ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 233 (2024). С. 3–13
DOI: 10.36535/2782-4438-2024-233-3-13

УДК 517.927.2

РЕГУЛЯРНАЯ ЦИКЛИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ СТАНДАРТНОГО ВИДА

© 2024 г. **А. А. ГОЛУБКОВ**

Аннотация. Изучены свойства передаточной матрицы $\hat{C}$ уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида вдоль замкнутого пути, начинающегося в точке z_0 и обходящего против часовой стрелки границу выпуклой области, в которой имеется ровно одна особая точка z_s потенциала (граница области особых точек не содержит). Основное внимание уделено исследованию особых точек однозначного характера; доказано, что в этом случае, если след матрицы $\hat{C}$ не равен тождественно двум, то все её элементы являются целыми функциями спектрального параметра порядка $1/2$ и типа $2|z_0 - z_s|$ с тригонометрическим индикатором.

Ключевые слова: уравнения Штурма—Лиувилля на комплексной плоскости, особые точки, передаточная матрица.

THE REGULAR CYCLIC MATRIX OF AN ISOLATED SINGULAR POINT OF THE STURM–LIOUVILLE EQUATION OF THE STANDARD FORM

© 2024 **A. A. GOLUBKOV**

Abstract. For the Sturm–Liouville equation of the standard form, we examine properties of the transfer matrix $\hat{C}$ along a closed path starting at a point z_0 and going counterclockwise around the boundary of a convex domain containing exactly one singular point z_s of the potential (the boundary of the domain does not contain singular points). The main attention is paid to the study of singular points that are not branching points; we prove that in this case, if the trace of the matrix $\hat{C}$ is not equal to two, then all its elements are entire functions of the spectral parameter of order $1/2$ and type $2|z_0 - z_s|$ with a trigonometric indicator.

Keywords and phrases: Sturm–Liouville equations on the complex plane, singular points, transfer matrix.

AMS Subject Classification: 34B24, 34L20, 34M45

1. Введение. Постановка задачи и основные результаты. Асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \tag{1.1}$$

с голоморфным потенциалом Q в произвольной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ полностью изучена (см. [2, 13]). В частности, известно, что, если $z_f - z_0 = |z_f - z_0| \exp(i\varphi_z) \neq 0$, $\rho := \lambda^2 = |\rho| \exp(i\varphi_\rho)$, то в точке $z_f \in G$ непрерывно дифференцируемые решения u_1 и u_2

уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1 \quad (z_0 \in G) \tag{1.2}$$

являются целыми функциями спектрального параметра ρ регулярного роста порядка $1/2$ и типа $|z_f - z_0|$ с индикатором $|z_f - z_0|\big|\cos(\varphi_\rho + \varphi_z)/2\big|$ (о целых функциях и характеристиках их роста см. [15, гл. 1]). Этот же результат справедлив, если область G является звездной относительно точки z_0.

Однако если потенциал имеет особые точки и уравнение (1.1) рассматривается в невыпуклой области его аналитичности, то в самом общем случае известно лишь, что решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям (1.2), являются целыми функциями ρ порядка не выше $1/2$, а более точные результаты для их порядка, типа и индикатора получены только при наличии дополнительных ограничений на взаимное расположение точек z_0, z_f, форму связывающего их пути интегрирования уравнения (1.1) и положение сектора на комплексной плоскости, в котором спектральный параметр стремится к бесконечности (см. [10–12, 16, 19]).

В настоящей работе с целью более полной характеризации свойств решений уравнения (1.1) как целых функций параметра ρ в случае неодносвязной области аналитичности потенциала исследована регулярная циклическая матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения (1.1) для изолированной особой точки z_s потенциала $Q(z)$ (см. определение 1.2).

Определение 1.1. Пусть потенциал $Q(z)$ голоморфен в области $G \subset \mathbb{C}$ и $u_1(z)$, $u_2(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1.1) вдоль спрямляемого пути $\gamma \subset G$, удовлетворяющие условиям (1.2). Назовём передаточной матрицей уравнения (1.1) между точками z_0 и z пути γ матрицу

$$\hat{P}(\gamma, z, z_0) \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{pmatrix}.$$

В силу вида уравнения (1.1) и выбора начальных условий (1.2) определитель передаточной матрицы не зависит от z и равен единице.

Определение 1.2. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная выпуклая область с границей δG, содержащая ровно одну особую точку z_s потенциала $Q(z)$, и во всех точках δG потенциал голоморфен. Тогда передаточную матрицу уравнения (1.1) вдоль начинающегося и кончающегося в точке $z_0 \in \delta G$ пути γ, обходящего границу области G против часовой стрелки, будем называть регулярной циклической матрицей $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ изолированной особой точки z_s уравнения (1.1) относительно точки z_0.

Подчернем, что граница ограниченной выпуклой области всегда спрямляема (см. [18, § 1]), а регулярная циклическая матрица является одной из матриц монодромии этой точки (см. [16, гл. 1, § 2, п. 3]).

В разделе 2 доказано, что регулярная циклическая матрица особой точки z_s относительно точки z_0 аналитичности потенциала $Q(z)$ может быть определена тогда и только тогда, когда z_s является изолированной особой точкой, и отрезок $z_s z_0$ не содержит особых точек потенциала, отличных от z_s. При этом для фиксированных точек z_0 и z_s матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ не зависит от выбора области G, удовлетворяющей условиям определения 1.2. В разделе 3 получены критерии безмонодромности особой точки потенциала по элементам её регулярной циклической матрицы. Заметим, что потенциалы с безмонодромными особыми точками (соответствующая ей регулярная циклическая матрица и любая другая матрица монодромии равна единичной матрице при любых значениях спектрального параметра) были подробно исследованы в [9].

