



ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 46–55
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-46-55

УДК 519.21, 519.6

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

© 2024 г. И. Е. ПОЛОСКОВ

Аннотация. В работе представлен пошаговый метод приближенного аналитического расчета матрицы ковариационных функций системы линейных стохастических обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений с конечными сосредоточенным и распределенным запаздываниями, возмущаемой аддитивными флуктуациями в форме векторного стандартного винеровского процесса с независимыми компонентами. Предлагаемый метод представляет собой сочетание классического метода шагов и расширения пространства состояний и состоит из нескольких этапов, позволяющих перейти сначала от немарковской системы стохастических уравнений к цепочке марковских систем без запаздывания. На основе систем строятся соответствующие последовательности систем вспомогательных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для элементов векторов математических ожиданий и матриц ковариаций расширенных векторов состояния, а затем искомые уравнения для ковариационных функций.

Ключевые слова: вектор состояния, ковариационная функция, стохастическое интегро-дифференциальное уравнение, сосредоточенное запаздывание, распределенное запаздывание, пошаговый метод.

EQUATIONS FOR COVARIANCE FUNCTIONS OF THE STATE VECTOR OF A LINEAR SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FINITE CONCENTRATED AND DISTRIBUTED DELAYS

© 2024 I. E. POLOSKOV

ABSTRACT. In this paper, we present a step-by-step method for the approximate analytical calculation of the matrix of covariance functions for a system of linear stochastic ordinary integro-differential equations with finite concentrated and distributed delays perturbed by additive fluctuations in the form of a vector standard Wiener process with independent components. The method proposed is a combination of the classical method of steps and the expansion of the state space and consists of several stages that make it possible to pass from a non-Markov system of stochastic equations to a chain of Markov systems without delay. Based on these systems, we construct sequences of systems of auxiliary linear ordinary differential equations for elements of vectors of mathematical expectations and covariance matrices of extended state vectors, and then obtain the required equations for covariance functions.

Keywords and phrases: state vector, covariance function, stochastic integro-differential equation, concentrated delay, distributed delay, step-by-step method.

AMS Subject Classification: 60H35, 65C30

1. Введение. Динамические системы с наличием запаздывания (или последствия) используются для описания поведения широкого круга объектов и явлений в технике, природе и обществе. Одним из основных математических инструментов описания поведения таких объектов и явлений являются системы дифференциальных уравнений, которые в зависимости от типов уравнений, форм последствия и наличия возмущений могут быть линейными или нелинейными, детерминированными или стохастическими, обыкновенными или в частных производных, дифференциальными (сосредоточенные запаздывания) или интегро-дифференциальными (распределенные запаздывания) уравнениями, в том числе нейтрального типа, или смешанными.

Можно заметить, что в последние десятилетия интерес к изучению поведения и созданию удобных инструментов количественного анализа таких систем неуклонно растет. Современный этап развития теории дифференциальных уравнений с запаздыванием — учет влияния случайных возмущений, а как следствие, более широкое обращение к соответствующим моделям (см. [9, 14, 15]). К их числу относится семейство стохастических обыкновенных (интегро-)дифференциальных уравнений (СОИДУ, СОДУ) с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и случайными возмущениями.

Методы приближенного решения детерминированных аналогов систем уравнений рассматриваемого типа включают:

θ -метод (см. [12]) для модели

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(t) + \mu x(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t x(s) ds;$$

метод спектральных элементов [13] для

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), \int_0^{\tau} K(t, s) x(t - s) ds\right);$$

метод Рунге—Кутты [18] для системы уравнений

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_1(t) \left[\epsilon_1 - \gamma_1 x_2(t) - \int_{t-\tau}^t F_1(t - s) x_2(s) ds \right], \\ x_2'(t) &= x_2(t) \left[-\epsilon_2 + \gamma_1 x_1(t) + \int_{t-\tau}^t F_2(t - s) x_1(s) ds \right]; \end{aligned}$$

метод Рунге—Кутты—Пуазе (см. [19]) для уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[x(t) - \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s)) ds \right] = f(t, x(t), x(t - \tau));$$

метод коллокаций со сплайнами [8] для модели

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x(t), x(t - \tau), \int_{t-\tau}^t g(t, s, x(s)) ds\right)$$

и др.

Для анализа систем уравнений рассматриваемого типа применяются стохастические аналоги перечисленных методов, а также методы Эйлера—Маруямы [11], θ -Маруямы [5], Мильштейна [4], полунявный метод Эйлера [7] и др., причем, как правило, эти схемы предназначены для расчета отдельных приближенных траекторий соответствующих случайных процессов.

Целью представленного в данной работе метода является вычисление статистических характеристик решений линейных СОИДУ. Для построения необходимых для этого обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ) без запаздывания, как и в ряде наших предыдущих работ [2, 16, 17], используется схема, сочетающая расширение пространства состояний и идеологию классического метода шагов. При этом для получения искомых характеристик в модификацию схемы определения последовательности пространств состояний увеличивающейся размерности и соответствующих векторов состояния, кроме распространения на новый класс моделей, включена процедура построения объединенной системы ОДУ без запаздывания для компонент последовательности векторов функций математического ожидания $\mathbf{m}_X(\underline{t})$, матриц функций ковариации $\mathcal{K}_{XX}(\underline{t})$ и матриц ковариационных функций $\mathcal{C}_{XX}(\underline{t}, \underline{s})$ расширенных векторов состояния.

