

ISSN 1810-0198

ВЕСТНИК ТАМБОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия: Естественные и технические науки

Том 21, вып. 2, 2016



ТАМБОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Г.Р. ДЕРЖАВИНА

ОСНОВАН В 1994 ГОДУ

ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический
и практический журнал

Серия:
Естественные и технические науки

Том 21, вып. 2, 2016

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 6 раз в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования
основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени
кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	356
МАТЕРИАЛЫ IV международного научного семинара «Функционально-дифференциальные уравнения и включения и их приложения в математическом моделировании» с элементами школы для молодых ученых, г. Тамбов, 4–10 июля 2016 г.	
<i>М.В. Борзова, Т.В. Жуковская, Е.С. Жуковский</i>	О накрывании многозначных отображений, действующих в произведениях метрических пространств 361
<i>Т.В. Жуковская, Е.С. Жуковский</i>	Об антитонных возмущениях накрывающих отображений упорядоченных пространств 369
<i>Е.С. Жуковский</i>	О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой 373
<i>Е.С. Жуковский, Е.А. Панасенко</i>	Пример векторнозначной метрики в пространстве непустых замкнутых подмножеств метрического пространства 378
<i>М.Д. Ковалев</i>	Шарнирные конструкции и квадратичные отображения 384
<i>С.В. Корнев, Н.В. Лой</i>	Метод многолистных направляющих функций в задаче о бифуркации решений дифференциальных уравнений 390
<i>И.В. Кривопазова</i>	Разработка системы критериального оценивания учебных достижений школьников 402
<i>Е.В. Рыжкова, С.М. Ситник</i>	Модифицированное дискретное преобразование Фурье, основанное на перестановках группы комплексных корней из единицы 406
<i>Х.М.Т. Тахир</i>	О решении некоторых функционально-дифференциальных уравнений 415
<i>В.С. Трещев</i>	О задаче Коши для систем неявных дифференциальных уравнений 430
<i>В.М. Тюрин</i>	О некоторых линейных дифференциальных операторах в пространствах типа Бесова–Соболева 435
<i>О.В. Филиппова</i>	Краевая задача для одного вида импульсных функционально-дифференциальных включений 439
<i>Э.Л. Шишкина</i>	Интегральное представление ядра оператора, аппроксимирующего обратный оператор для гиперболического B -потенциала Рисса 448

<i>А.М. Шмырин, Н.М. Мишачев, А.С. Косарева</i>	Кластеризация окрестной структуры	457
<i>А.М. Шмырин, А.Г. Ярцев, В.В. Правильникова</i>	Трилинейная окрестностная модель процесса формирования температуры смотки горячекатаной полосы	463
МАТЕМАТИКА		
<i>А.А. Арзамасцев, Д.В. Залевский</i>	Исследование неявных разностных схем математических моделей распределенных биологических объектов	471
<i>О.Р. Балабан, А.В. Иванов</i>	Разностная схема численного анализа динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях	479
<i>И.В. Приходько, А.В. Иванов</i>	Математическая модель волновых процессов динамики многофазных сред в гидросети	487
ФИЗИКА		
<i>А.О. Сельский, Д.В. Лопатин</i>	Влияние пространственной локализации возмущения концентрации легирующей примеси на вольт-амперную характеристику полупроводниковой сверхрешетки	492
<i>М.О. Журавлев, Д.В. Лопатин, О.И. Москаленко, М.В. Храмова, А.Н. Писарчик, Р. Джаймс-Райтез</i>	Статистические характеристики перемежаемости, индуцированной шумом, в легированном эрбием оптоволоконном лазере	497
<i>И.В. Ушаков, А.Ю. Батомункуев</i>	Моделирование процесса заживления трещин в наноструктурном металлическом сплаве, обрабатываемом серией лазерных импульсов	503
<i>А.А. Попова</i>	Кинетические закономерности роста анодных оксидных пленок на ниобии и титане в неводных средах	508
МЕДИЦИНА		
<i>Н.В. Любимова, Т.К. Чурикова, М.Г. Томс, Н.Е. Кушлинский</i>	Биохимические маркеры нейроэндокринных опухолей	515
<i>Л.К. Овчинникова, О.И. Костылева, А.А. Тулеуова, М.В. Грицкевич, В.Д. Ермилова, О.В. Кузнецова, Л.Т. Лякина, Н.А. Огнерубов, И.К. Воротников</i>	Клиническое значение фактора роста эндотелия сосудов в сыворотке крови и активатора плазминогена урокиназного типа в опухоли при локализованном раке молочной железы	532
<i>Н.А. Огнерубов, А.О. Жуков, Р.С. Сергеев</i>	Индивидуальные особенности хирургической анатомии щитовидной железы: обзор литературы	541
<i>Н.А. Огнерубов, А.А. Иванников, В.Л. Чанг</i>	Гигантская липома грудной стенки: описание случая и литературный обзор	551
<i>Ю.В. Матросова</i>	Мультиволновое лазерное воздействие в лечении анизометропической амблиопии средней степени у детей	557
<i>Н.В. Попова</i>	Оптическая когерентная томография-ангиография в диагностике хориоидальной неоваскуляризации при возрастной макулярной дегенерации	561
<i>И.В. Иволгина</i>	Синдром Парри–Ромберга. Клинический случай	566
<i>В.Г. Кутимова, Е.Ю. Кутимова</i>	Дермоид роговицы. Синдром Goldenhar. Клинический случай	570
<i>Е.Ю. Кутимова, В.Г. Кутимова</i>	Диабетическая ретинопатия. Роль амбулаторно-поликлинического звена в ранней диагностике. Лечение. Прогнозы	573
<i>И.Н. Влазнева</i>	Цветное доплеровское картирование в дифференциальной диагностике увеальной меланомы	578
<i>Ю.В. Зеленева, Н.Г. Манаенков</i>	Анализ гетерогенности некоторых морфолого-анатомических и биохимических показателей при атеросклерозе у больных острым инфарктом миокарда и нестабильной стенокардией в Тамбовской области	582
<i>А.Х. Шаймонов, Г.М. Ходжасмурадов, А.В. Гулин, И.И. Хукуматшоев</i>	Воспалительные заболевания среднего уха при врожденном несращении нёба	588

<i>Г.Н. Шарипов, Г.М. Ходжамурадов, Дж.А. Ходжамуродова, А.В. Гулин, М.С. Саидов</i>	Хирургическое лечение больных с повторной трубной беременностью в ранее оперированной трубе	592
<i>М.С. Саидов, Дж.А. Ходжамуродова, Г.М. Ходжамурадов, М.М. Исмоилов, А.В. Гулин, А.Х. Шаймонов</i>	Эффективность аугментационной маммопластики в зависимости от формы и объема имплантата	595
<i>Г.А. Захаров, Б.А. Какеев, Е.Г. Филипченко</i>	Некоторые аспекты оптимизации преподавания теоретических дисциплин в медицинском вузе	598
<i>П.П. Щербинин</i>	Дефекты оказания медицинской помощи: сквозь призму сестринских ошибок	603
ОБЩАЯ БИОЛОГИЯ		
<i>А.А. Кузнецов, А.А. Выприцкая, Ю.В. Зеленева</i>	Методы искусственного заражения подсолнечника грибами рода <i>Fusarium</i> Link et Fr. в условиях Тамбовской области	613
<i>Ю.В. Зеленева, В.П. Судникова</i>	Распространенность и развитие возбудителей листовых пятнистостей на территории Центрально-Черноземного региона	619
<i>В.В. Чекмарев, Ю.В. Зеленева</i>	Зависимость урожайности проса от факторов погоды в условиях Тамбовской области	624
<i>В.В. Корякин, А.В. Куляев, А.В. Абросимова, А.Г. Караваева, М.И. Маслова, А.С. Толмачева, А.Е. Коробова</i>	Разнокачественность сортов яровой пшеницы	627
<i>В.В. Корякин, А.В. Абросимова, М.А. Кабанова, Н.М. Платонова, Л.И. Мошечкова, О.А. Уварова</i>	Влияние череззерницы на потенциальную продуктивность колоса	632
<i>А.Н. Иваницкий</i>	Пещера Уаз-Абаа – важнейшее убежище рукокрылых (Chiroptera) Абхазии	636
ТЕХНИКА		
<i>А.А. Арзамасцев, Н.А. Зенкова</i>	Экспертная система для промышленного объекта на базе ИНС-моделей	640
<i>С.И. Лазарев, Ю.М. Головин, К.В. Шестаков, Э.Ю. Яновская, Д.С. Лазарев, В.Ю. Попов</i>	Дифрактометрическое исследование порозности ацетатцеллюлозной мембраны МГА-95	648
<i>С.И. Лазарев, В.Ю. Богомолов, А.А. Арзамасцев, К.К. Полянский, С.А. Вязовов, А.А. Левин</i>	Эмпирическая модель ультрафильтрационного концентрирования белка в подсырной сыворотке	653
<i>В.М. Поликарпов, С.И. Лазарев, Ю.М. Головин, В.Н. Холодилин, О.А. Абоносимов, Д.С. Лазарев</i>	Использование функции радиального распределения в исследовании структурных характеристик ацетатцеллюлозной мембраны МГА-95	659
<i>А.А. Арзамасцев, Д.В. Образцов</i>	Исследование основных характеристик полета гексакоптера	663
<i>Т.А. Калистратов</i>	Методы и средства автоматического контрастирования нейронной сети	666
<i>Р.Ю. Кольцов, О.В. Кольцова</i>	Корреляционно-регрессионный анализ и прогноз основных показателей развития региона (на примере Тамбовской области)	669
<i>А.М. Межуев, М.Г. Третьяков, И.И. Пасечников</i>	Структурные характеристики информационной сети на основе спектрального анализа топологии	674
<i>Е.И. Глинкин, А.А. Одиноква</i>	Кондуктометрические методы контроля	679
<i>Е.И. Глинкин</i>	Тождественность моделей вольтамперных характеристик	688
ПЕРСОНАЛИИ		
<i>О.А. Степичева, А.В. Гулин</i>	Профессору Ф.А. Шукурову – 70 лет	696

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. т. н., проф. А.А. Арзамасцев.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: д.ф.-м.н., проф. Е.С. Жуковский (науч. редактор серии), И.В. Ильина (отв. секретарь), д.ф.-м.н., проф. А.А. Артемов, д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва), д.ф.-м.н., проф. Ю.И. Головин, доктор, проф. Г. ван Дейк (Нидерланды), д.биол.н., проф. А.В. Емельянов, д.м.н., проф. Г.А. Захаров, д.м.н., проф. Н.Е. Кушлинский (г. Москва), д.биол.н., проф. Г.А. Лада, д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок, д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов, д.м.н., проф. Т.М. Ненашева, д.м.н., проф. Н.А. Огнерубов, д.м.н., проф. Э.М. Османов, д.биол.н., проф. В.Н. Попов (г. Воронеж), доктор, проф. М. Певзнер (Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (Португалия), д.биол.н., проф. Г.С. Розенберг (г. Тольятти), д.м.н., проф. С.Н. Симонов, д.биол.н., проф. О.В. Смирнова (г. Москва), доктор, проф. К. Троиц (Германия), д.г.н., проф. Л. Тушар (Франция), д.м.н., проф. О.Л. Фабрикантов, д.ф.-м.н., проф. В.А. Федоров, д.биол.н., проф. А.Т. Хусаинов (Казахстан), д.х.н., проф. Л.Е. Цыганкова, д.ф.-м.н., проф. А.А. Шибков, д.биол.н., проф. Г.В. Шляхтин (г. Саратов)

Адрес редакции: 392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.

Тел. редакции: (4752) 72-34-34 доб. 0440. Тел. научного редактора: (4752) 72-34-34 доб. 2021. Факс (4752) 71-03-07.

E-mail: arz_sci@mail.ru; vestnik@tsu.tmb.ru Интернет: <http://vestnik.tsutmb.ru/rus>; <http://vestnik.tsutmb.ru/eng>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации СМИ от 03.07.2012 г. ПИ № ФС77-50436.

Индекс 83372 в каталоге агентства «Роспечать».

Редактор М.И. Филатова.

Редактор английских текстов Е.А. Финаева.

Компьютерное макетирование: И.В. Ильина, Т.Ю. Молчанова.

Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. – Тамбов, 2016. – Т. 21. – Вып. 2. – 348 с. – ISSN 1810-0198 – DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2

Подписано в печать 10.04.2016. Формат 60×84 1/8. Усл. печ. л. 42,19. Тираж 1000 экз. Заказ № 1090. Свободная цена.

Адрес издателя: 392000, г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

Отпечатано в Издательском доме Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина. 392008, г. Тамбов, ул. Советская, 190г.

© ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2016

© Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки», 2016. При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор.