В разделе 4 доказана следующая теорема, содержащая основной результат данной работы.

Теорема 1.1. *Пусть z_s — изолированная особая точка однозначного характера потенциала $Q(z)$, $z_0 \neq z_s$, отрезок, соединяющий точки z_0 и z_s, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от точки z_s, $\rho := \lambda^2 = |\rho| \exp(i\varphi_\rho)$, $z_0 - z_s = |z_0 - z_s| \exp(i\varphi_{s0})$, $\varphi_\rho, \varphi_{s0} \in (-\pi; \pi]$, и c_0 — след регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения Штурма—Лиувилля (1.1) относительно точки z_0. Тогда c_0 не зависит от положения точки z_0 и либо также не зависит от ρ, либо* *является целой функцией ρ порядка $1/2$ минимального типа. При этом, если след c_0 тождественно не равен двум, то все элементы матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ являются целыми функциями ρ порядка $1/2$ с одинаковыми индикаторами*

$$h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s) = 2|z_s - z_0| \left|\cos\left(\frac{1}{2}\varphi_\rho + \varphi_{s0}\right)\right|. \tag{1.3}$$

Заметим, что, если сделать замену $\rho = \varrho \exp(2i\varphi_{s0})$, то элементы матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \varrho)$ будут целыми функциями нового параметра $\varrho = |\varrho| \exp(i\varphi_\varrho)$, $\varphi_\varrho \in (-\pi; \pi]$, с тригонометрическим индикатором $2|z_s - z_0| \cos(\varphi_\rho/2)$.

Регулярная циклическая матрица особой точки является одной из матриц монодромии этой точки, и поскольку все матрицы монодромии определенной особой точки подобны друг другу (см. [7, 16]), то они имеют одинаковый след (см. [14, п. 13.4.1]). Примеры потенциалов, для которых след матрицы монодромии уравнения (1.1) не зависит от спектрального параметра, приведены в [7]. К сожалению, остается открытым вопрос является ли условие $c_0 \equiv 2$ признаком безмонодромности особой точки, и, если *не* является, то как быстро растут с ростом $|\rho|$ элементы регулярных циклических матриц, имеющих при всех значениях спектрального параметра след равный двум, но отличных от тождественно единичной матрицы.

2. Базовые свойства регулярной циклической матрицы произвольной особой точки. Прежде чем формулировать базовые свойства регулярной циклической матрицы (теорема 2.1), докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 2.1. *Пусть z_s — произвольная внутренняя точка некоторой ограниченной выпуклой области G. Тогда для любого луча α, исходящего из точки z_s, существует такая точка $z_\alpha \in \alpha$, что множество $G_\alpha := \alpha \cap G$ совпадает с отрезком, соединяющим точки z_s и z_α с открытым концом в точке z_α. При этом точка z_α является единственной лежащей на луче α граничной точкой области G.*

Доказательство. Поскольку точка z_s — внутренняя точка ограниченной области G, то множество неотрицательных действительных чисел $R_\alpha := \{|z - z_s|,\ z \in G_\alpha\}$ обязательно включает положительные числа и ограниченно сверху. Следовательно, существует число $L_\alpha := \sup R_\alpha > 0$, которое в силу открытости множества точек области G не достигается на множестве точек G_α. Рассмотрим лежащую на луче α точку z_α, для которой $|z_\alpha - z_s| = L_\alpha$. По её построению (и в силу определения верхней грани) все точки zлуча α, лежащие вне отрезка, соединяющего точки z_s и z_α не принадлежат множеству G_α, и для любого $\varepsilon > 0$ на этом отрезке найдется такая точка z_ε из множества G_α, что $|z_\alpha - z_\varepsilon| < \varepsilon$. Учитывая выпуклость области G отсюда сразу следует первая часть утверждения, а также тот факт, что выбранная точка z_α является граничной точкой области G. Предположим, что на луче α лежит еще одна граничная точка области G — точка z_1. В силу только что доказанной первой части утверждения леммы $|z_1 - z_s| > L_\alpha$. При этом по определению граничной точки в любой ε-окрестности точки z_1 существует точка $z_2 \in G$. Поскольку точка z_s — внутренняя точка области G, то для некоторого $\delta > 0$ существует δ-окрестность точки z_s, полностью лежащая в области G. Проведем луч с началом в точке z_2, проходящий через точку z_α. Если величина ε достаточно мала, то, поскольку $|z_1 - z_s| > L_\alpha$, этот луч обязательно пересечет описанную выше δ-окрестность точки z_s. Следовательно, в силу выпуклости области G имеем $z_\alpha \in G$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 2.2. *Для фиксированных точки z_0 аналитичности потенциала $Q(z)$ уравнения Штурма—Лиувилля* (1.1) *и его изолированной особой точки z_s регулярная циклическая матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ не зависит от выбора области G, удовлетворяющей условиям определения* 1.2.

