ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 14–26
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-14-26

УДК 517.518.8, 517.988.8

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ОКОННАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И ТЕТА-ФУНКЦИЙ

© 2024 г. М. Л. ЖАДАНОВА, С. Н. УШАКОВ, Е. А. КИСЕЛЕВ

Аннотация. Построена двухкомпонентная оконная система функций, обладающая хорошей частотно-временной локализацией. Система составлена из двух ортогональных друг другу оконных подсемейств. Обсуждается процедура ортогонализации полученных подсемейств, приводятся явные формулы для расчёта констант неопределённости, рассмотрена проблема полноты всей предложенной двухкомпонентной системы. Вопросы об ортогонализации и полноте сведены к проверке одной гипотезы о нулях преобразования Зака.

Ключевые слова: оконная система, когерентные состояния, тета-функция, частотно-временная локализация, константа неопределённости, преобразование Зака.

TWO-COMPONENT WINDOW SYSTEM BASED ON COHERENT STATES AND THETA FUNCTIONS

© 2024 M. L. ZHADANOVA, S. N. USHAKOV, E. A. KISELEV

Abstract. In this paper, we construct a two-component window system of functions with good time-frequency localization. The system consists of two window subfamilies orthogonal to each other. The procedure for orthogonalizing the resulting subfamilies is discussed, explicit formulas for calculating the uncertainty constants are given, and the problem of completeness of the whole two-component system is considered. Questions about orthogonalization and completeness are reduced to testing a certain hypothesis about the zeros of the Zak transform.

Keywords and phrases: window system, coherent states, theta function, time-frequency localization, uncertainty constant, Zak transform.

AMS Subject Classification: 42C30, 42C40

1. Введение.

Системы функций вида
$$g_{k,m}(x)=\exp\left(-\frac{(x+\omega_1 k)^2}{2}\right)e^{i\omega_2 mx},\quad k,m\in\mathbb{Z},\tag{1}$$
где $\omega_1,\omega_2>0$ — некоторые фиксированные параметры, нашли широкое применение в различных областях математики и физики. В квантовой теории они носят название когерентных состояний, а при условии $\omega_1\omega_2<2\pi$ образуют фрейм, называемый также фреймом Габора (см. [1, гл. 3], [10, гл. 11]). Одна из первых прикладных задач, решаемых Дж. фон Нейманом, была связана с построением квантовой энтропии. Трудность состояла в получении ортонормированного базиса пространства $L_2(\mathbb{R})$ с равномерно ограниченной константой неопределённости из семейства функций (1) при условии $\omega_1\omega_2=2\pi$ (см. [5]). Позднее возник вопрос о полноте данной системы функций, разрешённый в работах А. М. Переломова. Под полнотой понимается равенство нулю ортогонального дополнения. Оказалось, что при предложенном условии на ω_1, ω_2

система содержит ровно одну лишнюю функцию (см. [7, 8]), а в силу теоремы Бальяна—Лоу получилось невозможным построить базис оконного типа с равномерно ограниченной константой неопределённости (см. [1, гл. 4]). Мы предлагаем обойти указанную проблему, используя многокомпонентные оконные системы, порождённые не одной, а несколькими функциями.

Рассмотрим семейство функций (1) при $\omega_1\omega_2 = 4\pi$. Из него можно получить ортонормированную систему с равномерно ограниченной константой неопределённости, которая, однако, не является полной в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см. [11]). Действительно, как следует из результатов [3], набор функций

$$u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha-1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\alpha x}{\omega_2} - \frac{i}{2}\right), q\right), \tag{2}$$

с параметрами

$$q = \exp\left(-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(1 - \frac{2\pi}{S}\alpha\right)\right), \quad 1 < \alpha < \frac{S}{2\pi}, \quad S = \omega_1\omega_2 > 2\pi,$$

ортогонален всем $g_{k,m}(x)$, $k, m \in \mathbb{Z}$, если $\omega_1\omega_2 > 2\pi$. Здесь $\theta_3(x, q)$ — третья тета-функция Якоби (см. [13, 20.2.3]):

$$\theta_3(x, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikx}, \quad |q| < 1.$$

Мы предлагаем рассмотреть неполную оконную систему (1) с параметрами $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 4\pi$, дополнив её с помощью (2) с применением операции сдвига к самой функции $u_\alpha(x)$ и к её образу Фурье. В результате получается двухкомпонентная оконная система, причём для построения ортонормированного семейства достаточно будет только ортогонализовать отдельно вторую компоненту, образованную функциями $u_\alpha(x+k)e^{i4\pi mx}$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

