



Аппроксимация решения линейной задачи теплопроводности при одностороннем нагреве бетона в условиях стандартного температурного режима пожара

А. Г. Тамразян¹, В. Р. Мешков², В. С. Геращенко^{1, 3} ✉, А. С. Гришин³

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, ул. Ярославское шоссе, 26, Москва, 129337, Российская Федерация

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 194064, Российская Федерация

³ АО «Атомэнергопроект», ул. Бакунинская, 7, стр. 1, Москва, 105005, Российская Федерация

✉ geraschenko_vs@aep.ru



Аннотация. Для расчетной оценки предела огнестойкости железобетонных конструкций нужно знать, как распределяется температура по бетону в поперечном сечении элемента под воздействием стандартного температурного режима пожара. Известные приближенно-аналитические методики расчета опираются на классическое решение задачи теплопроводности при постоянной температуре поверхности. Авторами построена степенная аппроксимация стандартной температурной кривой пожара, которая позволяет получить приближенно-аналитическое решение задачи при изменении температуры поверхности тела в соответствии с режимом стандартного пожара. Цель работы заключалась в получении формулы, удобной для инженерных теплотехнических расчетов и применимой для бетонов с произвольными теплофизическими характеристиками. Полученная формула с достаточной точностью описывает температуру в любой точке тела в заданный момент времени. Приведено сравнение с решением, полученным высокоточным численным моделированием (ANSYS, MATLAB), для разных типов бетона. Предлагаемая аппроксимация не содержит специальных функций, поэтому ее использование не требует наличия каких-либо компьютерных программ. Точность, простота и универсальность позволяют рекомендовать данную формулу к использованию в инженерных расчетах на огнестойкость для определения температур прогрева бетона в зависимости от времени при стандартном огневом воздействии.

Ключевые слова: стандартный температурный режим пожара, стандартная температурная кривая пожара, огнестойкость железобетонных конструкций, расчет температуры

Для цитирования: Тамразян А. Г., Мешков В. Р., Геращенко В. С., Гришин А. С. Аппроксимация решения линейной задачи теплопроводности при одностороннем нагреве бетона в условиях стандартного температурного режима пожара. *Архитектура, строительство, транспорт*. 2025;5(1):52–66. <https://doi.org/10.31660/2782-232X-2025-1-52-66> EDN: PPUZMN

Approximating the solution of a linear heat transfer problem for concrete subjected to one-sided heating under standard fire conditions

Ashot G. Tamrazyan¹, Vadim R. Meshkov², Vitaly S. Gerashchenko^{1, 3} ✉, Andrey S. Grishin³

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoe Shosse St., Moscow, 129337, Russian Federation

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29 Politechnicheskaya St., Saint Petersburg, 194064, Russian Federation

³ JSC "Atomenergoproekt", 7 Bakuninskaya St., building 1, Moscow, 105005, Russian Federation

✉ geraschenko_vs@aep.ru



Abstract. To estimate the fire resistance limit of reinforced concrete structures, it is essential to understand the temperature distribution within the concrete cross-section under standard fire conditions. Existing approximate analytical methods rely on the classical solution of the heat transfer equation assuming a constant surface temperature. The authors developed a degree approximation of the standard fire temperature curve. This approximation enables an approximate analytical solution to the heat transfer problem with a varying surface temperature corresponding to standard fire conditions. The aim of this work was to derive a convenient formula for heat transfer engineering calculations applicable to concrete with arbitrary thermophysical properties. The derived formula accurately predicts the temperature at any point within the concrete at a given time. The authors' solution was compared with the high-precision numerical simulations (ANSYS, MATLAB) for various concrete types. Because the proposed approximation does not involve special functions, its implementation does not require any specialized software. The accuracy, simplicity, and versatility of this formula make it suitable for use in fire resistance engineering calculations to determine the time-dependent temperature distribution within concrete under standard fire conditions.

Keywords: standard fire conditions, standard fire temperature curve, fire resistance of reinforced concrete structures, temperature calculation

For citation: Tamrazyan A. G., Meshkov V. R., Gerashchenko V. S., Grishin A. S. Approximating the solution of a linear heat transfer problem for concrete subjected to one-sided heating under standard fire conditions. *Architecture, Construction, Transport*. 2025;5(1):52–66. (In Russ.) <https://doi.org/10.31660/2782-232X-2025-1-52-66>



1. Введение / Introduction

Для расчетной оценки предела огнестойкости железобетонных конструкций нужно знать, как распределяется температура по бетону в поперечном сечении элемента под воздействием стандартного температурного режима пожара согласно ГОСТ 30247.0-94¹ и СП 468.1325800.2019².

Температурные поля в твердых телах при значительном изменении температуры с течением времени описываются нелинейным трехмерным дифференциальным уравнением теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Решение задачи теплопроводности в такой, полной, постановке возможно только с помощью численных методов. Однако для инженерных оценок можно рассматривать упрощенные модели тепловых процессов, допускающие построение аналитических решений. Такие модели рассматриваются как в отечественной литературе [1, 2], так и в зарубежных руководствах по расчету огнестойкости [3–5].

Наиболее существенное упрощение достигается путем перехода к двумерной или даже одномерной постановке задачи теплопроводности [6]. Так, для плоских железобетонных элементов (плит пе-

¹ ГОСТ 30247.0-94 (ИСО 834-75). Межгосударственный стандарт. Конструкции строительные. Методы испытаний на огнестойкость. Общие требования = Elements of building constructions/ Fire-resistance test methods. General requirements. Введен 01.01.1996. URL: <https://docs.cntd.ru/document/9055248> (дата обращения: 15.09.2024).

² СП 468.1325800.2019. Бетонные и железобетонные конструкции. Правила обеспечения огнестойкости и огнесохранности = Concrete and reinforced concrete structures. Rules for ensuring of fire resistance and fire safety. Введен 11.06.2020. URL: <https://docs.cntd.ru/document/564542941> (дата обращения: 15.09.2024).

рекрытий, стен) характерен односторонний и равномерный по площади поверхности нагрев, поэтому можно считать, что температура меняется только по толщине (одномерная задача теплопроводности). Для стержневых элементов характерными являются схемы равномерного нагрева с четырех сторон (колонны) или с трех сторон (балки, ригели). Следовательно, допустимо пренебречь изменением температуры по длине элемента и рассматривать двухмерное распределение температуры по сечению.

Еще одна возможность для упрощения связана с тем, что, с точки зрения оценки огнестойкости бетонных конструкций, наиболее важен момент, когда критических значений достигает температура элементов арматуры, ближайших к поверхности. Для крупных несущих элементов этот момент критического прогрева наступает задолго до того, как прогреются глубокие слои бетона. В случаях, когда существенный прогрев затрагивает только приповерхностные слои, твердое тело вполне можно рассматривать как полубесконечное.

