Научно-исследовательский журнал «Педагогическое образование» / Pedagogical Education
https://po-journal.ru
2025, Том 6, № 9 / 2025, Vol. 6, Iss. 9 https://po-journal.ru/archives/category/publications
Научная статья / Original article
Шифр научной специальности: 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (педагогические науки)
УДК 372.851

Приемы визуализации и моделирования в обучении школьников решению задач по теории вероятностей

[1] **Графова О.П.,**
[1] **Пензенский государственный университет**

Аннотация: данная статья посвящена актуальным вопросам методики обучения школьников решению задач по теории вероятностей. Востребованность и актуальность данной темы обусловлена, с одной стороны, внедрением нового школьного курса по теории вероятностей и математической статистики, с другой стороны, включением задач из данного раздела в контрольно-измерительные материалы по математике. В статье особое внимание уделяется приему моделирования как средству визуализации задачной ситуации, что позволяет организовать деятельность учащихся по поиску способа решения таких задач. Автором рассмотрены наиболее часто используемые в школьной практике модели, представленные в учебниках и учебных пособиях по подготовке к ЕГЭ. Раскрыты основные этапы математического моделирования при работе над задачей. На конкретных примерах подробно описываются методические особенности организации деятельности учащихся по созданию модели к условию задачи, которая подводит их к самостоятельному открытию способа ее решения и теоретическому обоснованию найденного решения. Предложенный в статье методический подход к решению задач по теории вероятностей с использованием моделей обеспечивает наглядную интерпретацию математических положений самой теории и является эффективным средством в поиске пути решения задач данного вида.

Ключевые слова: моделирование, вероятность события, решение задач по теории вероятности, независимые события

Для цитирования: Графова О.П. Приемы визуализации и моделирования в обучении школьников решению задач по теории вероятностей // Педагогическое образование. 2025. Том 6. № 9. С. 18 – 24.

Поступила в редакцию: 13 июня 2025 г.; Одобрена после рецензирования: 12 июля 2025 г.; Принята к публикации: 26 августа 2025 г.

Visualization and modeling techniques in teaching schoolchildren to solving probability theory problems

[1] **Grafova O.P.,**
[1] **Penza State University**

Abstract: the article considers the current problem of teaching schoolchildren to solve problems in probability theory. The demand and relevance of this topic is due, on the one hand, to the introduction of a new school course in probability theory and mathematical statistics, and on the other hand, to the inclusion of problems from this section in control and measuring materials in mathematics. The article pays special attention to the technique of modeling as a means of visualizing a problem situation, which allows organizing students' activities to find a way to solve such problems. The author considers the most frequently used models in school practice, presented in textbooks and teaching aids for preparing for the Unified State Exam. The main stages of mathematical modeling when working on a problem are revealed. Specific examples are used to describe in detail the methodological features of organizing students' activities to create a model for the condition of the problem, which leads them to an independent discovery of a way to solve it and a theoretical justification for the solution found. The methodological approach to solving problems in probability theory using models proposed in the article provides a visual interpretation of the mathematical provisions of the theory itself and is an effective tool in finding a way to solve problems of this type.

Keywords: modeling, probability of an event, solving problems in probability theory, independent events

For citation: Grafova O.P. Visualization and modeling techniques in teaching schoolchildren to solving probability theory problems. Pedagogical Education. 2025. 6 (9). P. 18 – 24.

The article was submitted: June 13, 2025; Approved after reviewing: July 12, 2025; Accepted for publication: August 26, 2025.

Введение

Вопросы методики обучения школьников решению задач по теории вероятностей на сегодняшний день проблема востребованная и актуальная по ряду причин:

1) Обучение решению данных задач способствует формированию критического мышления школьников, развитию их аналитических способностей, умений строить цепочки логических рассуждений, оценивать возможные исходы событий и формулировать правильные выводы.

2) В настоящий момент в курсе школьных математических дисциплин выделен отдельный предмет, изучающий основы теории вероятностей и математической статистики.

3) На сегодняшний день задачи по теории вероятностей включены в контрольно-измерительные материалы по математике (ОГЭ и ЕГЭ обоих уровней).

Решение задач по применению классического определения понятия вероятности события на практике не вызывает у школьников трудностей. Однако, задачи, решение которых опирается на знание и умение применять основные понятия и теоремы теории вероятностей, вызывают у учащихся значительные затруднения.

Для разрешения данной методической проблемы мы рекомендуем использовать методы визуализации и приемы моделирования при обучении школьников решению задач по теории вероятностей.

