соответствующей «конечной» $\|\cdot\|_{r,p,q}$-квазинорме). Оно квази-банахово (о его полноте см. [15]). Соответствующий квазинормированный операторный идеал $N_{r,p,q}$ есть квази-банахов идеал (r,p,q)-ядерных операторов (см. [11, 13]). В частных случаях, когда один или два из показателей p, q равны ∞, мы используем обозначения, близкие к аналогичным обозначениям из [17, 19] (с заменой p', q' на p, q): $N_{r,\infty,\infty}$ через N_r, $N_{r,\infty,q}$ через $N_{[r,q]}$, $N_{r,p,\infty}$ через $N^{[r,p]}$, $\widehat{\otimes}_{r,\infty,\infty}$ через $\widehat{\otimes}_r$, $\widehat{\otimes}_{r,\infty,q}$ через $\widehat{\otimes}_{[r,q]}$, $\widehat{\otimes}_{r,p,\infty}$, через $\widehat{\otimes}^{[r,p]}$. Соответствующие обозначения используем также для свойств $AP_{r,p,q}$:

(i) для $p = q = \infty$ получаем AP_r из [19];
(ii) для $p = \infty$ получаем $AP_{[r,q]}$ из [17, 19];

(iii) для $q = \infty$ получаем $AP^{[r,p]}$ из [17, 19].

Нам понадобятся некоторые факты о свойствах аппроксимации из примера 3.1. Соберем их в следующей лемме.

Лемма 3.2.

(1) [см. [18, Corollary 10]]. *Пусть* $s \in (0,1]$, $p \in [1,\infty]$ *и* $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$. *Если банахово пространство изоморфно подпространству фактор-пространства (или фактор-пространству подпространства) некоторого* L_p*-пространства, то оно имеет свойство* AP_s.

(2) [см. [17, Corollary 4.1], [19, Theorem 7.1]]. *Пусть* $1/r - 1/p = 1/2$. *Каждое банахово пространство обладает свойствами* $AP_{[r,p']}$ *и* $AP^{[r,p']}$.

Доказательство утверждения 2 см. ниже (пример 3.3; см. также [19] для других результатов в этом направлении).

Замечание 3.2. По существу доказательство того, что каждое банахово пространство имеет свойство $AP^{[1,2]}$ явно содержится в [13]. Там получено, что это утверждение (после применения некоторых фактов из комплексного анализа) влечет формулы типа формул Гротендика—Лидского для операторов из $N^{[1,2]}$ (см. [13, 27.4.11]; это влечет формулу Лидского для trace-класса операторов в гильбертовых пространствах и также формулу следа Гротендика для $N_{2/3}$). С другой стороны, существует весьма простой способ получить эти результаты о свойствах $AP^{[1,2]}$ и $N^{[1,2]}$ из теоремы Лидского (см. доказательства теорем [19, Theorems 7.1-7.3] для $p = 2$).

3.3. Факторизация через прямые суммы. Ниже X, Y — произвольные банаховы пространства.

Напомним, что последовательность (x_k) элементов из X называется безусловным базисом, если каждый $x \in X$ единственным образом разлагается в ряд $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ и этот ряд безусловно сходится (сходится при любой перестановке ряда). Это эквивалентно тому, что существует такая постоянная $K \geqslant 1$, что для любого выбора знаков $(t_k) = (\pm 1)$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k x_k \right\| \leqslant K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right\|.$$

Безусловная константа базиса (x_k) есть $ub(x_k) := \inf K$. Таким образом, 1-безусловный базис — это базис, для которого $\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k x_k \right\|$ для всякого $x \in X$ при любом выборе знаков (t_k). Базис нормирован, если все его элементы имеют единичную норму.

Если (x_k) — безусловный базис и σ — подмножество множества натуральных чисел, то естественный проектор $P_\sigma : X \to X$, определяемый формулой

$$P_\sigma(x) := \sum_{k \in \sigma} a_k x_k,$$

ограничен и $\|p_\sigma\| \leqslant ub(x_k)$ (см., например, [12, с. 18]).

Напомним определение прямой суммы банаховых пространств. Пусть E — банахово пространство с 1-безусловным нормированным базисом (e_k) и (X_i) — последовательность банаховых пространств. *Прямой суммой* этих пространств по типу E называется банахово пространство $\left(\sum X_i\right)_E$, состоящее из последовательностей (x_i), $x_i \in X_i$, для которых конечна норма

$$\|(x_i)\| := \left\| \sum_i \|x_i\| \, e_i \right\|_E.$$

Пространство $\left(\sum X_i\right)_E$ обладает следующими важными свойствами:

(u_1) Каждое пространство X_n естественным образом изометрически вкладывается в $\left(\sum X_i\right)_E$ и его образ 1-дополняем там, т.е. существует (естественный) непрерывный проектор из

$\left(\sum X_i\right)_E$ на образ X_n и норма этого проектора равна 1. Более того, то же верно, если вместо одного пространства X_n рассмотреть конечную прямую сумму $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_E$ и соответствующий проектор P_n.[1]

(u_2) Если в каждой из изометрических копий пространств X_i взять по элементу x_i единичной нормы, то полученная последовательность (x_i) будет образовывать последовательность, эквивалентную базису (e_i).

Заметим, что определить понятие прямой суммы («по базису») с теми же хорошими свойствами для пространств в базисами более слабых типов (например, условного) затруднительно (цитата из [1]: как ни определяй понятие прямой суммы бесконечномерных пространств X_i по последовательности (e_i), не являющейся безусловной базисной последовательностью, свойство (u_2) прямой суммы не будет выполнено ни в каком смысле).

Ниже, говоря о прямых суммах пространств, будем подразумевать (если не задан явно тип суммы), что рассматриваемая сумма берется по типу E для некоторого пространства E с 1-безусловным базисом.

Пусть $\mathbb{Z} := (Z_\alpha)$ — семейство банаховых пространств, которое с каждой парой пространств Z_1, Z_2 содержит и их прямую сумму $Z_1 \oplus Z_2$. Обозначим через Γ_Z совокупность всех операторов, которые факторизуются через пространство из $\mathbb{Z}$: $T \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда существуют пространство $Z \in \mathbb{Z}$ и такие операторы $A \in L(X,Z)$ и $B \in L(Z,Y)$, что $T = BA : X \xrightarrow{A} Z \xrightarrow{B} Y$. Пространство $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ нормировано с нормой

$$\gamma_{\mathbb{Z}}(T) := \inf\Big\{\|A\|\,\|B\| :\ \exists\, Z \in \mathbb{Z},\ A \in L(X,Z),\ B \in L(Z,Y);\ T = BA\Big\},$$

а $(\Gamma_{\mathbb{Z}}, \gamma_{\mathbb{Z}})$ — нормированный операторный идеал. Действительно, пусть 1_K — тождественный оператор в одномерном пространстве K и $Z \in \mathbb{Z}$. Далее, пусть $j : K \to Z$ — какое-либо изометрическое вложение. Продолжим отображение (линейный функционал) $1_K j^{-1} : j(K) \to K$ с подпространства $j(K) \subset Z$ на все Z до отображения $J : Z \to K$ с сохранением нормы. Ясно, что $1_K = Jj : K \to Z \to K$, $\gamma_{\mathbb{Z}}(1_K) = 1$. Таким образом, выполнены условия ($\mathrm{O_i}$) и ($\mathrm{O_{iv}}$).