2. Постановка задачи. Рассмотрим линейную систему СОИДУ с конечными сосредоточенными и распределенными запаздываниями и случайными возмущениями следующего вида:

$$d\mathbf{X}(t) = \left[\mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathcal{R}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{c}(t) \right] dt + \mathcal{H}(t) d\mathbf{W}(t), \quad (1)$$

$$t_1 < t \leq T < \infty,$$

где t — время; $0 < \tau < \infty$ — постоянное запаздывание; $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^\top \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $\mathbf{W} = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}^\top \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых случайных стандартных винеровских процессов; $n, m \in \mathbb{N}$; \top — символ транспонирования векторов и матриц.

Предположим, что на полуинтервале $(t_0, t_1]$ случайный вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет системе стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) Ито без запаздывания:

$$d\mathbf{X}(t) = [\mathcal{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t)] dt + \mathcal{H}_0(t) d\mathbf{W}(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (2)$$

причем в системах уравнений (1) и (2) $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{Q}(t)$, $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{A}_0(t)$, $\mathcal{H}_0(t)$ и $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{c}_0(t)$ — известные непрерывные матричные и векторные функции. Кроме того, предположим, что известны все необходимые числовые характеристики случайного вектора \mathbf{X}^0 . В частности, пусть в начальный момент времени t_0 для вектора $\mathbf{X}(t)$ заданы вектор математических ожиданий \mathbf{m}_X^0 и матрица ковариаций \mathcal{K}_{XX}^0 .

Уравнения в форме (1) применяются при анализе динамики управляемых объектов (см. [1, 6]), плюрипотентных гемопоэтических стволовых клеток (см. [3]), рекламной деятельности (см. [10]) и др.

Основная задача состоит в построении системы ОДУ без запаздывания для компонент матрицы ковариационных функций $\mathcal{C}_{XX}(\underline{t}, \underline{s})$ стохастического вектора состояния $\mathbf{X}(t)$ при любом $t > t_0$.

Отметим, что входящие в системы (1) и (2) шумы аддитивные, а следовательно, СОДУ Ито и Стратоновича имеют одну и ту же форму.

3. Построение расширенной системы СОДУ без запаздывания. Прежде, чем представить детали схемы, для компактности изложения перепишем уравнения (1) и (2) в менее строгой, но более удобной следующей форме:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{X}(t) + \mathcal{R}(t) \mathbf{X}(t - \tau) + \int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) \mathbf{X}(\theta) d\theta + \mathbf{c}(t) + \mathcal{H}(t) \mathbf{V}(t), \quad t > t_1, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathcal{A}_0(t) \mathbf{X}(t) + \mathbf{c}_0(t) + \mathcal{H}_0(t) \mathbf{V}(t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0, \quad (4)$$

где $\mathbf{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}^\top \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых стандартных белых шумов: $\mathbb{E}[V_k(\underline{t})] = 0$, $\mathbb{E}[V_k(\underline{t}) V_\ell(\underline{s})] = 2\pi \delta_{k\ell} \delta(\underline{t} - \underline{s})$; $\mathbb{E}[\cdot]$ — оператор математического ожидания; $\delta_{k\ell}$ — символ Кронекера; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Введем равномерную временную сетку $t_q = t_0 + q \cdot \tau$, $q = 0, 1, 2, \dots, N$, $N + 1$ ($t_{N+1} \geq T$); новую временную переменную $s \in [0, \tau]$. Введем также следующие обозначения:

$$s_q = s + t_q, \quad \Delta_q = (t_q, t_{q+1}], \quad \mathbf{X}_q(s) = \mathbf{X}(s_q), \quad \mathbf{X}_q(0) = \mathbf{X}_{q-1}(\tau),$$

$$\begin{aligned}
V_q(s) &= V(s_q), \quad V_q(0) = V_{q-1}(\tau), \quad U_q(s) = \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_q) X_q(\theta) d\theta, \\
\theta_q &= \theta + t_q, \quad Y_q(s) \equiv Y_q = U_{q-1}(\tau), \quad q > 0, \quad Y(s) \equiv Y = X^0, \\
\mathcal{A}_0(s_0) &= \mathcal{A}_0(s + t_0), \quad \mathcal{H}_0(s_0) = \mathcal{H}_0(s + t_0), \quad c_0(s_0) = c_0(s + t_0), \\
\mathcal{A}(s_q) &= \mathcal{A}(s + t_q), \quad \mathcal{R}(s_q) = \mathcal{R}(s + t_q), \quad \mathcal{Q}(s_q) = \mathcal{Q}(s + t_q), \\
\mathcal{H}(s_q) &= \mathcal{H}(s + t_q), \quad c(s_q) = c(s + t_q), \\
\text{col}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k) &= (b_{11}, \dots, b_{1n}, b_{21}, \dots, b_{2n}, \dots, b_{k1}, \dots, b_{kn})^\top,
\end{aligned}$$

где $\mathbf{b}_\ell \in \mathbb{R}^n$, $\ell = 1, 2, \dots, k$, а равенства случайных векторов почти наверное на границах отрезков Δ_q следуют из стохастической непрерывности рассматриваемых случайных процессов.