Доказательство. Рассмотрим две области G_1 и G_2 с границами δG_1 и δG_2 соответственно, удовлетворяющие условиям определения 1.2. Поскольку у этих областей есть минимум одна общая точка z_s, то их объединение $G_3 = G_1 \cup G_2$ является связным открытым множеством точек, т.е. областью. Так как все граничные точки областей G_1 и G_2 регулярны, то и граница области G_3

не содержит особых точек потенциала $Q(z)$. Значит, существует область $G_0 \supset \overline{G}_3 := G_3 \cup \delta G_3$, в которой потенциал $Q(z)$ имеет единственную особую точку z_s. Поскольку z_s — общая внутренняя точка областей G_1 и G_2, то существует такая δ-окрестность G_s точки z_s, которая полностью лежит в областях G_1 и G_2. По лемме 2.1 любой луч α с началом в особой точке z_s имеет ровно по одной общей точке $z_{1\alpha}$ и $z_{2\alpha}$ соответственно с путями γ_1 и γ_2, которые в силу определения 1.2 однозначно определяются выбором точки z_0 и областей G_1 и G_2. При этом для всех лучей α отрезки, соединяющие точки $z_{1\alpha}$ и $z_{2\alpha}$, лежат в двусвязной области $G_0/\overline{G}_s$ аналитичности потенциала $Q(z)$. Поэтому пути γ_1 и γ_2 можно непрерывно деформировать внутри области $G_0/\overline{G}_s$, например, с помощью отображения

$$z(t,\varphi) = \Big(L_{1\alpha}(\varphi) + t\big(L_{2\alpha}(\varphi) - L_{1\alpha}(\varphi)\big)\Big)\exp(2\pi i\varphi),$$

где $L_{n\alpha} := |z_{n\alpha} - z_s|$, $n = 1, 2$, $t, \varphi \in [0; 1]$, $\varphi = \beta/(2\pi)$, а β — угол между произвольным лучом α и лучом α_0, проходящим через точку z_0, отсчитываемый от луча α_0 против часовой стрелки. Таким образом, пути γ_1 и γ_2 с общей начальной и конечной точкой z_0 гомотопны друг другу (см. [17]) в области аналитичности потенциала $Q(z)$, поэтому передаточные матрицы уравнения (1.1) вдоль этих путей совпадают. Последнее следует из теоремы об инвариантности аналитического продолжения функции вдоль пути относительно гомотопных преобразований этого пути (см. [17]) и того, что решения уравнения (1.1) аналитичны в области аналитичности потенциала $Q(z)$ (см. [1, 8]). □

Заметим, что для справедливости леммы 2.2 требование выпуклости области G в определении 1.2 существенно. Контрпримером является случай, когда на отрезке, соединяющем точки z_s и z_0, лежит еще одна особая точка z_{s1} потенциала $Q(z)$, а невыпуклые области G_1 и G_2 выбраны так, что их объединение образует кольцеобразную область, внутренняя граница которой совпадает с границей некоторой выпуклой области G_{s1}, содержащей единственную особую точку z_{s1} потенциала $Q(z)$. Пусть границы областей G_1, G_2, G_{s1} имеют общую точку z_0, и γ_1, γ_2, γ_{s1} — пути, начинающиеся и кончающиеся в точке z_0 и обходящие против часовой стрелки границы областей G_1, G_2, G_{s1} соответственно. Тогда передаточные матрицы $\hat{P}_1(\gamma_1, z_0, z_0)$, $\hat{P}_2(\gamma_2, z_0, z_0)$ и $\hat{P}_{s1}(\gamma_{s1}, z_0, z_0)$ будут связаны одним из соотношений:

$$\hat{P}_1 = \hat{P}_{s1}\hat{P}_2(\hat{P}_{s1})^{-1} \quad \text{или} \quad \hat{P}_2 = \hat{P}_{s1}\hat{P}_1(\hat{P}_{s1})^{-1}$$

в зависимости от нумерации областей G_1, G_2. Таким образом, матрицы $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ будут подобны, как и любые другие матрицы монодромии одной и той же особой точки, но совпадать они будут тогда и только тогда, когда матрицы $\hat{P}_{s1}$ и $\hat{P}_1$ (или $\hat{P}_2$) перестановочны. Это будет иметь место, например, если z_s или (и) z_{s1} является безмонодромной особой точкой потенциала.

Лемма 2.3. *Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки z_s не может быть определена для точки z_0 аналитичности потенциала $Q(z)$, если отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, содержит хотя бы одну особую точку потенциала z_{s1}, отличную от точки z_s.*

Доказательство. Предположим что в описанном в лемме случае существует область G, удовлетворяющая условиям определения 1.2. Известно, что замыкание выпуклой области (множества) есть выпуклое множество. Поэтому отрезок $z_s z_0$ принадлежит замыканию $G \cup \delta G$ области G. При этом по определению 1.2 граница области G не содержит особых точек, т.е. $z_{s1} \in G$, и, следовательно, область G содержит более одной особой точки, что противоречит определению 1.2. Лемма доказана. □

Лемма 2.4. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$ и отрезок L_0, соединяющий точки z_s и z_0, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от точки z_s. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0; \delta]$ в определении 1.2 можно взять область G, ограниченную замкнутой ломаной $z_0 z_A z_B z_C z_0$, где точка z_B лежит на луче, выходящем из точки z_0 и проходящем через точку z_s, причем $|z_B - z_0| = |z_s - z_0| + \varepsilon_1$; отрезок $z_A z_C$ перпендикулярен отрезку L_0, проходит через точку z_s, и $|z_A - z_s| = |z_C - z_s| = \varepsilon_2$.*