2. Построение двухкомпонентной ортогональной оконной системы функций. Пусть $\omega_1\omega_2 = 4\pi$. Рассматривается случай $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 4\pi$. Заметим, что при других соотношениях параметров выкладки полностью аналогичны, но формулы получаются более громоздкими. Зафиксируем в (2) некоторое значение $\alpha \in (1, 2)$ и рассмотрим сдвиги полученной функции $u_\alpha(x)$ по переменной x с шагом $\omega_1 = 1$ и по частоте с шагом $\omega_2 = 4\pi$. В результате получим двухкомпонентную оконную систему следующего вида:

$$g_{k,m}(x) = \exp\left(-\frac{(x+k)^2}{2}\right)e^{i4\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

$$u_{k,m}(x) = u(x+k)e^{i4\pi mx}, \qquad k, m \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Здесь функция окна второй компоненты задаётся равенством

$$u(x) = u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha-1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3\left(-\alpha\pi x + i2\pi^2, q\right), \quad q = \exp\left(-2\pi^2(2-\alpha)\right).$$

Подсемейства $g_{k,m}(x)$ и $u_{k,m}(x)$ взаимно ортогональны. Таким образом, чтобы получить ортонормированную систему, достаточно ортогонализовать отдельно $g_{k,m}(x)$ и $u_{k,m}(x)$. Для $g_{k,m}(x)$, как уже упоминалось, это было сделано ранее (см. [3]). Ортогонализация $u_{k,m}(x)$ выполняется в рамках данной работы.

Нам понадобится преобразование Зака (см. [1, гл. 4])

$$Z[f](x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} f(x-p)e^{i2\pi py}, \quad x, y \in [0, 1].$$

Оно является линейным отображением $L_2(\mathbb{R}) \to S$, где $S = L_2([0,1]^2)$. Укажем два его свойства.

1. Для любых $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение

$$(f, g)_{L_2} = (Z[f], Z[g])_S = \int_0^1\int_0^1 Z[f](x, y)\overline{Z[g](x, y)}\,dx\,dy. \tag{5}$$

2. Пусть

$$f_{k,m}(x) = f(x+k)e^{i2\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$Z[f_{k,m}](x,y) = Z[f](x,y)e^{i2\pi(mx+ky)}. \tag{6}$$

Перейдём непосредственно к ортогонализации $u_{k,m}(x)$. Требуется построить такую функцию

$$v(x) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} u_{p,r}(x), \tag{7}$$

что

$$(v, v_{k,m}) = \delta_{0,k}\delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z},$$

где

$$v_{k,m}(x) = v(x+k)e^{i4\pi mx}, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

При этом предполагается, что $\{c_{p,r}^{\perp}\} \in \ell_2$, т.е.

$$\sum_{p,r=-\infty}^{\infty} |c_{p,r}^{\perp}|^2 < \infty.$$

Применим к $v(x)$ преобразование Зака:

$$Z[v](x,y) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} Z[u](x,y)e^{i2\pi(2rx+py)} = Z[u](x,y) \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} e^{i2\pi(2rx+py)}. \tag{8}$$

Если использовать вспомогательный тригонометрический ряд

$$C^{\perp}(x,y) = \sum_{p,r=-\infty}^{\infty} c_{p,r}^{\perp} e^{i2\pi(rx+py)},$$

который называют символом или маской последовательности $\{c_{p,r}^{\perp}\}$ (см. [6, гл. 1], [9, гл. 3]), то равенство (8) можно представить в кратком виде:

$$Z[v](x,y) = Z[u](x,y)C^{\perp}(2x,y). \tag{9}$$

С помощью свойства (5) условие ортогональности также можно записать в терминах $Z[v]$:

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \delta_{0,k}\delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Сформулируем одно вспомогательное утверждение, которое понадобится в дальнейшем. Оно в той или иной форме встречается в [1, гл. 4] и [12]. Также приведём и его доказательство, поскольку некоторые идеи сыграют важную роль в последующих рассуждениях. Для простоты при этом будем полагать, что функция $v(x)$ всюду определена и является гладкой, поскольку в конечном счёте именно с такими нам и приходится иметь дело в рамках данной работы.

Утверждение 1. *Условие ортогональности* (10) *выполняется тогда и только тогда, когда почти всюду при* $x, y \in [0,1]$ *имеет место соотношение*

$$\left|Z[v]\left(\frac{x}{2}, y\right)\right|^2 + \left|Z[v]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\right|^2 = 1. \tag{11}$$

Доказательство. Воспользуемся свойством (6):

$$\big(Z[v], Z[v_{k,m}]\big) = \int_0^1\int_0^1 |Z[v](x,y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)}\,dx\,dy.$$

Разобьём интеграл по x на две части, обозначив его для краткости $I(y)$:

$$I(y) = \int_0^{1/2} |Z[v](x,y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)}dx + \int_{1/2}^{1} |Z[v](x,y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)}dx.$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной $t = x - 1/2$:

$$I(y) = \int\limits_0^{1/2} |Z[v](x,y)|^2 e^{i2\pi(2mx+ky)} dx + \int\limits_0^{1/2} \left| Z[v]\left(t+\frac{1}{2}, y\right)\right|^2 e^{i2\pi(2mt+ky)} dx.$$

Здесь учтено, что $e^{i2\pi m} = 1$. После этого снова объединим интегралы:

$$I(y) = \int\limits_0^{1/2} \left(|Z[v](t,y)|^2 + \left| Z[v]\left(t+\frac{1}{2}, y\right)\right|^2 \right) e^{i2\pi(2mt+ky)} dt.$$