Рассмотрим последовательность полуинтервалов (сегментов) Δ_q .

0°. На сегменте Δ_0 систему СОДУ для векторного случайного процесса $Z_0^+(s) \equiv Z_0(s) = \text{col}(Y(s), X_0(s), U_0(s))$ и начальные условия представим так:

$$\begin{aligned}
\dot{Y}(s) &= O_n, & Y(0) &= X^0, \\
\dot{X}_0(s) &= \mathcal{A}_0(s_0) X_0(s) + c_0(s_0) + \mathcal{H}_0(s_0) V_0(s), & X_0(0) &= X^0, \\
\dot{U}_0(s) &= \mathcal{Q}(s_0) X_0(s), & U_0(0) &= O_n,
\end{aligned}$$

где O_n — нулевой вектор размерности n .

1°. Построим расширенный вектор $Z_1^+(s) = \text{col}(Z_0(s), Z_1(s))$, где $Z_1(s) = \text{col}(Y_1(s), X_1(s), U_1(s))$. Этот вектор, определенный на полуинтервалах Δ_0 и Δ_1 , будет удовлетворять системе СОДУ (5), к которой добавлены уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{Y}_1(s) &= O_n, & Y_1(0) &= U_0(\tau), \\
\dot{X}_1(s) &= \mathcal{A}(s_1) X_1(s) + \mathcal{R}(s_1) X_0(s) + Y_1(s) - U_0(s) + \\
&\quad + U_1(s) + c(s_1) + \mathcal{H}(s_1) V_1(s), & X_1(0) &= X_0(\tau), \\
\dot{U}_1(s) &= \mathcal{Q}(s_1) X_1(s), & U_1(0) &= O_n.
\end{aligned} \tag{5}$$

В этих уравнениях учтено, что для $t \in (t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
\int_{t-\tau}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta &= \int_{t-\tau}^{t_1} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta - \int_{t_0}^{t-\tau} \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta + \int_{t_1}^t \mathcal{Q}(\theta) X(\theta) d\theta = \\
&= U_0(\tau) - \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_0) X_0(\theta) d\theta + \int_0^s \mathcal{Q}(\theta_1) X_1(\theta) d\theta = Y_1(s) - U_0(s) + U_1(s).
\end{aligned}$$

N°. Продолжая подобным образом, заключаем, что вектор $Z_N^+(s) = \text{col}(Z_0(s), Z_1(s), \dots, Z_N(s))$, включающий вектор $Z_N(s) = \text{col}(Y_N(s), X_N(s), U_N(s))$ и представляющий поведение вектора состояния $X(t)$ на сегментах $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$, будет единственным решением системы СОДУ, которую можно получить добавлением к уравнениям для вектора $Z_{N-1}^+(s)$ уравнений следующего

вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{Y}}_N(s) &= \mathbf{O}_n, & \mathbf{Y}_N(0) &= \mathbf{U}_{N-1}(\tau), \\
\dot{\mathbf{X}}_N(s) &= \mathcal{A}(s_N) \mathbf{X}_N(s) + \mathcal{R}(s_N) \mathbf{X}_{N-1}(s) + \mathbf{Y}_N(s) - \\
&\quad - \mathbf{U}_{N-1}(s) + \mathbf{U}_N(s) + \mathbf{c}(s_N) + \mathcal{H}(s_N) \mathbf{V}_N(s), & \mathbf{X}_N(0) &= \mathbf{X}_{N-1}(\tau), \\
\dot{\mathbf{U}}_N(s) &= \mathcal{Q}(s_N) \mathbf{X}_N(s), & \mathbf{U}_N(0) &= \mathbf{O}_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

В результате первого этапа получена искомая цепочка систем линейных СОДУ (5)–(6) для расширенных векторов состояния $\mathbf{Z}_0^+, \mathbf{Z}_1^+, \dots, \mathbf{Z}_N^+$ увеличивающейся размерности и подобной структуры без запаздывания, которая используется на следующем этапе для построения моментных уравнений.

4. Построение систем ОДУ для функций математического ожидания и ковариации.