Доказательство. Поскольку предельная точка особых точек аналитической функции также является особой точкой, что непосредственно следует из определения голоморфной в точке функции (см., например, [17]), то множество A_s всех особых точек голоморфной функции замкнуто. По условию леммы z_s — изолированная особая точка, поэтому множество точек A_s/z_s также замкнуто. Множество точек любого отрезка также замкнуто и по условию леммы $L_0 \cap A_s/z_s = \varnothing$. Следовательно, по известной теореме о расстоянии между двумя замкнутыми множествами, не имеющими общих точек (см. [17]) расстояние δ_0 между этими множествами положительно. Положим $\delta = \delta_0/2$. Тогда описанная в лемме выпуклая область G будет содержать единственную особую точку z_s потенциала $Q(z)$, и во всех точках её границы потенциал $Q(z)$ будет голоморфен. Лемма доказана. □

Заметим, что выбирая $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, углы между лучами $z_A z_0$ и $z_A z_B$, а также $z_C z_B$ и $z_C z_0$ можно сделать сколь угодно близкими к 180°. Именно это обстоятельство лежит в основе доказательства следующей леммы.

Лемма 2.5. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$, отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от точки z_s, $\lambda \neq 0$ и $\beta_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\}/|\lambda| \neq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует область G описанного в лемме 2.4 вида, удовлетворяющая определению 1.2 и такая, что $0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$ и $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ изменяется монотонно как на ломаной $z_0 z_A z_B$, так и на ломаной $z_0 z_C z_B$.*

Доказательство. Пусть $L = |z_s - z_0|$. Положим в лемме 2.4

$$\varepsilon_1 \in \Big(0; \min\{\delta, \varepsilon/2\}\Big), \quad \varepsilon_2 \in \Big(0; \min\{\delta, |\beta_\lambda|/2,\ \varepsilon_1|\beta_\lambda|/(2L)\}\Big)$$

и рассмотрим соответствующие область G и точки z_A, z_B и z_C, описанные в лемме 2.4. Очевидно, что

$$0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$$

в силу леммы 2.4 и выбора значения ε_1. Ломаную $z_0 z_A z_B$ можно задать параметрически следующим образом:

$$z = \begin{cases} z_0 + t(z_A - z_0), & t \in [0,1], \\ z_0 + (z_A - z_0) + (t-1)(z_B - z_A), & t \in (1,2]. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует, что при $\lambda \neq 0$ для монотонности изменения $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ на ломаной $z_0 z_A z_B$ необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$I_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_0)\} \operatorname{Re}\{\lambda(z_B - z_A)\} > 0.$$

Но в силу леммы 2.4

$$|z_A - z_s| = \varepsilon_2, \quad z_B - z_s = (z_s - z_0)\varepsilon_1/L.$$

Поэтому

$$I_\lambda := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_s + z_s - z_0\} \operatorname{Re}\{\lambda(z_B - z_s + z_s - z_A\} = |\lambda|^2 \left(\delta_A \varepsilon_2 + \beta_\lambda\right) \left(\beta_\lambda \varepsilon_1/L - \delta_A \varepsilon_2\right) > 0,$$

где $\delta_A := \operatorname{Re}\{\lambda(z_A - z_s)\}/(|\lambda||z_A - z_s|)$, и положительность I_λ обусловлена указанным выше выбором значений параметров ε_1, ε_2 и очевидным неравенством $|\delta_A| \leqslant 1$. Монотонность изменения величины $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ на ломаной $z_B z_C z_0$ доказывается аналогично. Лемма доказана. □

Предложение 2.1. *Монотонность изменения $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ на ломаных $z_0 z_A z_B$ и $z_0 z_C z_B$ обеспечивает для элементов передаточных матриц вдоль этих ломаных асимптотики такого же вида, как для передаточных матриц вдоль отрезков, при всех достаточно больших по модулю значениях спектрального параметра, кроме тех, которые лежат на луче $\operatorname{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} = 0$.*

Доказательство. Данное утверждение следует из результатов монографий [2, 13]. Его доказательство полностью аналогично, например, доказательству леммы 8 в [5], в котором достаточно заменить слово «отрезок» на слово «кривая» или «ломаная». □

Предложение (2.1) позволяет дать оценку сверху для индикаторов элементов регулярной циклической матрицы.

Теорема 2.1. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$, отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от точки z_s,*

$$\rho := \lambda^2 = |\rho|\exp(i\varphi_\rho) \neq 0, \quad z_0 - z_s = |z_0 - z_s|\exp(i\varphi_{s0}).$$

Тогда все элементы c_{lj}, $l, j \in \{1, 2\}$, регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) являются целыми функциями ρ порядка не выше 1/2, и их индикаторы $h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s)$ (относительно порядка 1/2) удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant h_{lj}(\varphi_\rho, z_0, z_s) \leqslant 2|z_s - z_0| \left|\cos\frac{\varphi_\rho + \varphi_{s0}}{2}\right|. \tag{2.1}$$

Доказательство. Из леммы 2.4 настоящей работы и леммы 1 статьи [3] следует, что регулярную циклическую матрицу можно представить в виде

$$\hat{C}(z_0, z_s, \rho) = \hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)\hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0) = \hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)\hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_0, z_B), \tag{2.2}$$