Таким образом, одномерная модель полубесконечного тела является основой аналитического расчета бетонных конструкций на огнестойкость. Поэтому в данной работе мы анализируем именно эту тепловую модель.

В инженерной практике расчеты прогрева сечений железобетонных конструкций выполняют обычно либо с применением приближенно-аналитических методов (метод фиктивного термического слоя [2], метод решения через интеграл вероятностей [1]), либо путем численного моделирования (метод конечных разностей, метод элементарных тепловых балансов, метод конечных элементов [7, 8]), либо по стандартным графикам и номограммам (например, из СП 468.1325800.2019).

Численные методы уместно применять, когда необходимо провести точное моделирование теплового состояния конструкций сложной формы [9]. Номограммы не всегда удобны и не годятся для нестандартных материалов. Приближенно-аналитические методы, на наш взгляд, лучше всего подходят для универсального применения в оценочных расчетах. Имеющиеся в литературе приближенно-аналитические методики время от времени дорабатываются с учетом новых данных [10–12]. Предпринимаются также попытки дальнейшего их упрощения или уточнения [5, 13]. Эти изменения находят отражение и в новых редакциях стандартов типа EN 1992-1-2:2004 Eurocode 2³. Таким образом, простые и универсальные приближенно-аналитические методики по-прежнему актуальны, широко применяются и дорабатываются. Однако в отечественной литературе новых работ по этой теме в последнее время появляется мало.

В данной работе предложен приближенный аналитический способ решения тепловой задачи огнестойкости. Мы построили аналитическое решение простейшей модельной задачи теплопроводности в условиях стандартного пожара, показали, что такое решение можно получить, если использовать степенную аппроксимацию стандартной температурной кривой. Далее мы предложили простую, но достаточно точную аппроксимацию полученного аналитического решения. В результате получили формулу, удобную для инженерных теплотехнических расчетов и применимую для бетонов с произвольными теплофизическими характеристиками.

Построение аналогичных формул для задачи в нелинейной постановке является целью дальнейшего исследования.

2. Материалы и методы / Materials and methods

2.1. Стандартный температурный режим пожара

³ EN 1992-1-2:2004 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1–2: General rules. Structural fire design, CEN, Brussels, 2004. URL: <https://standards.iteh.ai/catalog/standards/cen/597bff7e-4f49-446f-ac9b-69829a09d098/en-1992-1-2-2004> (accessed 14.11.2024).

Для обеспечения сопоставимости результатов испытаний различных конструкций на огнестойкость, выполненных в различных лабораториях, международный стандарт ISO 834-1:1999⁴ и составленный на его основе ГОСТ 30247.0-94 предписывают проводить испытания при некотором условном температурном режиме, называемом стандартным. Стандартный температурный режим используется и в тепловых расчетах оценки огнестойкости.

Стандартным считается режим пожара, при котором температура продуктов сгорания меняется во времени по логарифмическому закону

$$T - T_0 = 345 \lg(1 + 0.133t) = \Phi_0(t), \quad (1)$$

где t – время, с; T_0 – начальная температура (обычно принимают $T_0 = 20$ °С).

Зависимость (1) обобщает результаты многочисленных экспериментов, проводившихся с начала прошлого века в лабораториях различных стран, и описывает в некотором смысле наихудший сценарий развития пожара в помещении, при котором температура быстро нарастает за короткое время, а затем медленно, но неуклонно увеличивается.

Американским стандартом ASTM E-119⁵ стандартный режим пожара вводится несколько иначе [5]:

$$T - T_0 = 750(1 - \exp(-0.0633\sqrt{t})) + 2.84\sqrt{t}.$$

В первые 30 мин пожара эта зависимость практически совпадает с (1), а затем дает немного более низкие значения температуры.

Заметим, что ГОСТ 30247.0-94 допускает отклонение температуры от стандартной кривой при огневых испытаниях. Допустимые отклонения указаны в таблице 1.

Таблица 1. Допустимые относительные отклонения от стандартной кривой
Table 1. Allowable relative deviations from the standard curve

t , мин	5–10 мин	10–45 мин	45–360 мин
Δ , %	± 15	± 10	± 5

Зависимость (1) проста и удобна для вычислений, однако наличие в ней логарифма не позволяет получить аналитическое решение даже линейной задачи теплопроводности. В объяснение причин этого можно указать, что для тепловых процессов логарифмические зависимости от времени не характерны.

Как показано ниже, аналитические решения линейной задачи теплопроводности можно получить, если температура пожара описывается степенными функциями. Поэтому нами была построена простая степенная аппроксимация зависимости (1). Коэффициенты аппроксимации определялись методом наименьших квадратов на неравномерной сетке со сгущением в направлении начала отсчета (рис. 1). В результате мы пришли к следующей формуле, где время t задается в секундах:

$$T - T_0 = 13770 t^{0.01} - 14022 = \tilde{\Phi}_0(t). \quad (2)$$

⁴ ISO 834-1:1999(E) International Standard. Fire-resistance tests – Elements of building construction. Part 1: General requirements. URL: https://russian.flammabilitytestingequipment.com/photo/flammabilitytestingequipment/document/10331/ISO834-1-1999Fire-resistancetests.Elementsofbuildingconstruction.Part1_Generalrequirements.pdf (accessed 11.11.2024).

⁵ ASTM E-119 Standard Test Methods for Fire Tests of Building Construction and Materials. URL: <https://archive.org/details/gov.law.astm.E0119.20/mode/2up> (accessed 14.11.2024).

На рис. 1 точками показаны значения, вычисленные по формуле (2). В диапазоне времени $t \in [1, 360]$ мин абсолютная погрешность аппроксимации (2) не превышает 5° .

Для очень короткого начального отрезка времени ($t < 6$ с) формула (2) дает отрицательные значения. Однако точные значения температуры при $t < 1$ мин не представляют практического интереса, а дальше аппроксимация (2) описывает стандартную температурную кривую с высокой точностью.

Перейдем к решению задачи теплопроводности в условиях стандартного температурного режима пожара.

2.2. Основная тепловая задача оценки огнестойкости

Основная цель теплового этапа расчетов на огнестойкость – определить температуру бетона и арматуры в сечении железобетонной конструкции при нагреве по стандартному температурному режиму и выяснить условия работы арматуры и бетона при нагреве. В частности, для каждого момента времени необходимо узнать толщину слоя бетона, нагретого выше критической температуры.