Цель нашего исследования: раскрыть методические особенности организации обучения школьников решению задач по теории вероятностей с использованием приемов визуализации и моделирования.

Материалы и методы исследований

В основу нашего исследования был положен сравнительный анализ существующих на данный момент методических подходов к обучению школьников решению задач по теории вероятностей, в частности, применение приемов и средств визуализации при работе над задачей по теории вероятностей, а также обобщение передового методического опыта в области использования в школьной практике моделирования при обучении школьников решению задач по теории вероятностей.

Результаты и обсуждения

В вопросе обучения школьников решению задач по теории вероятностей сложились два основных методических подхода. Первый подход основан на рассмотрении отдельных видов задач по теории вероятностей и изучении алгритмов их решения. Познакомившись с одним из видов задач по теории вероятностей и усвоив способ их решения, мы переходим к изучению нового типа задач и т.д.

Второй подход рассматривает обобщенные методы и приемы решения задач по теории вероятностей. Одним из таких приемов является моделирование, на котором мы остановимся в нашей статье более подробно.

Наиболее часто в школьной практике при обучени решению задач по теории вероятностей используют следующие модели [2, 4]:

1. Практические модели (монеты, шестигранный кубик и т.д.)
2. Графические модели:
– рисунок,
– шкала вероятностей (отрезок),
– граф – схемы (дерево вероятностей),
– диаграммы Эйлера – Венна,
– единичный квадрат и др.
3. Таблицы.
4. Знаковые модели (формулы, уравнения).

Использование данных моделей при решении задач по теории вероятностей предполагает ряд этапов по ее созданию и интерпретации результатов, полученных в результате работы с ней.

Традиционно в методике выделяют следующие этапы работы с задачей с использованием приема моделирования:

1 этап. Анализ задачной ситуации: выделение элементарных событий в задаче и числовых данных, установление отношений между ними (совместные и несовместные, зависимые и независимые и др.). Заканчивается данный этап созданием рабочей модели.

2 этап. Работа с моделью по поиску пути решения. Составление плана решения задачи.

3 этап. Оформление найденного решения и обоснование его использованием основных понятий и теорем теории вероятности.

4 этап. Интерпретация полученных результатов, запись ответа [5].

Рассмотрим представленную выше схему работы с задачей с использованием приема моделирования при решении задач с независимыми событиями.

Задача 1. Два спортсмена участвуют в соревнованиях по стрельбе. Каждый из них стреляет в мишень ровно один раз. Вероятность, что первый стрелок попадет в мишень, равна 0,65, а второй – 0,7. Найти вероятность следующих событий:

1) только один из спортсменов попадет в мишень;

2) хотя бы один из спортсменов попадет в мишень [8].

1 этап. Проведя анализ условия данной задачи, можно выделить два элементарных события: A – событие, при котором первый спортсмен попадает в мишень, и событие B – второй спортсмен попадет в мишень. Вероятность первого события составляет $P(A) = 0{,}65$. Вероятность второго события $P(B) = 0{,}7$.

Можно также говорить о событиях $\bar{A}$ и $\bar{B}$, противоположных событиям A и B.

Вероятность, что первый стрелок не попадет в мишень, находится по формуле $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$ [3].

Вероятность, что второй стрелок не попадет в мишень, аналогично вычисляется $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ [3].

Из условия задачной ситуации, очевидно, что события A и B являются независимыми. Действительно, результат стрельбы по мишени ни одного из спортсменов никак не влияет на результат второго спортсмена.

Таким образом, полную вероятность события, состоящего из выстрелов двух стрелков, составляют четыре несовместных исхода:

$\bar{A} \times \bar{B}$ – исход, который характеризуется случаем, когда оба стрелка не попали;

$A \times \bar{B}$ – исход, где первый спортсмен попал, а второй промахнулся;

$\bar{A} \times B$ – исход, где первый промахнулся, а второй спортсмен попал;

$\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ – исход, когда оба стрелка попали.

По теореме о полной вероятности сумма всех рассмотренных выше событий равна 1, т.е. $\mathrm{P}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{B}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \times \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = 1$ [7].

Для наглядности можно изобразить вероятности всех рассмотренных выше событий в задаче, проведя аналогию с площадью единичного квадрата. Работа с данной моделью в дальнейшем приведет к способу решения данной задачи.

Изображаем единичный квадрат, по вертикальным сторонам отмечаем вероятности событий $P(A)$ (отрезок BH) и $P(\bar{A})$ (отрезок HA), по горизонтальным – $P(B)$ (отрезок BK) и $P(\bar{B})$ (отрезок KC) (рис. 1).