где γ_C и γ_A — описанные в лемме 2.4 ломаные $z_B z_C z_0$ и $z_0 z_A z_B$ соответственно. При записи соотношений (2.2) предполагается, что точки z_A и z_C выбраны таким образом, что обход особой точки z_s по ломаной $z_0 z_A z_B z_C z_0$ в соответствии с определением 1.2 происходит против часовой стрелки. При $\mathrm{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} \neq 0$ (т.е. $\cos(\varphi_\rho + \varphi_{s0})/2 \neq 0$) в силу леммы 2.5 и предложения 2.1 все элементы матриц $\hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0)$ и $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$ являются целыми функциями спектрального параметра ρ регулярного роста порядка 1/2 и типа $|z_B - z_0|$ с индикатором

$$h_0(\varphi_\rho, \varphi_{s0}) = |z_B - z_0| \left|\cos\frac{\varphi_\rho + \varphi_{s0}}{2}\right|. \tag{2.3}$$

В силу (2.2) элементы c_{lj}, $l, j \in \{1, 2\}$, регулярной циклической матрицы связаны с элементами матриц $\hat{P}(\gamma_A, z_B, z_0)$ и $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$ следующим образом:

$$c_{lj} = p_{l1}(\gamma_C, z_0, z_B)p_{1j}(\gamma_A, z_B, z_0) + p_{l2}(\gamma_C, z_0, z_B)p_{2j}(\gamma_A, z_B, z_0). \tag{2.4}$$

По теореме об индикаторе произведения двух целых функций одного порядка, хотя бы одна из которых является функцией регулярного роста (см. [15, гл. 3, § 4],) получаем, что оба слагаемых в последней формуле имеют порядок 1/2, тип $2|z_B - z_0|$ и общий индикатор $2h_0(\varphi_\rho, \varphi_{s0})$. С другой стороны, порядок суммы любых двух целых функций одного порядка не больше порядка каждого из слагаемых (см. [15, гл. 1, § 15]), и целые функции порядка не больше 1/2 могут иметь только неотрицательные индикаторы (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21; § 16 свойство (з) индикатора]), что доказывает левое неравенство в (2.1). Правая часть неравенство в (2.1) следует из лемм 2.2, 2.5, формул (2.3), (2.4) и того факта, что индикатор суммы любых двух целых функций одного порядка (относительно этого порядка) не больше наибольшего (при данном φ_ρ) из индикторов слагаемых (см. [15, гл. 1, § 15]): в силу леммы 2.2 для фиксированных точки z_0 аналитичности потенциала $Q(z)$ уравнения Штурма—Лиувилля (1.1) и его изолированой особой точки z_s регулярная циклическая матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ не зависит от выбора области G, удовлетворяющей условиям определения 1.2, а по лемме 2.5 для любого $\varepsilon > 0$ существует подходящая область G, для которой $0 < |z_B - z_0| - |z_s - z_0| < \varepsilon$. Таким образом, при $\mathrm{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} \neq 0$ все утверждения теоремы доказаны. В силу непрерывности индикатора любой целой функции (см. [15, гл. 1, § 16, свойство (а) индикатора]) утверждения теоремы справедливы и при $\mathrm{Re}\{\lambda(z_s - z_0)\} = 0$, причем в этом случае $\cos(\varphi_\rho + \varphi_{s0})/2 = 0$, и значит, $h_{lj} = 0$. □

3. Признаки безмонодромности особой точки.

Лемма 3.1. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$, и для некоторой точки z_0 регулярная циклическая матрица $\hat{C}_0 := \hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида (1.1) не зависит от спектрального параметра ρ. Тогда z_s — особая точка однозначного характера и $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$, где $\hat{I}$ — единичная матрица.*

Доказательство. Поскольку любая регулярная циклическая матрицы является передаточной матрицей, то её определитель в силу вида уравнения (1.1) и начальных условий (1.2) равен единице. Кроме того, случай $\hat{C}_0 \equiv -\hat{I}$ невозможен, так как при этом из формулы (2.2) имеем $\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B) = -\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$, что противоречит известной асимптотике элементов передадочной матрицы уравнения (1.1) при больших значениях $|\lambda|$ на любых кривых γ с монотонным изменением $\mathrm{Re}\{\lambda(z - z_B)\}$. Так, например, из леммы (2.5) и предложения 2.1 следует, что если $\mathrm{Re}\{\lambda(z_0 - z_B)\} > 0$, то для нахождения асимптотик элементов матриц $\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B)$ и $\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B)$ можно использовать формулу (11) работы [4], положив в ней $N = 0$. В результате получим, что

$$\begin{aligned} p_{11}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{12}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2\lambda}\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{21}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(\lambda(z_0 - z_B)), \\ p_{22}(\gamma, z_0, z_B) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|}\right)\exp(\lambda(z_0 - z_B)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где кривая γ совпадает с кривой γ_A или γ_C, а символ $O(1)$ обозначает функцию параметра λ, конкретный вид которой для нас не важен, ограниченную при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} — конечная величина, которая может быть разной для разных кривых γ.