Проверим линейность (условие ($\mathrm{O_{ii}}$)). Для $U, V \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ пусть $U = B_1A_1$ и $V = B_2A_2$ — факторизации этих операторов через пространства Z_1 и через Z_2 из $\mathbb{Z}$ соответственно. Рассмотрим прямую сумму $Z := Z_1 \oplus Z_2$, обозначив через j_k и P_k естественные изометрические вложения $Z_k \to Z$ и проекторы $Z \to Z_k$, $k = 1, 2,$, соответственно (так что $P_k j_k = 1_{Z_k}$ и $P_1 j_2 = P_2 j_1 = 0$). Положим

$$A(\cdot) := (j_1A_1(\cdot), j_2A_2(\cdot)) : X \to Z = Z_1 \oplus Z_2, \quad B(\cdot) := B_1P_1(\cdot) + B_2P_2(\cdot) : Z = Z_1 \oplus Z_2 \to Y.$$

Для $x \in X$ имеем:

$$BAx = B(j_1A_1x, j_2A_2x) = (B_1P_1 + B_2P_2)(j_1A_1x, j_2A_2x) = B_1A_1x + B_2A_2x = Ux + Vx,$$

т.е. $U + V \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$, причем ясно, что

$$\gamma_{\mathbb{Z}}(U+V) \leqslant \gamma_{\mathbb{Z}}(U) + \gamma_{\mathbb{Z}}(V).$$

Мультипликативность из условия ($\mathrm{O_{ii}}$) очевидна, так же как и ясно выполнение условий ($\mathrm{O_{iii}}$) и ($\mathrm{O_v}$).

Для полноты операторного идеала нужна сходимость соответствующих рядов. Поэтому обратимся к частному случаю рассмотренного только что идеала («подидеалу»).

Пусть теперь $\mathbb{Z} := (Z_\alpha)$ — семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм (напомним, что надо фиксировать банахово пространство с

[1] Действительно,

$$\left\|P_n(x_i)_{i=1}^{\infty}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\, e_i\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\, e_i\right\|_E$$

согласно замечаниям выше.

1-безусловным базисом E и говорить о прямых E-суммах). Рассмотрим снова идеал Γ_Z операторов, которые факторизуются через пространство из $\mathbb{Z}$ с нормой, описанной выше. Пространство $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ банахово, а $(\Gamma_{\mathbb{Z}},\gamma_{\mathbb{Z}})$ — банахов нормированный операторный идеал. Действительно, надо лишь установить полноту идеала. Для этого мы фиксируем $\varepsilon>0$ и рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)<\infty,$$

где $T_k:=B_kA_k\in\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$, $A_k:X\to Z_k$ и $B_k:Z_k\to Y$ для некоторых пространств $Z_k\in\mathbb{Z}$. Будем считать, что

$$\|A_k\|\leqslant(1+\varepsilon)\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2},\quad \|B_k\|\leqslant(1+\varepsilon)\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2}.$$

Покажем, что ряд $\sum T_k$ сходится в $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$.

Положим $Z:=\Big(\sum Z_k\Big)_E\in\mathbb{Z}$. Для каждого k пусть j_k и P_k — такие изометрическое вложение $Z_k\to Z$ и проектор $Z\to Z_k$, что $1_{Z_k}=P_kj_k$, $\|P_k\|=$ (ср. с тем,, как подобное было проделано выше). Определим операторы $A:X\to Z$ и $B:Z\to Y$ равенствами

$$A:=\sum_{k=1}^{\infty}j_kA_k,\quad B:=\sum_{k=1}^{\infty}B_kP_k.$$

Так как

$$\sum\|j_kA_k\|\leqslant\sum(1+\varepsilon)\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2},\quad \sum\|B_kP_k\|\leqslant\sum(1+\varepsilon)\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k)^{1/2},$$

то эти операторы вполне определены, причем

$$\|BA\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}B_kP_kj_kA_k\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}B_kA_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|B_k\|\,\|A_k\|\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{\mathbb{Z}}(T_k).$$

Отсюда заключаем, что $T=BA=\sum T_k$, т.е. наш ряд сходится в $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ и, следовательно, пространство $\Gamma_{\mathbb{Z}}(X,Y)$ полно.

3.4. Спектральный тип. Пусть T — оператор в X, все ненулевые собственные значения которого суть собственные числа конечной (алгебраической) кратности и которые не имеют предельных точек, кроме, быть может, нуля. Положим

$$\lambda(T)=\big\{\lambda\text{— собственное значение } T\big\}\setminus\{0\}$$

(собственные числа T берутся в соответствии с их алгебраической кратностью). Будем говорить, что оператор $T\in L(X,X)$ имеет *спектральный тип* $l_{p,q}$, если последовательность собственных чисел $\lambda(T):=(\lambda_k(T))$ лежит в пространстве Лоренца $l_{p,q}$. Если T — спектрального типа l_1, то мы можем определить *спектральный след* оператора T:

$$\operatorname{sp}\operatorname{tr}(T):=\sum\lambda_k(T).$$

Говорим, что подпространство $L_1(X,X)\subset L(X,X)$ имеет *спектральный тип* $l_{p,q}$, если каждый оператор $T\in L_1(X,X)$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$. Напомним, что операторный идеал $\mathfrak{A}$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$, если каждая его компонента $\mathfrak{A}(X,X)$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$.

Определение 3.4. Пусть α — проективная квазинорма. Тензорное произведение $X\widehat{\otimes}_\alpha X$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$, если пространство $N_\alpha(X,Y)$ есть пространство спектрального типа $l_{p,q}$. Проективная тензорная квазинорма α (или тензорное произведение $\widehat{\otimes}_\alpha$) имеет спектральный тип $l_{p,q}$, если соответствующий операторный идеал N_α имеет спектральный тип $l_{p,q}$,

Пример 3.2. (i) Пространство $N_1(H)$ $(=N_{[1,2]}(H)=N^{[1,2]}(H)=S_1(H)$ (trace-класс операторов в гильбертовом пространстве) имеет спектральный тип l_1 (см. [20]).

(ii) Пространства $\widehat{\otimes}_{2/3}$ и $N_1\circ N_1$ имеют спектральный тип l_1 (см. [5]).

(iii) Пространство $N^{[1,2]}$ имеет спектральный тип l_1 (см. [13, 27.4.9]).

(iv) Пространство $N_{[1,2]}$ имеет спектральный тип l_1 (см. [19, Theorem 7.2, $p=2$]; это следует из предыдущего утверждения.

(v) Более общо, если $1/r - 1/p = 1/2$, то $\widehat{\bigotimes}_{[r,p]} = N_{[r,p]}$, $\widehat{\bigotimes}^{[r,p]} = N^{[r,p]}$ и они имеют спектральный тип l_1 (см. [19, Theorems 7.1-7.3]; простое доказательство будет дано ниже в примере 3.3).