Бетон и стальная арматура, нагретые до температуры выше критической T_* , значительно теряют прочность. В результате этого внешний слой материала перестает участвовать в работе рассматриваемого сечения. Например, при расчете огнестойкости колонны ее рабочее сечение получается отбрасыванием поверхностного слоя, нагретого до температуры $T \geq T_*$, то есть ограничивается изотермой $T = T_*$. Для бетонных конструкций различного типа критическая температура принимается обычно в диапазоне $T_* \in [450, 600]^\circ\text{C}$.

Как было сказано выше, в большинстве случаев при расчете огнестойкости бетонные конструкции можно рассматривать в рамках модели полубесконечного тела. Уточним, что имеется в виду.

Глубина прогрева конструкции в условиях стандартного пожара зависит, безусловно, от ее геометрии. Ясно, например, что в один и тот же момент времени глубина прогрева колонны, нагреваемой пламенем со всех сторон, будет больше, чем глубина прогрева массивной плиты, нагреваемой с одной стороны. В то же время при уменьшении рабочего сечения колонны даже в три раза толщина слоя, нагретого выше критической температуры, остается относительно небольшой – порядка $1/6$ размера колонны (рис. 2).

На рис. 2 показаны зоны критического нагрева ($T_* \geq 500^\circ\text{C}$) для бетонной колонны размером 600 мм (а) и для полубесконечного тела (полупространства) из того же материала (b) в один и тот же момент времени. Как можно видеть, глубина прогрева колонны в средних точках сторон сечения незначительно превышает глубину прогрева полупространства в тот же момент времени. В моменты времени, предшествующие критической потере несущих свойств, отличие будет еще менее существенным.

Таким образом, можно утверждать, что приближенная оценка глубины прогрева конструкции любой формы может проводиться при помощи формул, полученных для одномерной задачи об одностороннем нагреве полупространства. Поэтому указанную одномерную задачу уместно назвать

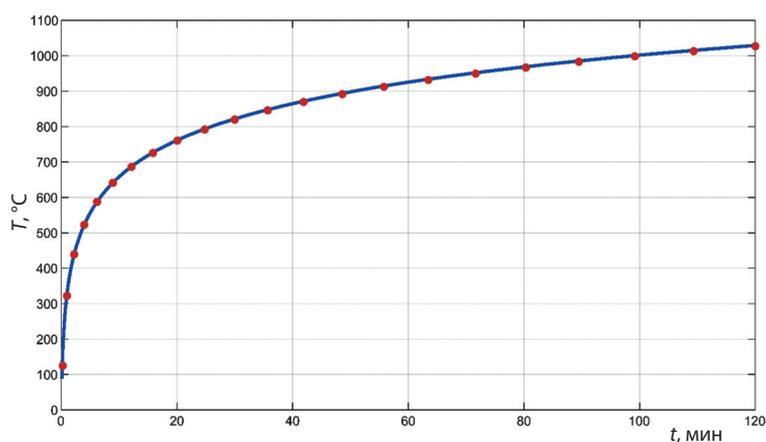


Рис. 1. Стандартная температурная кривая (сплошная линия) и ее аппроксимация (точки), предлагаемая авторами
Fig. 1. Standard temperature curve (solid line) and its approximation (points), proposed by the authors

основной тепловой задачей оценки огнестойкости.

Итак, рассмотрим задачу о нагреве полуграниченного тела (полупространства) в условиях стандартного пожара. Поскольку температура при пожаре меняется в широких пределах, приходится учитывать зависимость теплофизических параметров от температуры. На поверхности тела происходит сложный теплообмен с продуктами сгорания. При этом существенную роль может играть лучистая составляющая теплового потока. С учетом сказанного математическая постановка задачи записывается так:

$$\begin{aligned} \rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x \in [0, \infty), \\ -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha (T_0 + \Phi(t) - T|_{x=0}) + \varepsilon \sigma_0 \left((T_0 + \Phi(t))^4 - T^4 \Big|_{x=0} \right), \\ T \Big|_{t=0} &= T_0, \quad T \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow T_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ , $c(T)$, $k(T)$ – теплофизические параметры материала (плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности);

$\Phi(t)$ – закон изменения относительной температуры продуктов сгорания, например, $\Phi(t) = \Phi_0(t)$ для стандартной температурной кривой (1);

α – коэффициент конвективного теплообмена;

ε – приведенная степень черноты;

$\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}$ – постоянная Стефана-Больцмана, Вт/м²/К⁴.

Температура в задаче (3) измеряется в кельвинах. Зависимости $c(T)$ и $k(T)$ для бетонов различных типов принимаются, как правило, линейными согласно СП 468.1325800.2019:

$$c = c_0 + c_1 T, \quad k = k_0 + k_1 T. \quad (4)$$

Наконец, [2, 3] рекомендуют принимать параметры теплообмена в диапазонах: $\alpha \in [20, 35]$ Вт/м²К, $\varepsilon \in [0.7, 0.95]$.

Зависимость коэффициентов c , k от неизвестной функции $T(x, t)$, а также наличие в граничном условии слагаемого T^4 делает задачу (3) нелинейной. Получить аналитическое решение этой задачи даже при $\Phi_0(t) = const$ не удастся.

Имеются два пути упрощения задачи (3).

Первый путь состоит в линеаризации граничного условия с заменой его на граничное условие третьего рода

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \tilde{\alpha} (T_0 + \Phi(t) - T|_{x=0}), \quad (5)$$

где $\tilde{\alpha}$ – приведенный коэффициент теплообмена, учитывающий как конвективную, так и лучистую составляющие.

Более радикальным вариантом является замена условия теплообмена (3) на граничное условие первого рода

$$T \Big|_{x=0} = T_0 + \Phi(t). \quad (6)$$

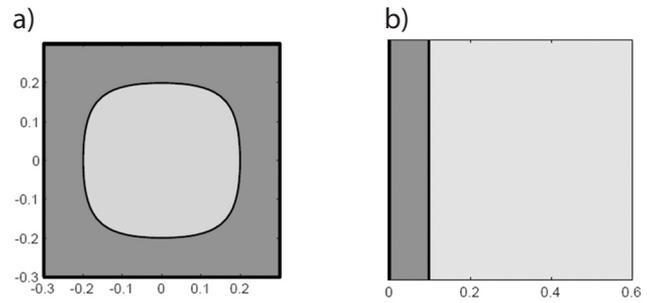


Рис. 2. Зоны перегрева: а) в сечении колонны; б) в полупространстве (расчет выполнен авторами)
 Fig. 2. Overheating zones: a) in the column cross-section; b) in the half-space (calculation by the authors)

Это означает, что температура поверхности принимается равной температуре продуктов сгорания.