Рассмотрим точку z_1, которая делит отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, в отношении $1:2$, т.е.

$$|z_1 - z_s| = \frac{|z_0 - z_s|}{3} = \frac{|z_0 - z_1|}{2}. \tag{3.2}$$

Тогда по лемме 2.4 определена регулярная циклическая матрица $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$ уравнения (1.1), которую в силу [3, лемма 1] можно представить в виде

$$\hat{C}(z_1, z_s, \rho) = \hat{P}(L_1, z_1, z_0)\hat{C}_0\hat{P}(L_1, z_0, z_1), \tag{3.3}$$

где L_1 — отрезок, соединяющий точки z_1 и z_0. Значит, в силу [3, лемма 1] матрица $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$ равна передаточной матрице $\hat{P}_0$ уравнения (1.1) вдоль замкнутой вырожденной ломаной L, соединяющей точки z_1, z_0 и z_1, с условиями разрыва решений в этих точках, задаваемых не зависящими от ρ матрицами $\hat{\eta}_0 = \hat{I}$, $\hat{\eta}_1 := \hat{C}_0$ и $\hat{\eta}_2 = \hat{I}$ соответственно. Кроме того, в случае, если z_s является особой точкой неоднозначного характера, то потенциал Q в уравнении (1.1) будет кусочно аналитическим на ломаной L: он будет совпадать с некоторыми аналитическими функциями Q_0 и Q_1 соответственно на путях от точки z_1 к точке z_0 и обратно.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$ и точка z_s — особая точка однозначного характера, т.е. функции Q_0 и Q_1 совпадают. Тогда $\hat{P}(L_1, z_1, z_0) = \hat{P}^{-1}(L_1, z_0, z_1)$, и $\hat{C}(z_1, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$ в силу формулы (3.3).

Случай 2. Пусть $\hat{C}_0 \equiv \pm i\hat{\sigma}_3$, где $\hat{\sigma}_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогла в силу [3, лемма 6] матрица $\hat{P}_0 = \pm i\hat{\sigma}_3\hat{P}_1$, где $\hat{P}_1$ — передаточная матрица уравнения (1.1) вдоль отрезка, соединяющего точки z_1 и $2z_0 - z_1$, с кусочно аналитическим потенциалом Q, совпадающим с функциями $Q_0(z)$ и $Q_1(2z_0 - z)$ на отрезках, соединяющих соответственно точки z_1, z_0 и z_0, $2z_0 - z_1$. В этом случае все элементы матрицы $\hat{P}_0$ являются целыми функциями порядка $1/2$ и типа $|(2z_0 - z_1) - z_1| = 2|z_0 - z_1| = 4|z_1 - z_s|$ (см. [3]), где последнее равенство следует из соотношения (3.2), задающего положение точки z_1, и противоречит ограничению (2.1) на тип элементов регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_1, z_s, \rho)$. Значит, случай 2 невозможен.

Случай 3. Пусть $\hat{C}_0 \equiv \hat{I}$ и $Q_0(z) \neq Q_1(z)$ (z_s является особой точкой неоднозначного характера) или $\hat{C}_0 \notin \{\pm\hat{I}, \pm i\hat{\sigma}_3\}$ (при этом особая точка может быть любой). Тогда, поскольку $\det \hat{C}_0 = 1$, то в терминологии работы [3] ломаная L является простой кривой и следовательно, в силу [3, лемма 15] все элементы матрицы $\hat{P}_0$ являются целыми функциями порядка $1/2$ и типа $2|z_0 - z_1| = 4|z_1 - z_s|$, т.е. случай 3 невозможен по той же причине, что и случай 2.

Заметим, что, хотя потенциал на ломаной L не является кусочно целым, а только кусочно аналитическим, в случаях 2 и 3 для матрицы $\hat{P}_0$ применимы все результаты работы [3] с $N = 1$, $\hat{\eta}_1 := \hat{C}_0$ и $\hat{\eta}_0 = \hat{\eta}_2 = \hat{I}$. Дело в том, что кусочная целостность потенциала в [3] используется только для деформации исходной кривой в ломаную с простым набором характеристических данных (в терминологии указанной работы) без изменения передаточной матрицы вдоль нее. Для применения же результатов [3] к рассматриваемой геометрии достаточно кусочной аналитичности потенциала на ломаной L.

Поскольку, как было указано в самом начале доказательства, случай $\hat{C}_0 \equiv -\hat{I}$ невозможен, то мы рассмотрели все возможные случаи и не получили противоречия только в случае 1. Лемма доказана. □

Предложение 3.1. *Рассуждая полностью аналогично и пользуясь результатами работы [6], можно доказать, что утверждения леммы* 3.1 *сохраняются, если все элементы матрицы $\hat{C}_0$ являются полиномами спектрального параметра ρ некоторых конечных степеней.*

Лемма 3.2. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$, и для некоторой точки z_0 элемент c_{12} или c_{21} регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида* (1.1) *равен нулю при всех значениях спектрального параметра ρ. Тогда z_s — особая точка однозначного характера и $\hat{C}(z_0, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$.*

Доказательство. Как указывалось выше, $\det \hat{C} \equiv 1$. Поэтому, если $c_{12}c_{21} \equiv 0$, то $c_{11}c_{22} \equiv 1$, т.е. c_{11}, c_{22} не имеют нулей и, значит, не зависят от ρ, поскольку по теореме 2.1 являются целыми функциями ρ порядка не выше $1/2$, а такие функции определяются своими нулями с точностью до постоянного множителя (см. [15, гл. 1, § 10]). Таким образом, $c_{11} = f$, $c_{22} = 1/f$, где $f \neq 0$ и не зависит от ρ. Записывая формулу (2.2) в виде

$$\hat{P}(\gamma_C, z_0, z_B) = \hat{C}(z_0, z_s, \rho)\hat{P}(\gamma_A, z_0, z_B),$$