Отметим, что во всех случаях примера 3.2 для соответствующих операторов (скажем, T) верна формула следа:

$$\operatorname{trace} T = \operatorname{sp}\operatorname{tr} T.$$

Общий результат в этом направлении — предложение 5.2. Следующее предложение — результат для частного случая, когда рассматривается семейство всех банаховых пространств; он является частным случаем предложения 5.2.

Предложение 3.1. *Пусть α — полная проективная квазинорма спектрального типа l_1. Для каждого банахова пространства X со свойством AP_α и для любого $T \in N_\alpha(X)$, имеем* $\operatorname{trace} T = \operatorname{sp}\operatorname{tr} T$.

Иногда полезно следующее обращение предыдущего предложения (для произвольной квазинормы).

Предложение 3.2. *Пусть α — полная проективная квазинорма. Если для банахова пространства X и для всякого $z \in X^*\widehat{\otimes}_\alpha X$ выполняется равенство* $\operatorname{trace} z = \operatorname{sp}\operatorname{tr} \widetilde{z}$, *то X обладает свойством AP_α.*

Доказательство. Предположим, что X не обладает свойством AP_α. Согласно лемме 3.1 найдется такой элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}_\alpha X$, что $\operatorname{trace} z = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. По предположению $\operatorname{sp}\operatorname{tr}\widetilde{z} = \operatorname{trace} z = 1$; противоречие. □

Пример 3.3. Пусть $0 < r \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1/r = 1/2 + 1/p$.

1. Если $T \in N_{[r,p']}(X)$ (см. пример 3.1), то T допускает факторизацию

$$T = BA : X \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{B} X, \quad A \in N_r(X, l_p), \quad B \in L(l_p, X).$$

Полные системы собственных чисел операторов $T = BA$ and AB совпадают. Но $AB \in N_r(l_p, l_p)$. Следовательно, AB (и, значит, T) имеют спектральный тип l_1, как и всякий r-ядерный оператор в l_p (см. [8, Theorem 7]). Отсюда вытекает, что $N_{[r,p']}$ имеет спектральный тип l_1. Легко видеть, что если $z \in X^*\widehat{\otimes}_{[r,p']}X$ таков, что $\widetilde{z} = T$, то $\operatorname{trace} z = \operatorname{trace} AB$ (напомним, что l_p имеет свойство AP). Но $\operatorname{trace} AB = \operatorname{sp}\operatorname{tr} AB$ (это установлено, например, в [16, 19], а также следует из предложения 3.1). Следовательно, для каждого $z \in X^*\widehat{\otimes}_{[r,p']}X$ имеем $\operatorname{trace} z = \operatorname{sp}\operatorname{tr}\widetilde{z}$. Согласно предложению 3.2 каждое банахово пространство обладает свойством $AP_{[r,p']}$ ($= AP_{r,\infty,p'}$; см. пример 3.1). Таким утверждение 2 леммы 3.2 для случая $AP_{[r,p']}$ доказано.

2. Если $T \in N^{[r,p']}(X)$ (см. пример 3.1), то T допускает факторизацию

$$T = BA : X \xrightarrow{A} l_p \xrightarrow{B} X, \quad A \in L(X, l_p), \quad B \in N_r(l_p, X).$$

Как и в п. 1, видим, что для любого $z \in X^*\widehat{\otimes}^{[r,p']}X$ имеем $\operatorname{trace} z = \operatorname{sp}\operatorname{tr}\widetilde{z}$. Далее, согласно предложению 3.2 каждое банахово пространство имеет свойство $AP^{[r,p]}$ ($= AP^{r,\infty,p'}$; см. пример 3.1). Таким образом, утверждение 2 леммы 3.2 для случая $AP^{[r,p']}$ доказано.

Ниже нам понадобится следующий основной результат из [21]:

(W) *Если J — квази-банахов операторный идеал спектрального типа l_1, то спектральная сумма является следом на этом идеале J.*

Напомним (см. [21, определение 2.1]), что *след* на операторном идеале J — это класс комплекснозначных функций τ, каждая из которых задана на компоненте $J(E,E)$, где E — произвольное банахово пространство, причем

(i) $\tau(e' \otimes e) = \langle e', e\rangle$ для всех $e' \in E^*$, $e \in E$;

(ii) $\tau(AU) = \tau(UA)$ для всех банаховых пространств E, F и операторов $U \in J(E,F)$, $A \in L(F,E)$;
(iii) $\tau(S+U) = \tau(S) + \tau(U)$ для всех $S, U \in J(E,E)$;
(iv) $\tau(\lambda U) = \lambda\tau(U)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $U \in J(E,E)$.

3.5. Свойства α-продолжения и α-лифтинга. Следующие определения и предложения понадобятся ниже. Впрочем, они представляют и самостоятельный интерес.

Определение 3.5. Пусть α — полная проективная тензорная квазинорма. Банахово пространство X имеет свойство α-продолжения, если для любого подпространства $X_0 \subset X$ и для всякого тензорного элемента $z_0 \in X_0^*\widehat{\otimes}_\alpha X_0$ существует продолжение $z \in X^*\widehat{\otimes}_\alpha X_0$ (так что $z \circ i = z_0$ и $\operatorname{trace} i \circ z = \operatorname{trace} z_0$, где $i : X_0 \to X$ — естественное вложение). Банахово пространство X имеет свойство α-лифтинга, если для всякого подпространства $X_0 \subset X$ и для каждого тензорного элемента $z_0 \in (X/X_0)^*\widehat{\otimes}_\alpha X/X_0$ существует лифтинг $z \in (X/X_0)^*\widehat{\otimes}_\alpha X$ (так что $Q \circ z = z_0$, где Q — фактор-отображение из X на X/X_0, и $\operatorname{trace} z \circ Q = \operatorname{trace} z_0$).

Замечание 3.3. Если X имеет свойство α-продолжения, то и каждое его подпространство имеет свойство α-продолжения. Если пространство X имеет свойство α-лифтинга, то и каждое его фактор-пространство имеет свойство α-лифтинга.

Пример 3.4. Каждое банахово пространство обладает свойствами $\|\cdot\|_{r,\infty,q}$-продолжения и $\|\cdot\|_{r,p,\infty}$-лифтинга (см. пример 3.1). Для тензорных произведений $(\widehat{\otimes}_s, \|\cdot\|_{s,\infty,\infty})$, $s \in (0,1]$, все банаховы пространства имеют как свойство $\|\cdot\|_{s,\infty,\infty}$-продолжения, так и свойство $\|\cdot\|_{s,\infty,\infty}$-лифтинга. Это следует из теорема Хана—Банаха и из определения банаховых фактор-пространств.