Воспользуемся построенной последовательностью для получения ОДУ для первых моментов векторов $\mathbf{Z}_0^+, \mathbf{Z}_1^+, \dots, \mathbf{Z}_N^+$. Рассмотрим k -й шаг ($0 \leq k \leq N$) и введем расширенные матрицы $\mathcal{A}_k^+(s)$, $\mathcal{H}_k^+(s)$ и векторы $\mathbf{c}_k^+(s)$, которые имеют блочную структуру и формируются следующим образом ($\ell = 1, 2, \dots, k$):

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{A}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{A}_0(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_0) & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{A}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathcal{I}_n & \mathcal{A}(s_\ell) & \mathcal{I}_n \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{Q}(s_\ell) & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; & \underline{\mathbf{c}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}; \\
\underline{\mathbf{c}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{c}(s_\ell) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{H}}_0(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathcal{H}_0(s_0) \\ \mathbf{O}_{n \times m} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{H}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times m} \\ \mathcal{H}(s_\ell) \\ \mathbf{O}_{n \times m} \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{B}}_\ell(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathcal{R}(s_\ell) & -\mathcal{I}_n \\ \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} & \mathbf{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
\underline{\mathcal{A}}_0^+(s) &= \underline{\mathcal{A}}_0(s); & \underline{\mathcal{A}}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{A}}_0(s) & \mathbf{O}_{3n \times 3n} \\ \underline{\mathcal{B}}_1(s) & \underline{\mathcal{A}}_1(s) \end{bmatrix}; & \underline{\mathcal{A}}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{A}}_{\ell-1}^+(s) & \mathbf{O}_{3n\ell \times 3n} \\ \underline{\mathcal{B}}_\ell^+(s) & \underline{\mathcal{A}}_\ell(s) \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_0^+(s) &= \underline{\mathbf{c}}_0(s); \\
\mathbf{c}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{c}}_0(s) \\ \underline{\mathbf{c}}_1(s) \end{bmatrix}; & \mathbf{c}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{\ell-1}^+(s) \\ \underline{\mathbf{c}}_\ell(s) \end{bmatrix}; & \mathbf{B}_1^+(s) &= \underline{\mathcal{B}}_1(s); & \mathbf{B}_\ell^+(s) &= [\mathbf{O}_{3n \times 3n(\ell-1)} \quad \underline{\mathcal{B}}_\ell(s)]; \\
\mathcal{H}_0^+(s) &= \underline{\mathcal{H}}_0(s); & \mathcal{H}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{H}}_0(s) & \mathbf{O}_{3n \times m} \\ \mathbf{O}_{3n \times m} & \underline{\mathcal{H}}_1(s) \end{bmatrix}; & \dots & \mathcal{H}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\ell-1}^+(s) & \mathbf{O}_{3n\ell \times m} \\ \mathbf{O}_{3n \times m\ell} & \underline{\mathcal{H}}_\ell(s) \end{bmatrix}; \\
\mathbf{V}_0^+(s) &= \mathbf{V}_0(s); & \mathbf{V}_1^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0(s) \\ \mathbf{V}_1(s) \end{bmatrix}; & \dots & \mathbf{V}_\ell^+(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\ell-1}^+(s) \\ \mathbf{V}_\ell(s) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где $\mathbf{O}_{n \times m}$ — нулевая $n \times m$ -матрица, \mathcal{I}_n — единичная матрица n -го порядка. Тогда система СОДУ для вектора \mathbf{Z}_k будет иметь вид:

$$\dot{\mathbf{Z}}_k^+(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathbf{Z}_k^+(s) + \mathbf{c}_k^+(s) + \mathcal{H}_k^+(s) \mathbf{V}_k^+(s), \quad \mathbf{Z}_k^+(0) = \mathbf{Z}_k^{+0}. \tag{7}$$

Несложно увидеть, что вследствие линейности уравнений (7) для любого \mathbf{Z}_k^+ , $k = 0, 1, \dots, N$, структуры ОДУ для последовательности векторов функций математического ожидания $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s)$ и матриц функций ковариации $\mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s)$ будут иметь вид:

$$\dot{\mathbf{m}}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) + \mathbf{c}_k^+(s), \tag{8}$$

$$\dot{\mathcal{K}}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathcal{A}_k^+(s) \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) + \left[\mathcal{A}_k^+(s) \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) \right]^\top + 2\pi \mathcal{H}_k^+(s) \mathcal{H}_k^{+\top}(s), \tag{9}$$

где

$$\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathbb{E} [\mathbf{Z}_k^+(s)], \quad \mathcal{K}_{\mathbf{Z}_k^+ \mathbf{Z}_k^+}(s) = \mathbb{E} \left[\{ \mathbf{Z}_k^+(s) - \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) \} \{ \mathbf{Z}_k^+(s) - \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k^+}(s) \}^\top \right].$$