Для удобства сделаем ещё одну замену $x = 2t$. В результате имеем:

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\left| Z[v]\left(\frac{x}{2}, y\right)\right|^2 + \left| Z[v]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\right|^2 \right) e^{i2\pi(mx+ky)}\, dx\, dy.$$

Из полученной формулы вытекает, что в случае, когда $(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \delta_{0,k}\delta_{0,m}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, подынтегральное выражение почти всюду при $x, y \in [0,1]$ должно быть равно единице, поскольку экспоненты $e^{i2\pi(mx+ky)}$, $k, m \in \mathbb{Z}$ образуют в пространстве S ортонормированный базис.

Пусть теперь, наоборот, имеет место равенство (11). Тогда

$$(Z[v], Z[v_{k,m}]) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{i2\pi(mx+ky)}\, dx\, dy = \delta_{0,k}\delta_{0,m}, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \qquad \square$$

Подставив (9) в (11), получим соотношение

$$\left| Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right)\right|^2 \left| C^{\perp}(x,y)\right|^2 + \left| Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\right|^2 \left| C^{\perp}(x+1,y)\right|^2 = 1.$$

Поскольку $C^{\perp}(x+1,y) = C^{\perp}(x,y)$, в результате приходим к следующему функциональному уравнению:

$$\left| C^{\perp}(x,y)\right|^2 = \frac{1}{F(x,y)}, \tag{12}$$

где

$$F(x,y) = \left| Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right)\right|^2 + \left| Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\right|^2. \tag{13}$$

Если извлечь квадратный корень из правой части (12) и разложить полученную функцию в двумерный ряд Фурье, можно найти коэффициенты ортогонализации $c^{\perp}_{p,r}$, которые нам необходимы.

Начнём с того, что исследуем преобразование Зака функции $u(x)$:

$$Z[u](x,y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-(\alpha-1)\frac{(x-p)^2}{2}\right) \theta_3\left(-\alpha\pi(x-p) + i2\pi^2, q\right) e^{i2\pi py}. \tag{14}$$

В данной работе мы не ставим себе целью провести исчерпывающий обзор всевозможных случаев, а стремимся получить хотя бы один пример двухкомпонентной ортогональной оконной системы функций. По этой причине положим далее $\alpha = 3/2$, так как при этом значении параметра многие формулы заметно упрощаются.

В дальнейшем для краткой записи соотношений нам понадобятся ещё две тета-функции Якоби (см. [13, (20.2.2), (20.2.4)]):

$$\theta_2(x,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} e^{i(2k+1)x}, \quad \theta_4(x,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} e^{2ikx}, \quad |q| < 1.$$

Итак, подставим $\alpha = 3/2$ в формулу (14):

$$Z[u](x,y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-p)^2}{4}\right)\theta_3\left(-\frac{3\pi(x-p)}{2} + i2\pi^2, q\right)e^{i2\pi py}, \quad q = \exp(-\pi^2).$$

Воспользуемся квазипериодичностью тета-функции (см. [13, (20.2.8)]):

$$\theta_3\left(z + (m+n\tau)\pi, q\right) = q^{-n^2}e^{-i2nz}\theta_3(z,q), \quad m,n \in \mathbb{Z}.$$

В нашем случае $\tau = i\pi$, $q = \exp(i\pi\tau) = \exp(-\pi^2)$. Это даёт

$$\theta_3\left(-\frac{3\pi x}{2} + i2\pi^2, q\right) = e^{4\pi^2}e^{i6\pi x}\theta_3\left(-\frac{3\pi x}{2}, q\right).$$

С учётом того, что $\theta_3(x,q)$ — чётная функция, получим следующую формулу:

$$Z[u](x,y) = e^{4\pi^2}e^{i6\pi x}\sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-p)^2}{4}\right)\theta_3\left(\frac{3\pi(x-p)}{2}, q\right)e^{i2\pi py}. \tag{15}$$

Поскольку

$$\theta_3(x+\pi, q) = \theta_3(x,q), \quad \theta_3(x+\pi/2, q) = \theta_4(x,q)$$

(см. [13, (20.2.8), (20.2.14)]), имеем:

$$\theta_3\left(\frac{3\pi(x-2p)}{2}, q\right) = \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right), \quad \theta_3\left(\frac{3\pi(x-2p+1)}{2}, q\right) = \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right).$$

Благодаря этому удобно сумму разбить на две части: по чётным значениям индекса $p = 2r$ и по нечётным $p = 2r-1$. Это даёт:

$$\begin{aligned} Z[u](x,y) = e^{4\pi^2}e^{i6\pi x}\Bigg(\theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\sum_{r=-\infty} e^{i4\pi ry}\exp\left(-\frac{(x-2r)^2}{4}\right) + \\ + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(2r-1)y}\exp\left(-\frac{(x-2r+1)^2}{4}\right)\Bigg) = \\ = e^{4\pi^2}e^{i6\pi x}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg(\theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\sum_{r=-\infty}\exp(-r^2)e^{ir(4\pi y - ix)} + \\ + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\sum_{r=-\infty}\exp\left(-\frac{(2r-1)^2}{4}\right)e^{i(2r-1)(2\pi y - ix/2)}\Bigg). \end{aligned}$$