В работе [14] было проведено сравнение температуры поверхности $T|_{x=0}$, получающейся при решении задачи (3) численным методом, и температуры продуктов сгорания при стандартном пожаре. Показано, что существенное отличие наблюдается только на начальном отрезке времени $t < 10$ мин. При $t > 10$ мин относительная погрешность монотонно уменьшается и не превосходит 20 % для нормальных бетонов и 10 % для легких.

Важно отметить, что, используя условие (6) вместо условия теплообмена (3), мы будем всегда получать завышенные значения местной температуры и толщины слоя прогрева. Это автоматически дает некоторый запас огнестойкости при проектировании. В то же время такая упрощенная модель будет в целом правильно отражать динамику распространения тепла при стандартном пожаре.

Таким образом, замена граничного условия (3) условием первого рода (6) – вполне оправданное упрощение при первоначальной оценке огнестойкости бетонных конструкций.

Второй путь упрощения задачи (3) состоит в линеаризации самого уравнения теплопроводности. При этом считают, что теплофизические параметры принимают постоянные значения $c_* = c(T_*)$, $k_* = k(T_*)$, соответствующие некоторой выбранной температуре T_* – температуре линеаризации. Можно, например, взять T_* равной критической температуре бетона. Так, при $T_* = 500$ °С по формулам вида (4) получаем следующие значения:

$$c_* = 1\,125 \text{ Дж / кг} \cdot \text{К}, k_* = 1.025 \text{ Вт / м} \cdot \text{К}, a_* = \frac{k_*}{\rho c_*} = 3.88 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{с}.$$

Здесь a_* – температуропроводность материала при температуре линеаризации T_* .

Используя оба описанных упрощения, получаем линейную задачу теплопроводности с граничным условием первого рода:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x \in [0, \infty); T|_{x=0} = T_0 + \Phi(t), T|_{t=0} = T_0, T|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow T_0. \quad (7)$$

Эту задачу будем называть *простейшей модельной задачей оценки огнестойкости*.

2.3. Аналитические решения простейшей модельной задачи

Простые аналитические решения лежат в основе инженерных методов расчета. Такие формулы легко анализировать, выявляя важные закономерности явления, по ним легко считать, легко строить аппроксимации. Так, например, в задачах оценки огнестойкости широко применяется аналитическое решение линейной задачи с постоянной температурой поверхности⁶ $T|_{x=0} = T_1 = \text{const}$ [15, 16]:

$$T(x, t) - T_0 = (T_1 - T_0) \operatorname{erfc}(\xi), \quad (8)$$

где $\operatorname{erfc}(\xi)$ – дополнительная функция ошибок.

Отдельно отметим обозначение

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{a_* t}}. \quad (9)$$

Безразмерный параметр ξ играет важную роль в аналитических решениях задачи (7).

Несмотря на то, что во всех моделях огневого воздействия температура продуктов сгорания $\Phi(t)$, а следовательно и температура поверхности меняется существенным образом, простая форму-

⁶ Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: точные решения*. Москва: МПО; 1996. 496 с.

ла (8) тем или иным способом адаптируется для применения в этой, более общей ситуации. Одним из наиболее известных приложений формулы (8) является метод фиктивного термического слоя [4].

Построить аналитическое решение задачи (7) для произвольной температурной кривой $\Phi(t)$ можно в интегральной форме⁷:

$$T(x, t) = \frac{x}{2a_*\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{4a_*^2(t-s)}\right) \frac{\Phi(s)}{(t-s)^{3/2}} ds. \quad (10)$$

Но выразить этот интеграл в известных функциях удастся только для зависимостей Φ очень простого вида, а использовать его для простых оценочных расчетов неудобно.

Подчеркнем, что для стандартной логарифмической зависимости Φ_0 (формула (1)) явного аналитического решения задачи (7) не существует.

Наиболее простые аналитические формулы получаются, когда решение задачи (7) оказывается пропорциональным температуре $\Phi(t)$ продуктов сгорания, то есть имеет вид

$$T(x, t) - T_0 = \Phi(t)\Theta(x, t).$$

Выясним, для какого вида зависимостей $\Phi(t)$ существуют подобные решения.

В частном случае $\Theta = \Theta(x)$ мы приходим к классическому разделению переменных. Подставляя $T(x, t) - T_0 = \Phi(t)\Theta(x)$ в уравнение и граничное условие задачи (7), получаем:

$$\Theta(x)\Phi'(t) = a_* \Phi(t)\Theta''(x), \quad \Phi(t)\Theta(0) = \Phi(t),$$

откуда следует:

$$\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = a_* \frac{\Theta''(x)}{\Theta(x)} = \lambda, \quad \Theta(0) = 1,$$

где λ – так называемая постоянная разделения. Решая полученные независимые дифференциальные уравнения для Φ и Θ , приходим к частному решению вида:

$$T(x, t) = C \exp \lambda t \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{a_*}} x\right).$$

Следовательно, классический метод разделения переменных дает явное аналитическое решение только для зависимостей Φ в виде возрастающей экспоненты $\Phi(t) = C \exp \lambda t, \lambda > 0$. Отметим, что стандартные температурные кривые не используют такие зависимости.

Более широкий класс частных решений можно получить, если рассматривать зависимости Θ более общего вида (обобщенное разделение переменных) [16]:

$$\Theta(x, t) = \Theta(\xi), \quad \xi = cxt^\beta, \quad c = \text{const}.$$

В этом случае при подстановке в (7) получаем:

$$\frac{\Phi'}{t^{2\beta}\Phi} = a_* c^2 \frac{\Theta''}{\Theta} - c\beta x t^{-\beta-1} \frac{\Theta'}{\Theta}.$$

Разделить переменные в этом уравнении возможно, только если произведение $x t^{-\beta-1}$ выражается через параметр $\xi = cxt^\beta$, то есть только в случае $-\beta - 1 = \beta$ или при $\beta = -1/2$.

Из предыдущего уравнения при $\beta = -1/2$ и $c = 1 / 2\sqrt{a_*}$ следует:

⁷ Там же.

$$\frac{t \varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{4} \frac{\Theta''(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{\xi}{2} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} = \lambda, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{a_* t}},$$

где λ – постоянная разделения, а переменная ξ – в точности безразмерный параметр, введенный формулой (9).

Для зависимости Φ получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{\lambda}{t},$$

откуда находим $\Phi(t) = Ct^\lambda$.

Таким образом, лишь для степенных зависимостей $\Phi(t) = Ct^\lambda$ существуют решения задачи (7) простого вида:

$$T(x, t) - T_0 = \Phi(t) \Theta(\xi) = t^\lambda \Theta(\xi) = Ct^\lambda \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{a_* t}}\right).$$

Следовательно, для получения простых аналитических решений разумно применять именно степенные аппроксимации температурных кривых.