Теперь определим вид начальных условий для построенных ОДУ:

$$\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_0}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{m}_X^0 \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_1}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{U_0}(\tau) \\ \mathbf{m}_{X_0}(\tau) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_k}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{U_{k-1}}(\tau) \\ \mathbf{m}_{X_{k-1}}(\tau) \\ \mathbf{O}_n \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{Z_0 Z_0}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{K}_{XX}^0 & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \quad \mathcal{K}_{Z_0 Z_1}(0) = \mathcal{K}_{Z_1 Z_0}^\top(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{YU_0}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{YU_0}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
 \mathcal{K}_{Z_1 Z_1}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_0 U_0}(\tau) & \mathcal{K}_{U_0 X_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_0 U_0}(\tau) & \mathcal{K}_{X_0 X_0}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mathcal{K}_{Z_0 Z_k}(0) = \mathcal{K}_{Z_k Z_0}^\top(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{YU_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{YX_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}; \\
 \mathcal{K}_{Z_\ell Z_k}(0) = \mathcal{K}_{Z_k Z_\ell}^\top(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_{\ell-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_{\ell-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_{\ell-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{\ell-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq \ell \leq k-1; \\
 \mathcal{K}_{Z_k Z_k}(0) &= \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{U_{k-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{U_{k-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{K}_{X_{k-1} U_{k-1}}(\tau) & \mathcal{K}_{X_{k-1} X_{k-1}}(\tau) & \mathcal{O}_{n \times n} \\ \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} & \mathcal{O}_{n \times n} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Вследствие того, что вектор функций математического ожидания $\mathbf{m}_X(t)$ и матрицу функций ковариации $\mathcal{K}_{XX}(t)$ на промежутке $t_0 \leq t \leq t_{N+1}$ можно собрать из соответствующих блоков векторной функции $\mathbf{m}_{Z_N}(s)$ и матричной функции $\mathcal{K}_{Z_N Z_N}(s)$, достаточно вычислить последние, а затем выбрать из них необходимые элементы.

5. Формирование систем ОДУ для ковариационных функций. Обратимся к главной цели исследования — построению системы ОДУ для расчета компонент матрицы ковариационных функций

$$\mathcal{C}_{XX}(\bar{t}, \bar{s}) = \mathbb{E} [\{ \mathbf{X}(\bar{t}) - \mathbf{m}(\bar{t}) \} \{ \mathbf{X}(\bar{s}) - \mathbf{m}(\bar{s}) \}^\top]$$

случайного вектора состояния $\mathbf{X}(\cdot)$ ($t_0 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq T$). В процессе этого построения будут использоваться те же системы СОДУ (5)–(6), (7)–(9).

0-0°. Рассмотрим нижнюю правую часть области \mathbb{D}_{00} (рис. 1): $t_0 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq t_1$ ($\bar{t} = \underline{t} + t_0$, $\bar{s} = \underline{s} + t_0$, $0 \leq \underline{s} \leq \underline{t} \leq \tau$). В этой части $\mathbf{X}(\bar{t})$ — подвектор вектора $\mathbf{Z}_0(\bar{t})$, а следовательно, с учетом уравнений (7), (8) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \{ \mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\
 &= \mathbb{E} [\{ \mathbf{A}_0(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \mathbf{H}_0(\underline{t}) \mathbf{V}_0(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top],
 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \mathbf{A}_0(\underline{t}) \mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \underline{s} < \underline{t}, \quad (10)$$

с начальными условиями $\mathcal{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}, \underline{s}) = \mathcal{K}_{Z_0 Z_0}(\underline{s})$.

1-0°. Теперь рассмотрим область \mathbb{D}_{10} (рис. 1): $t_1 < \bar{t} \leq t_2$, $t_0 \leq \bar{s} \leq t_1$. В этой области получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\
 &= \mathbb{E} [\{ \mathbf{B}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \mathbf{A}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t})] + \mathbf{H}_1(\underline{t}) \mathbf{V}_1(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_0(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{s}) \}^\top],
 \end{aligned}$$

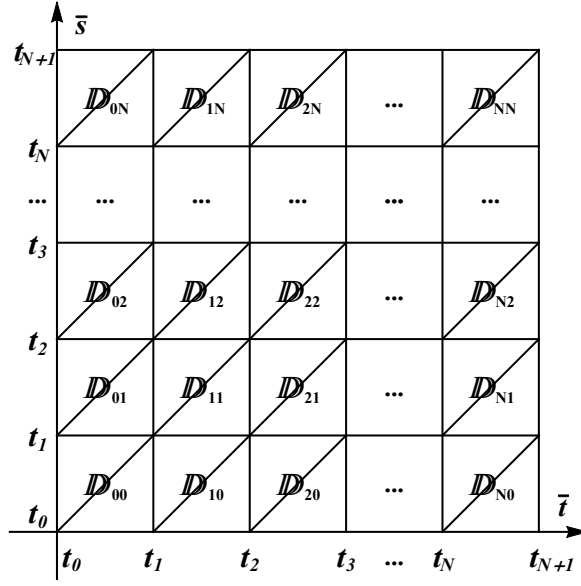


Рис. 1

или

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \mathbf{C}_{Z_1 Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\tau, \underline{s}). \quad (11)$$

Для полноты расчетных соотношений к этим уравнениям нужно добавить по очереди системы ОДУ

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{A}}_0(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad 0 < \underline{t} < \underline{s} \leq \tau, \quad \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}^\top(\underline{s}, 0) \quad (12)$$

(верхняя левая часть области \mathbb{D}_{00}) и

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{A}}_0(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{t}, \underline{s}), \quad 0 < \underline{s} < \underline{t} \leq \tau, \quad \mathbf{C}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}, \underline{s}) = \underline{\mathbf{K}}_{Z_0 Z_0}(\underline{s}) \quad (13)$$

(нижняя правая часть области \mathbb{D}_{00}).