Tambov University REPORTS

A Theoretical and Applied Scientific
Journal

Series:
Natural and Technical Sciences

Volume 21, Issue 2, 2016

Published since June 14, 1996
Issued 6 times in year

A Journal of Tambov State University

The journal is on the official list of scientific reviewed periodicals
recommended by High Attestation Commission
for publication principal scientific researches of dissertations
for academic degree of candidate of science, doctor of science

CONTENTS

PROCEEDINGS of the IV International scientific seminar “The Functional-Differential Equations and Inclusions and their Applications in Mathematical Modeling” with Elements of School for Young Researchers, Tambov, 4–10 July 2016

M.V. Borzova, T.V. Zhukovskaia, E.S. Zhukovskiy	On covering of set-valued mappings in cartesian products of metric spaces	361
T.V. Zhukovskaia, E.S. Zhukovskiy	About antitone perturbations of covering mappings of ordered spaces	369
E.S. Zhukovskiy	On perturbations of covering mappings in spaces with vector-valued metrics	373
E.S. Zhukovskiy, E.A. Panasenکو	One example of a vector-valued metric in the space of nonempty closed subsets of a metric space	378
M.D. Kovalev	Hinged constructions and quadratic mappings	384
S.V. Kornev, N.V. Loi	Method of multivalent guiding functions in the bifurcation problem of solutions of differential equations	390
I.V. Krivopalova	Development of the criteria-based assessment system of the students educational achievements	402
E.V. Ryzhkova, S.M. Sitnik	The modified discrete fourier transform based on the group of roots of unity	406
T.Kh.M. Takhir	On solving linear functional-differential equations	415
V.S. Treshchev	About the cauchy problem for a system of implicit differential equations	430
V.M. Tyurin	About some linear differential operators in the spaces of besov-sobolev type	435
O.V. Filippova	A boundary value problem for one type impulse functional differential inclusions	439
E.L. Shishkina	Integral representation of approximating inverse operators for hyperbolic riesz b -potential kernel	448
A.M. Shmyrin, N.M. Mishachev, A.C. Kosareva	Clustering of neighborhood structure	457
A.M. Shmyrin, A.G. Yartsev, V.V. Pravilnikova	Trilinear neighborhood model of the process of forming the temperature of hot-rolled strip coiling	463

MATHEMATICS

A.A. Arzamastsev, D.V. Zalevskiy	The study of cryptic different systems of mathematical models of disturbed biological objects	471
O.R. Balaban, A.V. Ivanov	Difference scheme for the numerical analysis of multiphase fluids in hydraulic net-like type at nonisothermal conditions	479
I.V. Prikhodko, A.V. Ivanov	Mathematical model of wave process dynamics of multiphase medium spheres in hydrographic network	487

PHYSICS

A.O. Selskiy, D.V. Lopatin	Influence of the change of the spatial position of the perturbation of the doping concentration on the current-voltage characteristic in the semiconductor superlattice	492
M.O. Zhuravlev, D.V. Lopatin, O.I. Moskalenko, M.V. Khramova, A.N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui	Statistical characteristics of noise-induced intermittency in erbium-doped fiber laser	497
I.V. Ushakov, A.Y. Batomunkuev	Modeling of healing process of cracks in nanostructured metal alloy processed by a series of laser impulses	503
A.A. Popova	Kinetic patterns of growth of anodic oxide film on niobium and titanium in non-aqueous solutions	508

MEDICINE

N.V. Lyubimova, T.K. Churikova, M.G. Toms, N.E. Kushlinskiy	Biochemical markers of neuroendocrinal tumors	515
L.K. Ovchinnikova, O.I. Kostyleva, A.A. Tuleuova, M.V. Gritskevich, V.D. Ermilova, O.V. Kuznetsova, L.T. Lyakina, N.A. Ognerubov, I.K. Vorotnikov	Clinical significance of endothelium of vessels in blood serum and urokinase-type plasminogen activator in tumour at mammary gland localized cancer	532
N.A. Ognerubov, A.O. Zhukov, R.S. Sergeev	Individual differences of surgery anatomy of thyroid gland: literature review	541
N.A. Ognerubov, A.A. Ivannikov, V.L. Chang	Giant lipoma of chest wall: case description and literary review	551
Y.V. Matrosova	Multi-wave laser influence in treating anisometropic amblyopia of average degree in children	557
N.V. Popova	Optical coherence tomography angiography in the diagnosis of choroidal neovascularization in age-related macular degeneration	561
I.V. Ivolgina	Parry–Romberg syndrome. Medical case	566
V.G. Kutimova, E.Y. Kutimov	Corneal dermoid. Goldenhar syndrome. A case report	570
E.Y. Kutimova V.G. Kutimova,	Diabetic retinopathy. The role of outpatient care in early diagnosis. Treatment. Prognoses	573
I.N. Vlazneva	Colored Doppler mapping in differential diagnosis of uveal melanoma	578
Y.V. Zeleneva, N.G. Manaenkov	Analysis of heterogeneity of some morphological, anatomical and biochemical characters at atherosclerosis in patients with acute myocardial infarction and unstable stenocardia in the Tambov province	582
A.K. Shaymonov, G.M. Khodzhamuradov, A.V. Gulin, I.I. Khukumatshoev	Middle ear inflammatory diseases in congenital cleft palate nonunion	588
G.N. Sharipov, G.M. Khodzhamuradov, D.A. Khodzhamurodova, A.V. Gulin, M.S. Saidov	Surgical treatment of patients with repeated tubal pregnancy in a previously operated tube	592
M.S. Saidov, D.A. Khodzhamurodova, G.M. Khodzhamuradov, M.M. Ismoilov, A.V. Gulin, A.Kh. Shaymonov	Efficiency of augmentation mammaplasty depending on the shape and volume of implant	595
G.A. Zakharov, B.A. Kakeev, E.G. Filipchenko	Some aspects of theoretical disciplines teaching optimization at higher medical institutions	598

P.P. Shcherbinin	Defects of medical care provision: basing on the nurses' errors	603
GENERAL BIOLOGY		
A.A. Kuznetsov, A.A. Vypritskaya, Y.V. Zeleneva	Methods of artificial infection of sunflower toadstool of genus <i>Fusarium</i> Link et Fr. in the conditions of Tambov region	613
Y.V. Zeleneva, V.P. Sudnikova	Prevalence and development of leaf spottiness agents on the territory of central and black earth region	619
V.V. Chekmarev, Y.V. Zeleneva	The dependence of the yield of millet on the weather factors in the conditions of the Tambov province	624
V.V. Koryakin, A.V. Kulyaev, A.V. Abrosimova, A.G. Karavaeva, M.I. Maslova, A.S. Tolmacheva, A.E. Korobova	Goodness of spring wheat sorts	627
V.V. Koryakin, A.V. Abrosimova, M.A. Kabanova, N.M. Platonova, L.I. Moshechkova, O.A. Uvarova	Influence of lax ear on potential ear productivity	632
A.N. Ivanitskiy	The Waz-Abaa cave – an important shelter for bats (Chiroptera) of Abkhazia	636
TECHNICS		
A.A. Arzamastsev, N.A. Zenkova	Expert system for industrial project basing on ANN-models	640
S.I. Lazarev, Y.M. Golovin, K.V. Shestakov, E.Y. Yanovskaya, D.S. Lazarev, V.Y. Popov	Diffraction research of porosity of cellulose acetate composite membrane MGA-95	648
S.I. Lazarev, V.Y. Bogomolov, A.A. Arzamastsev, K.K. Polyanskiy, S.A. Vyazovov, A.A. Levin	Empirical model of ultra-filter protein concentration in cheese whey	653
V.M. Polikarpov, S.I. Lazarev, Y.M. Golovin, V.N. Kholodilin, O.A. Abonosimov, D.S. Lazarev	Use of radial distribution function in research of structural characteristics of cellulose acetate membrane MGA-95	659
A.A. Arzamastsev, D.V. Obraztsov	The study of basic characteristics of hexacopter flight	663
T.A. Kalistratov	Methods and facilities for the automatic contrast of the neural network	666
R.Y. Koltsov, O.V. Koltsova	Correlation-regression analysis and basic indices prediction of region development (basing on the example of Tambov oblast)	669
A.M. Mezhuev, M.G. Tretyakov, I.I. Pasechnikov	Structural characteristics of information network on the basis of the spectral analysis of topology	674
E.I. Glinkin, A.A. Odinkova	Conductometric control methods	679
E.I. Glinkin	Models identity of voltage-current characteristic	688
PERSONALIA		
O.A. Stepicheva, A.V. Gulin	Professor F.A. Shukurov – 70 th anniversary	696

Founder: Federal State Budget Educational Institution of High Professional Education
“Tambov State University named after G.R. Derzhavin” (392000, Tambov, 33 Internatsionalnaya street)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. A.A. Arzamastsev

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Series Managing Editor), I.V. Ilyina (Executive Editor), Prof., Dr. A.A. Artemov, Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow), Prof., Dr. Y.I. Golovin, Prof., Dr. G. van Dijk (Netherlands), Prof., Dr. A.V. Emelyanov, Prof., Dr. G.A. Zakharov, Prof., Dr. N.E. Kushlinskiy (Moscow), Prof., Dr. G.A. Lada, Prof., Dr. G.I. Malaschonok, Prof., Dr. V.F. Molchanov, Prof., Dr. T.M. Nenasheva, Prof., Dr. N.A. Ognerubov, Prof., Dr. E.M. Osmanov, Prof., Dr. V.N. Popov (Voronezh), Prof., Dr. M. Pevzner (France), Prof., Dr. F.L. Pereira (Portugal), Prof., Dr. G.S. Rozenberg (Tolyatti), Prof., Dr. S.N. Simonov, Prof., Dr. O.V. Smirnova (Moscow), Prof., Dr. K.G. Troitzsch (Germany), Prof., Dr. L. Touchart (France), Prof., Dr. O.L. Fabrikantov, Prof., Dr. V.A. Fedorov, Prof., Dr. A.T. Khusainov (Kazakhstan), Prof., Dr. L.E. Tsygankova, Prof., Dr. A.A. Shibkov, Prof., Dr. G.V. Shlyakhtin (Saratov).

Editorial Office: 33 Internatsionalnaya street, Tambov, 392000, Russia.

Editorial Phone: (4752) 72-34-34 (0440). Phone of the Series Scientific Editor: (4752) 72-34-34 (2021).

Fax (4752) 71-03-07.

E-mail: arz_sci@mail.ru; vestnik@tsu.tmb.ru Internet: <http://vestnik.tsutmb.ru/rus>; <http://vestnik.tsutmb.ru/eng>

Journal is registered by Federal service for supervision in communication, information technologies and mass communications sphere (Roskomnadzor). Certificate of registration of mass information mean from 3 July, 2012.

ПИ № ФС77-50436.

The catalogue record available from the Rospechat Agency is 83372.

Editor: M.I. Filatova.

English texts editor E.A. Finaeva.

Computer layout: I.V. Ilyina, T.Yu. Molchanova.

Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2016. – Volume 21, Issue 2. – 348 p. – ISSN 1810-0198 – DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2

Подписано в печать 10.04.2016. Формат 60×84 1/8. Усл. печ. л. 42,19. Тираж 1000 экз. Заказ № 1090. Свободная цена.

Publisher's address: 392000, Tambov, 33 Internatsionalnaya street, Federal State Budget Educational Institution of High Professional Education “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”.

Published in Publishing House of Tambov State University named after G.R. Derzhavin
392008, Tambov, 190g Sovetskaya street.

© FSBEI of HPE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”, 2016

© The journal “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”, 2016.

All rights of reproduction in any form reserved.

The author is responsible for the contents of publications.

МАТЕРИАЛЫ
IV международного научного семинара
«Функционально-дифференциальные уравнения и включения
и их приложения в математическом моделировании»
с элементами школы для молодых ученых

Тамбов, 4 – 10 июля 2016 г.

Организаторы

Администрация Тамбовской области
Управление образования и науки Тамбовской области
Российский университет Дружбы народов
Норвежский университет естественных наук (Осло, Норвегия)
Университет имени Эдуардо Мондлане (Мапуто, Мозамбик)
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

Основные научные направления семинара

1. Прикладной функциональный анализ.
2. Функционально-дифференциальные уравнения и включения.
3. Задачи управления и их приложения в технических системах.
4. Математические модели социально-экономических процессов.
5. Математические модели биологии и медицины.

Программа семинара включает пленарные и секционные доклады, лекции для молодых ученых, аспирантов, студентов.

Семинар организован при финансовой поддержке администрации Тамбовской области, Управления образования и науки Тамбовской области и Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина.

PROCEEDINGS
of the IV International scientific seminar
«The Functional-Differential Equations and Inclusions
and their Applications in Mathematical Modeling»
with Elements of School for Young Researchers

Tambov, 4 – 10 July 2016

Organizers

Administration of Tambov region
Department of Education and Science of Tambov region
People's Friendship University of Russia
Norwegian University of Life Sciences (Oslo, Norwegian)
Eduardo Mondlane University (Maputo, Mozambique)
Tambov State University named after G.R. Derzhavin

The main scientific directions of the seminar

1. Applied functional analysis.
2. The functional-differential equations and inclusions.
3. Control problems and their application in technical systems.
4. Mathematical models of socio-economic processes.
5. Mathematical models in biology and medicine.

The workshop program includes plenary and sectional reports, lectures for young scientists, postgraduates and students.

The seminar is financially supported by the Administration of Tambov region, Department of Education and Science of Tambov region and by Tambov State University named after G.R. Derzhavin.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Пусть определены метрические пространства X, Y и задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется α -накрывающим, а число α — коэффициентом накрывания, если для любых $r \geq 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$B_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(B_X(u, r)).$$

Свойство α -накрывания равносильно соотношению:

$$\forall u \in X \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, w). \quad (3)$$

Применение утверждений о накрывающих отображениях к исследованию уравнения (2) встречает трудности, связанные с определением метрики в произведении метрических пространств, относительно которой выполнялись бы условия соответствующих утверждений. Предлагаемый здесь подход не требует метризации произведений метрических пространств. Вместо метрик в $\prod_{i=1}^n X_i$, $\prod_{j=1}^m Y_j$, мы используем векторы $(\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_n})$, $(\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_m})$. (подробнее о пространствах с такими «векторными метриками» см., например, ([9], п. 6.3, 6.4)). В терминах этих векторов удастся не только исследовать разрешимость уравнения (2), но и получить оценки отклонения каждой компоненты x_i решения x от соответствующей компоненты u_i^0 заданного вектора $u^0 \in \bar{X}$, что невозможно, если пользоваться классическими результатами о накрывании в метрических пространствах.

1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначаем $\mathbb{R}^m$ — m -мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}_+^m$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, I_m — единичную $m \times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geq r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}_+^m$; обозначаем $\min\{r^1, r^2\}$ вектор $r = (r_1, \dots, r_m)$, компоненты которого определяются формулой $r_j = \min\{r_j^1, r_j^2\}$, $j = \overline{1, m}$. Напомним, что норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ в $\mathbb{R}^m$ называют монотонной, если для $r^1, r^2 \in \mathbb{R}_+^m$, удовлетворяющих неравенству $r^1 \geq r^2$, выполнено $|r^1|_{\mathbb{R}^m} \geq |r^2|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть заданы метрические пространства X_i, Y_j , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим пространства

$$\bar{X} \doteq \prod_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} \doteq \prod_{j=1}^m Y_j$$

с векторными метриками

$$\bar{\rho}_{\bar{X}} \doteq (\rho_{X_1}, \dots, \rho_{X_n}), \quad \bar{\rho}_{\bar{Y}} \doteq (\rho_{Y_1}, \dots, \rho_{Y_m}). \quad (4)$$

Для $r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $w = (w_1, \dots, w_m) \in \bar{Y}$ положим

$$\bar{B}_{\bar{Y}}(w, r) \doteq \{y \in \bar{Y} : \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w) \leq r\} = \prod_{j=1}^m B_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \bar{X}$ обозначим

$$\bar{B}_{\bar{X}}(u, d) \doteq \prod_{i=1}^n B_{X_i}(u_i, d_i).$$

О п р е д е л е н и е 2. Пусть задана $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть векторно A -накрывающим, если

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^m \quad \forall u \in \bar{X} \quad \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)). \quad (5)$$

Приведем критерий векторного накрывания.