Для функции $\Theta(\xi)$ при разделении переменных получается линейное дифференциальное уравнение

$$\Theta'' + 2\xi\Theta' - 4\lambda\Theta = 0.$$

Его решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1(p, q; z)$ (см. уравнение 2.6.3.67 в справочнике⁸) и имеет вид:

$$\Theta_\lambda(\xi) = {}_1F_1\left(-\lambda; \frac{1}{2}, -\xi^2\right) - \frac{2\Gamma(\lambda+1)\xi}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \lambda; \frac{3}{2}, -\xi^2\right), \quad (11)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Мы ввели обозначение $\Theta_\lambda(\xi)$, чтобы подчеркнуть зависимость функции Θ от показателя степени λ .

Итак, мы убедились, что для степенной температурной кривой $\Phi(t) = Ct^\lambda$ простейшая модельная задача (7) имеет явное решение

$$T(x, t) - T_0 = Ct^\lambda \Theta_\lambda(\xi), \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{a_* t}}. \quad (11.1)$$

Важно заметить, что поскольку задача (7) линейная, мы можем написать явное решение и для случая, когда $\Phi(t)$ является конечной комбинацией степенных функций:

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^N C_n t^{\lambda_n}.$$

В таком случае мы имеем просто

$$T(x, t) - T_0 = \sum_{n=1}^N C_n t^{\lambda_n} \Theta_{\lambda_n}(\xi).$$

В заключение укажем, что для граничного условия третьего рода получить аналогичным способом явные решения не удастся. В справочнике⁹ приводится точное решение задачи с условием

⁸ Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. Москва: Физматлит; 2001. 576 с.

⁹ Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: точные решения*. Москва: МПО; 1996. 496 с.

третьего рода (5) в виде двойного интеграла. Но использовать его для практических расчетов не представляется возможным. В фундаментальной монографии [16] можно найти явное решение для случая $\Phi(t) = T_1 = const$.

2.4. Аппроксимация решения задачи для степенных температурных кривых

Как было показано выше, явные аналитические решения простейшей модельной задачи (7) можно построить только для температурных кривых экспоненциального вида $\Phi(t) = C \exp \lambda t$ ($\lambda > 0$) и степенного вида $\Phi(t) = Ct^\lambda$. Растущие экспоненциальные зависимости не подходят для представления стандартных температурных кривых. Поэтому сосредоточимся на изучении решения (11.1) для степенной зависимости $\Phi(t)$.

Формула (11) сложна для проведения инженерных расчетов, однако она допускает аппроксимацию простого вида.

Построить такую аппроксимацию удастся благодаря структуре решения. А именно, вместо функции двух переменных $T(x, t)$ общего вида мы имеем здесь произведение $\Phi(t)\Theta(\xi)$ двух функций, зависящих каждая от своего аргумента. При этом аппроксимировать нужно только функцию одной переменной $\Theta(\xi)$.

Можно показать, что формула (11) годится для $\lambda > -1$, однако при отрицательных значениях λ функция t^λ обращается в бесконечность при $t = 0$. Поэтому будем рассматривать «физичный» диапазон значений $\lambda \geq 0$.

Для конкретных значений λ функция $\Theta_\lambda(\xi)$ может быть выражена через известные специальные функции. Так, например, при $\lambda = 0, 1/4, 1/2, 1$ имеем соответственно

$$\begin{aligned}\Theta_0(\xi) &= \operatorname{erfc}(\xi), \\ \Theta_{\frac{1}{4}}(\xi) &= \frac{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\pi} \exp(-\xi^2/2) \xi^{3/2} \left(K_{\frac{3}{4}}(\xi^2/2) - K_{\frac{1}{4}}(\xi^2/2) \right), \\ \Theta_{\frac{1}{2}}(\xi) &= \exp(-\xi^2) - \sqrt{\pi} \xi \operatorname{erfc}(\xi), \\ \Theta_1(\xi) &= (2\xi^2 + 1) \operatorname{erfc}(\xi) - \frac{2\xi}{\sqrt{\pi}} \exp(-\xi^2).\end{aligned}$$

Заметим, что вообще при $\lambda = n, n + 1/2, n \in N$, функция Θ_λ выражается через дополнительную функцию ошибок erfcz , а при $\lambda = n + 1/4, n + 3/4$ – через функции Макдональда $K_p(z)$ (модифицированная функция Бесселя второго рода) порядка p .

При $\lambda = 0$ мы имеем $t^\lambda \equiv 1$. Поэтому функция $\Theta_0(\xi)$ дает классическое решение (8) для постоянной температуры T_1 на границе:

$$T(x, t) - T_0 = (T_1 - T_0)\Theta_0(\xi) = (T_1 - T_0)\operatorname{erfc}(\xi).$$

Несмотря на существенно различные формулы, функции Θ_λ при различных значениях λ имеют схожие свойства: это убывающие функции экспоненциального типа (рис. 3). Кроме того, $\Theta_\lambda(0) = 1$ для всех $\lambda \geq 0$.

Представляется разумным аппроксимацию функции $\Theta_\lambda(\xi)$ искать в виде:

$$\Theta_\lambda(\xi) \approx \exp(-a_1\xi - a_2\xi^2), \tag{12}$$

где коэффициенты a_1 и a_2 зависят от значения λ .

Методом наименьших квадратов были найдены оптимальные коэффициенты a_1 и a_2 экспоненциальной аппроксимации (12). Результаты представлены в таблице 2 и на графиках рис. 3. В таблице 2

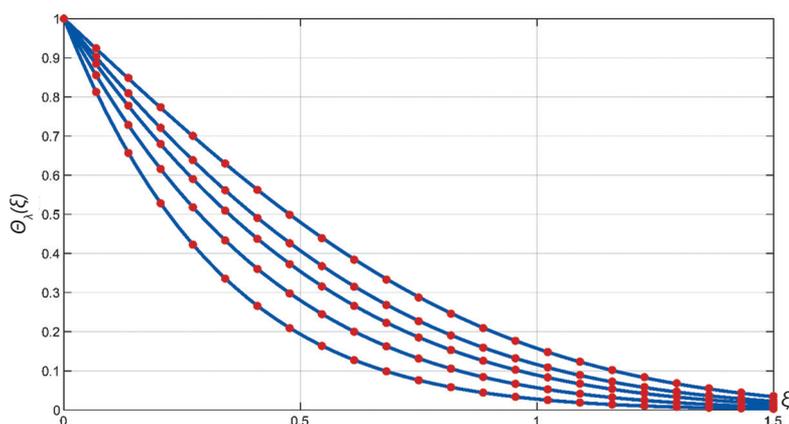


Рис. 3. Функции $\Theta_\lambda(\xi)$ при $\lambda = 0, 1/4, 1/2, 1, 2$ (сверху вниз) и их аппроксимации (точки) (вычисления выполнены авторами)

Fig. 3. Functions $\Theta_\lambda(\xi)$ at $\lambda = 0, 1/4, 1/2, 1, 2$ (top to bottom) and their approximations (points) (calculations by the authors)

указаны также значения Δ_{max} максимальной абсолютной погрешности аппроксимации.