к-0°. Продолжая подобным образом, для области \mathbb{D}_{k0} : $t_k \leq \bar{t} \leq t_{k+1}$ ($k > 1$), $t_0 \leq \bar{s} \leq t_1$ можно построить уравнения вида

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_k Z_0}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_k(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_{k-1} Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_k(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_k Z_0}(\underline{t}, \underline{s}) \quad (14)$$

с начальными условиями $\mathbf{C}_{Z_k Z_0}(0, \underline{s}) = \mathbf{C}_{Z_{k-1} Z_0}(\tau, \underline{s})$. Эта система уравнений должна быть дополнена системами ОДУ, построенными для областей $\mathbb{D}_{00}, \mathbb{D}_{10}, \dots, \mathbb{D}_{k-1,0}$.

1-1°. Передвинемся на следующий временной слой и рассмотрим нижнюю правую часть области \mathbb{D}_{11} : $t_1 \leq \bar{s} \leq \bar{t} \leq t_2$ ($\bar{t} = \underline{t} + t_1$, $\bar{s} = \underline{s} + t_1$, $0 \leq \underline{s} \leq \underline{t} \leq \tau$). В этой части $\mathbf{X}(\bar{t})$ — подвектор вектора $\mathbf{Z}_1(\bar{t})$, а следовательно, для матрицы ковариационных функций будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} &\equiv \frac{\partial \mathbb{E} [\{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top]}{\partial \underline{t}} = \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{\partial \{ \mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t}) \}}{\partial \underline{t}} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top \right] = \\ &= \mathbb{E} [\{ \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_0(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_0}(\underline{t})] + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) [\mathbf{Z}_1(\underline{t}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{t})] + \underline{\mathbf{H}}_1(\underline{t}) \mathbf{V}_1(\underline{t}) \} \{ \mathbf{Z}_1(\underline{s}) - \mathbf{m}_{Z_1}(\underline{s}) \}^\top], \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})}{\partial \underline{t}} = \underline{\mathbf{B}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_0 Z_1}(\underline{t}, \underline{s}) + \underline{\mathbf{A}}_1(\underline{t}) \mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{t}, \underline{s}), \quad \underline{s} < \underline{t}, \quad (15)$$

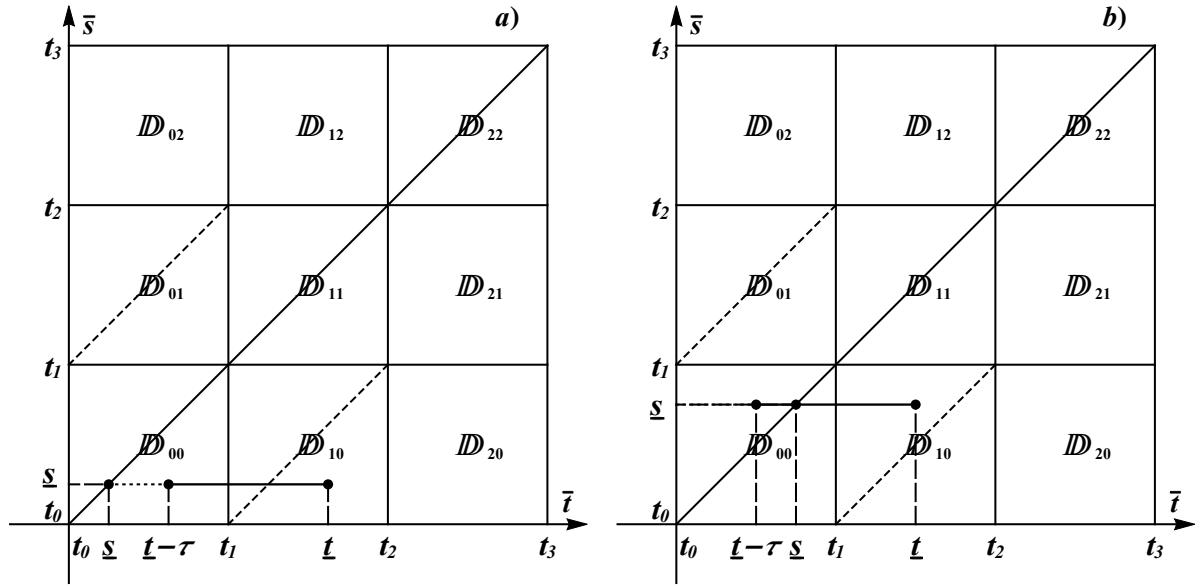


Рис. 2

с начальными условиями $\mathbf{C}_{Z_1 Z_1}(\underline{s}, \underline{s}) = \mathbf{K}_{Z_1 Z_1}(\underline{s})$. К этим уравнениям и условиям нужно добавить необходимые инструменты расчета $\mathbf{C}_{Z_0 Z_1}(\underline{t}, \underline{s})$ в нижней правой части области \mathbb{D}_{10} с учетом свойств ковариационных функций.

