



Научно-исследовательский журнал «Вестник педагогических наук / Bulletin of Pedagogical Sciences»

<https://vpn-journal.ru>

2025, № 6 / 2025, Iss. 6 <https://vpn-journal.ru/archives/category/publications>

Научная статья / Original article

Шифр научной специальности: 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) (педагогические науки)

УДК 372.881.111.1

<sup>1</sup> Веретимус Д.К., <sup>1</sup> Веретимус Н.К.

<sup>1</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

### Методика изложения теоремы о циркуляции на примере плоскопараллельной пластины постоянной толщины

**Аннотация:** в МГТУ им. Н.Э. Баумана в теоретическом курсе физики рассматривается ряд разделов, в том числе электростатика и магнитостатика. Именно в этих разделах изучаются такие способы определения электрических и магнитных полей, которые, при наличии симметрии задачи и используя ее, позволяют максимально просто находить напряженности этих полей в аналитической форме.

Крайне важным является методически правильно пояснить, на чем основаны данные методы [1, 2], не только рассматривая теоретические аспекты, но и на примере конкретных задач необходимо наглядно показать удобство решения непривычными для студента и новыми для него способами.

При изучении электрических полей для определенных задач удобно применять теорему Гаусса. Методика объяснения и степень детализации изложения студентам данной теоремы подробно изложены ранее [3].

В данной статье авторами детально рассматривается методика определения напряженности магнитного поля или его индуктивности при помощи теоремы о циркуляции на примере плоскопараллельной пластины постоянной толщины. Поле определяется как внутри пластины, так и вне ее.

Доступность изложенного материала, его понимание и осмысление пройденного материала обучающимися повышает мотивацию к учебе в выбранном ВУЗе.

Освоение базовых курсов позволяет студентам в дальнейшем лучше ориентироваться в таких прикладных дисциплинах, как теоретическая механика, сопротивление материалов, теория колебаний, электротехника, электроника, оптика, нанотехнология и др.

**Ключевые слова:** физика, электростатика, теорема о циркуляции, контур

**Для цитирования:** Веретимус Д.К., Веретимус Н.К. Методика изложения теоремы о циркуляции на примере плоскопараллельной пластины постоянной толщины // Вестник педагогических наук. 2025. № 6. С. 26 – 32.

Поступила в редакцию: 28 февраля 2025 г.; Одобрена после рецензирования: 7 апреля 2025 г.; Принята к публикации: 19 мая 2025 г.

<sup>1</sup> Veretimus D.K., <sup>1</sup> Veretimus N.K.

<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University

### The methodology of explanation circulation theorem on the example of a plane-parallel plate of constant thickness

**Abstract:** at Bauman Moscow State Technical University, the theoretical physics course covers a number of sections, including electrostatics and magnetostatics. It is in these sections that such methods for determining electric and magnetic fields are studied, which, given the symmetry of the problem and using it, make it possible to find the strengths of these fields in an analytical form as simply as possible.

It is extremely important to explain methodically what these methods are based on, not only considering the theoretical aspects, but also using the example of specific tasks [1, 2], it is necessary to clearly demonstrate the convenience of solving in ways unusual for the student and new to him.

When studying electric fields, it is convenient to apply Gauss' theorem for certain tasks. The methodology of explanation and the degree of detail of the presentation of this theorem to students were described in detail earlier [3]. In this article, the authors consider in detail a method for determining the strength of a magnetic field or its inductance using the circulation theorem using the example of a plane-parallel plate of constant thickness. The field is determined both inside and outside the plate.

The accessibility of the presented material, its understanding and comprehension by students increases motivation to study at the chosen university.

Mastering the basic courses allows students to better navigate in such applied disciplines as theoretical mechanics, resistance of materials, theory of vibrations, electrical engineering, electronics, optics, nanotechnology, etc.

**Keywords:** physics, electrostatics, the circulation theorem, contour

**For citation:** Veretimus D.K., Veretimus N.K. The methodology of explanation circulation theorem on the example of a plane-parallel plate of constant thickness. Bulletin of Pedagogical Sciences. 2025. 6. P. 26 – 32.

The article was submitted: February 28, 2025; Accepted after reviewing: April 7, 2025; Accepted for publication: May 19, 2025.

### Введение

МГТУ им. Н.Э. Баумана является «кузницей» инженерных кадров, владеющих современными технологиями. Для того, чтобы воспитать и обучить современного инженера, необходимо на первых курсах университета существенное внимание уделить фундаментальным наукам в контексте дальнейшего прикладного применения полученных знаний.

Практически первые два курса МГТУ им. Н.Э. Баумана посвящены изучению таких фундаментальных наук, как химия, математический анализ и физика. В школе, как правило, студенты, проходили азы всех этих предметов или части из них. Но, так как дальнейшее обучение по специальности подразумевает определенный уровень базовых знаний, цель фундаментальных дисциплин – дать их на более высоком уровне, необходимом для дальнейшего обучения поступивших в ВУЗ студентов.

Если касаться изучения физики конкретно в МГТУ им. Н.Э. Баумана, то следует отметить, что ее курс отличается от школьного выводами тех уравнений, которые ранее приходилось запоминать, рассматриваются более общие способы изменения материи, а также осваивают те способы определения физических величин, которые существенно облегчают нахождение их аналитических зависимостей. К последним относится теорема о циркуляции. При помощи этой теоремы можно достаточно быстро найти аналитическое выражение напряженностей как электрического, так и магнитного полей.

Следует отметить, что при объяснении теоремы о циркуляции необходимо понимать, что студенты слышат впервые о ней именно в процессе изучения курса физики, а не на математическом анализе, ибо там они ее пройдут позже. В том числе и поэтому у обучающихся возникают проблемы с применением этой теоремы.

Объясняя применение теоремы о циркуляции, целесообразно рассматривать такой пример, который позволяет показать все нюансы работы с данной теоремой. Объяснить, почему выбирается тот или иной контур, показать удобство его использования. Желательно объяснить и то, почему та величина, которая определяется в задаче, является постоянной на данном контуре, что позволяет перейти от интегрирования по замкнутому контуру к умножению определяемой величины на длину или часть длины этого замкнутого контура.

### Материалы и методы исследований

Анализируя степень понимания материала студентами в процессе защиты домашних задач, посвященных данной теме, и во время рубежного контроля делался вывод о степени восприятия изложенной темы. На базе полученных результатов была исследована степень усвояемости студентами материала в зависимости от методики его подачи.

### Результаты и обсуждения

В МГТУ им. Н.Э. Баумана в разделе «Основы электростатики и магнитостатики» курса физики рассматривается теорема о циркуляции [2-4] для различных векторов: вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , векторов напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей.

Излагая теорему о циркуляции вектора напряженности магнитостатического поля, целесообразно начать с ее формулировки: циркуляция вектора напряженности магнитостатического поля по любому замкнутому контуру  $L$  равна сумме токов проводимости  $I$ , охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (1)$$

Это интегральная форма записи теоремы.

Для перехода от интегральной (1) к дифференциальной форме, применим теорему Стокса:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S},$$

а

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{j}$  – вектор поверхностной плотности тока проводимости;  $S$  поверхность, опирающаяся на замкнутый контур  $L$ ,

$$d\vec{S} = dS \vec{n},$$

где  $dS$  – площадь элементарной поверхности,  $\vec{n}$  – единичная нормаль к поверхности в точке выделения элемента.

В прямоугольной декартовой системе координат **ротор** или **вихрь** вектора напряженности  $\vec{H}$  находят из определителя

$$\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}.$$

Стягивая замкнутый контур  $L$  к точке, из (2) получаем, что в любой точке магнитостатического поля

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (3)$$

Магнитостатическое поле – неконсервативное, вихревое.

Теперь рассмотрим применение этой теоремы. Как уже отмечалось ранее, необходимо рассматривать теорему о циркуляции на примерах, позволяющих увидеть все тонкости ее применения. Одним из таких примеров является задача 2.242 из задачника И.Е. Иродова [4, 5]. Ее условие: «Однородный ток плотности  $\vec{j}$  течет внутри неограниченной пластины толщины  $2d$  параллельно ее поверхности (рис. 1). Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния  $z$  от средней плоскости пластины.»

Поскольку в условии задачи предлагают пренебречь влиянием вещества пластины, считаем диэлектрическую проницаемость вещества  $\varepsilon = 1$  и магнитную проницаемость вещества  $\mu = 1$ .

Задача симметрична и для определения характеристик магнитного поля в ней можно использовать интегральную теорему о циркуляции (1). При решении задачи целесообразно применять теорему о циркуляции именно для вектора напряженности магнитостатического поля  $\vec{H}$ , в которой в правой части уравнения (1) учитываются только токи проводимости, что при наличии магнетика ( $\mu \neq 1$ ) весьма существенно.

Перед тем, как решать эту задачу при помощи теоремы о циркуляции, необходимо выяснить, как будут направлены векторы напряженности магнитного поля в зависимости от положения точки наблюдения внутри пластины и вне ее.

Сначала определим направления векторов магнитного поля внутри пластины. Из рис. 1 ясно, что элементарный вектор напряженности магнитного поля  $d\vec{H}_{dl}$  от одного прямого бесконечного тока, силой тока  $dI_i = j dS$  в точке наблюдения  $N$  будет направлен по касательной к силовой линии – окружности и не будет параллелен оси  $Ox$ . При этом, если рассмотреть векторы напряженности от двух прямых бесконеч-

ных токов, симметричных относительно оси  $Oz$ , например  $d\vec{H}_{dI_1}$  и  $d\vec{H}_{dI_1'}$  или  $d\vec{H}_{dI_2}$  и  $d\vec{H}_{dI_2'}$ , спроецировав их на оси  $Ox$  и  $Oz$ , получим, что проекции на ось  $Oz$  при суммировании будут равны нулю ( $H_z = \sum_i (dH_{dI_i})_z = 0$ ), а проекции на ось  $Ox$  удвоятся. То есть суммарный вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  от всех элементарных токов параллелен оси  $Ox$ . Причем все элементарные токи, у которых координата  $z$  будет меньше, чем у точки наблюдения  $N$ , будут направлены слева направо, а те токи, у которых координата  $z$  больше, чем у точки  $N$  – справа налево.

Таким образом, если координата  $z_N$  точки наблюдения  $N$  находится в диапазоне  $0 < z_N \leq d$ , то вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H} \uparrow \uparrow Ox$ ; в диапазоне  $0 > z_N \geq -d$  вектор напряженности  $\vec{H} \uparrow \downarrow Ox$ , а при  $z_N = 0$   $\vec{H} = 0$ .

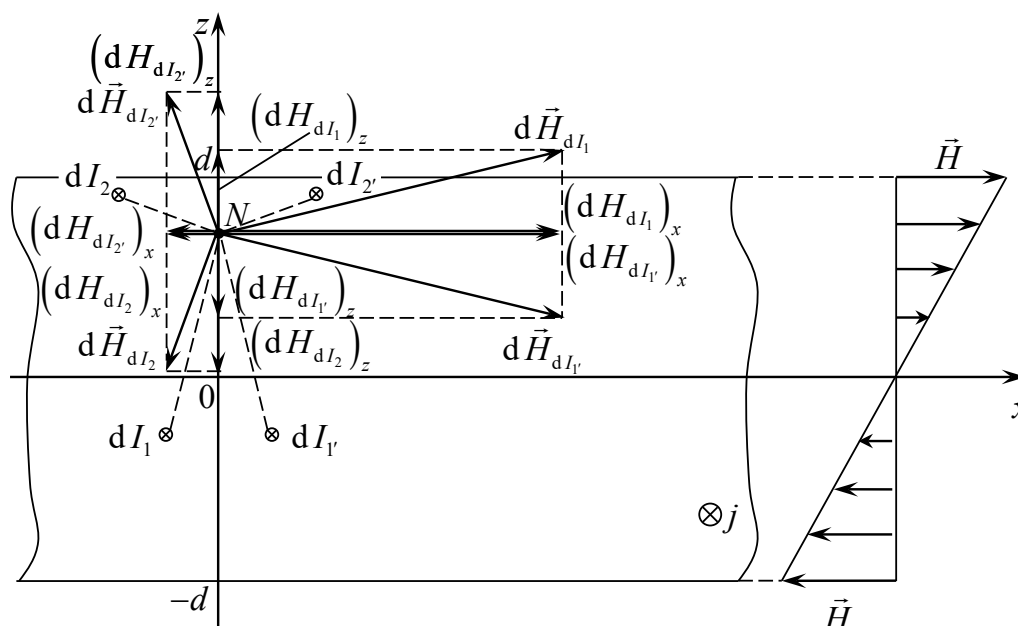


Рис. 1. Определение направления вектора напряженности магнитного поля по толщине пластины.

Fig. 1. Determination of the direction of the magnetic field strength vector along the thickness of the plate.

Так как пластина бесконечна, то ось ее симметрии можно располагать в любой точке оси  $Ox$ , а значит, модуль вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  будет зависеть только от координаты  $z_N$  точки наблюдения  $N$ , то есть при  $z_N = \text{const}$  напряженность поля  $\vec{H} = \text{const}$ .

Теперь выберем точки наблюдения – точку внутри пластины и вне пластины (рис. 2). Введем координатную ось  $z$ , направленную вертикально вверх, перпендикулярную средней линии пластины, начало координаты  $z$  – на средней линии. Проведем вспомогательный замкнутый контур, прямоугольник ширины  $2a$  и высоты  $2z$ , через точку наблюдения. Контур проводим так, что его стороны соответственно параллельны поверхности пластины и перпендикулярны средней линии. Контур симметричен относительно средней линии пластины и относительно оси  $z$ . Направление обхода по контуру совпадает с направлением силовых линий  $\vec{H}$ . Таким образом, горизонтальные участки вспомогательного контура параллельны силовым линиям магнитного поля  $\vec{H}$ .

Рассмотрим точку внутри пластины ( $0 < |z| < d$ ). Для нее согласно теореме о циркуляции (1):

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I.$$

Воспользуемся линейностью операции интегрирования и циркуляцию по замкнутому кусочно-линейному контуру представим, как сумму циркуляций по линейным отрезкам. Так как вспомогательный контур – прямоугольник, является кусочно-линейным, то разделяем его на четыре линейных участка. Тогда левая часть теоремы (1) будет выглядеть как

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{l_{12}} \vec{H} d\vec{l}_{12} + \int_{l_{23}} \vec{H} d\vec{l}_{23} + \int_{l_{34}} \vec{H} d\vec{l}_{34} + \int_{l_{41}} \vec{H} d\vec{l}_{41}. \quad (4)$$

Следует напомнить обучающимся, что скалярное произведение

$$(\vec{H} d\vec{l}) = H \cdot dl \cdot \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}}),$$

и выражение (4) примет вид

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{H} d\vec{l} = & \int_{l_{12}} H dl_{12} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{12}}) + \int_{l_{23}} H dl_{23} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{23}}) + \\ & + \int_{l_{34}} H dl_{34} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{34}}) + \int_{l_{41}} H dl_{41} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{41}}). \end{aligned} \quad (5)$$

Необходимо показать обучающимся, что  $\cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{23}}) = \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{41}}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  и подынтегральные выражения их равны нулю, т.е.  $\int_{l_{23}} H dl_{23} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{23}}) = 0$ ,  $\int_{l_{41}} H dl_{41} \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{41}}) = 0$ . Тогда выражение (5), с учетом  $\cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{12}}) = \cos(\hat{\vec{H}d\vec{l}_{31}}) = \cos(0) = 1$ , примет вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_{l_{12}} H dl_{12} + \int_{l_{34}} H dl_{34}.$$

Отметим, что модуль напряженности магнитного поля  $H$  одинаков на горизонтальных участках прямоугольника  $l_{12} = 2a$  и  $l_{34} = 2a$ . Так как  $H = \text{const}$ , запишем

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \int_{l_{12}} dl_{12} + H \int_{l_{34}} dl_{34}$$

или после преобразований запишем теорему о циркуляции (1) как

$$2H(z) \cdot 2a = j \cdot 2a \cdot 2z,$$

$$H(z) = jz.$$

Для точки вне проводника ( $d < |z|$ )

$$2H(z) \cdot 2a = j \cdot 2a \cdot 2d,$$

$$H(z) = jd.$$

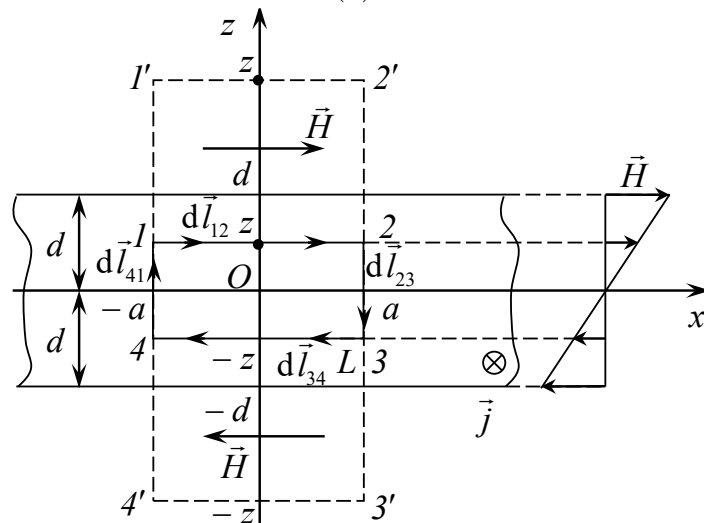


Рис. 2. Неограниченная пластина с током; построение вспомогательных контуров.

Fig. 2. The endless plate with current; building auxiliary contours.

С учетом того, что магнитная проницаемость среды  $\mu = 1$ , вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}.$$

Напряженность магнитного поля этого тока является функцией расстояния  $z$  от средней плоскости пластины (рис. 3).

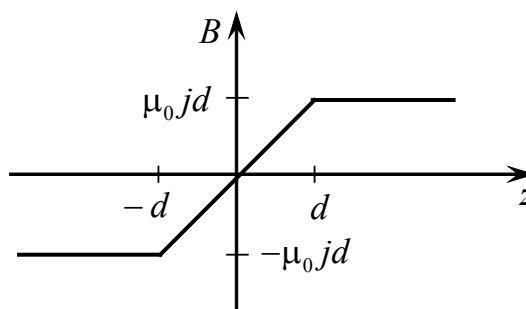


Рис. 3. Напряженность магнитного поля этого тока является функцией расстояния  $z$  от средней плоскости пластины.

Fig. 3. The magnetic field strength of this current is a function of the distance  $z$  from the median plane of the plate.

### Выводы

1. Необходимо научить студентов обоснованно выбирать вид вспомогательного замкнутого контура при решении задач на применение теоремы о циркуляции.
2. В качестве примера применения теоремы о циркуляции желательно выбрать задачу, в которой для определения результирующего вектора напряженности в точке наблюдения необходимо использовать принцип суперпозиции напряженностей с учетом влияния симметрии рассматриваемой задачи.
3. Если вспомогательный замкнутый контур является кусочно-гладким и состоит из нескольких отрезков, циркуляцию вектора напряженности магнитостатического поля по такому замкнутому контуру целесообразно представить, как сумму циркуляций, состоящих из стольких слагаемых, на сколько гладких частей распадается исходный контур.
4. Понимание и осознанное применение студентами теоремы о циркуляции дает наилучшие результаты, что подтверждается контрольными мероприятиями.

### Список источников

1. Купавцев А.В. Субъективное обучение – глубинный постулат современной концепции высшего (университетского) образования // Альма матер (Вестник высшей школы). 2024. № 2. С. 76 – 84.
2. Аветисян Т.В., Львович Я.Е., Преображенский А.П. О проблемах подготовки квалифицированных кадров // Вестник педагогических наук. 2023. № 2. С. 97 – 104.
3. Веретимус Д.К., Веретимус Н.К. Методика объяснения и степень детализации при изложении студентам теоремы Гаусса // Вестник педагогических наук. 2025. № 1. С. 34 – 40.
4. Фисунова Л.В., Костырева Е.А. Формирование навыков пространственного мышления профессиональной деятельности агроинженера // Вестник педагогических наук. 2023. № 3. С. 51 – 57.
5. Васюков С.Н. Критерии и уровни сформированности компонентов учебно-профессиональной мотивации студентов // Вестник педагогических наук. 2024. № 3. С. 148 – 156.
6. Трушкина Е.С. Психологические факторы учебной успешности студента университета // Вестник педагогических наук. 2024. № 3. С. 137 – 142.
7. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.: Лаборатория знаний, 2023. 319 с.
8. Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле: учебное пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. 424 с.
9. Веретимус Д.К., Веретимус Н.К. Основы электростатики и магнитостатики. Модуль 3: учебное пособие / под ред. А.Н. Морозова. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021. 169 с. URL: <https://bmstu.press/catalog/item/6864/>.
10. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. 431 с.



### References

1. Kupavtsev A.V. Subjective learning – a deep postulate of the modern concept of higher (university) education. Alma mater (Bulletin of the higher School). 2024. No. 2. P. 76 – 84.
2. Avetisyan T.V., Lvovich Ya.E., Preobrazhensky A.P. On the problems of training qualified personnel. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 2. P. 97 – 104.
3. Veretimus D.K., Veretimus N.K. The methodology of explanation and the degree of detail in presenting the Gauss theorem to students. Bulletin of Pedagogical Sciences. 2025. 1. P. 34 – 40.
4. Fisunova L.V., Kostyreva E.A. Formation of spatial thinking skills of professional activity of an agroengineer. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 3. P. 51 – 57.
5. Vasyukov S.N. Criteria and levels of formation of components of educational and professional motivation of students. Bulletin of pedagogical sciences. 2024. No. 3. P. 148 – 156.
6. Trushkina E.S. Psychological factors of academic success of a university student. Bulletin of Pedagogical Sciences. 2024. No. 3. P. 137 – 142.
7. Irodov I.E. Electromagnetism. The basic laws. Moscow: Laboratory of Knowledge, 2023. 319 p.
8. Martinson L.K., Morozov A.N., Smirnov E.V. Electromagnetic field. Textbook. M.: Publishing House of the Bauman Moscow State Technical University, 2013. 423 p.
9. Veretimus D.K., Veretimus N.K. Fundamentals of electrostatics and magnetostatics. Module 3: study guide. Edited by A.N. Morozov. Moscow: Publishing House of Bauman Moscow State Technical University, 2021. 169 p. The publication is available in electronic form at: <https://bmstu.press/catalog/item/6864//>
10. Irodov I.E. Problems in general physics. Moscow: BINOM. Laboratory of Knowledge, 2017. 4. 431 p.

### Информация об авторах

**Веретимус Д.К.**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, [dkveretimus@bmstu.ru](mailto:dkveretimus@bmstu.ru)

**Веретимус Н.К.**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, [veretimusnk@bmstu.ru](mailto:veretimusnk@bmstu.ru)

© Веретимус Д.К., Веретимус Н.К., 2025