Оставшиеся суммы тоже представляют собой некоторые тета-функции. Пользуясь этим, окончательно приходим к следующей формуле:

$$Z[u](x,y) = e^{4\pi^2}e^{i6\pi x}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\Omega(x,y),$$

где

$$\Omega(x,y) = \theta_3\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\theta_3\left(2\pi y - \frac{ix}{2}, q_u\right) + \theta_4\left(\frac{3\pi x}{2}, q\right)\theta_2\left(2\pi y - \frac{ix}{2}, q_u\right), \quad q_u = \exp(-1/2).$$

Важную роль в дальнейшем играют точки, в которых преобразование Зака $Z[u](x,y)$ обращается в нуль. Докажем, что $Z[u](x,y) = 0$ при $x = y = 1/2$. Для этого удобнее всего воспользоваться формулой (15):

$$Z[u]\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -e^{4\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(1/2-p)^2}{4}\right)\theta_3\left(\frac{3\pi(1/2-p)}{2}, q\right)(-1)^p.$$

В силу чётности функции Гаусса и $\theta_3(x,q)$, эта сумма разбиваются на пары слагаемых, которые одинаковы по модулю, но противоположны по знаку. Это будут слагаемые с номерами $p = 0$ и $p = -1$, $p = 1$ и $p = -2$ и т. д. Следовательно, вся правая часть равна нулю.

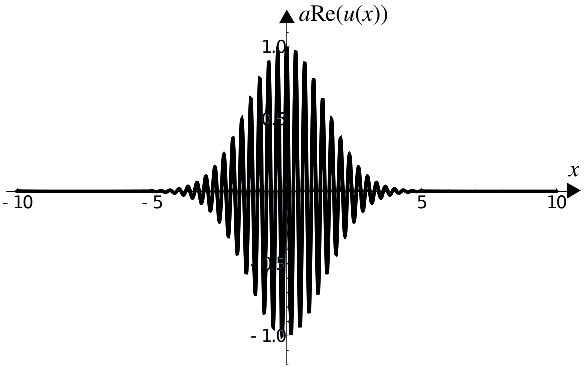

Рис. 1. График $a\,\mathrm{Re}\,u(x)$.

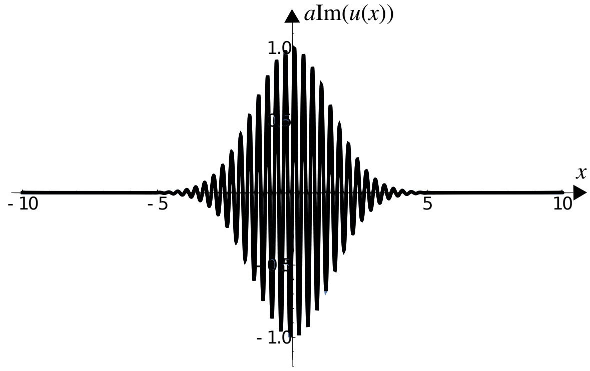

Рис. 2. График $a\,\mathrm{Im}\,u(x)$.

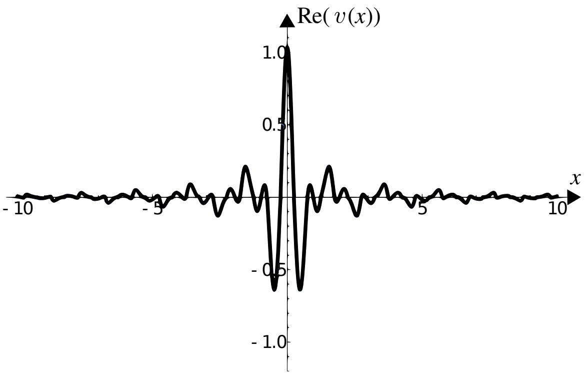

Рис. 3. График $\mathrm{Re}\,v(x)$.

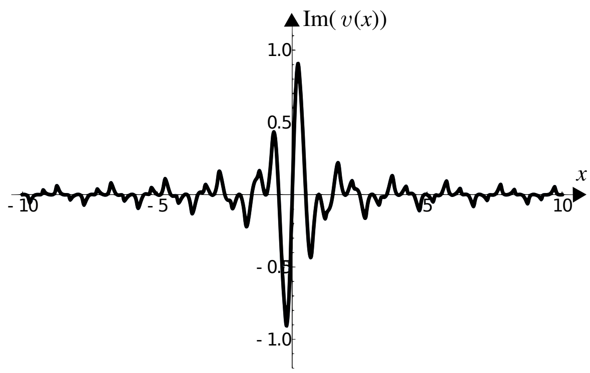

Рис. 4. График $Imv(x)$.