2 этап. На следующем этапе мы продолжаем работу с данной моделью. Анализируя требования задачи под цифрой 2 и обсуждая, что на рисунке обозначает каждый прямоугольник, школьники делают вывод, что искомая вероятность представлена суммой площадей двух прямоугольников KCEG и HGFA на нашей модели (рис. 1).

3 этап. Реализуя план найденного решения, школьники переводят решение на математический язык и обосновывают его с помощью понятий теории вероятностей. С точки зрения алгебры вероятностей сумма двух несовместных исходов, каждое из которых представляет собой произведение двух независимых событий, находим по формуле [7]:

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \times \overline{\mathrm{B}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \times \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}65 \times 0{,}3 + 0{,}35 \times 0{,}7 = 0{,}44$.

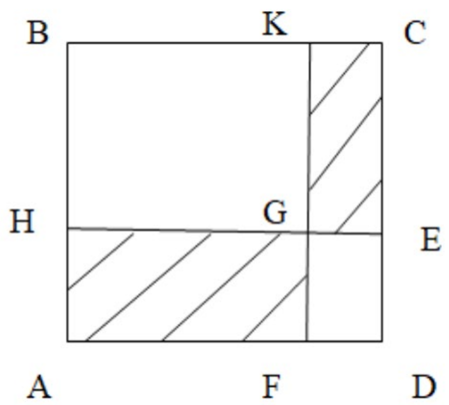

Рис. 1. Модель задачи (цифра 1).
Fig. 1. Model of the problem (number 1).

4 этап. На заключительном этапе возвращаемся к требованию задачи и перводим полученные результаты на естественный язык. Формулируем ответ задачи.

Ответ: вероятность попадания в мишень только одного из стрелков равна 0,44.

При поиске пути решения на вопрос задачи под цифрой 2 получается другая модель (рис. 2).

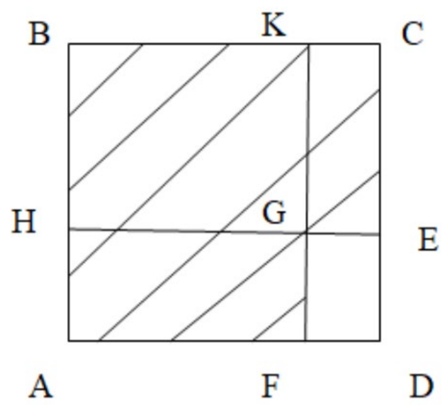

Рис. 2. Модель задачи (цифра 2).
Fig. 2. Model of the problem (number 2).

При разборе задачи обращаем внимание на связку «хотя бы один» и делаем вывод, что такая трактовка подразумевает все исходы, кроме случая непопадания обеими спортсменами в мишень. Для этого из площади единичного квадрата ABCD надо вычесть площадь прямоугольника FGED (рис. 2).

Следовательно, $1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \times \overline{\mathrm{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 1 - 0{,}35 \times 0{,}3 = \ 0{,}895$.

Как видно из данного примера, рассмотренные выше модели полностью отражают не только наглядность теоремы о полной вероятности, но и демонстрируют понятия независимых и противоположных элементарных событий. В этом случае на моделях видно, как работает теорема о произведении вероятностей двух независимых событий (поиска площади прямоугольника, иллюстрирующего данный исход).

В школьной практике широко применяется прием варьирования задач, где меняется одно из условий в задаче при схожем общем сюжете.

Рассмотрим следующую задачу и другой способ моделирования.

Задача 2. Три спортсмена стреляют по мишени ровно один раз каждый. Вероятности попадания у каждого соответственно равны: у первого – 0,7, у второго – 0,6, у третьего – 0,5. Найти вероятность, что в мишени окажется ровно 1 попадание [8].

Так как в данной задаче речь идет о трех стрелках, то возможность использовать графическую модель в виде единичного квадрата уже исключена.

Для данной задачи выберем в качестве модели дерево вероятности. Дерево вероятности – это один из видов графической модели, которая представляет собой граф-схему.

Граф – схема является одним из видов графической информационной модели, которая представляет собой наглядное упрощенное изображение взаимосвязей, отношений, структуры или расположения объектов, а также последовательность действий в алгоритмах [1].

Граф-схема состоит из вершин (точек) и ребер (линий, которые соединяют эти вершины). Такое представление информации позволяет наглядно представить и анализировать случайные события в задаче по теории вероятности и их взаимосвязи.

1 этап. Из сюжета данной задачи мы выделяем три элементарных события:

A_1 – попадание первого спортсмена в мишень, его вероятность составляет $P(A_1) = 0{,}7$.

A_2 – попадание второго спортсмена в мишень, $P(A_2) = 0{,}6$.

A_3 – попадание третьего спортсмена в мишень, $P(A_3) = 0{,}5$.

Аналогично первой задаче можно выделить противоположные им события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ – непопадание в мишень каждого стрелка и их вероятности соответственно:

$P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$,

$P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$,

$P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

По условию задачи искомой величиной является вероятность нового события X, при котором в мишени ровно одно попадание после того, как выстрелил по одному разу каждый из спортсменов.

Приступаем к построению нашей граф-схемы. Сначала на первом уровне мы изображаем вершину (первый стрелок) и два ребра – возможные исходы при выстреле первого спортсмена (попал или не попал). Указываем на каждом из ребер первого уровня вероятность соответствующего события $P(A_1) = 0{,}7$ и $P(\overline{A_1}) = 0{,}3$. На втором уровне дерева вероятности аналогично рассматриваем и оформляем исходы при выстреле для второго стрелка и т.д. (рис. 3).

2 этап. Далее при поиске пути решения задачи выделяем только те ветки дерева, где случай попадания встречается ровно один раз: попал – не попал – не попал, не попал – попал – не попал, не попал – не попал – попал.

Отмечаем, что выделенные в условии задачи элементарные события носят независимый характер. Следовательно, в решении может быть использована теорема о совместном наступлении нескольких независимых событий [7].

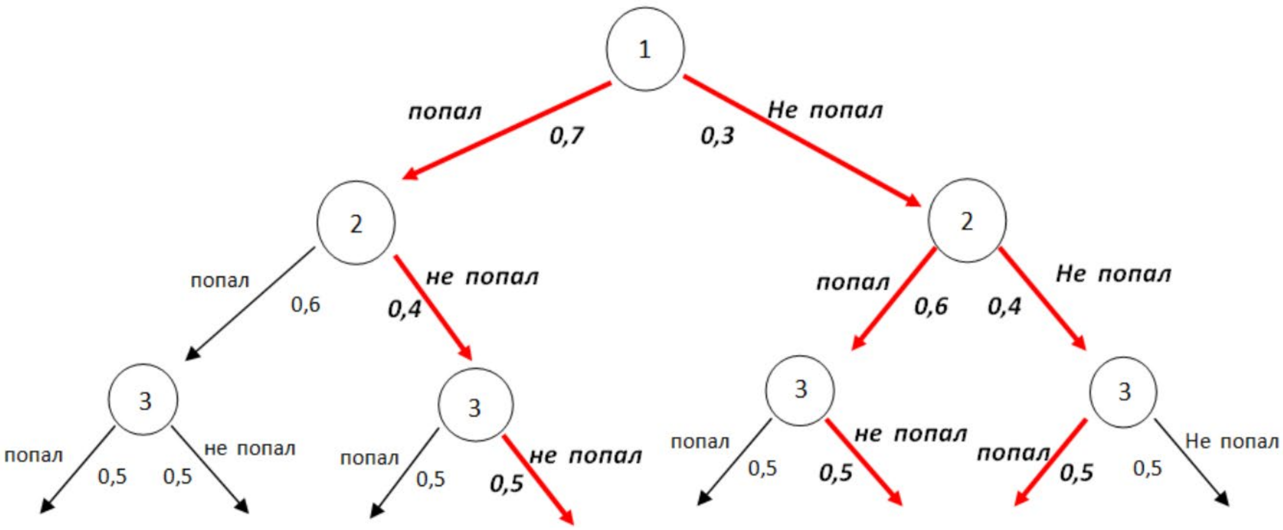

Рис. 3. Дерево вероятностей (граф-схема).
Fig. 3. Probability tree (graph diagram).

3 этап. Переводя на математический язык данную наглядную интерпретацию, мы получим, что полная вероятность указанного в задаче события может быть найдена по формуле:

$P(X)=P(A_1 \times \overline{A_2} \times \overline{A_3})+P(\overline{A_1} \times A_2 \times \overline{A_3})+P(\overline{A_1} \times \overline{A_2} \times A_3)=$

$=P(A_1) \times P(\overline{A_2}) \times P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1}) \times P(A_2) \times P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times P(A_3) =$

$=0{,}7\times0{,}4\times0{,}5+0{,}3\times0{,}6\times0{,}5+0{,}3\times0{,}4\times0{,}5=0{,}14+0{,}09+0{,}06=0{,}29$.

4 этап. Ответ: вероятность ровно одного попадания в мишень при одиночном выстреле каждого из трех спортсменов равна 0,29.

На наш взгляд, граф-схема является более универсальной моделью при работе с такими задачами, поскольку позволяет варьировать количество выстрелов и число стрелков, а также данная модель эффективна при работе с условной вероятностью.

Выводы

Таким образом, использование моделей при обучении решению задач по теории вероятностей не только позволяет проиллюстрировать математические положения самой теории, но и способствует более осознанному применению школьниками теорем и основных понятий теории вероятностей на практике. Кроме того, моделирование служит для учащихся наглядной опорой при поиске пути решения задач по теории вероятностей и может быть применимо к широкому классу задач.

Список источников

1. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность: пособие для общеобразовательных учреждений. М.: Дрофа, 2008. 286 с.
2. Войтенко Т.Ю., Фирер А.В. Визуальные модели учебной информации при обучении теории вероятностей // Современные проблемы науки и образования. 2023. № 4. С. 62.
3. Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7-9 классы: учебник: в 2 ч. Базовый уровень. М.: Просвещение, 2023. Ч. 1. 112 с.
4. Графова О.П. К вопросу о комбинаторных задачах // Педагогический институт им. В.Г. Белинского: традиции и инновации: материалы научной конференции, посвященной 79-летию Педагогического института им. В.Г. Белинского Пензенского государственного университета. Пенза: ПГУ, 2019. С. 60 – 63.
5. Графова О.П. Роль вспомогательных моделей в процессе решения нестандартных задач // Начальная школа. 2024. № 10. С. 35 – 39.
6. Максимова О.В. О математических моделях на примере решения некоторых школьных вероятностных задач // Математика в школе. 2024. № 1. С. 24 – 32.
7. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. М.: Мнемозина, 2004. 112 с.
8. Сдам ГИА / Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. URL: https://oge.sdamgia.ru (дата обращения: 15.06.2025).
9. Сивоха И.А. Применение технологии графического моделирования знаний при решении прикладных задач по теории вероятностей // Дни науки: материалы Национальной научно-технической конференции студентов и курсантов. Калининград, 2022. С. 101 – 105.
10. Яремко Н.Н., Яковлева Ю.А. Методические приемы обучения школьников теории вероятностей // Математическая подготовка в школе и вузе: содержание и технологии: материалы 43-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Сыктывкар, 2024. С. 406 – 410.

References

1. Bunimovich E.A., Bulychev V.A. Fundamentals of Statistics and Probability: A Manual for General Education Institutions. Moscow: Drofa, 2008. 286 p.
2. Voitenko T.Yu., Firer A.V. Visual Models of Educational Information in Teaching Probability Theory. Modern Problems of Science and Education. 2023. No. 4. 62 p.
3. Vysotsky I.R., Yashchenko I.V. Mathematics. Probability and Statistics: Grades 7-9: A Textbook: in 2 Parts. Basic Level. Moscow: Education, 2023. Part 1. 112 p.
4. Grafova O.P. On the Issue of Combinatorial Problems. Pedagogical Institute named after V.G. Belinsky: Traditions and Innovations: Proceedings of the Scientific Conference Dedicated to the 79th Anniversary of the V.G. Belinsky Pedagogical Institute of Penza State University. Penza: PSU, 2019. P. 60 – 63.
5. Grafova O.P. The Role of Auxiliary Models in Solving Non-Standard Problems. Primary School. 2024. No. 10. P. 35 – 39.
6. Maksimova O.V. On Mathematical Models Using the Example of Solving Some School Probability Problems. Mathematics at School. 2024. No. 1. P. 24 – 32.

7. Mordkovich A.G., Semenov P.V. Events. Probabilities. Statistical Data Processing: Additional Sections to the Algebra Course for Grades 7-9. Moscow: Mnemozina, 2004. 112 p.

8. Sdam GIA. Reshu USE. Educational portal for exam preparation. URL: https://oge.sdamgia.ru (date of accessed: 15.06.2025).

9. Sivokha I.A. Application of knowledge graphical modeling technology in solving applied problems in probability theory. Science Days: Proceedings of the National Scientific and Technical Conference of Students and Cadets. Kaliningrad, 2022. P. 101 – 105.

10. Yaremko N.N., Yakovleva Yu.A. Methodological techniques for teaching schoolchildren probability theory. Mathematical training at school and university: content and technologies: Proceedings of the 43rd International Scientific Seminar of Teachers of Mathematics and Computer Science of Universities and Pedagogical Universities. Syktyvkar, 2024. P. 406 – 410.

Информация об авторах

Графова О.П., кандидат педагогических наук, доцент, Пензенский государственный университет, г. Пенза, olga_graf@list.ru