получим, что

$$\begin{aligned} &p_{C,11} \equiv f p_{A,11}, \qquad && p_{C,21} \equiv c_{21}p_{A,11} + p_{A,21}/f \qquad && \text{при } c_{12} \equiv 0; \\ &p_{C,22} \equiv p_{A,22}/f, \qquad && p_{C,11} \equiv f p_{A,11} + c_{12}p_{A,21} \qquad && \text{при } c_{21} \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь асимптотическими формулами (3.1), получаем,что в обоих случаях $f = 1$, и, кроме того, $c_{21} = O(1)$ или $c_{12} = O(1)/\lambda^2$ при $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\} > 0$ и $|\lambda| > \lambda_{cr}$. Но по теореме 2.1 заключаем, что c_{12} и c_{21} — целые функции ρ порядка не выше $1/2$, а такие функции могут быть ограничены в некотором угле на комплексной плоскости ρ только если они не зависят от ρ (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21]). Таким образом, доказано, что если $c_{12}c_{21} \equiv 0$, то матрица $\hat{C}$ не зависит от ρ, и значит все утверждения леммы следуют из леммы 3.1. □

Заметим, что, если для особой точки z_s потенциала $Q(z)$ существует точка z_0, для которой $\hat{C}(z_0, z_s, \rho) \equiv \hat{I}$, то точка z_s является безмонодромной особой точкой уравнения (1.1) (см. [9]).

4. Доказательство теоремы об индикаторе роста элементов матрицы $\hat{C}$ особой точки однозначного характера. Для начала докажем утверждение теоремы 1.1 о следе регулярной циклической матрицы особой точки потенциала $Q(z)$ однозначного характера.

Лемма 4.1. *Пусть z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$ однозначного характера, а отрезок, соединяющий точки z_s и z_0, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от z_s. Тогда след $c_0 := c_{11} + c_{22}$ регулярной циклической матрицы $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида* (1.1) *является целой функцией ρ порядка не выше $1/2$, и минимального типа* (*относительно порядка* $1/2$), *которая не зависит от положения точки z_0.*

Доказательство. Поскольку по условию z_s — изолированная особая точка потенциала $Q(z)$, то существует такое $\delta > 0$, что круг радиуса δ с центром в точке z_s не содержит других особых точек. Значит, для любого $0 < \varepsilon < \delta$ существует такая точка z_ε, что отрезок, соединяющий точки z_s и z_ε, не содержит особых точек $Q(z)$, отличных от z_s. Пусть γ — произвольная кривая, соединяющая точки z_0, z_ε и не содержащая особых точек потенциала $Q(z)$. Тогда в силу [3, лемма 1] регулярную циклическую матрицу $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ можно представить в виде

$$\hat{C}(z_0, z_s, \rho) = \hat{P}(\gamma, z_0, z_\varepsilon)\hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho)\hat{P}(\gamma, z_\varepsilon, z_0).$$

Поскольку z_s — особая точка потенциала $Q(z)$ однозначного характера, то значения потенциала $Q(z)$ в каждой точке кривой γ до и после обхода точки z_s будут совпадать, и, следовательно, $\hat{P}(\gamma, z_\varepsilon, z_0) = \hat{P}^{-1}(\gamma, z_0, z_\varepsilon)$. Поэтому матрица $\hat{C}(z_0, z_s, \rho)$ подобна матрице $\hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho)$. Но $\hat{C}(z_\varepsilon, z_s, \rho)$ не зависит от положения точки z_0 и в силу теоремы 2.1 её элементы являются целыми функциями порядка не выше $1/2$ с неотрицательным индикатором (относительно порядка $1/2$), не превышающим 2ε для любого $\varepsilon > 0$. Поскольку следы подобных матрицы совпадают (см. [14, п. 13.4.1]), то лемма доказана. □

Для последующего нам понадобится следующая алгебраическая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть*

$$\hat{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \hat{M}_1 := \hat{A}\hat{B}^{-1} := \begin{pmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \hat{M}_2 := \hat{B}^{-1}\hat{A} := \begin{pmatrix} m_{11}^{(2)} & m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(2)} & m_{22}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$\det \hat{A} = \det \hat{B} = 1$. *Тогда*

$$\begin{cases} m_{12}^{(1)} m_{12}^{(2)} \equiv a_{12}^2 + b_{12}^2 - m_0 a_{12} b_{12}, \\ m_{21}^{(1)} m_{21}^{(2)} \equiv a_{21}^2 + b_{21}^2 - m_0 a_{21} b_{21}, \\ 1 - m_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} \equiv a_{11} a_{22} + b_{11} b_{22} - m_0 a_{11} b_{22}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где m_0 — совпадающие между собой следы матриц $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$.

Доказательство. По условию леммы $\hat{M}_1 = \hat{A}\hat{M}_2\hat{A}^{-1}$, т.е. матрицы $\hat{M}_1$ и $\hat{M}_2$ подобны, что и обеспечивает совпадение их следов (см. [14, п. 13.4.1]). Тождества (4.1) проверяются непосредственно. □

Пользуясь леммой 4.2, докажем формулу (1.3) для индикаторов элементов регулярной циклической матрицы. Рассмотрим точки z_{01} и z_{02}, лежащие на одной прямой с особой точкой z_s по разные стороны от нее. Пусть $z_{01} - z_s := |z_{01} - z_s| \exp(i\varphi_{s1})$. Тогда в силу выбора взаимного расположения точек z_{01}, z_{02} и z_s имеем:

$$z_{01} - z_{02} = (|z_{01} - z_s| + |z_{02} - z_s|) \exp(i\varphi_{s1}), \quad z_{02} - z_s := |z_{02} - z_s| \exp(i\varphi_{s1} + i\pi). \tag{4.2}$$