Доказать, что $Z[u](x,y) \neq 0$ во всех остальных точках квадрата $x, y \in [0,1]$ оказывается существенно сложнее. К сожалению, строго аналитически это обосновать не удалось, но результаты численных расчётов позволяют выдвинуть следующее предположение.

Гипотеза 1. $Z[u](x,y) \neq 0$ при всех $x, y \in [0,1]$, кроме точки $x = y = 1/2$.

Если данная гипотеза верна, то функция $F(x,y)$ из формулы (13) будет строго положительной, так как оба слагаемых в (13) не смогут одновременно обратиться в нуль.

Далее необходимо воспользоваться уравнением (12): требуется извлечь квадратный корень из (13) и разложить функцию $1/\sqrt{F(x,y)}$ в двумерный ряд Фурье. К сожалению, найти $c^{\perp}_{p,r}$ после этого удаётся только численно.

На рис. 1 и 2 представлены графики действительной и мнимой части функции $u(x)$. Чтобы избежать слишком больших чисел, все значения умножены на величину $a = e^{-4\pi^2}$.

На рис. 3 и 4 представлены графики действительной и мнимой части функции $v(x)$ из формулы (7), которая порождает ортонормированную оконную подсистему.

3. Константа неопределённости. Обозначим через $\widehat{g}(\xi)$ преобразование Фурье функции $g(x)$:

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx,$$

являющееся линейным унитарным оператором, действующим в $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $g(x), xg(x) \in L_2(\mathbb{R})$, причём $\|g\|_{L_2} \neq 0$. Тогда среднее значение $\langle g \rangle$ и радиус $\Delta(g)$ функции g задаются формулами

$$\langle g \rangle = \frac{1}{\|g\|^2_{L_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x|g(x)|^2 dx, \quad \Delta(g) = \left(\frac{1}{\|g\|^2_{L_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \langle g \rangle)^2 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Аналогично определяются среднее значение $\langle \widehat{g} \rangle$ и радиус $\Delta(\widehat{g})$ для преобразования Фурье $\widehat{g}$ в случае $\xi \widehat{g}(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\langle \widehat{g} \rangle = \frac{1}{\|\widehat{g}\|^2_{L_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi|\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi, \quad \Delta(\widehat{g}) = \left(\frac{1}{\|\widehat{g}\|^2_{L_2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\xi - \langle \widehat{g} \rangle)^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Константой неопределённости называется произведение (см. [6, гл. 1], [9, гл. 1])

$$u(g) = \Delta(g)\Delta(\widehat{g}).$$

В тех случаях, когда один из интегралов $\Delta(g)$ или $\Delta(\widehat{g})$ расходится, значение константы неопределённости принято брать равным ∞. В случае унитарного преобразования Фурье минимальное значение константы неопределённости равно $1/2$.

В нашем конкретном случае при вычислении константы неопределённости возникают интегралы, значения которых выпишем заранее:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\,\alpha x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{i\,\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\,\alpha x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{i\,\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} \left(r + \frac{i\alpha}{2\beta^2} \right), \tag{17}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta^2(x-r)^2} e^{i\,\alpha x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^5} e^{i\,\alpha r} e^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} \left(2\beta^2 - \left(\alpha - 2ir\beta^2\right)^2 \right), \tag{18}$$

где $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

Будем рассматривать специальный случай $S = \omega_1\omega_2 = 4\pi$, $\dfrac{\pi\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{\omega_2^2}{4}$. Тогда параметры и функции примут следующий вид:

$$-\frac{\pi\omega_2}{\omega_1}\left(\frac{\alpha x}{\omega_2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\omega_2 \alpha x}{4} + i\frac{\omega_2^2}{4}, \quad q = \exp\left(-\frac{\omega_2^2}{4}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

$$u_\alpha(x) = \exp\left(-(\alpha-1)\frac{x^2}{2}\right)\theta_3\left(-\frac{\omega_2\alpha x}{4} + i\frac{\omega_2^2}{4}, q\right) =$$
$$= \exp\left(-(\alpha-1)\frac{x^2}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega_2^2}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)k^2\right)\exp\left(\frac{-k\,\omega_2^2}{4}\right)\exp\left(\frac{i\omega_2\alpha k x}{4}\right).$$

Константу неопределённости будем искать для следующей линейной комбинации:

$$\varphi(x,\sigma,\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)e^{i\gamma k x}$$

Теорема 1. *Для функции окна*

$$\varphi(x,\sigma,\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)e^{i\gamma k x}$$

где $c_k = O(k^{-2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, *верны формулы*

$$\Delta^2(\varphi(x,\sigma,\gamma)) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^4\gamma^2 B}{4A}, \quad \Delta^2(\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma)) = \frac{1}{2\sigma^2} + \gamma^2\left(\frac{E}{4A} - \frac{D^2}{A^2}\right),$$

где

$$A = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \quad D = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right),$$

$$a_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}, \quad b_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, c_k c_{k-\ell}, \quad d_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}(2k-\ell)^2.$$