Как можно видеть, формула (12) обеспечивает отличную точность по меркам инженерных расчетов.

Итак, приближенное решение простейшей модельной задачи со степенным граничным условием $T|_{x=0} - T_0 = Ct^\lambda$ имеет вид

$$T(x, t) - T_0 = Ct^\lambda \exp(-\alpha_1 \xi - \alpha_2 \xi^2).$$

Таблица 2. Коэффициенты аппроксимации функции $\Theta_\lambda(\xi)$
Table 2. Coefficients for approximating the function $\Theta_\lambda(\xi)$

λ	α_1	α_2	Δ_{max}
0.00	1.1003	0.7493	$1.7 \cdot 10^{-3}$
0.01	1.1163	0.7466	$1.6 \cdot 10^{-3}$
0.25	1.4550	0.6970	$1.3 \cdot 10^{-3}$
0.50	1.7519	0.6622	$1.0 \cdot 10^{-3}$
1.00	2.2418	0.6192	$0.7 \cdot 10^{-3}$
2.00	3.0003	0.5768	$0.3 \cdot 10^{-3}$

3. Результаты и обсуждение / Results and discussion

Аппроксимация решения задачи для стандартной температурной кривой

В подразделе 2.1 мы построили степенную аппроксимацию (2) стандартной температурной кривой $\Phi_0(t)$

$$\tilde{\Phi}_0(t) = 13770t^{0.01} - 14022.$$

Результаты подраздела 2.3 позволяют сразу написать решение задачи (7) для такой температурной кривой:

$$T(x, t) - T_0 = 13770t^{0.01}\Theta_{0.01}(\xi) - 14022\Theta_0(\xi).$$

Используя данные таблицы 2, получаем приближенное решение простейшей модельной задачи для условий стандартного пожара:

$$T(x, t) - T_0 \approx 13770t^{0.01} \exp(-1.1163\xi - 0.7466\xi^2) - 14022 \exp(-1.1003\xi - 0.7493\xi^2). \quad (13)$$

Сравним результаты расчетов по приближенной формуле (13) с результатами высокоточного численного моделирования. Такое сравнение служит одновременной проверкой как точности экспоненциальной аппроксимации (12), так и правильности аналитического решения (11). Численный метод с контролем точности для решения линейной задачи (7), а также исходной нелинейной задачи (3) был реализован в системе MATLAB с использованием стандартного решателя ode15s для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты показаны на рис. 4, где сплошные линии представляют численное (высокоточное) решение при $\Phi(t) = \Phi_0(t)$, а точки – значения, полученные по приближенной формуле (13); графики показывают распределение температуры по глубине в моменты времени $t = 5, 10, 30, 60, 120, 240$ и

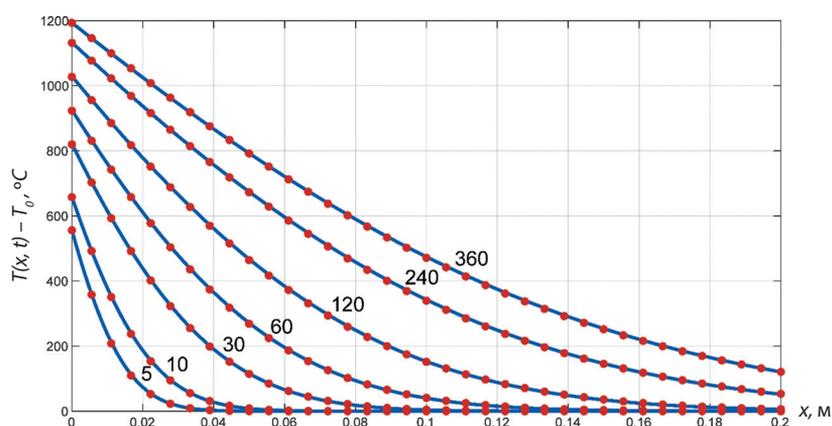


Рис. 4. Сравнение формулы (13) (точки) и высокоточного численного расчета (сплошные кривые) (вычисления выполнены авторами)
 Fig. 4. Comparison of formula (13) (points) and high-precision numerical calculation (solid curves) (calculations by the authors)

360 мин. Максимальная абсолютная погрешность аппроксимации для всех представленных кривых составляет 3.5° .

Построенную аппроксимацию (13) можно еще упростить. Заметим, что в аппроксимацию $\tilde{\Phi}_0(t)$ входит степень $\lambda = 0.01 \ll 1$ переменной t . При этом зависимость $\Theta_\lambda(\xi)$ от параметра λ непрерывна, поэтому функции $\Theta_{0.01}(\xi)$ и $\Theta_0(\xi)$ достаточно близки, то есть:

$$At^{0.01}\Theta_{0.01}(\xi) - B\Theta_0(\xi) \approx (At^{0.01} - B)\Theta_\lambda(\xi),$$

где A, B – коэффициенты аппроксимации (2); $\lambda \in [0, 0.01]$ – некоторое среднее значение.

Можно предположить, что, хотя функция $\Phi_0(t)$ и не является степенной, аппроксимацию решения простейшей задачи при $\Phi(t) = \Phi_0(t)$ также можно искать в виде

$$T(x, t) - T_0 = \Phi_0(t) \exp(-\alpha_1\xi - \alpha_2\xi^2).$$

Для построения такой аппроксимации приходится рассматривать функцию точного решения $T(x, t)$ уже как функцию двух переменных для диапазонов $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$ и $x \in [0, x_{\max}]$ изменения независимых переменных. Коэффициенты аппроксимации α_1, α_2 подбираются исходя из условия минимизации невязки с точным решением во всем диапазоне изменения переменных. В расчетах мы принимали $[t_{\min}, t_{\max}] = [5, 200]$ мин, $x_{\max} = 0.2$ м. Методом наименьших квадратов были найдены оптимальные значения $\alpha_1 = 1.3290, \alpha_2 = 0.7352$.