Теорема 3.1. *Пусть α — полная проективная тензорная квазинорма и банахово пространство X имеет свойство α-продолжения. Если $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$, то всякое его подпространство также имеет спектральный тип $l_{p,q}$.*

Доказательство. Пусть X_0 — подпространство в X и $T \in N_\alpha(X_0, X_0)$. Найдется элемент $z_0 \in X_0^*\widehat{\otimes}_\alpha X_0$, для которого $\tilde{z}_0 = T$. Согласно предположению существует продолжение $z \in X^*\widehat{\otimes}_\alpha X_0$ (так что $z \circ i = z_0$ и $\operatorname{trace} i \circ z = \operatorname{trace} z_0$, где $i : X_0 \to X$ — естественное вложение). Рассмотрим диаграмму

$$i\tilde{z}i : X_0 \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\tilde{z}} X_0 \xrightarrow{i} X.$$

Так как $T = \tilde{z}_0 = \tilde{z}i$ и $\tilde{z} \in N_\alpha(X, X_0)$, то $i\tilde{z} \in N_\alpha(X)$ и спектр $\operatorname{sp} i\tilde{z} \setminus \{0\} \in l_{p,q}$. Но собственные числа оператора T (с учетом кратностей) те же, что и собственные числа оператора $i\tilde{z}$. Следовательно, T имеет спектральный тип $l_{p,q}$. □

Теорема 3.2. *Пусть α — полная проективная тензорная квазинорма и банахово пространство X имеет свойство α-лифтинга. Если $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип $l_{p,q}$, то всякое его фактор-пространство также имеет спектральный тип $l_{p,q}$.*

Доказательство. Возьмем подпространство $X_0 \subset X$ и рассмотрим фактор-пространство X/X_0. Если $T \in N_\alpha(X/X_0, X/X_0)$, то найдется такой элемент $z_0 \in (X/X_0)^*\widehat{\otimes}_\alpha X/X_0)$, что $\tilde{z}_0 = T$. Согласно предположению существует тензорный элемент $z \in (X/X_0)^*\widehat{\otimes}_\alpha X$, для которого $Q \circ z = z_0$, где Q — фактор-отображение из X на X/X_0. Рассмотрим диаграмму

$$Q\tilde{z}Q : X \xrightarrow{Q} X/X_0 \xrightarrow{\tilde{z}} X \xrightarrow{Q} X/X_0.$$

Так как $T = \tilde{z}_0 = Q\tilde{z}$ и $\tilde{z} \in N_\alpha(X, X_0)$, то $\tilde{z}Q \in N_\alpha(X)$ и спектр $\operatorname{sp} \tilde{z}Q \setminus \{0\} \in l_{p,q}$. Но собственные числа оператора T (с учетом кратностей) те же, что и собственные числа оператора $\tilde{z}Q$. Следовательно, T имеет спектральный тип $l_{p,q}$. □

4. Детерминант и след. Нам понадобятся некоторые вспомогательные факты из теории следов и детерминантов. Ниже мы доказываем два из них; нам не удалось найти в литературе доказательства этих утверждений именно в том виде, в котором мы их применяем. Итак два предложения о непрерывности следа и о непрерывности детерминанта.

Напомним еще раз, что для всякого конечномерного оператора

$$T : X \to X, \quad Tx = \sum_{k=1}^{N} x'_k \otimes x_k$$

ядерный след $\operatorname{tr} T := \sum_{k=1}^{N} x'_k(x_k)$ вполне определен и не зависит от представления T. Также вполне определен детерминант оператора $1 - T$:

$$\det(1 - T) = \prod_j (1 - \mu_j),$$

где (μ_j) — полный набор собственных чисел оператора T. В этом случае, естественно, имеем формулу следа

$$\operatorname{tr} T = \sum_j \mu_j.$$

Предложение 4.1. *Пусть A — квазинормированный операторный идеал, X — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$. Предположим, что стандартный функционал* trace *ограничен на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ (и, таким образом, может быть продолжен до непрерывного следа на все пространство $A(X)$). Тогда соответствующий детерминант Фредгольма равномерно непрерывен (по A-квазинорме) на некотором A-шаре подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$. Более того, существуют такие постоянные $r_0 \in (0,1)$ и $c_0 > 0$, что для конечномерных $u, v \in A(X)$ условия $\|u\|_A \leqslant r_0$ и $\|v\|_A \leqslant r_0$ влекут*

$$\big|\det(1-u) - \det(1-v)\big| \leqslant c_0 \,\|u - v\|_A.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем предполагать, что данная квазинорма в A является s-нормой, т.е. существует такое число $s \in (0,1]$, что для любых $x, y \in A$ выполняется неравенство $\|x+y\|_A^s \leqslant \|x\|_A^s + \|y\|_A^s$ (см. [7, с. 1102]).

Обозначим через b такую постоянную, что $|\operatorname{trace} R| \leqslant b\|R\|_A$ для любого конечномерного оператора R из A. Пусть u, v — два конечномерных оператора из A, удовлетворяющие условиям $\|u\|_A^s \leqslant r$ и $\|v\|_A^s \leqslant r$, где $r > 0$ мало. Тогда (см., например, [4, теорема I.3.3] или [5]) для $|z| \leqslant 1$

$$\det(1 - zu) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{trace}(u^n)\, z^n \right),$$

откуда

$$\big|\det(1-u) - \det(1-v)\big| = \left|\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\operatorname{trace}(u^n) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)\operatorname{trace}(v^n)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big|\operatorname{trace}(u^n) - \operatorname{trace}(v^n)\big| \leqslant c_1 b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\|u^n - v^n\|_A,$$

для малых $r > 0$, где c_1 — некоторая постоянная. Если $q := \max\{\|u\|_A; \|v\|_A\}$, то

$$\|u^n - v^n\|_A^s \leqslant \big\|(u^{n-1} - v^{n-1})u\big\|_A^s + \big\|v^{n-1}(u-v)\big\|_A^s \leqslant$$
$$\leqslant \|u\|_A^s \left[\big\|(u^{n-2} - v^{n-2})u\big\|_A^s + \big\|v^{n-2}(u-v)\big\|_A^s\right] + \|v^{n-1}\|_A^s\, \|u-v\|_A^s \leqslant$$

(мы воспользовались тем, что в A имеет место соотношение $\|HK\|_A \leqslant \|H\|_A\,\|K\|_A$ для любых H, K, так как $\|K\|_L \leqslant \|K\|_A$); продолжаем неравенства:

$$\leqslant \Big(q^{(n-1)s}\|u-v\|_A^s + q^s\cdot q^{s(n-2)}\|u-v\|_A^s\Big) + q^{2s}\big\|u^{n-2}-v^{n-2}\big\| \leqslant$$
$$\leqslant 2q^{s(n-1)}\|u-v\|_A^s + q^{2s}\Big[\big\|(u^(n-3)-v^{n-3})u\big\|_A^s + \big\|v^{n-3}(u-v)\big\|_A^s\Big] \leqslant$$
$$\leqslant 3q^{s(n-1)}\|u-v\|_A^s + q^{3s}\big\|u^{n-3}-v^{n-3}\big\|_A^s \leqslant \dots \leqslant$$
$$\leqslant (n-1)q^{s(n-1)}\|u-v\|_A^s + q^{s(n-1)}\|u-v\|_A^s = nq^{s(n-1)}\|u-v\|_A^s.$$

Таким образом,

$$\|u^n - v^n\|_A \leqslant n^{1/s}q^{(n-1)}\|u-v\|_A.$$

Поэтому, если $r\in(0,1)$ достаточно мало и если $\|u\|_A^s \leqslant r$ и $\|v\|_A^s \leqslant r$, то

$$\big|\det(1-u)-\det(1-v)\big| \leqslant c_1 b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\|u^n-v^n\|_A \leqslant c_1 b\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/s-1}\, r^{n-1}\|u-v\|_A = c_0\,\|u-v\|_A. \quad \square$$