Доказательство. Выпишем квадрат модуля $\varphi(x,\sigma,\gamma)$:

$$|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2 = \sum_{k,k'=-\infty}^{\infty} c_k c_{k'} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2} + i\gamma(k-k')x\right).$$

Сделаем замену индекса $\ell = k - k'$, $k' = k - \ell$:

$$|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2 = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{i\ell\gamma x}.$$

Введём обозначение

$$a_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell};$$

тогда

$$|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2 = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{i\ell\gamma x}. \tag{19}$$

Выпишем норму функции $\varphi(x,\sigma,\gamma)$, используя (16):

$$\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2 = \sqrt{\pi}\sigma \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Заметим, что a_ℓ — вещественные числа, поэтому $|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2$ — чётная функция. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2\,dx = 0.$$

Применяя (18) и (19), мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\varphi(x,\sigma,\gamma)|^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sigma^5 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right)\left(\frac{2}{\sigma^2} - \ell^2\gamma^2\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{2}\,\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2 - \frac{\sqrt{\pi}}{4}\sigma^5 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \ell^2\gamma^2 \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

В итоге получим первую формулу теоремы:

$$\Delta^2(\varphi(x,\sigma,\gamma)) = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^4\gamma^2 B}{4A},$$

где

$$A = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right), \quad B = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \ell^2 \exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Перейдём к радиусу образа Фурье $\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma)$. Его удобно получить с помощью (16):

$$\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma)=\sigma\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp\left(-\frac{(\xi-k\gamma)^2\sigma^2}{2}\right).$$

Отсюда

$$|\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma)|^2=\sigma^2\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}\exp\left(-\sigma^2\left(\xi-\frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индекса $\ell=k-k'$, $k'=k-\ell$:

$$|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2=\sigma^2\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kc_{k-\ell}\exp\left(-\sigma^2\left(\xi-\frac{(2k-\ell)\gamma}{2}\right)^2-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Норма $\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma)$ находится при помощи формулы выше и (16):

$$\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2=\sqrt{\pi}\sigma\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}a_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Найдём вспомогательный для среднего значения образа Фурье интеграл при помощи (17):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\exp\left(-\sigma^2\left(\xi-\frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2\right)d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma}\frac{(k+k')\gamma}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\sqrt{\pi}\sigma\gamma\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}\frac{(k+k')}{2}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right)=$$
$$=\sqrt{\pi}\sigma\gamma\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}k\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индекса $\ell=k-k'$, $k'=k-\ell$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\sqrt{\pi}\sigma\gamma\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\,c_kc_{k-\ell}\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначение

$$b_\ell=\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\,c_kc_{k-\ell};$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\sqrt{\pi}\sigma\gamma\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}b_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Теперь выпишем значение $\langle\varphi(\xi,\sigma,\gamma)\rangle$:

$$\frac{1}{\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\frac{\gamma}{A}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}b_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначение

$$D=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}b_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

В результате получим

$$\frac{1}{\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\frac{\gamma D}{A}.$$

При помощи формулы (18) приходим к соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2\exp\left(-\sigma^2\left(\xi-\frac{(k+k')\gamma}{2}\right)^2\right)d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^5}\left(2\sigma^2+\sigma^4(k+k')^2\gamma^2\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3}+\frac{\sqrt{\pi}(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,d\xi=\sigma^2\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3}+\frac{\sqrt{\pi}(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma}\right)\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right)=$$

$$=\sigma^2\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma^3}+\frac{(k+k')^2\gamma^2}{4\sigma}\right)\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\sigma\gamma^2}{4}\sum_{k,k'=-\infty}^{\infty}c_kc_{k'}(k+k')^2\exp\left(-\frac{(k-k')^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Сделаем замену индекса $\ell=k-k'$, $k'=k-\ell$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}A+\frac{\sqrt{\pi}\sigma\gamma^2}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kc_{k-\ell}(2k-\ell)^2\right)\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Введём обозначения

$$d_\ell=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kc_{k-\ell}(2k-\ell)^2,\quad E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right).$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}A+\frac{\sigma\gamma^2\sqrt{\pi}}{4}E,$$

$$\frac{1}{\|\varphi(x,\sigma,\gamma)\|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\xi^2\,|\varphi(\xi,\sigma,\gamma)|^2\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma A}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sigma}A+\frac{\sigma\gamma^2\sqrt{\pi}}{4}E\right)=\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{\gamma^2E}{4A}.$$

Получаем вторую формулу утверждения теоремы:

$$\Delta^2(\widehat{\varphi}(\xi,\sigma,\gamma))=\frac{1}{2\sigma^2}+\gamma^2\left(\frac{E}{4A}-\frac{D^2}{A^2}\right),$$

где

$$A=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}a_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right),\quad E=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right),\quad D=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}b_\ell\exp\left(-\frac{\ell^2\gamma^2\sigma^2}{4}\right),$$

$$a_\ell=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kc_{k-\ell},\quad b_\ell=\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\,c_kc_{k-\ell},\quad d_\ell=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kc_{k-\ell}(2k-\ell)^2.$$ □

В данной работе мы рассматриваем неполную оконную систему (1) с параметрами $\omega_1=1$, $\omega_2=4\pi$, дополнив её с помощью (2) при $\alpha=3/2$ с применением операции сдвига к самой функции $u_\alpha(x)$ и к её образу Фурье. В результате получается двухкомпонентная оконная система вида (3), (4). Для первой ортогонализованной компоненты на основе формул статей [2] и [4] (формула для первой компоненты верна с точностью до замены коэффициентов) в частном описанном выше случае численно получено значение константы неопределённости 0,746.