Максимальная абсолютная погрешность аппроксимации в указанном диапазоне составила 19.3° .

Итак, еще одна простая аппроксимация решения задачи (7) для условий стандартного пожара имеет вид

$$T(x, t) - T_0 \approx 345 \lg(1 + 0.133t) \exp(-1.329\xi - 0.7352\xi^2). \quad (14)$$

Точность аппроксимации ожидаемо оказалась более низкой по сравнению с аппроксимацией (13), но, как показывает рис. 5, соответствие результатов все же достаточно хорошее. При этом формула (14) несколько проще и обладает следующим важным преимуществом. Соотношение (14) при заданном значении температуры легко разрешить как относительно t , так и относительно $\xi(x)$. Это дает возможность легко вычислять глубину прогрева до критической температуры T_* в заданный момент времени или же находить время прогрева до T_* на заданной глубине.

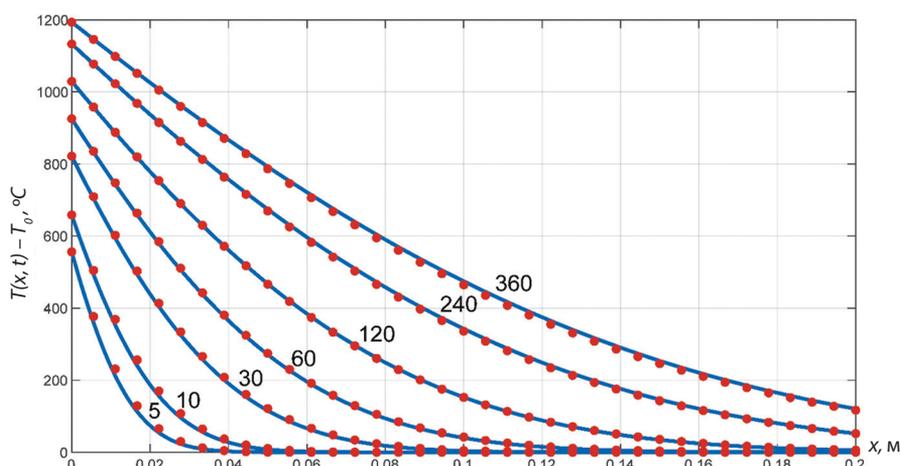


Рис. 5. Точность аппроксимации по формуле (14) (расчеты выполнены авторами)
Fig. 5. Accuracy of the approximation based on the formula (14) (calculations by the authors)

4. Заключение / Conclusions

Построенная экспоненциальная аппроксимация (13)–(14) дает решение линеаризованной тепловой задачи (7) оценки огнестойкости с достаточной для инженерных оценок точностью во всем диапазоне изменения температуры в ходе стандартного пожара.

Методика получения формулы (14) основана на использовании степенной аппроксимации температурной кривой и, следовательно, может быть использована для температурных кривых, отличных от стандартной кривой (1). При этом следует использовать общую формулу (11) с последующим построением аппроксимаций вида (13)–(14).

Формула (14) универсальна, поскольку годится для бетонов с любыми теплофизическими свойствами. При этом она не содержит специальных функций, что, безусловно, упрощает оценочные расчеты.

Аппроксимации (13)–(14) построены для простейшей модельной задачи стандартного пожара, которая представляет собой линеаризованную версию основной задачи (3) оценки огнестойкости. В дальнейшем планируется провести систематическое исследование основной задачи (3) в нелинейной постановке с целью построения уточненного варианта аппроксимации (13)–(14).



Вклад авторов. Тамразян А. Г. – научное сопровождение. Мешков В. Р. – написание статьи. Геращенко В. С. – сбор и анализ материалов. Гришин А. С. – научное редактирование статьи.

Author contributions. Ashot G. Tamrazyan: provided scientific supervision. Vadim R. Meshkov: wrote the article. Vitaly S. Gerashchenko: collected and analysed data. Andrey S. Grishin: performed scientific editing of the article.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interest. The authors declare no relevant conflict of interest.

Список литературы

1. Яковлев А. И. *Расчет огнестойкости строительных конструкций*. Москва: Стройиздат; 1988. 143 с. URL: <https://dwg.ru/lib/3452>.
2. Федоров В. С., Левитский В. Е., Молчадский И. С., Александров А. В. *Огнестойкость и пожарная опасность строительных конструкций*. Москва: АСВ; 2009. 408 с.
3. LaMalva K., Hopkin D. (eds). *International handbook of structural fire engineering*. Switzerland: Springer; 2021. 529 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-77123-2>
4. Buchanan A. H., Abu A. K. *Structural design for fire safety*. 2nd edition. UK: Wiley; 2017. 436 p.

5. Wickström U. *Temperature calculation in fire safety engineering*. Switzerland: Springer; 2016. 256 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-30172-3>.
6. Hertz K. *Design of fire-resistant concrete structures*. London: ICE; 2019. 256 p. <http://dx.doi.org/10.1680/dofrcs.64447>
7. Мостовских Д. С., Беляева З. В. Расчет огнестойкости нестандартных сечений элементов железобетонных конструкций с использованием ПК ANSYS. *Russian Journal of Construction Science and Technology*. 2022;8(1):5–19. <http://dx.doi.org/10.15826/rjct.2022.1.001>
8. Ширко А. В., Камлюк А. Н., Полевода И. И., Зайнудинова Н. В. Теплотехнический расчет огнестойкости элементов железобетонных конструкций с использованием ANSYS. *Вестник Командно-инженерного института МЧС Республики Беларусь*. 2013;18(2):260–269. URL: <https://vestnik.ucp.by/arhiv/pdf/ICE/v18/n2/260.pdf>.
9. Камлюк А. Н., Полевода И. И., Ширко А. В. Модели материалов арматуры и бетона для теплотехнических и прочностных расчетов на примере Российского стандарта. *Вестник Командно-инженерного института МЧС Республики Беларусь*. 2013;17(1):104–116. URL: <https://vestnik.ucp.by/arhiv/pdf/ICE/v17/n1/104.pdf>.
10. Tamrazyan A. G., Avetisyan L. A. Behavior of compressed reinforced concrete columns under thermodynamic influences taking into account increased concrete deformability. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 21, *Construction – The Formation of Living Environment*. 2018;365:052034. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/5/052034>
11. Tamrazyan A. G., Avetisyan L.A. Experimental and theoretical study of reinforced concrete elements under different characteristics of loading at high temperatures. In: *XXV Polish – Russian – Slovak Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering". Series "Procedia Engineering"*. 2016;153:721–725. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.232>
12. Тамразян А. Г. Расчет внецентренно сжатых железобетонных элементов при динамическом нагружении в условиях огневых воздействий. *Промышленное и гражданское строительство*. 2015;(3):29–35. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23217619>.
13. Kodur V. K. R., Baolin Yu., Dwaikat M. M. S. A simplified approach for predicting temperature in reinforced concrete members exposed to standard fire. *Fire Safety Journal*. 2013;56:39–51. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2012.12.004>
14. Wickström U. Application of the standard fire curve for expressing natural fires for design purposes. In: *Fire safety: Science and engineering*. ASTM International; 1985. P. 145–159. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:961622/FULLTEXT01.pdf>. <https://doi.org/10.1520/STP35295S>
15. Карташов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. 3-е изд., перераб. и доп. Москва: Высшая школа; 2001. 550 с. URL: <https://djvu.online/file/itro9ZmA4f0HX?ysclid=m70495kzc6791923455>.
16. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*. Москва: Наука, 1964. 487 с.