Следствие 4.1. *В условиях предложения* 3.1 *функция* $\det(1-u)$ *допускает непрерывное продолжение (по A-квазинорме) с подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$ на все пространство $A(X)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из равномерной непрерывности (по A-квазинорме) на некотором A-шаре подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$. Соответствующее доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (см. [4, с. 28]). $\square$

Предложение 4.2. *Пусть A — квазинормированный операторный идеал, X — банахово пространство, для которого множество конечномерных операторов плотно в пространстве $A(X)$. Предположим, что стандартный функционал* $\det(1+u)$ *допускает непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов из $A(X)$ на все $A(X)$ (по квазинорме из $A(X)$). Тогда соответствующий функционал* trace, *ограничен (по A-квазинорме) на подпространстве всех конечномерных операторов из $A(X)$ и, таким образом, продолжается по непрерывности (единственным способом) на все $A(X)$.*

Доказательство. Для конечномерного оператора $u\in A(X)$ детерминант $\det(1+zu)$ имеет вид

$$\det(1+zu) = 1 + z\operatorname{trace} u + \sum_{n=1}^{m} a_n z^n.$$

Следовательно, по теореме о вычетах

$$\operatorname{trace} u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{\det(1+zu)-1}{z^2}\,dz.$$

Так как $\det(1+zu)$ непрерывен в точке $u=0$ (по квазинорме из A), то существует такое $\delta>0$, что $|\det(1+zu)-1|<1$ для $\|u\|_A<\delta$ и $|z|\leqslant 1$; поэтому для таких конечномерных u имеем

$$|\operatorname{trace} u| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|=1}\left\|\frac{\det(1+zu)-1}{z^2}\right\|\,|dz| \leqslant 1. \qquad \square$$

Для доказательства предложения достаточно непрерывности детерминанта в нуле.

5. Спектральный тип и формула следа. Доказательство следующего факта проводится по аналогии с принципом равномерной ограниченности (см. [14, 3.4.6]). В отличие от теоремы из [14] мы рассматриваем выделенное семейство банаховых пространств, а не все банаховы пространства. Это дает возможность, например, применять подобный принцип к семействам всех $L_p(\mu)$-пространств (в качестве пространства с 1-безусловным базисом берется тогда пространство l_p).

Предложение 5.1. *Пусть $t, u > 0$, α — проективная тензорная квазинорма, $\mathcal{F}$ — некоторое семейство банаховых пространств, замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм. Если для любого пространства $X \in \mathcal{F}$ пространство $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип $l_{t,u}$, то существует такая постоянная $C > 0$, что для всякого $X \in \mathcal{F}$ и для любого оператора $T \in N_\alpha(X)$*

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{t,u}} \leqslant C\|T\|_{N_\alpha}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ — полный набор собственных значений оператора T).

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого n можно найти такие банахово пространство $X_n \in \mathcal{F}$ и оператор $T_n \in N_\alpha(X_n)$, что (см. [14])

$$\|\{\mu_k(T_n)\}\|_{l_{t,u}} \geqslant n, \quad \|T_n\|_{N_\alpha} \leqslant (2\nu_\alpha)^{-n},$$

где ν_α — постоянная из «неравенства треугольника» для квазинормы из N_α. Положим $X := \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)_E$, и пусть $j_n : X \to X_n$, $i_n : X_n \to X$ — естественные фактор-отображения и вложения (с единичными нормами). Тогда

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+l} j_n T_n i_n \right\|_{N_\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu_\alpha^k \|T_{m+k}\|_{N_\alpha} \leqslant (2\nu_\alpha)^{-m}, \quad l > 0.$$

Поэтому

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} j_n T_n i_n \in N_\alpha(X).$$

Поскольку $T_n = j_n T i_n$, то совокупность всех собственных чисел оператора T_n есть часть семейства $\{\mu_k(T)\}$. Из этого вытекает, что

$$\infty > \|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{t,u}} \geqslant \|\{\mu_k(T_n)\}\|_{l_{t,u}} \geqslant n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Полученное противоречие доказывает предложение. □

Предложение 5.2. *Пусть $r \in (0, 1]$, α — проективная тензорная квазинорма, $\mathcal{F}$ — некоторое семейство банаховых пространств, обладающих свойством AP_α, замкнутое относительно взятия не более чем счетных прямых сумм. Если для любого пространства $X \in \mathcal{F}$ пространство $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип l_r, то для всякого $X \in \mathcal{F}$ и для любого оператора $T \in N_\alpha(X)$ его ядерный след $\operatorname{trace} T$ вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\operatorname{trace} T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T)$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ — полный набор, с учетом кратностей, собственных значений оператора T). При этом детерминант Фредгольма оператора T имеет вид

$$\det(1 - zT) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \mu_k(T)z)$$

и является целой функцией порядка r (и, следовательно, минимального рода, если $r < 1$).

Доказательство. Пусть $T \in N_\alpha(X)$, где $X \in \mathcal{F}$. Так как $X \in AP_\alpha$, то $N_\alpha(X) = X^* \widehat{\otimes}_\alpha X$, что гарантирует существование единственного непрерывного следа на $N(X)$, который есть просто непрерывное продолжение с подпространства всех конечномерных операторов в X обычного функционала «след». По следствию 4.1 из предложения 4.1, на $N_\alpha(X)$ вполне определен единственный непрерывный детерминант (Фредгольма), — $\det(1 - zT)$. Возьмем последовательность $\{T_n\}$ конечномерных операторов из $N_\alpha(X)$, сходящуюся в пространстве $N_\alpha(X)$ к T.

Пространство $N_\alpha(X)$ имеет спектральный тип l_r, так что, по предложению 5.1, существует такая постоянная $C > 0$, что для любого оператора $T \in N_\alpha(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_1} \leqslant C\|T\|_{N_\alpha};$$

в частности, это неравенство верно для всех рассматриваемых операторов. Для конечномерного $U \in N_\alpha(X)$ детерминант имеет вид

$$\det(1 - zU) = \prod_{i=1}^{M}(1 - \mu_i(U)z).$$

Следовательно, для всякого T_n

$$|\det(1 - zT_n)| \leqslant \exp\{\sum_k |\mu_k(T_n)|\,|z|\} \leqslant e^{C\|T_n\|_{N_\alpha}|z|}.$$

Используя непрерывность детерминанта, мы приходим к неравенству

$$|\det(1 - zT)| \leqslant e^{C\|T\|_{N_\alpha}|z|}.$$

По теореме Адамара

$$\det(1 - zT) = e^{cz}\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \mu_i(T)z)e^{\mu_i(T)z}$$

(так как значение левой части в нуле есть 1). С другой стороны, разлагая правую часть равенства в ряд, получаем $\det(1 - zT) = 1 + cz + \dots$. Значит, $c = -\operatorname{tr} T$ (напомним, что $\det(1 - zT) = 1 - \operatorname{tr} Tz + \dots$). Но $\{\mu_k(T)\} \in l_1$ и, следовательно,

$$\det(1 - zT) = e^{az}\prod_{i=1}^{\infty}(1 - \mu_i(T)z),$$

где $a = -\operatorname{tr} T + \sum \mu_i$.