В случае второй компоненты мы найдём радиусы для функции $u(x)\cdot e^{-4\pi^2}$. Радиусы $u(x)\cdot e^{-4\pi^2}$ и $u(x)$ совпадают, но процедура нахождения коэффициентов для $u(x)\cdot e^{-4\pi^2}$ более устойчива в плане точности, так как мы избежим слишком большого разрыва между числами. В этом случае

$$c_k = e^{-\pi^2(k-2)^2}, \quad \gamma = 6\pi, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{\alpha-1}} = \sqrt{2}.$$

В итоге

$$\Delta^2(u(\cdot)) = 1 - 36\pi^2\frac{B}{A}, \quad \Delta^2(\widehat{u(\cdot)}) = \frac{1}{4} + 36\pi^2\left(\frac{E}{4A} - \frac{D^2}{A^2}\right),$$

где

$$A = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \exp\left(-18\pi^2\ell^2\right), \quad E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_\ell \exp\left(-18\pi^2\ell^2\right),$$

$$B = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} a_\ell \ell^2 \exp\left(-18\pi^2\ell^2\right), \quad D = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} b_\ell \exp\left(-18\pi^2\ell^2\right),$$

$$a_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}, \quad b_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, c_k c_{k-\ell}, \quad d_\ell = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_{k-\ell}(2k-\ell)^2.$$

Численно значение выходит близким к оптимальному, а именно

$$\Delta(u(\cdot)) = 1{,}000000, \quad \Delta(\widehat{u(\cdot)}) = 0{,}500002.$$

4. Исследование полноты. Предположим, что двухкомпонентная система (3), (4) не является полной. Тогда существует такая функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$, что

$$(g_{k,m}, f) = (u_{k,m}, f) = 0, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим первое условие ортогональности. Запишем его через преобразование Зака:

$$(Z[g_{k,m}], Z[f]) = \int_0^1\int_0^1 Z[g](x,y)\overline{Z[f](x,y)}e^{i2\pi(2mx+ky)}\,dx\,dy = 0, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Утверждение 2. *Условие ортогональности* (20) *выполняется тогда и только тогда, когда почти всюду при* $x, y \in [0,1]$ *имеет место соотношение*

$$Z[g]\left(\frac{x}{2}, y\right)\overline{Z[f]\left(\frac{x}{2}, y\right)} + Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\overline{Z[f]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)} = 0. \tag{21}$$

Данный факт доказывается аналогично утверждению 1.

Если подставить в (21) вместо g функцию u, то получим

$$Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right)\overline{Z[f]\left(\frac{x}{2}, y\right)} + Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\overline{Z[f]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)} = 0. \tag{22}$$

Если же вместо f подставить u, то, поскольку $g_{k,m}$ и $u_{k,m}$ взаимно ортогональны, придём к равенству

$$Z[g]\left(\frac{x}{2}, y\right)\overline{Z[u]\left(\frac{x}{2}, y\right)} + Z[g]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)\overline{Z[u]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)} = 0. \tag{23}$$

Введём обозначения:

$$F_1(x,y) = \overline{Z[f]\left(\frac{x}{2}, y\right)}, \quad F_2(x,y) = \overline{Z[f]\left(\frac{x+1}{2}, y\right)}. \tag{24}$$

Фактически функция $F_1(x,y)$ описывает преобразование Зака в прямоугольнике $x \in [0,1/2]$, $y \in [0,1]$, а $F_2(x,y)$ задаёт его в прямоугольнике $x \in [1/2,1]$, $y \in [0,1]$. Поэтому $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ можно считать независимыми друг от друга величинами. Важным обстоятельством является то, что если почти всюду $F_1(x,y) = F_2(x,y) = 0$, то $Z[f](x,y) = 0$. В этом случае $f(x) = 0$, и двухкомпонентная система (3), (4), которую мы рассматриваем, является полной в $L_2(\mathbb{R})$.