References

1. Yakovlev A. I. *Calculation of fire resistance for building structures*. Moscow: Stroyizdat; 1988. (In Russ.) URL: <https://dwg.ru/lib/3452>.
2. Fedorov V. S., Levitskiy V. Ye., Molchadskiy I. S., Aleksandrov A. V. *Fire resistance and fire hazard of building structures*. Moscow: ASV; 2009. (In Russ.)
3. LaMalva K., Hopkin D. (eds). *International handbook of structural fire engineering*. Switzerland: Springer; 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-77123-2>
4. Buchanan A. H., Abu A. K. *Structural design for fire safety*. 2nd edition. UK: Wiley, 2017.
5. Wickström U. *Temperature calculation in fire safety engineering*. Switzerland: Springer; 2016. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-30172-3>.
6. Hertz K. *Design of fire-resistant concrete structures*. London: ICE; 2019. 256 p. <http://dx.doi.org/10.1680/dofrcs.64447>
7. Mostovskikh D. S., Belyaeva Z. V. Calculating fire resistance of non-standard cross-sections of elements of reinforced concrete structures using the ANSYS software complex. *Russian Journal of Construction Science and Technology*. 2022;8(1):5–19. <http://dx.doi.org/10.15826/rjct.2022.1.001>
8. Shirko A. V., Kamlyuk A. N., Polevoda I. I., Zaynudinova N. V. Thermal engineering calculation of fire resistance of reinforced concrete structural elements using ANSYS. *Journal of Civil Protection*. 2013;18(2):260–269. (In Russ.) URL: <https://vestnik.ucp.by/arhiv/pdf/ICE/v18/n2/260.pdf>.
9. Kamlyuk A. N., Polevoda I. I., Shirko A. V. Reinforcement and Concrete Material Models for Thermal and Structural Analyses Based on the Russian Standard. *Journal of Civil Protection*. 2013;17(1):104–116. (In Russ.) URL: <https://vestnik.ucp.by/arhiv/pdf/ICE/v17/n1/104.pdf>.
10. Tamrazyan A. G., Avetisyan L. A. Behavior of compressed reinforced concrete columns under thermodynamic influences taking into account increased concrete deformability. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 21, *Construction – The Formation of Living Environment*. 2018;365:052034. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/365/5/052034>

11. Tamrazyan A. G., Avetisyan L.A. Experimental and theoretical study of reinforced concrete elements under different characteristics of loading at high temperatures. In: *XXV Polish – Russian – Slovak Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering". Series "Procedia Engineering"*. 2016;153:721–725. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.232>
12. Tamrazyan A. G. Calculation of eccentrically compressed reinforced concrete elements under dynamic loading in conditions of fire effect. *Industrial and civil engineering*. 2015;(3):29–35. (In Russ.) URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=23217619>.
13. Kodur V. K. R., Baolin Yu., Dwaikat M. M. S. A simplified approach for predicting temperature in reinforced concrete members exposed to standard fire. *Fire Safety Journal*. 2013;56:39–51. <https://doi.org/10.1016/j.firesaf.2012.12.004>
14. Wickström U. Application of the standard fire curve for expressing natural fires for design purposes. In: *Fire safety: Science and engineering*. ASTM International; 1985. P. 145–159. URL: <https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:961622/FULLTEXT01.pdf>. <https://doi.org/10.1520/STP352955>
15. Kartashov E. M. *Analytical methods in the theory of heat conduction in solids*. 3rd edition, revised. Moscow: Vysshaya shkola, 2001. (In Russ.) URL: <https://djvu.online/file/itro9ZmA4f0HX?ysclid=m70495kzc6791923455>.
16. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of heat solids*. 2nd edition. Oxford University Press; 1959. 517 p. URL: <https://z-lib.org/book/562688/6cd858/conduction-of-heat-in-solids.html?dsouce=recommend>.



Информация об авторах

Тамразян Ашот Георгиевич, д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент РААСН, заведующий кафедрой железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация, tamrazian@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0569-4788>

Мешков Вадим Ростиславович, канд. техн. наук, доцент высшей школы теоретической механики и математической физики, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация, meshkovadim@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0009-2088-3932>

Геращенко Виталий Сергеевич, аспирант кафедры железобетонных и каменных конструкций, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Российская Федерация; главный технический эксперт, АО «Атомэнергопроект», Москва, Российская Федерация, geraschenko_vs@aep.ru, <https://orcid.org/0009-0003-2701-2167>

Гришин Андрей Сергеевич, канд. техн. наук, начальник научно-исследовательского отдела динамики и сейсмостойкости, АО «Атомэнергопроект», Москва, Российская Федерация, grishin_as@aep.ru, <https://orcid.org/0009-0006-3616-0200>

Information about the authors

Ashot G. Tamrazyan, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Head of the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation, tamrazian@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0569-4788>

Vadim R. Meshkov, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor at the Higher School of Theoretical Mechanics and Mathematical Physics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation, meshkovadim@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0009-2088-3932>

Vitaly S. Gerashchenko, Postgraduate in the Department of Reinforced Concrete and Stone Structures, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation; Chief Technical Expert, JSC "Atomenergoproekt", Moscow, Russian Federation, geraschenko_vs@aep.ru, <https://orcid.org/0009-0003-2701-2167>

Andrey S. Grishin, Cand. Sci. (Engineering), Head of the Research Department of Dynamics and Seismic Resistance, JSC "Atomenergoproekt", Moscow, Russian Federation, grishin_as@aep.ru, <https://orcid.org/0009-0006-3616-0200>

Получена 06 ноября 2024 г., одобрена 09 января 2025 г., принята к публикации 20 февраля 2025 г.
Received 06 November 2024, Approved 09 January 2025, Accepted for publication 20 February 2025