Теперь применим теорему Уайта (см. [21]). Для этого рассмотрим банахов идеал $\Gamma_{\mathcal{F}}$ операторов, факторизующихся через пространства из $\mathcal{F}$ и образуем квазинормированный операторный идеал $\Gamma_{\mathcal{F}} \circ N_\alpha$ — суперпозицию двух идеалов. Ясно, что этот идеал имеет спектральный тип l_1; следовательно, к нему может быть применена теорема Уайта. Поскольку идеал конечномерных операторов плотен в последнем идеале, спектральный след на нем есть линейный непрерывный функционал, совпадающий с ядерным следом на плотном множестве. Поэтому $a = 0$, $\operatorname{trace} T = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(T)$ и

$$\det(1 - zT) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \mu_k(T)z).$$

Порядок этой целой функции есть r, поскольку $(\mu_k(T)) \in l_r$ (теорема Бореля о порядке канонического произведения). □

6. Примеры применения. Теперь применим полученные выше вспомогательные факты в некоторых конкретных ситуациях.

6.1. Операторы в подпространствах фактор-пространств L_p. Сначала рассмотрим случай ядерных операторов в подпространствах фактор-пространств пространств $L_p(\mu)$. Известно, что такие пространства обладают свойством аппроксимации AP_s при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $0 < s < 1$, $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$ (см. [16–18]). Используя этот факт и некоторые идеи (как оказалось, те же, что и в [9, 2.b.13]) из теории абсолютно суммирующих операторов, Рейнов и Латиф сначала получили формулу Гротендика—Лидского для подпространств пространств L_p (в [16]), а затем и для подпространств фактор-пространств пространств L_p (см. [18]).

В [9, 2.c.9], однако, получены более сильные результаты о спектрах ядерных операторов в L_p (но не формула следа). Мы применим приведенные выше теоремы и предложения вместе с результатом из [9, 2.c.9] для установления более общих фактов, а также снова все той же формулы следа для операторов в подпространствах фактор-пространств пространств L_p. Приведем утверждение, усиливающее указанный выше факт о наличии свойств AP_s в таких пространствах (что представляет и самостоятельный интерес).

Лемма 6.1. *Пусть* $0 < s < 1$, $1/s = 1+1/q$. *Если* $d := (d_k) \in l_{(s,1)}$, *то найдутся* $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$ *и* $\beta := (\beta_k) \in l^0_{(q,\infty)}$, *для которых* $d = \alpha\beta$, *т.е.* $d_k = \alpha_k\beta_k$ *для* $k = 1, 2, \ldots$. *Здесь*

$$l^0_{(q,\infty)} := \Big\{(\beta_k): \ \exists a_k \to 0, \ |\beta_k| \leqslant \frac{a_k}{k^{1/q}}\Big\}.$$

Обратно, если $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$ *и* $\beta := (\beta_k) \in l^0_{(q,\infty)}$, *то* $\alpha\beta \in l_{(s,1)}$. *Более того,* $l_1 \cdot l_{(q,\infty)} = l_{(s,1)}$.

Доказательство. Возьмем $d \in l_{(s,1)}$ (предполагая, что $d = d^* = (d^*_k)$). Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty k^{1/s}\, d^*_k/k < \infty, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=1}^\infty k^{1/q}\, d^*_k < \infty.$$

Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ — такая числовая последовательность, что $\varepsilon_k \searrow 0$ и $\sum_{k=1}^\infty d^*_k k^{1/q}/\varepsilon_k < \infty$. Положим $\alpha_k := d^*_k k^{1/q}/\varepsilon_k$, $\beta_k := \varepsilon_k/k^{1/q}$. Тогда $\alpha := (\alpha_k) \in l_1$ и $\beta := (\beta_k) \in l^0_{(q,\infty)}$. Таким образом, $d = \alpha\beta \in l_1 \cdot l^0_{(q,\infty)}$. По поводу последних двух утверждений см. [14, 2.1.13]. $\square$

Предложение 6.1. *Пусть* $\alpha \in [0, 1/2]$ *и* $1/s = 1 + \alpha$. *Для банахова пространства* Y, *предположим, что*

(α) *существует такая постоянная* $C > 0$, *что для каждого* $\varepsilon > 0$, *для любого натурального* n *и всякого* n*-мерного подпространства* E *пространства* Y *существует такой конечномерный оператор* R *в* Y, *что* $\|R\| \leqslant Cn^\alpha$ *and* $\|R|_E - id_E\|_{L(E,Y)} \leqslant \varepsilon$.

Тогда $Y \in AP_{(s,1)}$.

Доказательство. Пусть $0 \neq z \in Y^*\widehat{\otimes}_{(s,1)}X$. Воспользуемся леммой 6.1: возьмем представление $z = \sum_{k=1}^\infty a_k b_k\, y'_k \otimes x_k$, в котором (x_k), (y'_k) ограничены, $(a_k) \in l_1$, $(b_k) \in l^0_{q\infty}$ и $b_k \searrow 0$. Тогда $(\widetilde{x}_k := b_k x_k) \in l^0_{q\infty}(X)$ и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ (которое будет выбрано ниже) можно найти оператор $R \in X^* \otimes X$ с тем свойством, что $\sup_n \|R\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_n\| \leqslant \varepsilon$ (здесь мы использовали свойства рассматриваемого пространства X, отмеченные в разделе 1 работы [19]). Так как $z \neq 0$, то можно найти такой оператор $V \in L(Y^*, X^*)$, что

$$\sum_{k=1}^\infty a_k\, \langle Vy'_k, \widetilde{x}_k\rangle = 1.$$

Теперь, когда оператор V выбран, получаем:

$$1 = \sum_{k=1}^\infty a_k\, \langle Vy'_k, \widetilde{x}_k - R\widetilde{x}_k\rangle + \sum_{k=1}^\infty a_k\, \langle Vy'_k, R\widetilde{x}_k\rangle \leqslant \varepsilon\, \|(a_k)\|_{l_1}\, \|V\| \cdot \mathrm{const} + \left|\sum_{k=1}^\infty a_k b_k\, \langle R^*Vy'_k, x_k\rangle\right|,$$

и, если ε достаточно мало, для конечномерного оператора $R^*V : Y^* \to X^*$ имеем:

$$|\operatorname{tr} z^t \circ (R^*V)| = |\operatorname{tr}(R^*V) \circ z^t| = \left|\sum_{k=1}^\infty a_k b_k\, \langle R^*Vy'_k, x_k\rangle\right| > 0.$$

Последняя сумма есть ядерный след тензорного элемента $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k\, R^*Vy'_k \otimes x_k$, который является композицией $R \circ z_0$ конечномерного оператора R и тензорного элемента $z_0 := \sum_{k=1}^\infty a_k b_k\, Vy'_k \otimes x_k$, принадлежащего тензорному произведению $X^*\widehat{\otimes}_{(s,1)}X$ согласно второй части леммы 6.1. Отсюда следует, что как z_0, так и z порождают ненулевые операторы $\widetilde{z}_0$ и $\widetilde{z}$. $\square$

Свойством (α) обладают, в частности, фактор-пространства подпространств и подпространства фактор-пространств пространств L_p (при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ с $\alpha = |1/2 - 1/p|$) (см. обсуждение этого в [19, раздел 1] и в [18, предложение 9]).

Следствие 6.1. *Пусть $s \in (0,1]$, $p \in [1,\infty]$ и $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$. Если банахово пространство Y изоморфно подпространству фактор-пространства (или фактор-пространству подпространства) некоторого L_p-пространства, то оно обладает свойством $AP_{(s,1)}$ (и, следовательно, свойством AP_s).*

Кстати, при $s = 2/3$ получаем уже упоминавшийся результат о наличии свойства $AP_{(2/3,1)}$ у любого банахова пространства.

H. König показал (см. [9, 2.c.9]), что если $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$, $1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$, и $X = L_p(\mu)$, то собственные значения любого оператора $T \in N_s(X)$ лежат в $l_{(r,s)}$. Поэтому получаем небольшое усиление ранее полученных теорем (см. [16–18]) о ядерных операторах в подпространствах фактор-пространств пространств $L_p(\mu)$.

Итак, обобщение предложения :

Предложение 6.2 (ср. [9, 2.c.9])**.** *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < s < 1$, $1/r = 1/s - |1/p - 1/2|$. Существует такая постоянная $C_{s,p} > 0$, что для всякого подпространства X любого фактор-пространства пространства $L_p(\mu)$ и для любого оператора $T \in N_s(X)$*

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{(r,s)}} \leqslant C_{s,p} \|T\|_{N_s}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ — полный набор собственных значений оператора T). При $r = 1$ и $1 = 1/s - |1/p - 1/2|$ полный набор собственных значений оператора T абсолютно суммируем, для любого оператора $T \in N_s(X)$ его ядерный след $\operatorname{trace} T$ *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\operatorname{trace} T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

Доказательство. Любое банахово пространство имеет как свойство $\|\cdot\|_s$-продолжения, так и свойство $\|\cdot\|_s$-лифтинга (см. пример 3.4). Из [9, 2.c.9] следует, что L_p-пространства имеют спектральный тип $l_{(r,s)}$. По теоремам 3.1 и 3.2, как подпространства, так и фактор-пространства L_p-пространств имеют спектральный тип $l_{(r,s)}$. По тем же теоремам их, соответственно, фактор-пространства и подпространства также имеют имеют спектральный тип $l_{(r,s)}$. Применим предложение 5.1 к семействам фактор-пространств подпространств и подпространств фактор-пространств пространств L_p, рассматривая прямые суммы по типу l_p, получим нужные нам неравенства. Применяя в этих же ситуациях предложение 5.2 (учитывая наличие свойств AP_s), получаем формулы следа. □

6.2. Операторный идеал $N_{(r,s),p}$. Пусть $0 < r, s \leqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. Определим новую проективную квазинорму $\|\cdot\|_{(r,s),p}$ следующим образом. Если $u \in X \widehat{\otimes} Y$, то

$$\|u\|_{(r,s),p} := \inf \left\{ \|(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}\|_{l_{(r,s)}} \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{l_\infty(X)} \cdot \|(y_i)_{i=1}^{\infty}\|_{l^w_{p'}(X)} : \ u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i \right\}.$$

Получаем новое тензорное произведение $X \widehat{\otimes}_{(r,s),p} Y$, состоящее из тензорных элементов $u \in X \widehat{\otimes} Y$ конечной квазинормы $\|\cdot\|_{(r,s),p}$. Оно квази-банахово (проверяется стандартным образом на абсолютно сходящихся рядах) и является частичным обобщением тензорного произведения Лапресте (см. [11]).

Естественным образом мы приходим к квазинормированному операторному идеалу $N_{(r,s),p}$, рассматривая фактор-отображения $X^* \widehat{\otimes}_{(r,s),p} Y \to N_{(r,s),p}(X, Y)$. Всякий оператор из этого идеала допускает соответствующее разложение в ряд. Применим полученные выше факты (аналогично случаю операторов в подпространствах L_p-пространств) к операторам из этого нового операторного идеала типа Лапресте (идеала Лоренца—Лапресте).

Замечание 6.1. Более общим является тензорное произведение $X \widehat{\otimes}_{(r,s),p,q} Y$, получаемое аналогичным образом, но с дополнительным ограничением на последовательность (y_i): требуется, чтобы эта последовательность была слабо q-суммируемой, где $1 \leqslant q < \infty$. Мы не рассматриваем его здесь в силу ограниченности объема работы.

Перейдем теперь к операторам из $N_{(r,s),p}$.

Предложение 6.3. *Если* $1 \leqslant p \leqslant 2, 1/r = 1/p + 1/2$, *то всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,1),p}$.

Отметим, что при $p = 1$ свойство $AP_{(r,1),p}$ превращается в $AP_{(2/3,1)}$, о наличии которого в любом банаховом пространстве известно из [6, 19].

Следствие 6.2. *Если* $0 < r \leqslant 1$, $1/r = 1/p + 1/2$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и* $0 < s \leqslant 1$, *то* $N_{(r,s),p} \subset N_{(r,1),p}$ *и, следовательно, всякое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(r,s),p}$.

Предложение 6.4. *Идеал* $N_{(r,s),p}$ *имеет спектральный тип* $l_{(1,s)}$.

Доказательство. Приведем доказательство, в ходе которого будут получены все три сформулированные выше утверждения. Пусть $0 < r \leqslant 1$, $1/r = 1/p + 1/2$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $0 < s \leqslant 1$. Предположим, что $X \notin AP_{(r,s),p}$. Пусть $z \in X^* \widehat{\otimes}_{(r,s),p} X$ — такой элемент, что $\operatorname{trace} z = 1, \tilde{z} = 0$. Имеем

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x'_k \otimes x_k,$$

где $(\lambda_k) \in l_{r,s}$, $(x'_k) \in l_\infty(X^*)$, (x_k) — слабо p'-суммируема.

Поскольку $z = \sum \lambda_k x'_k \otimes x_k$, где $(\lambda_k) \in l_{r,s}$, $(x'_k) \in l_\infty(X^*)$ и (x_k) — слабо p'-суммируема, то $\tilde{z}$ может быть факторизован:

$$\tilde{z}: \ X \xrightarrow{A} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{j} l_p \xrightarrow{V} X,$$

где $Ax = \{\langle x'_k, x\rangle\} \in l_\infty$ для $x \in X$, $V\{\delta_k\} := \sum \delta_k x_k$ для $\{\delta_k\} \in l_p$, j — вложение, Δ — диагональный оператор с диагональю (λ_k) из $l_{(r,s)}$. Так как $\tilde{z} = 0$, то $V|_{j\Delta A(X)} = 0$. Рассмотрим $S := j\Delta AV : l_p \to l_p$:

$$S\{\delta_k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k j\Delta A x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k j\Delta \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle x'_j, x_k\rangle e_j \right) = \sum_{k,j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x'_j, \delta_k x_k\rangle e_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\langle x'_j, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k x_k \right\rangle e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \Big\langle \{\delta_k\}_k, \big\{\langle x'_j, x_k\rangle\big\}_k \rangle e_j \in l_p$$

для $\{\delta_k\} \in l_p$. Положим

$$\Big\langle \{\delta_k\}_k, \big\{\langle x'_j, x_k\rangle\big\}_k \Big\rangle =: \psi_j(\delta).$$

Тогда

$$S\{\delta_k\} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \psi_j(\delta) e_j.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr} S = \sum_j \lambda_j \psi_j(e_j) = \sum_j \lambda_j \langle x'_j, x_j\rangle = 1.$$

Очевидно, $S^2 = 0$ и $\operatorname{trace} S = \operatorname{trace} z = 1$.

Рассмотрим диагональный оператор $j\Delta : l_\infty \to l_p$ с диагональю из $l_{(r,s)}$. Из [14, 2.9.17*] следует, что этот оператор есть оператор вейлевского (а значит и спектрального) типа $(1, s)$ (см. [14, 3.6.2*]; подробно об операторах Вейля см. указанную монографию). Следовательно, идеал $N_{(r,s),p}$ имеет спектральный тип $l_{1,s}$.

Поскольку $S \in N_{(r,1),p}(l_p, l_p)$, имеем

$$S : l_p \xrightarrow{V} X \xrightarrow{A} l_\infty \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{j} l_p,$$

$N_{(r,1),p}$ имеет спектральный тип l_1 и пространство l_p обладает свойством аппроксимации Гротендика (а, значит, и свойством $AP_{(r,1),p}$), то ядерный след $\operatorname{trace} S$ вполне определен и равен сумме всех собственных значений оператора S (по предложению 5.2, в котором сейчас $\mathcal{F}$ есть семейство всех банаховых пространств). Противоречие с тем, что $S^2 = 0$. $\square$

Применяя предложения 5.1 и 5.2 для рассматриваемой ситуации, получаем следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть* $0 < r \leqslant 1$, $1/r = 1/p + 1/2$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ *и* $0 < s \leqslant 1$. *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что для всякого банахова пространства* X *и для любого оператора* $T \in N_{(r,s),p}(X)$

$$\|\{\mu_k(T)\}\|_{l_{(1,s)}} \leqslant C\|T\|_{N_{(r,s),p}}$$

(здесь $\{\mu_k(T)\}$ *— полный набор собственных значений оператора* T). *В частности, полный набор собственных значений оператора* T *абсолютно суммируем, его ядерный след* trace T *вполне определен и совпадает с его спектральным следом, т.е.*

$$\operatorname{trace} T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(T).$$

Отметим частные случаи теоремы для $N_{(r,s),p}$. Пусть $0 < r \leqslant 1$, $1/r = 1/p + 1/2$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $0 < s \leqslant 1$.

(a) $r = 1$, $s = 1$, $p = 2$: В. Б. Лидский (1959), А. Пич (1980);
(b) $r = 2/3$, $s = 2/3$, $p = 1$: А. Гротендик (1955);
(c) $r = 2/3$, $s = 1$, $p = 1$: А. Хинрихс и А. Пич (2010) и, независимо, О. И. Рейнов (2016);
(d) $0 \leqslant r \leqslant 1$, $s = r$, $1/r = 1/2 + 1/p$: О. И. Рейнов и К. Латиф (2013).

Теорема соединяет в одной шкале операторов частные случаи (c) и (a):

$$\left\{r = \frac{2}{3},\ s = 1,\ p = 1\right\} \longrightarrow \left\{\frac{2}{3} \leqslant r \leqslant 1,\ s = 1,\ \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \{r = 1,\ s = 1,\ p = 2\}.$$

Все результаты, приведенные до теоремы об $N_{(r,s),p}$, точны. Теорема точна для случаев, когда $r = s$. Для $r \neq s$ проблема возникает уже в частном случае $N_{(2/3,1)}$ (т.е. при $p = 1$).

Из статьи А. Хинрихса и А. Пича [6] в нашей формулировке: верно ли что в шкале пространств Лоренца $l_{r,s}$ результат «*любое банахово пространство обладает свойством* $AP_{(2/3,1)}$» есть наилучший результат?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадец В. М.* О прямой сумме нормированных пространств// Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, № 1. — С. 186–189.
2. *Лидский В. Б.* Несамосопряженные операторы, имеющие след// Докл. АН СССР. — 1959. — *125*, № 3. — С. 485–487.
3. *Benyamini Y., Lindenstrauss J.* Geometric Nonlinear Functional Analysis. — Providence, Rhose Island: Am. Math. Soc., 2000.
4. *Gohberg I., Goldberg S., Krupnik N.* Traces and Determinants of Linear Operators. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2000.
5. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et éspaces nucléaires — 1955. — *16*.
6. *Hinrichs A., Pietsch A.* p-Nuclear operators in the sense of Grothendieck// Math. Nachr. — 2010. — *283*, № 2. — P. 232–261.
7. *Kalton N. J.* Quasi-Banach Spaces. Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2. — Amsterdam: North-Holland.
8. *König H.* On the eigenvalue spectrum of certain operator ideals// Coll. Math. — 1981. — *44*. — P. 15–28.
9. *König H.* Eigenvalue Distribution of Compact Operators. — Boston: Birkhäuser, 1986.
10. *Köthe G.* Topological Vector Spaces. I. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1969.
11. *Lapreste J. T.* Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces L_p// Stud. Math. — 1976. — *57*. — P. 47–83.
12. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Sequence Spaces. Vol. 1. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
13. *Pietsch A.* Operator Ideals. — Berlin: North-Holland, 1978.

14. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-Numbers. — New York: Cambridge Univ. Press, 1987.
15. *Reinov O.* Approximation properties associated with quasi-normed operator ideals of (r, p, q)-nuclear operators/ http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2017/17-08.pdf.
16. *Reinov O., Latif Q.* Grothendieck–Lidskiĭ theorem for subspaces of L_p-spaces// Math. Nachr. — 2013. — *286*, № 2–3. — P. 279–282.
17. *Reinov O. I., Latif Q.* Distribution of eigenvalues of nuclear operators and Grothendieck–Lidski type formulas// J. Math. Sci. — 2013. — *193*, № 2. — P. 312–329.
18. *Reinov O. I., Latif Q.* Grothendieck–Lidskiĭ theorem for subspaces of quotients of L_p-spaces// Banach Center Publ. — 2014. — *102*. — P. 189–195.
19. *Reinov O. I.* Some remarks on approximation properties with applications// in: Ordered Structures and Applications (*De Jeu M., De Pagter B., Van Gaans O., Veraar M.*, eds.). — Berlin: Birkhäuser, 2016. — P. 371–394.
20. *Weyl H.* Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation// Proc. Natl. Acad. Sci. — 1949. — *35*. — P. 408–411.
21. *White M. C.* Analytic multivalued functions and spectral trace// Math. Ann. — 1996. — *304*. — P. 665–683.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Рейнов Олег Иванович
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: orein51@mail.ru