Предложение 1. *Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \bar{X} \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in \bar{Y} \quad \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w). \quad (6)$$

Докажем это утверждение. Пусть, сначала, выполнено свойство (6). Для произвольных $r \in \mathbb{R}_+^m$, $u \in \bar{X}$, $y \in \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r)$ определим $w \in \Psi(u)$ так, чтобы $\rho_Y(y, w) \leq r$. Согласно (6) найдем x , отвечающий условиям $\Psi(x) \ni y$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq Ar$. Таким образом, справедливо вложение (5). Обратно, пусть отображение Ψ является векторно A -накрывающим. Для любых $u \in \bar{X}$, $w \in \Psi(u)$, $y \in \bar{Y}$ определим $r \doteq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)$. Тогда $y \in \bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar))$, т. е. существует $x \in \bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x) \ni y$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq Ar = A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)$.

Очевидно, что в случае $n = m = 1$ определения 1, 2 равносильны: всякое векторно A -накрывающее отображение является α -накрывающим и любое α -накрывающее отображение является векторно A -накрывающим, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

Определение векторного накрывания, естественно, применимо и к однозначным отображениям: отображение $\psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ будем полагать векторно A -накрывающим, если отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$, $\Psi(x) = \{\psi(x)\}$ векторно A -накрывающее согласно определению 2.

Требование накрывания во многих задачах является излишне жестким, многие результаты удастся получить при менее ограничительных условиях локального накрывания [6]–[8]. Определим векторный аналог такого понятия.

Итак, пусть заданы множества $W \subset \bar{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m$ и $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Определение 3. Отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть *векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$* , если для любых $(u, r) \in \mathfrak{A}$ имеет место включение

$$\bar{B}_{\bar{Y}}(\Psi(u), r) \cap W \subset \Psi(\bar{B}_{\bar{X}}(u, Ar)).$$

Предложение 2. *Отображение $\Psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}$, тогда и только тогда, когда*

$$\forall u \in \bar{X} \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in W \\ (u, \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w)) \in \mathfrak{A} \implies \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w).$$

Доказательство этого утверждения повторяет приведенное выше доказательство предложения 1.

Определение 3 естественным образом распространяется и на однозначное отображение $\psi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$, следует просто применить это определение к соответствующему многозначному отображению, равному $\Psi(x) = \{\psi(x)\}$.

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$, $A = (a_{11})$, определение 3 равносильно предложенному в [8] определению отображения $\Psi: X \rightrightarrows Y$, α -накрывающего множество $W \subset Y$ на совокупности $\mathfrak{G} \subset X \times \mathbb{R}_+$, где $\alpha = a_{11}^{-1}$, $\mathfrak{G} = \{(x, r) : (x, \alpha^{-1}r) \in \mathfrak{A}\}$. В свою очередь определение [8] — это многозначный аналог определения из работы [6]. В связи с этим отметим, что при соответствующем выборе множеств $W, \mathfrak{G}$ цитируемым определениям [6], [8] удовлетворяют различные трактовки понятия накрывания однозначных и многозначных отображений, предлагавшиеся многими авторами. Здесь в качестве $\mathfrak{A} \subset \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m$ будем выбирать множество, определяемое по заданным векторам $u^0 \in \bar{X}$, $R \in \mathbb{R}_+^n$ равенством

$$\hat{\mathfrak{A}}(u^0, R) \doteq \{(x, r) \in \bar{X} \times \mathbb{R}_+^m : x \in \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R), Ar + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u^0) \leq R\}. \quad (7)$$

Применительно к такому заданию совокупности $\mathfrak{A}$ определение 3 означает, что *отображение* $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{A}(u^0, R)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall u \in \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R) \quad \forall w \in \Psi(u) \quad \forall y \in W \\ A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w) + \bar{\rho}_{\bar{X}}(u, u^0) \leq R \implies \exists x \in \bar{X} \quad \Psi(x) \ni y \quad \& \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u) \leq A\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, w). \quad (8)$$

Напомним определения еще нескольких понятий, необходимых для формулировки утверждения о разрешимости системы (1).

Под сходимостью $x^k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$ в пространстве $\bar{X}$ понимаем сходимость последовательностей компонент данных векторов, т. е. $\rho_{X_i}(x_i^k, x_i) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, что равносильно сходимости $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^k, x) \rightarrow 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Аналогично понимаем сходимость в произведениях любых метрических пространств (в том числе, в $\bar{Y}$ и в $\bar{X} \times \bar{Y}$). Естественным образом определяем замкнутость множеств в произведениях пространств. Соответственно, множество $V \subset \bar{X} \times \bar{Y}$ называем замкнутым, если для любой последовательности векторов $(x_1^k, \dots, x_n^k, y_1^k, \dots, y_m^k)$, $k = 1, 2, \dots$ из множества V , компоненты которых при $k \rightarrow \infty$ сходятся: $\rho_{X_i}(x_i^k, \xi_i) \rightarrow 0$, $i = \overline{1, n}$, $\rho_{Y_j}(y_j^k, w_j) \rightarrow 0$, $j = \overline{1, m}$, «предельный» вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n, w_1, \dots, w_m)$ также принадлежит V . Множество V будем называть полным подпространством пространства $\bar{X} \times \bar{Y}$, если сходится (к элементу из V) произвольная последовательность векторов, компоненты которых образуют фундаментальные последовательности в соответствующих метрических пространствах.

Для отображения $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ стандартно определяем *график* — множество

$$\text{gph}(\Psi) = \{(x, y) \in \bar{X} \times \bar{Y} : y \in \Psi(x)\}.$$

О п р е д е л е н и е 4. Пусть задана $m \times n$ матрица B с неотрицательными компонентами b_{ji} , $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$. Отображение $\Phi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ будем называть *векторно B -липшицевым относительно множества $W \subset \bar{Y}$ на множестве $U \subset \bar{X}$* , если для любых $u, x \in U$ выполнено

$$\Phi(x) \cap W \subset \bar{B}_{\bar{Y}}(\Phi(u), B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u)). \quad (9)$$

Естественно, однозначное отображение $\varphi: \bar{X} \rightarrow \bar{Y}$ называем векторно B -липшицевым относительно множества W на множестве U , если определению 4 удовлетворяет соответствующее многозначное отображение, определяемое равенством $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$. Это означает, что для любых $u, x \in U$, таких что $\varphi(x) \in W$, выполнено $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(\varphi(x), \varphi(u)) \leq B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u)$.

Векторно B -липшицево относительно $\bar{Y}$ на всем $\bar{X}$ отображение будем называть *векторно B -липшицевым*.

В случае, если $W \doteq \prod_{j=1}^m W_j$, $U \doteq \prod_{i=1}^n U_i$, где $W_j \subset Y_j$, $U_i \subset X_i$, определение 4 означает, что для произвольного $l = \overline{1, n}$, любых векторов $u, x \in U$, компоненты которых u_i, x_i при всех $i \neq l$ совпадают, при всех $j = \overline{1, m}$ выполнено

$$\Phi_j(x) \cap W_j \subset \bar{B}_{Y_j}(\Phi_j(u), b_{jl}\rho_{X_l}(x_l, u_l)). \quad (10)$$

Отметим, что вложение (9) равносильно соотношению

$$\forall y \in \Phi(x) \cap W \quad \exists z \in \Phi(u) \quad \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y, z) \leq B\bar{\rho}_{\bar{X}}(x, u),$$

соответственно, вложение (10) — соотношению

$$\forall y_j \in \Phi_j(x) \cap W_j \quad \exists z_j \in \Phi_j(u) \quad \rho_{Y_j}(y_j, z_j) \leq b_{jl}\rho_{X_l}(x_l, u_l).$$

2. Теорема о точке совпадения двух отображений

Сформулируем основное утверждение статьи — векторный аналог теоремы А.В. Арутюнова о точке совпадения двух многозначных отображений.

Т е о р е м а 1. Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$, элементы $u^0 \in \bar{X}$, $y^0 \in \Psi(u^0)$, $y^1 \in \Phi(u^0)$, векторы $R \in \mathbb{R}_+^n$, $d \in \mathbb{R}_+^m$, $n \times m$ матрица A и $m \times n$ матрица B такие, что:

(а) Ψ является векторно A -накрывающим множеством $W \doteq \bar{B}_{\bar{Y}}(y^0, d)$ на совокупности $\hat{\mathfrak{A}}(u^0, R)$;

(б) Φ является векторно B -липшицевым относительно множества W на множестве $U \doteq \bar{B}_{\bar{X}}(u^0, R)$;

(с) для спектрального радиуса ϱ матрицы BA выполнено $\varrho(BA) < 1$;

(д) имеют место неравенства

$$r \doteq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d, \quad Ar \leq R.$$

(е) множества $\text{gph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\text{gph}(\Phi) \cap (U \times W)$ замкнуты и по крайней мере одно из них является полным подпространством пространства $\bar{X} \times \bar{Y}$.

Тогда существует решение $x = \xi \in \bar{X}$ системы (1), удовлетворяющее оценке

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(\xi, u^0) \leq Ar. \quad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале оценим матрицу $(I_m - BA)^{-1}$. Эта матрица является суммой ряда $I_m + BA + (BA)^2 + \dots$ (см., например, [10], с. 116). Из неотрицательности элементов матриц A, B следует, что при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$(I_m - BA)^{-1} \geq I_m + BA + \dots + (BA)^k \quad (12)$$

(неравенство для матриц понимается, естественно, как неравенство для всех соответствующих элементов).

Покажем, что существуют последовательности $\{x^k\} \subset \bar{X}$, $\{y^k\} \subset \bar{Y}$, отвечающие следующим требованиям: $x^0 = u^0$;

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad x^k \in U, \quad y^k \in \Psi(x^k) \cap \Phi(x^{k-1}) \cap W \neq \emptyset, \\ \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^k, y^{k-1}) \leq (BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^k, x^{k-1}) \leq A(BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1). \quad (13)$$

Проверим справедливость этого утверждения при $k = 1$. В данном случае первое из неравенств (13) тривиально: $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^0) \leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$.

Положим $x^0 \doteq u^0$. Для $u \doteq x^0$, $w \doteq y^0 \in \Psi(x^0)$, $y \doteq y^1 \in \Phi(x^0)$ выполнено условие импликации (8). Действительно, во-первых, в силу неравенства (12) имеем $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$, т. е. $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d$, $y^1 \in W$; во-вторых,

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(u^0, u) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(w, y) = A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) = Ar \leq R.$$

В силу предположения (а) согласно (8), существует $x^1 \in \bar{X}$ удовлетворяющий включению $\Psi(x^1) \ni y^1$ и неравенству $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^1, x^0) \leq A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^0)$. Из последнего неравенства, согласно (12), следует $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^1, x^0) \leq R$, т. е. $x^1 \in U$. Кроме того, установлено соотношение $y^1 \in \Psi(x^1) \cap \Phi(x^0) \cap W$ (из которого очевидно следует, что $\Psi(x^1) \cap \Phi(x^0) \cap W \neq \emptyset$).

Предполагая, что соотношения (13) имеют место при всех $k \leq k_0$, докажем их справедливость при $k = k_0 + 1$. Вследствие условия (б) существует $y^{k_0+1} \in \Phi(x^{k_0})$, удовлетворяющий

оценке $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0}) \leq B \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0}, x^{k_0-1})$. Отсюда, в силу предположений индукции, получаем $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0}) \leq BA(BA)^{k-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1)$. Таким образом, первое из неравенств (13) при $k = k_0 + 1$ справедливо.

Проверим условие импликации (8) для $u \doteq x^{k_0}$, $w \doteq y^{k_0}$, $y \doteq y^{k_0+1}$. Во-первых, имеем

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^{k_0+1}) &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^1, y^2) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0}, y^{k_0+1}) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + B(\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0})) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) + B(A + A(BA) + \dots + A(BA)^{k_0-1}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) = \\ &= (I_m + BA + \dots + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \end{aligned} \quad (14)$$

следовательно $\bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^{k_0+1}) \leq (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq d$, т. е. $y^{k_0+1} \in W$. Во-вторых, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\bar{X}}(u^0, u) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(w, y) &\leq \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) + A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0}, y^{k_0+1}) \leq \\ &\leq \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^0, x^1) + \dots + \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) + AB \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) \leq \\ &\leq A(I_m + \dots + (BA)^{k_0-1} + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq R. \end{aligned}$$

Таким образом, вследствие условия **(а)** существует $x^{k_0+1} \in \bar{X}$, удовлетворяющий соотношениям $\Psi(x^{k_0+1}) \ni y^{k_0+1}$, $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^{k_0}) \leq A \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^{k_0+1}, y^{k_0})$. Для этого элемента, учитывая **(б)** и предположения индукции, получаем оценку

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^{k_0}) \leq AB \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0}, x^{k_0-1}) \leq A(BA)^{k_0} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1).$$

Из данного неравенства следует, что

$$\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^0) \leq A(I_m + \dots + (BA)^{k_0}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq A(I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1), \quad (15)$$

поэтому $\bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k_0+1}, x^0) \leq R$, т. е. $x^{k_0+1} \in U$. Кроме того, установлено включение $y^{k_0+1} \in \Psi(x^{k_0+1}) \cap \Phi(x^{k_0}) \cap W$.

Итак, определены последовательности $\{x^k\} \subset \bar{X}$, $\{y^k\} \subset \bar{Y}$, удовлетворяющие соотношениям (13). Компоненты x_i^k векторов первой последовательности при каждом $i = \overline{1, n}$ образуют в X_i фундаментальную последовательность. Действительно, из **(с)** следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$; таким образом

$$\begin{aligned} \forall l = 1, 2, \dots \quad \bar{\rho}_{\bar{X}}(x^{k+l}, x^k) &\leq A(BA)^k (I_m + \dots + (BA)^{l-1}) \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \leq \\ &\leq A(BA)^k (I_m - BA)^{-1} \bar{\rho}_{\bar{Y}}(y^0, y^1) \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что в Y_i фундаментальной является последовательность $\{y_i^k\}$, $i = \overline{1, n}$.

Так как, согласно условию **(е)**, по крайней мере одна из фундаментальных последовательностей $\{(x^k, y^k)\} \subset \text{grph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\{(x^{k-1}, y^k)\} \subset \text{grph}(\Phi) \cap (U \times W)$ принадлежит полному подпространству, то существуют $\xi \in U$, $y \in W$, $\xi \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$, $y \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} y^k$. Из неравенства (15) получаем оценку (11). Вследствие замкнутости множеств $\text{grph}(\Psi) \cap (U \times W)$, $\text{grph}(\Phi) \cap (U \times W)$, выполнено $y \in \Psi(\xi)$, $y \in \Phi(\xi)$. Таким образом, ξ является искомым решением системы (1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В формулировке теоремы 1 можно заменить матрицу BA матрицей AB . Действительно, ненулевые собственные значения, а следовательно, и спектральные радиусы этих матриц совпадают (см. [11], с. 196). Кроме того, так как $\rho(AB) = \rho(BA) < 1$, то

$$\begin{aligned} A(I_m - BA)^{-1} &= A(I_m + BA + (BA)^2 + \dots) = A + ABA + ABABA + \dots = \\ &= (I_n + AB + (AB)^2 + \dots)A = (I_n - AB)^{-1}A. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. В теореме 1 в случае $W = \bar{Y}$ из предположения **(d)** можно удалить первое неравенство, а если $U = \bar{X}$, то лишним становится второе неравенство в **(d)**. Таким образом, если отображение $\Psi: \bar{X} \rightrightarrows \bar{Y}$ является векторно A -накрывающим, то для утверждения теоремы 1 условие **(d)** не требуется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5 С. 583–585.
3. Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.
4. Арутюнов А. В. Точки совпадения двух отображений // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.
5. Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
6. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
7. Жуковский Е. С., Плужникова Е. А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2014. P. 1–17. doi:10.1080/00036811.2014.891732
9. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
10. Крейн С. Г., Вилленкин Н. Я., Горин Е. А. (Под общей редакцией С. Г. Крейна) Функциональный анализ. СМБ. М.: Наука, 1972.
11. Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры М.: Наука, Издательство Физико-математической литературы, 2008.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Борзова Марина Васильевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», e-mail: bmv_1603@mail.ru

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-361-368

ON COVERING OF SET-VALUED MAPPINGS IN CARTESIAN PRODUCTS OF METRIC SPACES

© M. V. Borzova, T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy

For set-valued mappings acting in Cartesian product of metric spaces, the concept of vector-covering is defined. The vector analog of the Arutyunov coincidence point theorem is proved for set-valued mappings.

Key words: coincidence points; vector-covering mapping; Cartesian product of metric spaces.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. *Arutyunov A. V.* Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochi // Doklady Akademii nauk. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
2. *Arutyunov A. V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i mnogoznachnye nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh // Doklady Akademii nauk. 2009. T. 427. № 5 S. 583–585.
3. *Arutyunov A. V.* Ustojchivost' tochek sovpadeniya i svoystva nakryvayushchih otobrazhenij // Matematicheskie zametki. 2009. T. 86. № 2. S. 163–169.
4. *Arutyunov A. V.* Tochki sovpadeniya dvuh otobrazhenij // Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya. 2014. T. 48. № 1. S. 89–93.
5. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. Iss. 3. P. 1026–1044.
6. *Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E.* O korrektnosti differentsial'nykh uravnenij, ne razreshennykh otноситel'no proizvodnoj // Differentsial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
7. *Zhukovskiy E. S., Pluzhnikova E. A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotorykh opisyyaetsya neyavnymi nelinejnymi differentsial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
8. *Aram Arutyunov, Valeriano Antunes de Oliveira, Fernando Lobo Pereira, Evgeniy Zhukovskiy and Sergey Zhukovskiy* On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2014. P. 1–17. doi:10.1080/00036811.2014.891732
9. *Krasnosel'skiy M. A., Vainikko G. M., Zabrejko P. P., Rutitskiy YA. B., Stecenko V. YA.* Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenij. M.: Nauka, 1969.
10. *Krejn S. G., Vilenkin N. YA., Gorin E. A. (Pod obshchej redakciej S.G. Krejna)* Funktsional'nyy analiz. SMB. M.: Nauka, 1972.
11. *Prasolov V. V.* Zadachi i teoremy linejnoy algebry M.: Nauka, Izdatel'stvo Fiziko-matematicheskoy literatury, 2008.

Received 21 March 2016.

Borzova Marina Vasilevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Engineer of the Research Center «Fundamental Mathematical Research», e-mail: bmv_1603@mail.ru

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

УДК 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-369-372

ОБ АНТИТОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

© Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский

Рассматриваются вопросы существования решения x уравнения $\psi(x, x) = y$, где y известно, отображение $\psi(\cdot, \cdot)$ действует в упорядоченных пространствах и является по первому аргументу упорядоченно накрывающим, а по второму — антитонным. Используемое в статье понятие упорядоченного накрывания предложено в совместных работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского в связи с исследованием точек совпадения отображений.

Ключевые слова: упорядоченно накрывающие отображения; антитонное отображение; операторные уравнения и неравенства.

Введение

В работах [1]–[3] предложено понятие упорядоченно накрывающего отображения и получены теоремы о точках совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений в упорядоченных пространствах. Если в качестве упорядоченно накрывающего отображения выбрать тождественное отображение, то результаты [1]–[3] совпадают с классическими принципами неподвижной точки (включая теоремы Кнастера–Тарского ([4], с. 25), Биркгофа–Тарского ([5], с. 266), Тарского–Канторовича ([4], с. 26)).

Здесь предлагается распространение понятия упорядоченного накрывания, доказываются утверждения об отображении, упорядоченно накрывающем по первому аргументу и антитонном по второму. Полученные результаты могут использоваться для исследования разрешимости уравнений и получения оценок их решений.

1. Упорядоченные пространства

Пусть заданы упорядоченные пространства $X \doteq (X, \preceq)$, $Y \doteq (Y, \preceq)$. Для $u, v \in X$, $V \subset X$ будем обозначать

$$\begin{aligned} O_X(u) &\doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \\ [u, v]_X &\doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}, \\ \text{Low}_X(V) &\doteq \{x \in X : x \preceq v \ \forall v \in V\}. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем *упорядоченно накрывающим множеством* $W \subset Y$, если для любого $u \in X$ выполнено включение

$$O_Y(f(u)) \cap W \subset f(O_X(u)).$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y , называем *упорядоченно накрывающим*.

Заметим, что $f : X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является упорядоченно накрывающим множеством W , когда

$$\forall u \in X \ \forall y \in W \ y \preceq f(u) \Rightarrow \exists x \in X \ f(x) = y \ \& \ x \preceq u.$$

Для целей данной работы оказывается удобной следующая модификация свойства упорядоченного накрытия.

О п р е д е л е н и е 2. Множеством упорядоченного накрытия отображения $f: X \rightarrow Y$ называем совокупность всех пар $(u, y) \in X \times Y$, удовлетворяющих условию: либо $y \not\leq f(u)$; либо $y \leq f(u)$ и тогда существует такой $x \in X$, что выполнены соотношения $f(x) = y$, $x \leq u$. Будем обозначать это множество $\mathfrak{B}(f)$.

Множество $\mathfrak{B}(f)$ упорядоченного накрытия любого отображения $f: X \rightarrow Y$ не пусто (например, ему принадлежит пара $(u, f(u))$ для всех $u \in X$). Отметим также, что упорядоченное накрытие множества W отображением f равносильно вложению $\mathfrak{B}(f) \supset X \times W$, а свойство упорядоченного накрытия — равенству $\mathfrak{B}(f) = X \times Y$.

Рассмотрим простейшие примеры нахождения множеств упорядоченного накрытия для вещественных функций.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называют *антитонным на* $W \subset X$, если для любых $x, u \in W$ из $x \succeq u$ следует $f(x) \preceq f(u)$. Антитонное на всем X отображение называют *антитонным*.

2. Теорема о возмущениях упорядоченно накрывающих отображений

Пусть определено отображение $\psi: X^2 \rightarrow Y$, которое по первому аргументу обладает некоторыми накрывающими свойствами. Следующее утверждение гарантирует сохранение этих свойств отображением $f: X \rightarrow Y$, $f(x) \doteq \psi(x, x)$, если ψ по второму аргументу является антитонным на некотором множестве.

Т е о р е м а 1. Пусть $y \in Y$, существует такой элемент $u_0 \in X$, что $f(u_0) \succeq y$, и выполнены условия:

- (а) при любом $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$, где $\mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$ есть множество упорядоченного накрытия отображения $\psi(\cdot, x): X \rightarrow Y$;
- (б) при любом $x \in O_X(u_0)$ отображение $\psi(x, \cdot): X \rightarrow Y$ является антитонным на множестве $[x, u_0]_X$;
- (с) любая цепь $S \subset O_X(u_0)$ такая, что

$$\begin{aligned} \forall x \in S \quad \psi(x, x) \succeq y, \\ \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 \prec x_2 \Rightarrow \psi(x_1, x_2) \preceq y, \end{aligned} \quad (1)$$

ограничена снизу, т. е. $\text{Low}(S) \neq \emptyset$, и существует нижняя граница $\omega \in \text{Low}(S)$, удовлетворяющая неравенству $f(\omega) \succeq y$.

Тогда для любого $x \in O_X(u_0)$ выполнено $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что уравнение

$$\psi(x, x) = y \quad (2)$$

разрешимо, причем существует решение $x \in O_X(u_0)$.

Определим множество

$$U_0 = \{x \in O_X(u_0) : f(x) \succeq y\}.$$

Это множество не пусто, $u_0 \in U_0$. Определим на U_0 бинарное отношение $\leq$, полагая для $v, u \in U_0$ выполненным $v \leq u$, если $v = u$, или если $v \prec u$ и $\psi(v, u) \preceq y$. Покажем, что это отношение определяет порядок на U_0 . Достаточно проверить транзитивность. Пусть $v \leq u$, $u \leq x$. Если $v = u$, или $u = x$, то соотношение $v \leq x$ очевидно. Пусть $v \neq u$ и $u \neq x$, тогда

$v \prec u \prec x$ и имеют место неравенства $\psi(v, u) \preceq y$, $\psi(u, x) \preceq y$. Согласно условию (b) выполнено $\psi(v, x) \preceq \psi(v, u) \preceq y$. Таким образом, $v \triangleleft x$.

Согласно теореме Хаусдорфа (см., например, [6], гл. 1) в $(U_0, \triangleleft)$ существует максимальная цепь S , которая содержит точку x_0 . В силу предположения (с) эта цепь имеет нижнюю границу w (относительно исходного порядка $\preceq$), и справедливо неравенство $\psi(w, w) \succeq y$.

Покажем, что построенная точка w является решением уравнения (2). Очевидно, $w \in O_X(u_0)$. Из условия (a) следует существование элемента $v \in X$, для которого выполнено

$$\psi(v, w) = y, \quad v \preceq w. \quad (3)$$

Из условия (b) получаем $\psi(v, v) \succeq y$. Для любого элемента $x \in S$ имеем $x \succeq v$, следовательно, в силу предположения (b), $\psi(v, x) \preceq \psi(v, v) = y$. Итак, $v \in U_0$ и множество $S \cup \{v\} \subset U_0$ относительно отношения $\succeq$ является цепью, а в силу максимальной цепи S имеем $v \in S$. Поэтому $v \succeq w$. Это неравенство и соотношения (3) означают, что $w = v$, $\psi(w, w) = y$.

Для произвольного $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$ и возможны две ситуации.

1. Если $\psi(x, x) \not\succeq y$, то $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$.
2. В случае $\psi(x, x) \succeq y$, согласно доказанному выше (если принять $u_0 = x$), существует такой элемент $u \in X$, что $f(u) = y$ и $x \succeq u$. Полученные соотношения означают принадлежность пары (x, y) множеству упорядоченного накрывания отображения f . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
4. Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory // Springer-Verlag, New York. 2003.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-369-372

ABOUT ANTITONE PERTURBATIONS OF COVERING MAPPINGS OF ORDERED SPACES

© T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy

We consider the problem of existence of a solution x to the equation $\psi(x, x) = y$, where y is given, the mapping $\psi(\cdot, \cdot)$ acts in ordered spaces, is order-covering with respect to the first argument, and antitone with respect to the second one. The concept of order-covering used in the article was proposed in the joint works of A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy regarding the studies of the mappings' coincidence points.

Key words: order-covering mappings; antitone mapping; operator equations and inequalities.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-97504) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkah sovpadeniya otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 5. S. 475–478.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 6. S. 595–598.
4. Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory // Springer-Verlag, New York. 2003.
5. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Kratkij kurs funkcional' nogo analiza. M.: Vysshaya shkola, 1982.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. EHlementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1981.

Received 21 March 2016.

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

О ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© Е. С. Жуковский

Для отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой, определены аналоги свойств накрывания и метрической регулярности. Доказана теорема о сохранении свойства накрывания при липшицевых возмущениях. Обсуждаются применения полученных результатов к исследованию функциональных уравнений.

Ключевые слова: липшицевы возмущения накрывающих отображений; пространства с векторнозначной метрикой.

Приведем известное определение (см. [1], [2]) накрывающего отображения.

Для метрического пространства $X = (X, \rho_X)$ обозначаем через $B_X(x, r)$ замкнутый шар $\{x' \in X : \rho_X(x', x) \leq r\}$ с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется *накрывающим с коэффициентом* $\alpha > 0$ (α -накрывающим), если

$$\forall x \in X \quad r \geq 0 \quad B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subset \Psi(B_X(x, r)).$$

Отметим, что отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ является α -накрывающим тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in X \quad \forall y' \in Y \quad \exists x' \in X \quad \Psi(x') = y', \quad \rho_X(x', x) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y', \Psi(x)). \quad (1)$$

В известной теореме А.А. Милютин о возмущениях [1] утверждается, что если X — полное метрическое пространство, Y — линейное метрическое пространство, отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ непрерывное и α -накрывающее, а отображение $\Phi : X \rightarrow Y$ β -липшицево, $\beta < \alpha$, то их разность $\Psi - \Phi : X \rightarrow Y$ является $(\alpha - \beta)$ -накрывающим отображением.

В [3] получено утверждение о возмущениях без предположения линейности пространства Y . В случае метрических пространств X, Y , из которых первое пространство полное, рассматривается отображение $\Upsilon : X^2 \rightarrow Y$, которое при любом $x \in X$ как отображение первого аргумента $\Upsilon(\cdot, x) : X \rightarrow Y$ замкнуто и α -накрывающее, а как отображение второго аргумента $\Upsilon(x, \cdot) : X \rightarrow Y$ β -липшицево, $\beta < \alpha$. Показано, что отображение $\Gamma : X \rightarrow Y$, $\Gamma(x) = \Upsilon(x, x)$ является $(\alpha - \beta)$ -накрывающим. Авторами [3] также получены ослабления перечисленных условий, в частности, вместо предположения накрывания используется определенное в цитируемой работе свойство условного накрывания на заданных множествах. Дальнейшее усиление утверждения о возмущениях и уточнение его условий, вызванное приложениями к неявным дифференциальным, интегральным уравнениям, получено в работах [4]–[5]. В связи с исследованием систем уравнений, в частности, краевых задач и задач управления в [6]–[8] определено свойство накрывания для отображений, действующих в произведениях метрических пространств. В данной работе продолжены эти исследования, предложено понятия накрывания отображений, действующих в пространствах с векторнозначной метрикой.

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором определен замкнутый выпуклый конус $E_+ \subset E$ и задано отношение порядка: для $r_1, r_2 \in E$ неравенство $r_1 \leq r_2$, равносильно принадлежности $r_2 - r_1$ конусу E_+ . Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$. Отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \rightarrow E_+$ называют *векторнозначной метрикой*, если оно обладает свойствами «обычной» метрики, т. е. при любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ выполнено:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = 0 \Leftrightarrow x = u; \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u, x); \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, u) \leq \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v, u).$$

Пару $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ называют пространством с векторнозначной метрикой и обозначают коротко одним символом $\mathcal{X}$. На такое пространство без изменений переносятся многие понятия метрических пространств.

Замкнутый шар с центром в точке $x \in \mathcal{X}$ радиуса $r \in E_+$ в пространстве $\mathcal{X}$ это множество $B_{\mathcal{X}}(x, r) \doteq \{x' \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x) \leq r\}$. Под сходимостью $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ в $\mathcal{X}$ понимается сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \rightarrow 0$ в E . Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ называют фундаментальной, если

$$\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E \leq \varepsilon.$$

Если любая фундаментальная последовательность в $\mathcal{X}$ сходится, то это пространство называется полным.

Отметим, что на пространства с векторнозначной метрикой не переносятся понятия расстояния от точки до множества и расстояния по Хаусдорфу между множествами, поскольку ограниченное множество в E_+ может не иметь инфимума (в отличие от линейного порядка в $\mathbb{R}$ упорядоченность в E частичная).

Пусть E, M — некоторые линейные нормированные пространства, в пространстве $\mathcal{L}(M, E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \rightarrow E$ определим замкнутый выпуклый конус $\mathcal{L}(M, E)_+ \doteq \{F : M \rightarrow E \mid F(M_+) \subset E_+\}$ — множество положительных операторов. Обозначим символом $I_M \in \mathcal{L}(M, M)$ — тождественный оператор. Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — пространства с векторнозначными метриками $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \rightarrow E_+, \mathcal{P}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^2 \rightarrow M_+$.

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $\Psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ будем называть *накрывающим с операторным коэффициентом* $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$ или *K -накрывающим относительно векторнозначных метрик*, если

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y' \in \mathcal{Y} \quad \exists x' \in \mathcal{X} \quad \Psi(x') = y', \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x) \leq K \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(y', \Psi(x)).$$

Свойство накрывания относительно векторнозначных метрик эквивалентно следующему включению

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall r \in E_+ \quad B_{\mathcal{Y}}(\Psi(x), r) \subset \Psi(B_{\mathcal{X}}(x, Kr)),$$

аналогичному соотношению (1).

Если $E = M = \mathbb{R}$, то векторнозначная метрика совпадает с «обычной». В этом случае определение 2 равносильно определению 1, а для соответствующих коэффициентов выполнено $K = (\alpha^{-1})_{1 \times 1}$.

О п р е д е л е н и е 3. Отображение $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ будем называть *липшицевым с операторным коэффициентом* $B \in \mathcal{L}(E, M)_+$ или *B -липшицевым относительно векторнозначных метрик*, если

$$\forall x, x' \in \mathcal{X} \quad \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}(\Phi(x'), \Phi(x)) \leq B \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x', x).$$

Если $E = M = \mathbb{R}$, то $B = (\beta)_{1 \times 1}$ и определение 3 есть определение классического условия Липшица с коэффициентом β .

В пространстве $\mathcal{L}(M, M)$ линейных ограниченных операторов определим порядок, полагая $F_1 \leq F_2$ для $F_1, F_2 \in \mathcal{L}(M, M)$ тогда и только тогда, когда $F_2 - F_1 \in \mathcal{L}(M, M)_+$, здесь замкнутый выпуклый конус $\mathcal{L}(M, M)_+ \doteq \{F : M \rightarrow M \mid F(M_+) \subset M_+\}$ — множество положительных операторов.

Сформулируем утверждение о возмущениях накрывающего отображения в пространствах с векторнозначной метрикой.

Пусть задано отображение $\Upsilon : \mathcal{X}^2 \rightarrow \mathcal{Y}$.

Т е о р е м а 1. Пусть пространство $\mathcal{X}$ является полным. Пусть существуют такие $K \in \mathcal{L}(M, E)_+, B \in \mathcal{L}(E, M)_+$, что для любого $x \in \mathcal{X}$ отображение $\Upsilon(\cdot, x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ является замкнутым и K -накрывающим, а отображение $\Upsilon(x, \cdot) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ — B -липшицевым (относительно векторнозначных метрик).

Тогда, если для спектрального радиуса ϱ линейного ограниченного положительного оператора $BK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ имеет место оценка $\varrho(BK) < 1$, то отображение $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, $\Gamma(x) = \Upsilon(x, x)$ является накрывающим с операторным коэффициентом $K(I_M - BK)^{-1}$.

Если $E = M = \mathbb{R}$, то, как отмечено выше, векторнозначная метрика становится «обычной», $K = (\alpha^{-1})_{1 \times 1}$, $B = (\beta)_{1 \times 1}$. Тогда из теоремы 1 следует, что «обычный» коэффициент накрывания отображения Γ равен $(\alpha^{-1}(1 - \beta\alpha^{-1})^{-1})^{-1} = \alpha - \beta$. Таким образом, в случае метрических пространств теорема 1 аналогична теоремам [3]–[5].

Если $E = \mathbb{R}^n$, $M = \mathbb{R}^m$, то из теоремы 1 следуют результаты [6]–[8] о накрывающих отображениях в произведениях метрических пространств.

Проиллюстрируем возможности теоремы 1 к исследованию уравнений в функциональных пространствах.

Итак, пусть теперь E, M — линейные нормированные пространства действительных функций, определенных на некотором множестве T . Пусть для любого $x \in E$ выполнено $|x| \in E$, где $|x|(t) = |x(t)|$; предполагаем также, что аналогичное свойство выполнено в пространстве M . Определим в этих пространствах конусы E_+, M_+ неотрицательных функций. Векторнозначную метрику $\rho_E : E^2 \rightarrow E_+$ определим равенством $\rho_E(x, x')(t) = |x(t) - x'(t)|$. Аналогично зададим векторнозначную метрику ρ_M в пространстве M .

Отображение $\Phi : E \rightarrow M$ будет B -липшицевым относительно данных векторнозначных метрик, $B \in \mathcal{L}(E, M)_+$, если

$$\forall x, x' \in E \quad \forall t \in T \quad |(\Phi x)(t) - (\Phi x')(t)| \leq (B|x - x'|)(t).$$

Отображение $\Psi : E \rightarrow M$ будет обладать свойством K -накрывания относительно данных векторнозначных метрик, если

$$\forall x' \in E \quad \forall y \in M \quad \exists x \in E \quad \forall t \in T \quad \Psi(x) = y, \quad |x(t) - x'(t)| \leq (K|y - \Psi(x')|)(t).$$

Пусть $y \in M$ и задано отображение $\Upsilon : E^2 \rightarrow M$ такое, что для любого $x \in E$ отображение $\Upsilon(\cdot, x) : E \rightarrow M$ является замкнутым и K -накрывающим, а отображение $\Upsilon(x, \cdot) : E \rightarrow M$ — B -липшицевым (относительно векторнозначных метрик). Рассмотрим уравнение

$$(\Upsilon(x, x))(t) = y(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

относительно неизвестной функции $x : T \rightarrow \mathbb{R}$ — элемента пространства E .

Из теоремы 1 получаем, что если для спектрального радиуса ϱ линейного ограниченного положительного оператора $BK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ имеет место оценка $\varrho(BK) < 1$, то уравнение (2) разрешимо, более того, для любого $u \in E$ существует решение $x \in E$, удовлетворяющее оценке

$$|x(t) - u(t)| \leq (K(I_M - BK)^{-1}|y - \Upsilon(u, u)|)(t), \quad t \in T.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриук А.В., Милотин А.А., Осмоловский Н.П. Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.
2. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
3. Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.
5. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

6. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями. Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

7. Жуковская Т.В., Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об исследовании систем функциональных уравнений методами теории накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 1. С. 38–42.

8. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

БЛАГОДАРНОСТИ: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10021).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-373-377

ON PERTURBATIONS OF COVERING MAPPINGS IN SPACES WITH VECTOR-VALUED METRICS

© E. S. Zhukovskiy

For mappings acting in spaces with vector-valued metrics, the analogues of covering and metric regularity are defined. A theorem on stability of covering property under Lipschitz perturbations is proved. The application of the results obtained to investigation of functional equations is discussed.

Key words: Lipschitz perturbations of covering mappings; vector-valued metric.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is supported by the Russian Scientific Fund (project № 15-11-10021).

REFERENCES

1. Dmitruk A.V., Milyutin A.A., Osmolovskiy N.P. Teorema Lyusternika i teoriya ehkstrema // UMN. 1980. Т. 35. № 6 (216). С. 11–46.
2. Arutyunov A.V. Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki // Doklady Akademii nauk. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
3. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoj // Differentsial'nye uravneniya. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. № 3. P. 1026–1044.

5. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* O korrektnosti differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoy // *Differentsial'nye uravneniya*. 2011. Т. 47. № 11. S. 1523–1537.
6. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotorykh opisyyaetsya neyavnymi nelinejnymi differentsial'nymi uravneniyami. *Avtomatika i telemekhanika*. 2015. № 1. S. 31–56.
7. *Zhukovskaya T.V., Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Ob issledovanii sistem funktsional'nykh uravneniy metodami teorii nakryvayushchih otobrazhenij // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki*. Tambov, 2013. Т. 18. № 1. S. 38–42.
8. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A.* Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metricheskikh prostranstv i kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoy // *Differentsial'nye uravneniya*. 2013. Т. 49. № 4. S. 439–455.

Received 21 March 2016.

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

ПРИМЕР ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПУСТЫХ ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

© Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко

В пространстве непустых замкнутых подмножеств заданного метрического пространства определяется векторнозначная метрика, отличная от используемых в литературе векторных обобщений метрики Хаусдорфа. Предлагаемая векторнозначная метрика возникает в задачах анализа многозначных отображений с возможно неограниченными образами, позволяет получить достаточно полную информацию о расстояниях между точками соответствующих множеств, оказывается удобной в утверждениях о неподвижной точке многозначных отображений.

Ключевые слова: пространство непустых замкнутых подмножеств метрического пространства; векторнозначная метрика; полное метрическое пространство.

Пусть E — линейное нормированное пространство, в котором определен замкнутый выпуклый конус E_+ , и задан порядок: $\forall e_1, e_2 \in E \quad e_1 \preceq e_2 \Leftrightarrow e_2 - e_1 \in E_+$. Векторнозначная метрика на непустом множестве $\mathcal{X}$ определяется как функция $\mathfrak{d} : \mathcal{X}^2 \rightarrow E_+$, удовлетворяющая «стандартным» аксиомам метрики:

$$\forall x, y, z \in \mathcal{X} \quad \mathfrak{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad \mathfrak{d}(x, y) = \mathfrak{d}(y, x), \quad \mathfrak{d}(x, y) \preceq \mathfrak{d}(x, z) + \mathfrak{d}(z, y). \quad (1)$$

В пространстве с векторнозначной метрикой естественным образом определяются понятия фундаментальной и сходящейся последовательностей, полноты, сепарабельности и т. д. Такие пространства возникают при исследовании конечных и бесконечных систем уравнений, в задачах численного анализа.

Понятие векторнозначной метрики введено Дуго Кигера в [1]. Пространства с векторнозначными метриками и их обобщения исследовались многими авторами; в литературе такие пространства называют псевдометрическими, K -метрическими, вектор-метрическими, коническими метрическими, обобщенно метрическими и др. (см. статью [2] и приведенную в ней библиографию). Ряд работ (см., например, [3]) посвящен анализу многозначных отображений, действующих в пространства с векторнозначной метрикой. Однако, такие исследования встречают затруднения, связанные с тем, что порядок в пространстве E значений векторнозначной метрики является частичным, а не линейным, как в $\mathbb{R}$. Это обстоятельство не позволяет, например, определить «векторное» расстояние от точки до множества как инфимум всех расстояний от точки до точек множества, поскольку этот инфимум может не существовать. Соответственно, не удастся предложить точный аналог и расстояния по Хаусдорфу между множествами в пространстве с векторнозначной метрикой.

В данной статье для пространства непустых замкнутых подмножеств заданного метрического пространства дается определение векторнозначной метрики, отличное от многочисленных векторных обобщений метрики Хаусдорфа. Предлагаемая векторнозначная метрика возникает не в проблеме исследования систем включений, а в задачах анализа многозначных отображений с замкнутыми, возможно неограниченными образами, и представляет, на наш взгляд, достаточно полный набор информации о расстояниях между точками соответствующих множеств. Эта векторнозначная метрика оказывается удобной в утверждениях о неподвижной точке многозначных отображений.

В качестве пространства E значений векторнозначной метрики мы используем здесь пространство $\mathfrak{M}$ последовательностей $v = (v_0, v_1, v_2, \dots)$ действительных чисел, имеющих ограниченное с весом $D \doteq (D_1, D_2, D_3, \dots)$ приращение, т. е.

$$\mathfrak{M} \ni v = (v_0, v_1, v_2, \dots) \iff \Delta v \doteq \left(v_0, \frac{v_1 - v_0}{D_1}, \frac{v_2 - v_1}{D_2}, \frac{v_3 - v_2}{D_3}, \dots \right) \in m,$$

где m — пространство ограниченных последовательностей. Пространство $\mathfrak{M}$, очевидно, линейное с привычными операциями покомпонентного сложения и умножения на числа, изоморфное пространству m : отображение $v \mapsto \Delta v$ является биекцией, сохраняющей операции. В $\mathfrak{M}$ определим норму $\|v\|_{\mathfrak{M}} = \|\Delta v\|_m = \sup_i |\Delta v_i|$, где $\Delta v_0 \doteq v_0$ и $\Delta v_i \doteq \frac{v_i - v_{i-1}}{D_i}$ при $i = 1, 2, \dots$. Далее в пространстве $\mathfrak{M}$ можно выделить выпуклый замкнутый конус $\mathfrak{M}_+$, состоящий из последовательностей с неотрицательными компонентами. Конус $\mathfrak{M}_+$ задает на $\mathfrak{M}$ порядок, который мы будем обозначать $\leq$, а именно: для любых $v, w \in \mathfrak{M}$ имеем $v \leq w$ тогда и только тогда, когда $w - v \in \mathfrak{M}_+$.

Пусть (X, ϱ_X) — метрическое пространство. Мы будем использовать следующие обозначения: $\overline{M} \doteq X \setminus M$ — дополнение к множеству $M \subset X$; $\text{clos}(X)$ — пространство всех непустых замкнутых подмножеств X ; $B_X^o(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) < r\}$, $B_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) \leq r\}$ — открытый и, соответственно, замкнутый шары в пространстве X радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 ; $B_X^o(x_0, 0) = \emptyset$; $\varrho_X(x, M) \doteq \inf_{y \in M} \varrho_X(x, y)$ — расстояние в X от точки x до множества $M \neq \emptyset$; $d_X(M_1, M_2) \doteq \sup_{x \in M_1} \varrho_X(x, M_2)$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества M_1 от M_2 ; $\text{dist}_X(M_1, M_2) \doteq \max \{d_X(M_1, M_2); d_X(M_2, M_1)\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами M_1, M_2 . В перечисленных обозначениях будем опускать индекс, если из изложения ясно, в каком пространстве определяется соответствующая величина.

Зафиксируем $\theta \in X$ и обозначим $B^o(r) \doteq B_X^o(\theta, r)$; $B(r) \doteq B_X(\theta, r)$. Метрическое пространство X будем предполагать неограниченным, т. е. будем считать, что $\sup_{x \in X} \varrho(\theta, x) = \infty$. Для каждого $r \geq 0$ определим оператор $\mathfrak{S}_r : \text{clos}(X) \rightarrow \text{clos}(X)$ равенством

$$\mathfrak{S}_r H \doteq H \cup \overline{B^o(r)}. \quad (2)$$

Очевидно, что для любого $H \in \text{clos}(X)$ и любых $r_2 > r_1 > 0$ выполнено $\mathfrak{S}_{r_2} H \subset \mathfrak{S}_{r_1} H$ и $H = \bigcap_{r>0} \mathfrak{S}_r H$. Далее, для произвольных $F, G \in \text{clos}(X)$ определим величину $\text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)$, свойства которой описывают следующие утверждения.

Л е м м а 1. [4] Пусть $F, G \in \text{clos}(X)$. Тогда:

- 1) для любого $r \geq 0$ выполнено $\text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) < \infty$;
- 2) функция $\mathbb{R}_+ \ni r \mapsto \text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \in \mathbb{R}_+$ не убывает;
- 3) для любого $r \geq 0$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leq \text{dist}(F, G)$$

и соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = \text{dist}(F, G).$$

Л е м м а 2. Для любых $r_2 > r_1 > 0$ и $F, G \in \text{clos}(X)$ справедливо неравенство

$$0 \leq \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_2} F, \mathfrak{S}_{r_2} G) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1} F, \mathfrak{S}_{r_1} G) \leq \text{dist}(\overline{B^o(r_2)}, \overline{B^o(r_1)}). \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость первого неравенства следует из пункта 2) леммы 1. Для доказательства второго неравенства покажем сначала, что для любого множества $H \in \text{clos}(X)$

$$\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1}H, \mathfrak{S}_{r_2}H) \leq \text{dist}(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}). \quad (4)$$

Оценим расстояние от произвольной точки $x \in \mathfrak{S}_{r_1}H$ до множества $\mathfrak{S}_{r_2}H$. Если $x \in B^o(r_1)$ или $x \in \overline{B^o(r_2)}$, то, очевидно, $\varrho(x, \mathfrak{S}_{r_2}H) = 0$. А в случае, когда $x \in B^o(r_2) \setminus B^o(r_1)$, имеем $\varrho(x, \mathfrak{S}_{r_2}H) \leq \varrho(x, \overline{B^o(r_2)}) \leq \text{dist}(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)})$. Следовательно, $d(\mathfrak{S}_{r_1}H, \mathfrak{S}_{r_2}H) \leq \text{dist}(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)})$. Поскольку $\mathfrak{S}_{r_2}H \subset \mathfrak{S}_{r_1}H$, то $d(\mathfrak{S}_{r_2}H, \mathfrak{S}_{r_1}H) = 0$. Таким образом, оценка (4) справедлива.

Пусть теперь F, G — произвольные замкнутые множества пространства X . Для любого $x \in \mathfrak{S}_{r_2}F$ (и, следовательно, $x \in \mathfrak{S}_{r_1}F$), используя свойства метрики Хаусдорфа, получаем:

$$\varrho(x, \mathfrak{S}_{r_2}G) \leq \varrho(x, \mathfrak{S}_{r_1}G) + \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1}G, \mathfrak{S}_{r_2}G) \leq \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1}F, \mathfrak{S}_{r_1}G) + \text{dist}(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}).$$

Аналогично, для любого $y \in \mathfrak{S}_{r_2}G$ выполнено

$$\varrho(y, \mathfrak{S}_{r_2}F) \leq \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1}G, \mathfrak{S}_{r_1}F) + \text{dist}(\overline{B^o(r_1)}, \overline{B^o(r_2)}).$$

Таким образом, второе неравенство в (3) также имеет место. $\square$

Для определения векторнозначной метрики в $\text{clos}(X)$ построим последовательность радиусов $\{r_i\}_{i=0}^\infty$ следующим образом: положим $r_0 = 0$; так как пространство X неограничено, то найдется элемент $x_1 \in X$, $x_1 \neq \theta$, такой, что $\varrho(\theta, x_1) \geq 1$, положим $r_1 = \varrho(\theta, x_1)$; в силу неограниченности X существует элемент $x_2 \in X$, $x_2 \notin B(r_1)$, такой, что $\varrho(\theta, x_2) \geq r_1 + 1$, положим $r_2 = \varrho(\theta, x_2)$; далее, найдется $x_3 \in X$, $x_3 \notin B(r_2)$, такой, что $\varrho(\theta, x_3) \geq r_2 + 1$, положим $r_3 = \varrho(\theta, x_3)$ и т. д. Получим последовательность неотрицательных чисел $\{r_i\}_{i=0}^\infty$ такую, что $r_i \rightarrow \infty$, более того, $r_{i+1} - r_i \geq 1$ для любого i . Положим $D_i \doteq \text{dist}(\overline{B^o(r_i)}, \overline{B^o(r_{i-1})})$. Следует отметить, что $D_i \geq r_i - r_{i-1}$.

Пусть теперь $F, G \in \text{clos}(X)$; определим $\mathfrak{d}_i(F, G) \doteq \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G)$, $i = 0, 1, \dots$; очевидно, что $\mathfrak{d}_0(F, G) = 0$. Сопоставим паре (F, G) последовательность $\mathfrak{d}(F, G) \doteq (\mathfrak{d}_0(F, G), \mathfrak{d}_1(F, G), \mathfrak{d}_2(F, G), \dots)$. Обозначим $\Delta \mathfrak{d}_i(F, G) \doteq \mathfrak{d}_i(F, G) - \mathfrak{d}_{i-1}(F, G)$, $i = 1, 2, \dots$, $\Delta \mathfrak{d}_0(F, G) \doteq \mathfrak{d}_0(F, G) = 0$, и положим $\Delta \mathfrak{d}(F, G) \doteq (\Delta \mathfrak{d}_1(F, G), \Delta \mathfrak{d}_2(F, G), \dots)$. Согласно лемме 2, для любого $i = 1, 2, \dots$ выполнено

$$0 \leq \frac{\Delta \mathfrak{d}_i(F, G)}{D_i} = \frac{\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}}F, \mathfrak{S}_{r_{i-1}}G)}{\text{dist}(\overline{B^o(r_i)}, \overline{B^o(r_{i-1})})} \leq 1,$$

т. е. для любых $F, G \in \text{clos}(X)$ имеем $\mathfrak{d}(F, G) \in \mathfrak{M}_+$. Построенная таким образом функция $\mathfrak{d}: \text{clos}(X) \times \text{clos}(X) \rightarrow \mathfrak{M}_+$ удовлетворяет условиям (1), поскольку при каждом $i = 0, 1, \dots$ расстояние по Хаусдорфу $\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i}F, \mathfrak{S}_{r_i}G)$ удовлетворяет аксиомам метрики.

Сходимость последовательности $\{F^k\}_{k=1}^\infty \subset \text{clos}(X)$ к множеству $F \in \text{clos}(X)$ относительно введенной метрики $\mathfrak{d}$ означает сходимость $\mathfrak{d}(F^k, F) \rightarrow 0$ в пространстве $\mathfrak{M}$, т. е. $\|\Delta \mathfrak{d}(F^k, F)\|_m \rightarrow 0$. Последовательность $\{F^k\}_{k=1}^\infty$ является фундаментальной относительно метрики $\mathfrak{d}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для любых $k, l > N$ выполнено неравенство $\|\Delta \mathfrak{d}(F^k, F^l)\|_m \leq \varepsilon$.

Т е о р е м а 1. Если пространство (X, ϱ) полное, то пространство $(\text{clos}(X), \mathfrak{d})$ также является полным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{F^k\}_{k=1}^\infty \subset \text{clos}(X)$ — некоторая фундаментальная (относительно метрики $\mathfrak{d}$) последовательность. Покажем сначала, что для любого $i = 0, 1, \dots$

последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i} F^k\}_{k=1}^\infty$ будет фундаментальной в метрике Хаусдорфа. Зафиксируем $i = i_0$ и выберем $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{F^k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна, то для $\bar{\varepsilon} = \varepsilon(D_1 + D_2 + \dots + D_{i_0})^{-1}$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $k, l > N$ и $i = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\frac{\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^k, \mathfrak{S}_{r_i} F^l) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^l)}{D_i} \leq \bar{\varepsilon}. \quad (5)$$

Учитывая, что $\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_0} F^k, \mathfrak{S}_{r_0} F^l) = 0$, из (5) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1} F^k, \mathfrak{S}_{r_1} F^l)}{D_1} &\leq \bar{\varepsilon}, \quad \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1} F^k, \mathfrak{S}_{r_1} F^l) \leq \bar{\varepsilon} D_1; \\ \frac{\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_2} F^k, \mathfrak{S}_{r_2} F^l) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_1} F^k, \mathfrak{S}_{r_1} F^l)}{D_2} &\leq \bar{\varepsilon}, \quad \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_2} F^k, \mathfrak{S}_{r_2} F^l) \leq \bar{\varepsilon} D_2 + \bar{\varepsilon} D_1; \\ &\dots \\ \frac{\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i_0}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i_0}} F^l) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i_0-1}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i_0-1}} F^l)}{D_{i_0}} &\leq \bar{\varepsilon}, \\ \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i_0}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i_0}} F^l) &\leq \bar{\varepsilon} D_{i_0} + \dots + \bar{\varepsilon} D_1 = \bar{\varepsilon}(D_{i_0} + \dots + D_1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i} F^k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $(\text{clos}(X), \text{dist})$ для любого $i = 0, 1, \dots$.

Поскольку пространство (X, ϱ) полное, то пространство $(\text{clos}(X), \text{dist})$ также является полным (см., например, [5]), и, значит, последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i} F^k\}_{k=1}^\infty$ сходится в метрике Хаусдорфа при каждом i к некоторому замкнутому множеству; обозначим это множество $\mathcal{F}_{r_i}$. Отметим, что $\overline{B^o(r_i)} \subset \mathcal{F}_{r_i}$.

Для каждого i определим множество $F_{r_i} \doteq \mathcal{F}_{r_i} \cap B^o(r_i)$. С возрастанием i множества F_{r_i} «расширяются» следующим образом (см. доказательство теоремы 1 в [4]): для любых $j > i$ выполнено $F_{r_i} = F_{r_j} \cap B^o(r_i)$, т. е. F_{r_i} есть подмножество F_{r_j} , содержащее элементы x такие, что $\varrho(\theta, x) < r_i$. Далее, построим множество $F \doteq \bigcup_{i=0}^\infty F_{r_i}$; это множество непусто, замкнуто (см. доказательство теоремы 1 в [4]) и $F_{r_i} = F \cap B^o(r_i)$, $\mathcal{F}_{r_i} = \mathfrak{S}_{r_i} F$ для любого i .

Покажем, что последовательность $\{F^k\}_{k=1}^\infty$ сходится к множеству F . Для произвольного ε , в силу фундаментальности последовательности $\{F^k\}_{k=1}^\infty$ относительно метрики $\mathfrak{d}$, найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $k, l > N$ и любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^k, \mathfrak{S}_{r_i} F^l) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^l) \leq \varepsilon/2. \quad (6)$$

Далее, для каждого $i = 1, 2, \dots$ последовательность $\{\mathfrak{S}_{r_i} F^k\}$ сходится в метрике Хаусдорфа к множеству $\mathfrak{S}_{r_i} F$, поэтому для выбранного ε найдется такой номер $l = l(i)$, что

$$\text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^l, \mathfrak{S}_{r_i} F) \leq \varepsilon/4 \quad \text{и} \quad \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^l, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F) \leq \varepsilon/4. \quad (7)$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $l > N$. Тогда из неравенств (6) и (7), используя свойства метрики Хаусдорфа, для любого $i = 1, 2, \dots$ получаем:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^k, \mathfrak{S}_{r_i} F) - \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F) &\leq \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^k, \mathfrak{S}_{r_i} F^l) + \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_i} F^l, \mathfrak{S}_{r_i} F) - \\ &- \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^k, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^l) + \text{dist}(\mathfrak{S}_{r_{i-1}} F^l, \mathfrak{S}_{r_{i-1}} F) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует сходимость $\mathfrak{d}(F^k, F) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. $\square$

П р и м е р.

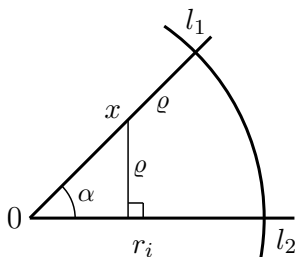


Рис. 1

Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $\theta = 0$. Положим $r_i = i$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда $D_i = 1$ для любого $i = 1, 2, \dots$. Найдем в $(\text{clos}(\mathbb{R}^2), \mathfrak{d})$ расстояние между двумя лучами l_1 и l_2 , выходящими из нуля и образующими угол α . Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha \in [0, \pi/2)$ (см. рис. 1). Очевидно, $\mathfrak{d}_0(l_1, l_2) = 0$. Найдем $\mathfrak{d}_1(l_1, l_2) = \text{dist}(\mathfrak{S}_1 l_1, \mathfrak{S}_1 l_2)$. Для любой точки $x \in \mathfrak{S}_1 l_1$ имеем $\varrho(x, \mathfrak{S}_1 l_2) = \min\{\varrho(x, l_2), \varrho(x, \overline{B^o(1)})\}$. Легко заметить, что $\sup_{x \in \mathfrak{S}_1 l_1} \varrho(x, \mathfrak{S}_1 l_2)$ достигается в точке

x равноудаленной от l_2 и $\overline{B^o(1)}$, откуда, после несложных вычислений, получаем $d(\mathfrak{S}_1 l_1, \mathfrak{S}_1 l_2) = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

В силу симметрии, $d(\mathfrak{S}_1 l_2, \mathfrak{S}_1 l_1) = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$, и, значит, $\mathfrak{d}_1(l_1, l_2) = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$. Рассуждая аналогично, получим $\mathfrak{d}_2(l_1, l_2) = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$, и т.д. Таким образом, при $\alpha \in [0, \pi/2)$ имеем

$$\mathfrak{d}(l_1, l_2) = \left(0, \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}, \frac{2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}, \dots\right) \text{ и } \Delta \mathfrak{d}_i(l_1, l_2) = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Далее, если $\alpha \in [\pi/2, \pi]$, то $\mathfrak{d}_0(l_1, l_2) = 0$ и $\mathfrak{d}_i(l_1, l_2) = i/2$, $i = 1, 2, \dots$, т. е.

$$\mathfrak{d}(l_1, l_2) = \left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right) \text{ и } \Delta \mathfrak{d}_i(l_1, l_2) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurepa D.R. Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo – distanciés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1934. V. 198. P. 1563–1565.
2. Proinov P.D. A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 103. 51 p. doi:10.1186/1687-1812-2013-103.
3. Asadi M., Soleimani H., Vaezpour S.M. An Order on Subsets of Cone Metric Spaces and Fixed Points of Set-Valued Contractions // Fixed Point Theory and Applications. 2009. 8 p. doi:10.1155/2009/723203.
4. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 10. doi:10.1186/1687-1812-2013-10.
5. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. 278 pp.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00877), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

Панасенко Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: panlena_t@mail.ru

UDC 515.124+515.126.83

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-378-383

ONE EXAMPLE OF A VECTOR-VALUED METRIC IN THE SPACE OF NONEMPTY CLOSED SUBSETS OF A METRIC SPACE

© E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko

In the space of nonempty closed subsets of a given metric space, we define a vector-valued metric which differs from the known vector generalizations of the Hausdorff metric. The metric proposed appears in the analysis of multi-valued maps with possibly unbounded images. It allows to get more information about distances between elements of the corresponding sets and turns out to be convenient in fixed point theorems for multi-valued maps.

Key words: space of nonempty closed subsets of a metric space; vector-valued metric; complete metric space.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-00877) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. Kurepa D.R. Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo – distanciés // C. R. Acad. Sci. Paris, 1934. V. 198. P. 1563–1565.
2. Proinov P.D. A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 103. 51 p. doi:10.1186/1687-1812-2013-103.
3. Asadi M., Soleimani H., Vaezpour S.M. An Order on Subsets of Cone Metric Spaces and Fixed Points of Set-Valued Contractions // Fixed Point Theory and Applications. 2009. 8 p. doi:10.1155/2009/723203.
4. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space // Fixed Point Theory and Applications. 2013. Iss. 10. doi:10.1186/1687-1812-2013-10.
5. Castaing C., Valadier M. Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977. 278 pp.

Received 21 March 2016.

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute for Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru

Panasenko Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavina, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: panlena_t@mail.ru

ШАРНИРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© М. Д. Ковалёв

Поставлены вопросы из теории вещественных квадратичных отображений. Вопросы возникают при рассмотрении геометрических свойств шарнирно-рычажных конструкций и пока остаются открытыми.

Ключевые слова: шарнирно-рычажные конструкции; рычажное отображение; квадратичные отображения.

1. Введение

Сначала поставим основной вопрос на быденном языке, а потом формализуем его математически. Мы ограничимся рассмотрением плоских конструкций. Эти конструкции состоят из прямолинейных стержней, соединенных между собой и с точками плоскости шарнирами, допускающими произвольное вращение стержней в плоскости. На рисунках стержни (рычаги) есть отрезки, закрепленные в плоскости шарниры — крестики, незакрепленные (свободные) шарниры — кружочки. Шарниры расположены лишь на концах рычагов, и на каждом конце рычага имеется шарнир. Мы допускаем пересечение рычагов и совпадение различных шарниров при движении конструкции. На рис. 1а) показана простейшая не допускающая непрерывного движения (неизгибаемая) конструкция в плоскости. На рис. 1б) показана конструкция, допускающая непрерывное движение. В теории механизмов она называется шарнирным четырехзвенником.

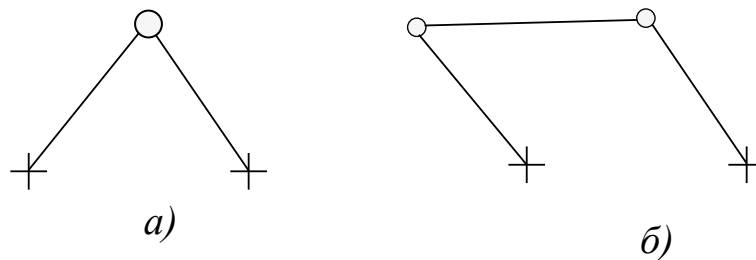


Рис. 1:

Рассмотрим конструкцию рис. 1а). Если ее свободный шарнир не лежит на прямой, соединяющей закрепленные, то ее очевидным образом можно собрать и при произвольной достаточно малой ошибке в длинах рычагов. Эту конструкцию можно назвать геометрически устойчивой. Однако она собирается не единственным способом (рис. 2а)). Вторая сборка показана пунктиром. Длины всех рычагов и точки закрепления при этом неизменны. Единственным образом эту конструкцию можно собрать, лишь если все три ее шарнира лежат на одной прямой (рис. 2б)). Но в этом случае конструкция геометрически неустойчива. А именно, при сколь угодно малом уменьшении длины одного ее рычага мы уже не сможем собрать конструкцию!

Основной вопрос таков — существуют ли геометрически устойчивые конструкции, собираемые лишь единственным способом?

Ниже мы проведем математическую формализацию этого вопроса, выявим его связь со свойствами квадратичных отображений, затронем близкие вопросы.

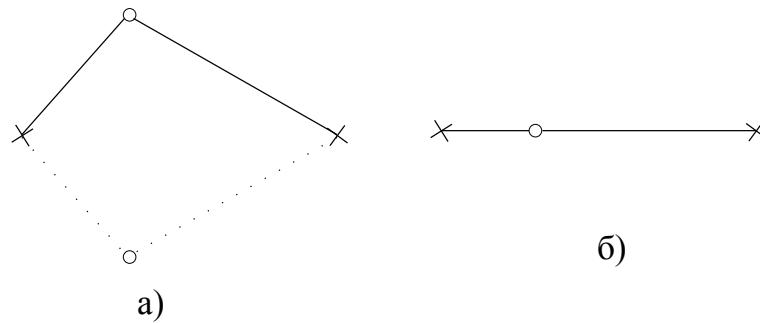


Рис. 2:

2. Шарнирные схемы и шарнирники.

Рассмотрим абстрактный связный граф $G_1(V_1, E_1)$ с непустым множеством вершин $\{v_1, \dots, v_m\} = V_1$, отвечающих свободным шарнирам¹. Его ребра $v_i v_j \in E_1, |E_1| = r_1$ отвечают рычагам шарнирного устройства, смежным лишь свободным шарнирам. И пусть связный граф $G(V, E)$ получается добавлением к $G_1(V_1, E_1)$ вершин $v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$, составляющих непустое множество V_2 , и некоторых ребер $v_i v_j, v_i \in V_2, v_j \in V_1$, составляющих также непустое множество E_2 . Добавленные вершины отвечают закрепленным шарнирам, а ребра — исходящим из них рычагам. Отметим, что из каждой добавленной вершины исходит хотя бы одно ребро, и каждое из добавленных ребер соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2 . Граф $G(V, E), V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2$, мы называем *шарнирной структурной схемой (ШСС)*. Вершины $v_i \in V_2$ будем называть закрепленными, а $v_j \in V_1$ — свободными. Далее мы также будем называть ребра шарнирной схемы — рычагами, а вершины — шарнирами.

Закрепленной шарнирной схемой (ЗШС) в плоскости назовем ШСС, каждой закрепленной вершине $v_i \in V_2$ которой сопоставлена точка $p_i \in \mathbb{R}^2$. Теперь можно рассмотреть всевозможные проектирования абстрактного графа (ШСС) $G(V, E)$ в плоскость, сопоставляющие закрепленным вершинам уже выбранные точки, свободным вершинам $v_i \in V_1$ произвольные точки с радиус-векторами $p_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, а ребрам графа $v_i v_j$ — отрезки $p_i p_j$ прямых. Пусть задана ЗШС, тогда существует взаимнооднозначное соответствие между множеством всех проектирований графа $G(V, E)$ в плоскость и точками $p = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)$ $2m$ -мерного евклидова пространства параметров $\mathbb{R}^{2m}$. Одно такое проектирование, целиком определяемое заданием пары (G, p) , мы называем шарнирником. (В англоязычной литературе принят термин «framework».) Образ графа, получающийся при проектировании, можно мыслить как шарнирную конструкцию в плоскости.

Пусть $|E| = r$, тогда закрепленная шарнирная схема определяет отображение $F: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2, v_i v_j \in E$, где в правой части стоят скалярные квадраты векторов. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным* (в англоязычной литературе — «rigidity mapping» или «edge function» [3], [4]). Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных механизмов. Точки пространства $\mathcal{R}^r$ мы называем *кинематическими шарнирными схемами (КШС)*. Образ $F(\mathbb{R}^{2m})$ рычажного отображения назовем множеством C существенных КШС. Если $\dim C = r$, то рычажное отображение F и соответствующая ЗШС называются *правильными*. Правильная ЗШС называется *изостатической*, если $2m = r$.

Полный прообраз $F^{-1}(d)$ точки при рычажном отображении называют *конфигурационным пространством КШС d* . При таком подходе каждой компоненте связности полного прообраза $F^{-1}(d)$ отвечает определенное *шарнирное устройство*. Если компонента связно-

¹Эта формализация изложена автором в работах [1], [2]

сти одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму*. В противном случае компонента связности состоит из бесконечного числа точек, и ей отвечает *шарнирный механизм*. Такую компоненту связности множества $F^{-1}(d)$ называют *конфигурационным пространством шарнирного механизма*. Точки, составляющие эту компоненту, — шарнирники — суть положения шарнирного механизма. Конфигурационное пространство шарнирного механизма является (линейно) связным, что отвечает возможности перевести непрерывно механизм из одного своего положения в любое другое.

Одной КШС может отвечать несколько шарнирных устройств. Машиноведы в этом случае говорят о различных сборках шарнирного механизма. При нашем подходе естественнее вместо различныхборок одного механизма говорить о различных устройствах с одной и той же КШС.

3. Геометрическая устойчивость

Кинематическая шарнирная схема d называется *геометрически устойчивой*, если $d \in \text{Int}C$, в противном случае — геометрически неустойчивой. Далее, говоря о геометрической устойчивости, мы часто будем опускать слово «геометрическая». Для неустойчивой КШС возможно сколь угодно малое изменение квадратов длин рычагов, приводящее к несущественной КШС, т. е. к такой, которой не отвечает шарнирников. Причем, квадраты d_{ij} длин некоторых рычагов этой несущественной КШС могут оказаться отрицательными, и тогда она не будет лежать в ортанте $Q: d_{ij} \geq 0$.

Плоский шарнирник p (*геометрически устойчив*), если для любой его шаровой ε -окрестности $O(p, \varepsilon) \subset R^{2m}$ найдется δ -окрестность $O(d, \delta) \subset \mathcal{R}^r$ точки $d = F(p)$ целиком лежащая в образе $F(O(p, \varepsilon))$. Если достаточно мало изменить длины рычагов устойчивого шарнирника, то шарнирник с измененными длинами рычагов можно будет собрать таким образом, что все его шарниры окажутся близки к соответствующим шарнирам исходного шарнирника. Неправильной ЗШС не отвечает устойчивых шарнирников. Этим обстоятельством и обуславливается практическая важность правильных ЗШС. Из неустойчивости КШС d , очевидно, следует неустойчивость любого шарнирника $p \in F^{-1}(d)$.

Кратностью КШС d называется количество точек в прообразе $F^{-1}(d)$; КШС однократна, если ей отвечает всего лишь одна шарнирная ферма. Вопрос, поставленный во введении, можно сформулировать так.

В о п р о с 1. Возможна ли однократная и устойчивая КШС?

Кинематической схеме рис. 2б) отвечает единственный шарнирник. Эта схема неустойчива, ибо при произвольном уменьшении длин рычагов ей уже не будет отвечать ни одного шарнирника. КШС рис. 2а) устойчива, но ей отвечает два зеркально симметричных шарнирника.

В о п р о с 2. Возможна ли устойчивая КШС d , для которой каждый шарнирник $p \in F^{-1}(d)$ неустойчив?