Замечание. Последовательное численное решение ОДУ для функций математического ожидания и ковариации не вызывает проблем, причем группы уравнений для этих функций являются независимыми. Расчет же поведения ковариационных функций более сложен. Алгоритм такого расчета включает следующие шаги:

- (1) дробление запаздывания на целое число частей;
- (2) построение сетки на плоскости переменных $(\underline{t}, \underline{s})$, в узлах которой и будут вычисляться значения ковариационных функций (это необходимо для их расчета на участках $[t_0, \bar{s}]$ при различных \bar{s} на основе формирования начальных условий в точках $\{t_0, \bar{s}\}$ с помощью уже найденных значений в точках $\{\bar{s}, t_0\}$);
- (3) движение через узлы по прямым, параллельным оси \underline{t} .

На рис. 2 показаны промежутки интегрирования этих уравнений на отрезке $[\underline{s}, \underline{t}]$ для случаев $\underline{t} - \tau \geq \underline{s}$ (рис. 2a) и $\underline{t} - \tau < \underline{s}$ (рис. 2b).

6. Модельный пример. Воспользуемся изложенной схемой для анализа переходного процесса, описываемого модельным уравнением вида

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t) = \beta [X(t) - X(t - \tau)] + \int_{t-\tau}^t q(\theta) X(\theta) d\theta + \sigma_0 V(t), \quad t > 0,$$

$$\dot{X}(t) + \alpha_0 X(t) = \sigma_0 V(t), \quad -\tau < t \leq 0, \quad X(-\tau) = X^0 \sim \mathcal{N}(m_0, D_0),$$

где X^0 — неслучайная величина; $\alpha > 0, \beta, \sigma_0, \alpha_0 > 0, m_0, D^0 > 0$ — постоянные; $q(\theta) \geq 0$.

Ниже на рисунках показаны графики функций математического ожидания и среднеквадратичного отклонения $\sigma_X(t) = \sqrt{\mathcal{D}_X(t)}$ (рис. 3) и ковариационной функции в областях $\mathbb{D}_{00}, \mathbb{D}_{10}, \dots, \mathbb{D}_{10,0}$ (рис. 4), построенные на основе результатов расчетов при следующих значениях параметров задачи:

$$\tau = 1; \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{10}; \quad \sigma_0 = \frac{1}{10}; \quad m_0 = 1; \quad D_0 = \frac{1}{16}; \quad q = \frac{1}{20\tau},$$

где \mathcal{D} — дисперсия.