Подставим (24) в формулы (21) и (22). В результате получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$:

$$\begin{cases} Z[g]\left(\dfrac{x}{2},y\right)F_1(x,y) + Z[g]\left(\dfrac{x+1}{2},y\right)F_2(x,y) = 0, \\ Z[u]\left(\dfrac{x}{2},y\right)F_1(x,y) + Z[u]\left(\dfrac{x+1}{2},y\right)F_2(x,y) = 0. \end{cases}$$

Исследуем её определитель, который мы обозначим как $M(x,y)$:

$$M(x,y) = Z[g]\left(\frac{x}{2},y\right)Z[u]\left(\frac{x+1}{2},y\right) - Z[u]\left(\frac{x}{2},y\right)Z[g]\left(\frac{x+1}{2},y\right). \tag{25}$$

Из результатов статьи [3] следует, что $Z[g]\,(x,y) = 0$ при $x = y = 1/2$, а во всех остальных точках квадрата $[0,1]^2$ величина $Z[g]\,(x,y)$ не обращается в нуль. Мы доказали выше, что и $Z[u]\,(x,y) = 0$ при $x = y = 1/2$. Кроме того, согласно гипотезе 1, при всех прочих $x,y \in [0,1]$ величина $Z[u]\,(x,y)$ отлична от нуля. Посмотрим, что из этого следует.

Положим в формуле (25) $x = 0$, $y = 1/2$:

$$M(x,y) = Z[g]\left(0,\frac{1}{2}\right)Z[u]\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - Z[u]\left(0,\frac{1}{2}\right)Z[g]\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Если же $x \neq 0$ или $y \neq 1/2$, то $Z[g]((x+1)/2,y) \neq 0$. Тогда, выразив $Z[u]((x+1)/2,y)$ из (23), формулу (25) можно привести к следующему виду:

$$M(x,y) = -\frac{Z[u]\left(\frac{x}{2},y\right)}{\overline{Z[g]\left(\frac{x+1}{2},y\right)}}\left(\left|Z[g]\left(\frac{x}{2},y\right)\right|^2 + \left|Z[g]\left(\frac{x+1}{2},y\right)\right|^2\right).$$

Из результатов статьи [3] следует, что величина в скобках не обращается в нуль. Согласно гипотезе (1) множитель $Z[u](x/2,y)$ равен нулю только при $x = 1$, $y = 1/2$. Следовательно, почти всюду при $x,y \in [0,1]$ определитель $M(x,y)$ отличен от нуля. Таким образом, если гипотеза 1 справедлива, двухкомпонентная система функций (3), (4) является полной.

5. Заключение. Конечной целью настоящего исследования являлось построение хорошо локализованного ортонормированного базиса, удобного для физических приложений. На данный момент эта цель была достигнута частично, поскольку остались несколько открытых вопросов.

В данной работе построена двухкомпонентная оконная система функций (3), (4). Путём расчёта констант неопределённости было показано, что она обладает хорошей частотно-временной локализацией, близкой к оптимальной. Проблемой осталось строго обосновать возможность ортогонализации с сохранением структуры второй компоненты (4), а также доказать полноту всей полученной системы функций. Решение обеих проблем удалось свести к проверке гипотезы 1 о том, что преобразование Зака $Z[u](x,y)$ обращается в нуль при $x,y \in [0,1]$ только в точке $x = y = 1/2$. Отметим, что на самом деле для доказательства полноты было бы достаточно и того, чтобы $Z[u](x,y)$ имело счётное число нулей в квадрате $[0,1]^2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: РХД, 2004.
2. *Журавлев М. В.* О константах неопределенности для линейных комбинаций некоторых подсистем когерентных состояний// Вестн. Самар. гос. ун-та. — 2014. — № 7 (118). — С. 17–31.
3. *Киселев Е. А.* Вычисление констант Рисса и ортогонализация для неполных систем когерентных состояний с помощью тета-функций// Мат. сб. — 2016. — *207*, № 8. — С. 101–116.

4. *Минин Л. А.* О разложении по фреймам Габора, порожденным функцией Гаусса// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 6. — С. 951–953.
5. *Нейман И.* Математические основы квантовой механики. — Новокузнецк, 2000.
6. *Новиков И. Я.* Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.
7. *Переломов А. М.* Замечание о полноте системы когерентных состояний// Теор. мат. физ. — 1971. — *6*, № 2. — С. 213–224.
8. *Переломов А. М.* 1972// Функц. анал. прилож.. — *6*, № 4. — С. 47–57.
9. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты: учебное пособие для студентов вузов. — М.: Мир, 2001.
10. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016.
11. *Zhuravlev M. V., Kiselev E. A., Minin L. A., Sitnik S. M. Jacobi Theta-functions and systems of integral shfts of Gaussian functions* J. Math. Sci. — 2011. — *173*, № 2. — P. 231–242.
12. *Lyubarskii Yu. I.* Entire and subharmonic functions// in: Frames in the Bargmann Space of Entire Functions (*Levin B. Ya.*, eds.). — Providence: Am. Math. Soc., 1992. — *11*. — P. 167–180.
13. *Olver F. W., Lozier D. W., Boisvert R., Clark C. W.* The NIST Handbook of Mathematical Functions. — New York: Cambridge Univ. Press, 2010.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРОВ

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Авторы заявляют об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Жаданова Мария Леонидовна
Воронежский государственный университет
E-mail: masha.minina97@mail.ru

Ушаков Сергей Николаевич
Воронежский государственный университет
E-mail: ushakowww@ya.ru

Киселев Евгений Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru