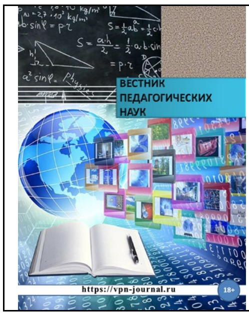

Научно-исследовательский журнал «**Вестник педагогических наук / Bulletin of Pedagogical Sciences**»
https://vpn-journal.ru
2025, № 1 / 2025, Iss. 1 https://vpn-journal.ru/archives/category/publications
Научная статья / Original article
Шифр научной специальности: 5.8.2. Теория и методика обучения и воспитания (педагогические науки)
УДК 372.881.111.1
DOI: 10.62257/2687-1661-2025-1-101-107

[1] Веретимус Д.К., [1] Веретимус Н.К.
[1] Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Свободные колебания и визуализация решений их дифференциальных уравнений посредством эксперимента

Аннотация: в статье на примере задачи о свободных незатухающих колебаниях механической системы показано, как научить студента [1], еще не изучавшего в курсе высшей математике решения дифференциальных уравнений, составить дифференциальное уравнение таких колебаний и найти его решение. Такая возможность опирается на эксперимент [2], мысленный или организованный буквально подручными средствами, в результате которого легко установить характер зависимости изменяемой величины от времени, а затем, при наличии у студентов твердых знаний в объеме школьного курса математики, составить дифференциальное уравнение таких колебаний. Фактически такой эксперимент [3] визуализирует решение дифференциального уравнения данной задачи, что облегчает восприятие материала и минимизирует зависимость восприятия студентом данного раздела физики от уровня его знаний по высшей математике.
Аналогичным образом можно прогнозировать вид зависимости переменной от времени при свободных затухающих колебаниях механической системы и получить дифференциальное уравнение, описывающее такие колебания.
Понимание студентами основ теории механических колебаний в курсе общей физики поможет им в дальнейшим легче усваивать материал при изучении специальных курсов, посвященных теории колебаний [4].
Ключевые слова: гармонические колебания, дифференциальное уравнение, решение, физика, эксперимент, студенты

Для цитирования: Веретимус Д.К., Веретимус Н.К. Свободные колебания и визуализация решений их дифференциальных уравнений посредством эксперимента // Вестник педагогических наук. 2025. № 1. С. 101 – 107. DOI: 10.62257/2687-1661-2025-1-101-107

Поступила в редакцию: 23 октября 2024 г.; Одобрена после рецензирования: 10 декабря 2024 г.; Принята к публикации: 10 января 2025 г.

[1] Veretimus D.K., [1] Veretimus N.K.
[1] Bauman Moscow State Technical University

Free oscillations and visualization of solutions of their differential equations by experiment

Abstract: using the example of the problem of free undamped oscillations of a mechanical system, the article shows how to teach a student [1] who has not studied solutions of differential equations in higher mathematics yet, to make a differential equation of such oscillations and find its solution. This possibility is based on an experiment [2], thought or organized literally by improvised means, as a result of which it is easy to establish the nature of the dependence of the variable on time, and then, if students have solid knowledge in the volume of a school mathematics course, to make a differential equation of such fluctuations. In fact, such an experiment [3] visualizes the solution of the differential equation of this problem, which facilitates the perception of the material and minimizes the dependence of the student's perception of this section of physics on the level of his knowledge of higher mathematics.

Similarly, it is possible to predict the type of dependence of a variable on time for free damping vibrations of a mechanical system and obtain a differential equation describing such fluctuations.
Students' understanding of the basics of the theory of mechanical vibrations in the course of general physics will help them to further assimilate the material easier when studying special courses on the theory of vibrations [4].
Keywords: harmonic oscillations, differential equation, solution, physics, experiment, students

For citation: Veretimus D.K., Veretimus N.K. Free oscillations and visualization of solutions of their differential equations by experiment. Bulletin of Pedagogical Sciences. 2025. 1. P. 101 – 107. DOI: 10.62257/2687-1661-2025-1-101-107

The article was submitted: October 23, 2024; Accepted after reviewing: December 10, 2024; Accepted for publication: January 10, 2025.

Введение

В современных условиях становится жизненно необходимой подготовка грамотных инженерных кадров для промышленности, способных создавать новую современную технику различного назначения [5]. Это задача технических ВУЗов, в том числе и Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана), который по праву считается ведущим техническим ВУЗом страны, а его авторитет признается в мире.

Для того, чтобы инженер, которого выпускает ВУЗ, был грамотным, он должен освоить специальные дисциплины, технические дисциплины, на уровне понимания. И только это позволит ему создавать новую, работоспособную технику. Для того, чтобы в результате обучения реализовывалось не запоминание, а понимание общетехнических и специальных технических дисциплин, необходимо ясно представлять себе происходящие в них процессы, понимать физику каждого из этих процессов, каким образом и исходя из каких законов получаются те формулы, которые используют специальные и общетехнические дисциплины [6, 7].

Например, очень многие используемые в сопротивлении материалов соотношения и формулы выводятся на основе знаний, изложенных в курсе общей физики. И только освоив этот курс и понимая, на базе каких законов и при каких допущениях получены данные зависимости, в каких пределах они работают, можно пытаться и развить дальше расчетные методы и предложить какие-то уточнения и поискать, соответственно, уже в другой области и при других допущениях адекватное решение.

Поэтому знание физики для инженеров, будущих инженеров, специалистов технических дисциплин является базовым и крайне актуальным.

Материалы и методы исследований

Материалом исследования являются результаты преподавания курса общей физики студентам как технических, так и гуманитарных специальностей, а также абитуриентам-иностранцам МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Методы исследований – практический опыт преподавания, методы наблюдения, обобщения, анализа и сравнения.

Результаты и обсуждения

В связи с тем, что физику проходят обучающиеся на первом и втором курсах МГТУ им. Н.Э. Баумана, в курсе общей физики подчас задействованы знания из высшей математики, которые к моменту прохождения материала по физике студенты в курсе высшей математики еще не получили.

Так на втором семестре при изучении основ теории механических колебаний и, в частности, гармонических, свободных незатухающих колебаний необходимо уметь составить дифференциальное уравнение этих колебаний и получить его решение [8-10].

В курсе высшей математики в нашем ВУЗе решение дифференциальных уравнений студенты первого курса, второго семестра еще не изучали и экзамен по этому разделу не сдавали. Тем не менее, преподавателю необходимо таким образом изложить теорию механических колебаний, найти такой способ подачи материала, чтобы эффективность восприятия студентом «физического» материала минимально зависела от уровня его знаний по высшей математике. В этом случае опорой, базой, служат остаточные знания, полученные студентом в средней школе.

Впрочем, если даже некоторым специальностям и успевают преподать соответствующий раздел высшей математики, то, если студент не усвоил или не очень хорошо усвоил высшую математику, тем не менее он должен иметь возможность освоить курс физики.

Постулативные знания, основанные исключительно на запоминании, имеют право на существование, но они соответствуют минимальному уровню усвоения изучаемого материала. Они не позволяют обучить думающего, творческого специалиста, поэтому необходимо представить материал таким образом, чтобы даже без знания раздела, связанного с дифференциальными уравнениями, он был понятен и при этом не требовал постоянного запоминания. И вот, на примере гармонических колебаний в этой статье рассмотрим такой способ объяснения.

Рассмотрим маятник, который совершает малые свободные колебания в среде без затухания. Таким образом, это гармонические свободные незатухающие колебания. Конечно, в окружающем нас реальном мире всегда существует сопротивление окружающей среды и затухание свободных колебаний присутствует всегда. Однако даже на первой лабораторной работе М1 в нашем ВУЗе студенты, работая с маятником, аналогом математического, наблюдают на некотором промежутке времени его почти гармонические, свободные, приближенные к незатухающим колебания. Эксперимент организован следующим образом: на длинном легком подвесе (на нерастяжимой нити) закреплен тяжелый металлический шарик небольшого диаметра, его отклоняют на небольшой угол порядка десяти градусов и отпускают, наблюдая его свободные колебания в воздухе. И на протяжении 50-60 колебаний их затухание не заметно, амплитуда колебаний практически не уменьшается, поэтому на этом интервале времени можно считать наблюдаемые свободные колебания незатухающими, гармоническими.

Как воссоздать закон, по которому изменяется во времени координата этого маятника относительно положения устойчивого равновесия; как составить описывающее движение маятника дифференциальное уравнение? Как, установив этот закон, записать решение этого уравнения, не зная способов решения дифференциальных уравнений? Покажем это на примере эксперимента, созданного подручными средствами, или мысленного эксперимента.

Для того, чтобы записать дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний, рассмотрим движение груза на легком подвесе (рис. 1). Для визуализации этого достаточно взять, например, любой женский кулон (он будет грузом) с цепочкой (подвес), это будет наша экспериментальная установка – маятник.

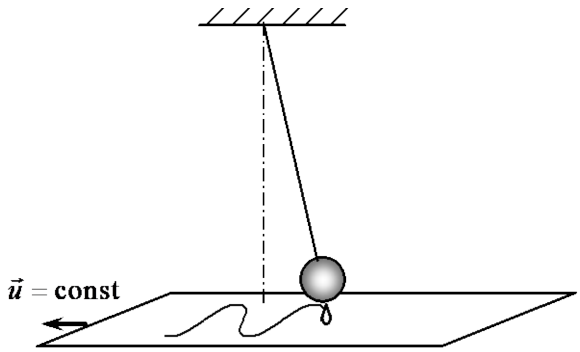

Рис. 1. Груз на легком подвесе; бумага под ним движется с постоянной скоростью $\vec{u} = \text{const}$.
Fig. 1. A load on a light thread; the paper under it moves at a constant speed $\vec{u} = \text{const}$.

Если в массу встроить самописец, на покоящейся бумаге появится прямая линия. Однако, если бумага под маятником будет двигаться с постоянной скоростью $\left(\vec{u} = \text{const}\right)$, моделируя равномерное течение времени, самописец начертит развертку по времени – кривую, которую описывает функция синуса или косинуса (рис. 2).

Как известно, области значений косинуса и синуса лежат в пределах от –1 до 1. По графику движения груза, не зная его изначального положения, невозможно сказать, какая именно гармоническая функция описывает движение в данном случае. Пусть это будет косинус. Перед ним должен стоять коэффициент, который характеризует максимальное отклонение этого груза от положения устойчивого равновесия. Этим коэффициентом является A – амплитуда колебаний. Положение груза изменяется с течением времени, поэтому под косинусом должно находиться время t, которое измеряется в секундах. Однако, стоящая под косинусом величина должна иметь размерность градуса или радиана, или рада. Для этого время t необходимо умножить на величину, с размерностью $\text{рад}/\text{с}$. Такая величина – ω_0 – круговая, или циклическая, частота свободных колебаний. Кроме того, эта частота связана с периодом T выражением $\omega_0 = 2\pi/T$; ω_0 – эта та величина, значение которой влияет на T.

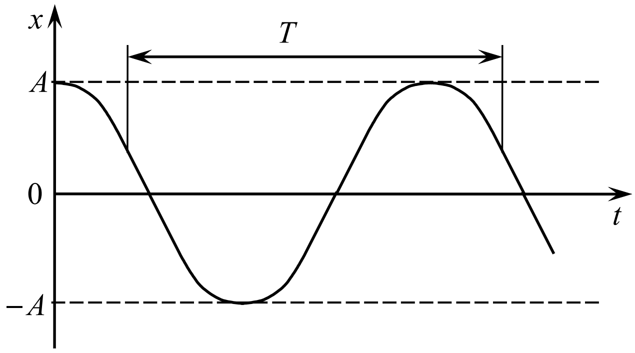

Рис. 2. Графический вид движения груза при свободных незатухающих колебаниях.
Fig. 2. Graphical view of the movement of the load with free undamped oscillations.

Для того, чтобы удовлетворять различным начальным условиям необходимо иметь возможность переносить начало координат (передвигать ось x вдоль оси t). Для этого под косинус вводим корректирующий угол α – начальную фаза. Именно он сможет при определенных начальных условиях перевести функцию косинуса в синус.

Итак, путем рассуждений получено уравнение

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right). \tag{1}$$

Продифференцируем выражение (1) по времени и получим скорость

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \alpha\right)$$

и ускорение

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \alpha\right), \tag{2}$$

груза при движении.

Следует сконцентрировать внимание студентов на том, что при перегруппировке сомножителей в (2)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \underbrace{A\cos\left(\omega_0 t + \alpha\right)}_{x}$$

выделяется та часть выражения, которая соответствует формуле (1). Тогда

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Теперь можно записать дифференциальное уравнение свободных незатухающих (гармонических) колебаний:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

– это однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Очевидно, что его общее решение имеет вид (1), поскольку уравнение (3) получено в результате дифференцирования именно этого выражения.

Теперь рассмотрим свободные затухающие колебания, которые происходят с коэффициентом затухания β. Интуитивно понятно, что в процессе затухания колебаний вид графика зависимости перемещения груза x от времени t будет принципиально таким, каким он показан на рис. 3, а описать эту функцию можно аналогично выражению (1):

$$x = A\left(t\right)\cos\left(\omega t + \alpha\right), \tag{4}$$

где $A\left(t\right)$ – уменьшающаяся с течением времени амплитуда, ω – циклическая частота затухающих колебаний.

Следует сконцентрировать внимание студентов на том, что лучше всего описывает затухание амплитуды экспоненциально убывающая функция (см. рис. 3, пунктирные линии), зависящая от времени t и коэффициента затухания β, учитывающего сопротивление среды.

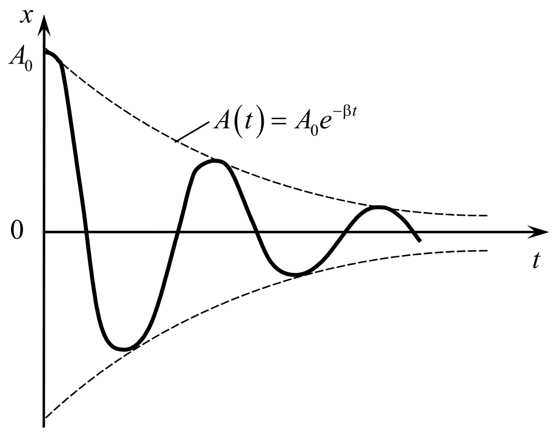

Рис. 3. График перемещения груза при свободных затухающих колебаниях.
Fig. 3. Graph of cargo movement with free damped oscillations.

На эту функцию умножается амплитуда в начальный момент времени A_0. Тогда зависимость амплитуды от времени будет выглядеть следующим образом:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{5}$$

При записи выражения (5) учитывалось, что в начальный момент времени $A(0) = A_0$, а при коэффициенте затухания $\beta = 0$, что соответствует незатухающим колебаниям, получаем постоянную амплитуду $A(t) = A_0 = \mathrm{const}$.

Тогда решение уравнения (4) с учетом равенства (5) примет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{6}$$

Как и в случае незатухающих колебаний, продифференцируем выражение (6) по времени и получим скорость

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = -\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) \tag{7}$$

и ускорение груза

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} = -\beta(-\beta) A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + \beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) -$$
$$-\omega(-\beta) A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

или, после перегруппировки,

$$\ddot{x} = -\beta \underbrace{\left[-\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)\right]}_{\dot{x}} +$$
$$+\beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha).$$

Тогда, с учетом выражения для скорости (7),

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x} + \beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \tag{8}$$

Для того, чтобы получить еще одно слагаемое $\beta\dot{x}$, ко второму слагаемому прибавим $\beta A_0 \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$, а для неизменности выражения (8), вычтем его:

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x} + \beta\omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) + \beta A_0 \beta e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) -$$
$$-\omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) - \beta^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha),$$

тогда после преобразований

$$\ddot{x} = -\beta\dot{x} + \beta \underbrace{\left[\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha)\right]}_{-\dot{x}} -$$
$$-(\omega^2 + \beta^2) \underbrace{A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)}_{x}$$

и с учетом выражений (6) и (7) запишем

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \left(\omega^2 + \beta^2\right)x .$$

То есть для свободных затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \left(\omega^2 + \beta^2\right)x = 0 . \qquad (9)$$

В частном случае, при $\beta = 0$, происходят свободные незатухающие колебания, которые описывает дифференциальное уравнение (3). Подставим $\beta = 0$ в уравнение (9):

$$\ddot{x} + \left(\omega^2 + \beta^2\right)x = 0 . \qquad (10)$$

Сопоставив уравнения (3) и (10) получим, что $\omega_0^2 = \omega^2 + \beta^2$, тогда дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний примет вид:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \qquad (11)$$

где циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} .$$

Еще раз следует отметить, что как для незатухающих, так и для затухающих колебаний одинаков ход рассуждений, позволяющий записать решение дифференциального уравнения. Получение самих дифференциальных уравнений путем нахождения второй производной от этих решений по времени и вычленения известных компонент – скорости и координаты – практически идентично.

Выводы

1. Наглядное представление зависимости координаты груза от времени сводит поиск решения дифференциального уравнения его движения к корректному математическому описанию траектории движения, полученной в результате эксперимента, реального или мысленного.
2. Идентичность алгоритмов получения дифференциальных уравнений свободных незатухающих и свободных затухающих колебаний позволяет существенно сократить объем запоминаемого студентом материала, что упрощает усвоение материала и увеличивает объем остаточных знаний обучаемого по этому разделу.
3. Сведение в частном случае уравнения свободных затухающих колебаний к свободным незатухающим позволяет проверить и подтвердить работоспособность и адекватность описания колебательных процессов полученными уравнениями.
4. Сопоставление полученных дифференциальных уравнений свободных незатухающих и свободных затухающих колебаний механической системы при отсутствии сопротивления среды (а значит и нулевом коэффициенте затухания), позволяет получить связь циклических частот затухающих и собственных незатухающих колебаний системы с учетом коэффициента затухания.
5. Успешное усвоение учебного материала, связанного с механическими колебаниями, существенно упрощает последующее изучение, например, электромагнитного колебательного контура, поскольку вид дифференциальных уравнений колебаний и форма их решений будут аналогичны рассмотренным в разделе «Механические колебания».

Список источников

1. Немых О.А., Паладян К.А., Шермадина Н.А. Ситуационные задачи как средство формирования естественнонаучной грамотности обучающихся при изучении физики в основной школе // Вестник педагогических наук. 2023. № 8. С. 55 – 63.
2. Мордвинцева И.С. Эксперимент как фактор мотивации в образовательном пространстве вуза // Вестник педагогических наук. 2023. № 7. С. 58 – 61.
3. Еферова А.Р., Герасимова О.Ю., Сазонова К.И., Набокина М.Е., Федорцова С.С. Педагогическая роль и влияние педагогического дизайна на образовательный процесс // Вестник педагогических наук. 2023. № 7. С. 31 – 36.
4. Трушкина Е.С. Психологические факторы учебной успешности студента университета // Вестник педагогических наук. 2024. № 3. С. 137 – 142.
5. Сергеева И.В., Гулина Е.В., Шевченко Е.Н., Пономарева А.Л., Даулетов М.А. Разработка инновационных подходов к преподаванию комплекса естественнонаучных дисциплин для направления 05.03.06 Экология и природопользование // Вестник педагогических наук. 2023. № 1. С. 187 – 191.
6. Сабирова Ф.М., Тубылова М.С. Особенности достижения метапредметных результатов при обучении физике в условиях реализации ФГОС СПО // Вестник педагогических наук. 2023. № 5. С. 141 – 145.

7. Купавцев А.В. Субъективное обучение – глубинный постулат современной концепции высшего (университетского) образования // Альма матер (Вестник высшей школы). 2024. № 2. С. 76 – 84.
8. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2023. 309 с.
9. Савельев И.В. Курс общей физики. Механика. СПб.: Лань, 2022. 340 с.
10. Веретимус Д.К., Веретимус Н.К. Физические основы механики. Колебания и волны. Элементы специальной теории относительности. Модуль 1: учебное пособие / под ред. А.Н. Морозова. 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2022 163 с. https://bmstu.press/catalog/item/7765/.

References

1. Nemykh O.A., Paladyan K.A., Shermadina N.A. Situational tasks as a means of forming students' natural science literacy when studying physics in basic school. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 8. P. 55 – 63.
2. Mordvintseva I.S. Experiment as a motivation factor in the educational space of a university. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 7. P. 58 – 61.
3. Eferova A.R., Gerasimova O.Yu., Sazonova K.I., Nabokina M.E., Fedortsova S.S. Pedagogical role and influence of pedagogical design on the educational process. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 7. P. 31 – 36.
4. Trushkina E.S. Psychological factors of academic success of a university student. Bulletin of pedagogical sciences. 2024. No. 3. P. 137 – 142.
5. Sergeeva I.V., Gulina E.V., Shevchenko E.N., Ponomareva A.L., Dauletov M.A. Development of innovative approaches to teaching a set of natural science disciplines for the direction 05.03.06 Ecology and nature management. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 1. P. 187 – 191.
6. Sabirova F.M., Tubylova M.S. Features of achieving meta-subject results in teaching physics in the context of the implementation of the Federal State Educational Standard of Secondary Vocational Education. Bulletin of pedagogical sciences. 2023. No. 5. P. 141 – 145.
7. Kupavtsev A.V. Subjective learning is a deep postulate of the modern concept of higher (university) education. Alma mater (Higher School Bulletin). 2024. No. 2. P. 76 – 84.
8. Irodov I.E. Mechanics. Basic laws. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory, 2023. 309 p.
9. Saveliev I.V. General physics course. Mechanics. St. Petersburg: Lan, 2022. 340 p.
10. Veretimus D.K., Veretimus N.K. Physical foundations of mechanics. Oscillations and waves. Elements of the special theory of relativity. Module 1: study guide. Edited by A.N. Morozov. 2nd ed., corrected. and add. Moscow: Publishing house of Moscow State Technical University named after N.E. Bauman. 2022 163 p. https://bmstu.press/catalog/item/7765/.

Информация об авторах

Веретимус Д.К., кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, dkveretimus@bmstu.ru

Веретимус Н.К., кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры физики, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, veretimusnk@bmstu.ru