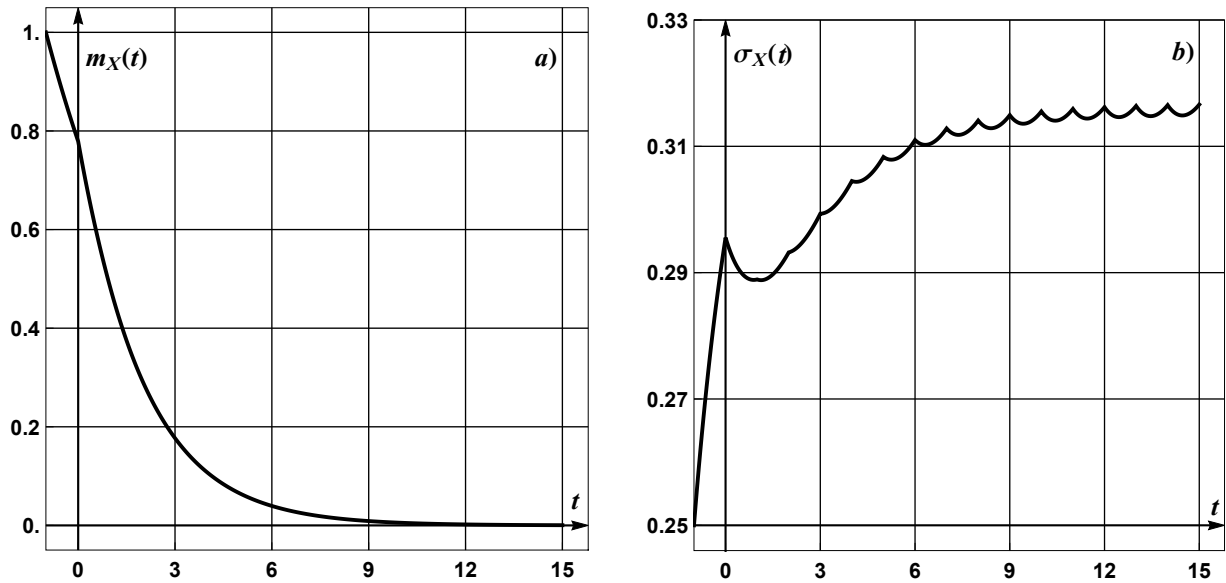


Рис. 3

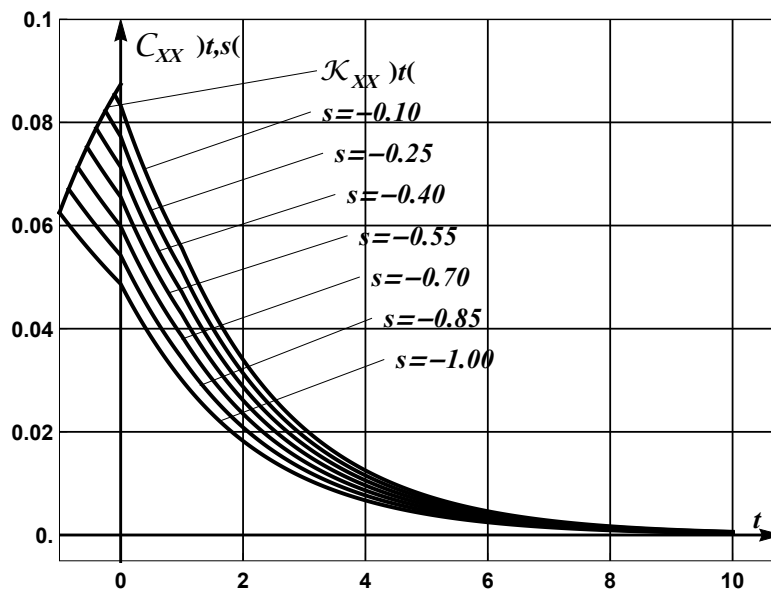


Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л. Оптимальное управление стохастическими системами с последействием// Автомат. телемех. — 1973. — № 1. — С. 47–61.
2. Полосков И. Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом// Автомат. телемех. — 2002. — № 9. — С. 58–73.
3. Adimy M., Crauste F., Halanay A. et al. Stability of limit cycles in a pluripotent stem cell dynamics model// Chaos Solit. Fract. — 2006. — 27, № 4. — P. 1091–1107.
4. Buckwar E. Euler–Maruyama and Milstein approximations for stochastic functional differential equations with distributed memory term// in: Discussion Papers of Interdisciplinary Research Project 373: Quantification and Simulation of Economic Processes. — Berlin: Humboldt University, 2003.

5. *Buckwar E.* The θ -Maruyama scheme for stochastic functional differential equations with distributed memory term// Monte Carlo Meth. Appl. — 2004. — 10, № 3. — P. 235–244.
6. *Chang M. H., Pang T., Pemy M.* Optimal control of stochastic functional differential equations with a bounded memory// Int. J. Probab. Stochast. Processes. — 2008. — 80, № 1. — С. 69–96.
7. *Ding X., Wu K., Liu M.* Convergence and stability of the semi-implicit Euler method for linear stochastic delay integro-differential equations// Int. J. Comput. Math. — 2006. — 83, № 10. — С. 753–763.
8. *El-Hawary H. M., El-Shami K. A.* Numerical solution of Volterra delay-integro-differential equations via spline/spectral methods// Int. J. Differ. Equations Appl. — 2013. — 12, № 3. — P. 149–157.
9. *Geffert P. M.* Stochastic Non-Excitable Systems with Time Delay: Modulation of Noise Effects by Time-Delayed Feedback. — Wiesbaden: Springer, 2015.
10. *Gozzi F., Marinelli C., Savin S.* On controlled linear diffusions with delay in a model of optimal advertising under uncertainty with memory effects// J. Optim. Theory Appl. — 2009. — 142, № 2. — P. 291–321.
11. *Hu P., Huang Ch.* Stability of Euler–Maruyama method for linear stochastic delay integro-differential equations// Math. Num. Sinica. — 2010. — 32, № 1. — P. 105–112.
12. *Koto T.* Stability of θ -methods for delay integro-differential equations// J. Comput. Appl. Math. — 2003. — 161, № 2. — P. 393–404.
13. *Khasawneh F. A., Mann B. P.* Stability of delay integro-differential equations using a spectral element method// Math. Comput. Model. — 2011. — 54, № 9–10. — P. 2493–2503.
14. *Kushner H. J.* Numerical Methods for Controlled Stochastic Delay Systems. — Boston: Birkhäuser, 2008.
15. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. — Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2011.
16. *Poloskov I. E.* Numerical and analytical methods of study of stochastic systems with delay// J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — P. 746–750.
17. *Poloskov I. E.* New scheme for estimation of the first and senior moment functions for the response of linear delay differential system excited by additive and multiplicative noises// J. Math. Sci. — 2020. — 246, № 4. — P. 525–539.
18. *Shakourifar M., Enright W. H.* Reliable approximate solution of systems of Volterra integro-differential equations with time-dependent delays// SIAM J. Sci. Comput. — 2011. — 33, № 3. — P. 1134–1158.
19. *Zhang Ch.* A class of new Pouzet–Runge–Kutta type methods for nonlinear functional integrodifferential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2012. — P. 21.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Полосков Игорь Егорович

Пермский государственный национальный исследовательский университет

E-mail: poloskov@psu.ru