В силу изолированности особой точки z_s точки z_{01} и z_{02} можно выбрать так, чтобы отрезок $z_{01}z_{02}$ не содержал особых точек потенциала Q, отличных от точки z_s. В этом случае определены регулярные циклические матрицы $\hat{C^{(1)}} := \hat{C}(z_{01}, z_s, \rho)$ и $\hat{C^{(2)}} := \hat{C}(z_{02}, z_s, \rho)$ особой точки z_s уравнения (1.1) относительно точек z_{01} и z_{02} соответственно. При этом в силу формулы (2.2)

$$\begin{aligned} \hat{C^{(1)}} &= \hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02})\hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_{01}, z_{02}), \\ \hat{C^{(2)}} &= \hat{P}^{-1}(\gamma_A, z_{01}, z_{02})\hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

При записи соотношений (4.3) (как и соотношений (2.2)) предполагается, что ломаные γ_A и γ_C, соединяющие точки z_{01} и z_{02}, выбраны так, что обход особой точки z_s в соответствии с определением 1.2 происходит против часовой стрелки. Положим

$$\hat{P}^{(A)} := \hat{P}(\gamma_A, z_{01}, z_{02}), \quad \hat{P}^{(C)} := \hat{P}(\gamma_C, z_{01}, z_{02})$$

и применим к матрицам $\hat{C^{(1)}}$ и $\hat{C^{(2)}}$ первую формулу (4.1). В результате получим (верхние индексы у матриц и их элементов совпадают):

$$c_{12}^{(1)}c_{12}^{(2)} \equiv \left(p_{12}^{(A)}\right)^2 + \left(p_{12}^{(C)}\right)^2 - c_0 p_{12}^{(A)} p_{12}^{(C)}. \tag{4.4}$$

В силу леммы 4.1 заключаем, что c_0 является целой функцией ρ порядка не выше 1/2 и минимального типа (относительно порядка 1/2). Иными словами, $c_0(\rho)$ либо не зависит от ρ, либо неограниченно возрастает при увеличении $|\rho|$ вдоль любого луча, кроме, возможно, одного (см. [15, гл. 1, § 14, теорема 21]). Учитывая также одинаковую асимптотику (3.1) для элементов матриц $\hat{P}^{(A)}$ и $\hat{P}^{(C)}$, получаем, что во всех случаях, кроме $c_0(\rho) \equiv 2$ индикатор роста правой, а значит и левой части соотношения (4.4) равен

$$h(\varphi_\rho, \varphi_{s12}) = 2|z_{01} - z_{02}| \left|\cos\frac{\varphi_\rho + \varphi_{s12}}{2}\right| \tag{4.5}$$

при всех значениях φ_ρ, кроме, возможно, одного. Следовательно, в силу непрерывности индикатора любой целой функции (см. [15, гл. 1, § 16, свойство (a) индикатора]), если след $c_0(\rho)$ не равен тождественно 2, то соотношение (4.5) выполняется для всех значений φ_ρ. Сопоставляя формулы (2.1), (4.2), (4.4) и (4.5), получаем, что последняя формула может выполняться тогда и только тогда, когда для h_{12} выполняется (1.3). Рассуждая аналогично с помощью второй и третьей формул (4.1), получим, что формула (1.3) справедлива также для h_{21}, h_{11} и, следовательно, в силу леммы 4.1, для h_{22}. Теорема 1.1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ГНТИУ, 1939.
2. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
3. *Голубков А. А.* Краевая задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений// Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 1005–1027.
4. *Голубков А. А.* Асимптотика передаточной матрицы уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — № 2. — С. 37–41.
5. *Голубков А. А.* Обратная задача для уравнения Штурма—Лиувилля с кусочно-целым потенциалом и кусочно-постоянным весом на кривой// Сиб. электрон. мат. изв. — 2021. — *18*, № 2. — С. 951–974.
6. *Голубков А. А.* Спектр оператора Штурма—Лиувилля на кривой с параметром в краевых условиях и условиях разрывов решений// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2021. — *193*. — С. 45–68.
7. *Голубков А. А.* Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма—Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости// Диффер. уравн. — 2022. — *58*, № 4. — С. 1032–1038.
8. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Дифференциальные уравнения. — М.-Л.: ГТТИ, 1933.
9. *Ишкин Х. К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 4. — С. 552–568.
10. *Ишкин Х. К.* Критерий локализации спектра оператора Штурма—Лиувилля на кривой// Алгебра анал. — 2016. — *28*, № 1. — С. 52–88.
11. *Ишкин Х. К., Набиуллина А. А.* Асимптотика решений уравнения Штурма—Лиувилля с мероморфным потенциалом// J. Math. Mech. Comp. Sci. — 2019. — *104*, № 4. — С. 24–31.
12. *Ишкин Х. К., Резбаев А. В.* К формуле Дэвиса о распределении собственных чисел несамосопряженного дифференциального оператора// Итоги науки техн. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2018. — *153*. — С. 84–93.
13. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958.
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1981.
15. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
16. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.

17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969.
18. *Яглом И. М., Болтянский В. Г.* Выпуклые фигуры.. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
19. *Langer R. E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — *46*. — P. 151–190.

ДЕКЛАРАЦИЯ АВТОРА

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки от каких-либо организаций или частных лиц.

Финансовые интересы. Автор заявляет об отсутствии подлежащих раскрытию финансовых или нефинансовых интересов, связанных с публикуемым материалом.

Голубков Андрей Александрович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: andrej2501@yandex.ru