Эти вопросы пока остаются открытыми. Отметим, что КШС d , которой отвечает изостатическая ферма, с необходимостью устойчива. В одномерном случае множества правильных и изостатических ЗШС совпадают. ЗШС, составляющие эти множества, имеют всего лишь один закрепленный шарнир, а их графы не содержат циклов. В этом случае ответы на вопросы 1 и 2 отрицательны.

Ответы на вопросы 1, 2 неизвестны даже для распрямленной ЗШС, изображенной на рис. 3. *Распрямленной* мы называем ЗШС, все закрепленные шарниры которой лежат на одной прямой. Шарнирник называем *распрямленным*, если все его шарниры лежат на одной прямой.

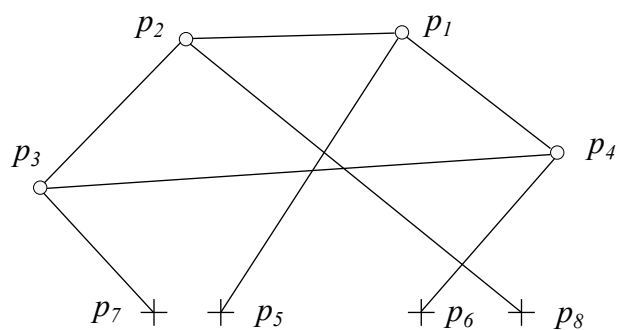
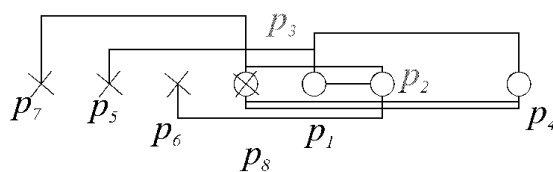
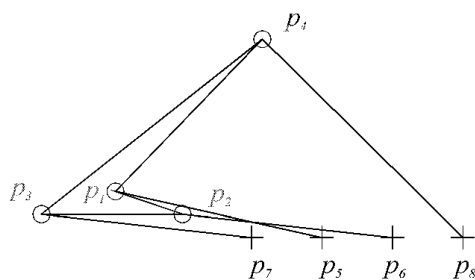


Рис. 3:

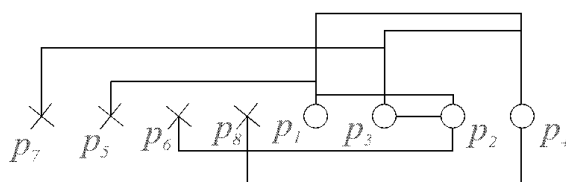
Отметим, что эта ЗШС обладает свойствами, не имеющими места для простейших плоских ЗШС. А именно, автором [5] было установлено существование для нее устойчивой распрямленной фермы, она изображена на рис. 4а). На рис. 4б) изображена нераспрямленная ферма с той же самой КШС. Также для этой ЗШС обнаружен неустойчивый распрямленный шарнирник, однако, устойчивый по «шевелению» длины каждого своего рычага в отдельности. Этот шарнирник показан на рис. 4в).



а)



б)



в)

Рис. 4:

4. Квадратичные отображения.

Если рычажное отображение является неоднородным квадратичным отображением, т. е., задается по некоторым координатам неоднородными многочленами второй степени, то ниже пойдет речь об однородных квадратичных отображениях. Однородные квадратичные отображения задаются по координатам квадратичными формами.

Очевидно, однократные КШС для распрямленной ЗШС могут отвечать лишь распрямленным шарнирникам. ЗШС рис. 3 является простейшей изостатической схемой, не содержащей трехвершинников. *Трехвершинником* мы называем либо треугольный цикл графа $G(V, E)$ с вершинами в свободных шарнирах, либо совокупность свободного шарнира и двух смежных ему закрепленных. Распрямленный шарнирник, содержащий трехвершинник, очевидно, геометрически неустойчив.

Попытка решить вопрос 1 для распрямленной схемы рис. 3 приводит к следующему. Пусть закрепленные шарниры имеют координаты: $p_5 = (0, 0)$, $p_6 = (1, 0)$, $p_7 = (v_7, 0)$, $p_8 = (v_8, 0)$. Рассмотрим распрямленный шарнирник p^0 с координатами свободных шарниров x_1, x_2, x_3, x_4 . Имеем $\text{Rank } dF(p^0) = 4$, и касательное многообразие $T(p^0) = dF(p^0)(p - p^0) \subset \mathcal{R}^r$, $p \in R^{2m}$ отображения в этой точке также четырехмерно. Ядерное многообразие L касательного отображения в точке p^0 , т. е., многообразие векторов $p - p^0$, для которых $dF(p^0)(p - p^0) = 0$, состоит из векторов, имеющих нулевые абсциссы в R^2 , и ординаты, принимающие произвольные вещественные значения: $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4$. Его образ задается следующим образом:

$$\mathcal{K} = [y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, (y_1 - y_2)^2, (y_1 - y_4)^2, (y_2 - y_3)^2, (y_3 - y_4)^2].$$

Проекция этого конуса на четырехмерное координатное подпространство $\mathcal{R}^4$, дополнительное к $T(p^0)$, является конусом $\pi\mathcal{K}$ [5]:

$$\begin{aligned} \pi\mathcal{K} = & \left[-\frac{(x_1 - x_2)y_1^2}{x_1} + \frac{(x_1 - x_2)y_2^2}{x_2 - 1} + (y_1 - y_2)^2, \right. \\ & -\frac{(x_1 - x_4)y_1^2}{x_1} + \frac{(x_1 - x_4)y_4^2}{x_4 - v_8} + (y_1 - y_4)^2, \\ & -\frac{(x_2 - x_3)y_2^2}{x_2 - 1} + \frac{(x_2 - x_3)y_3^2}{x_3 - v_7} + (y_2 - y_3)^2, \\ & \left. -\frac{(x_3 - x_4)y_3^2}{x_3 - v_7} + \frac{(x_3 - x_4)y_4^2}{x_4 - v_8} + (y_3 - y_4)^2 \right], \\ & (y_1, y_2, y_3, y_4) \in L. \end{aligned} \quad (1)$$

с вершиной в точке $d^0 = F(p^0)$.

Топологическая степень рычажного отображения равна нулю [1]. Если допустить однократность точки $d^0 = F(p^0)$, то выпященное выше отображение $R^4 \rightarrow \mathcal{R}^4$ должно также иметь степень нуль, и в случае геометрической устойчивости КШС d^0 быть отображением на.

Возможно ли это? В размерностях от одного до трех не существует квадратичных (однородных) отображений на степени нуль. До последнего времени вопрос существования таких отображений в высших размерностях оставался открытым. Недавно А.В. Арутюновым и С.Е. Жуковским наконец были построены в размерностях начиная с пяти квадратичные отображения на, имеющие степень нуль. Но, интересующий нас, четырехмерный случай пока остается неисследованным!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН. Серия: Математика. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.
2. Ковалев М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. 2001. № 4. С. 33–51.
3. Asimov L., Roth B. The rigidity of Graphs. II. // Journal of Mathematical analysis and applied. 1979. V. 68. I. 1. P. 171–190.
4. Crapo H., Whiteley W. Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction // Structural Topology. 1982. № 6. P. 43–82.
5. Ковалев М.Д. О распрямленных шарнирных конструкциях // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 6. С. 71–98.

Поступила в редакцию 1 февраля 2016 г.

Ковалёв Михаил Дмитриевич, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики, e-mail: mkovalev@mtu-net.ru

UDC 514+531.8

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-384-389

HINGED CONSTRUCTIONS AND QUADRATIC MAPPINGS

© M. D. Kovalev

Some questions on real quadratic mappings are formulated. These questions appear from the analysis of geometrical properties of hinged constructions, and are still open.

Key words: hinged constructions; rigidity mapping; quadratic mappings.

REFERENCES

1. Kovalev M.D. Geometricheskaya teoriya sharnirnyh ustrojstv // Izvestiya RAN. Seriya: Matematika. 1994. T. 58. № 1. S. 45–70.
2. Kovalev M.D. Voprosy geometrii sharnirnyh ustrojstv i skhem // Vestnik MGTU. Seriya Mashinostroenie. 2001. № 4. S. 33–51.
3. Asimov L., Roth B. The rigidity of Graphs. II. // Journal of Mathematical analysis and applied. 1979. V. 68. I. 1. P. 171–190.
4. Crapo H., Whiteley W. Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction // Structural Topology. 1982. № 6. P. 43–82.
5. Kovalev M.D. O raspryamlenykh sharnirnykh konstrukciyah // Matematicheskij sbornik. 2004. T. 195. № 6. S. 71–98.

Received 1 February 2016.

Kovalev Mikhail Dmitrievich, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Discrete Mathematics Department, e-mail: mkovalev@mtu-net.ru

МЕТОД МНОГОЛИСТНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© С. В. Корнев, Н. В. Лой

В настоящей работе предлагается использовать метод многолистных направляющих функций при исследовании бифуркационной задачи для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; бифуркации периодических решений; многолистная направляющая функция; бифуркационный индекс.

1. Введение

Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения задачи о существовании периодических решений дифференциальных уравнений является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали М.А. Красносельский и А.И. Перов (см., например, [1, 2]). За более, чем полувековую историю своего существования, метод был развит рядом исследователей в различных направлениях. Отметим в этой связи одно из самых значительных развитий этого подхода на случай дифференциальных уравнений, связанное с понятием многолистной направляющей функции Д.И. Рачинского (см. [3]).

В настоящее время достаточно активно развиваются различные методы исследования бифуркационного феномена в динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями и включениями (см., например, [4-11]).

В настоящей работе, предлагается использовать многолистную направляющую функцию для исследования задачи о бифуркации периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений. Заметим, что различные модификации метода многолистных векторных направляющих функций применялись ранее только в задаче о существовании периодических решений (см., например, [12, 13]).

2. Предварительные сведения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [5, 14-16]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X) , (Y, d_Y) и (Z, d_Z) — метрические пространства. Символами $P(Y)$ и $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых и компактных подмножеств пространства Y . Если Y — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y .

О п р е д е л е н и е 1. Многозначное отображение (мультиотображение) $F: X \rightarrow P(Y)$ называется:

- (i) *полу непрерывным сверху (пн. св.)*, если для любого открытого множества $V \subset Y$ множество

$$F_+^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \subset V\}$$

является открытым в X ;

(ii) *вполне пн. св.*, если оно пн. св. и каждое ограниченное множество $U \subset X$ переводит в относительно компактное множество $F(U)$ пространства Y ;

(iii) *компактным*, если множество

$$F(X) := \bigcup_{x \in X} F(x)$$

является относительно компактным в Y .

Множество $M \in K(Y)$ называется *асферичным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непрерывное отображение единичной сферы $\sigma: S^n \rightarrow O_\delta(M)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, может быть продолжено до непрерывного отображения шара $\tilde{\sigma}: B^{n+1} \rightarrow O_\varepsilon(M)$, где $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1\}$, $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| \leq 1\}$ и $O_\delta(M)$ [$O_\varepsilon(M)$] обозначает δ -окрестность [соотв., ε -окрестность] множества M .

Множество $A \subset X$ называется *стягиваемым*, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $h: A \times [0, 1] \rightarrow A$ такое, что $h(x, 0) = x$, $h(x, 1) = x_0$ для всех $x \in A$. Пространство X называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Множество $A \subset X$ называется R_δ -множеством, если его можно представить в виде пересечения убывающей последовательности компактных, стягиваемых множеств, т. е. $A = \bigcap \{A_n: n = 1, 2, \dots\}$.

Множество $A \subset X$ называется *ретрактом* пространства X , если существует такое непрерывное отображение (ретракция) $r: X \rightarrow A$, сужение которого на A является тождественным, т. е. $r(x) = x$ для всех $x \in A$. Множество $A \subset X$ называется *окрестностным ретрактом*, если существует ретракция $r: O(A) \rightarrow A$, где $O(A)$ – некоторая окрестность A .

Вложением пространства X в пространство Y называется такое отображение $h: X \rightarrow Y$, которое обладает свойствами:

- 1⁰ $h(X) \subset Y$ – замкнутое множество;
- 2⁰ $\hat{h}: X \rightarrow h(X)$ – гомеоморфизм.

Напомним, что пространство X называется *абсолютным ретрактом*, или *AR-пространством*, если для любого метрического пространства Y и любого вложения $h: X \rightarrow Y$ множество $h(X)$ является ретрактом пространства Y . Если же множество $h(X)$ является окрестностным ретрактом, то пространство X называется *абсолютным окрестностным ретрактом*, или *ANR-пространством*.

Отметим, что класс ANR-пространств достаточно широк. В частности, всякий конечный полиэдр является ANR-пространством.

Более того, конечномерный компакт является ANR-пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем. В частности, каждое компактное многообразие является ANR-пространством и, кроме того, если X_0, X_1 – ANR-пространства и $X_0 \cap X_1$ – ANR-пространство, то объединение $X_0 \cup X_1$ также является ANR-пространством.

О п р е д е л е н и е 2. Пн. св. мультиотображение $G: X \rightarrow K(Y)$ называется *J-мультиотображением*, или $G \in J(X, Y)$, если для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является асферичным.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть Y является ANR-пространством. Тогда пн. св. многозначное отображение $G: X \rightarrow K(Y)$ является *J-отображением* в каждом из следующих случаев:

для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является

- (а) выпуклым множеством;
- (б) AR-пространством;
- (в) стягиваемым множеством;
- (г) R_δ -множеством.

В частности, всякое непрерывное однозначное отображение $\sigma: X \rightarrow Y$ является *J-отображением*.

О п р е д е л е н и е 3. Классом $CJ(X, Y)$ называется совокупность мультиотображений $F: X \rightarrow K(Y)$ вида $F = f \circ G$, где $G \in J(X, Z)$ и $f: Z \rightarrow Y$ – непрерывное отображение.

Пусть $U \subset X$ – открытое ограниченное множество, $F: \bar{U} \rightarrow K(X)$ – компактное CJ – мультиотображение такое, что $x \notin F(x)$ для всех $x \in \partial U$. Тогда определена *топологическая степень* $\deg(i - F, \bar{U})$ многозначного векторного поля, порожденного мультиотображением F (здесь i – отображение вложения). Эта топологическая характеристика обладает всеми основными свойствами классической топологической степени Брауэра (см., например, [5]).

Рассмотрим следующее включение:

$$x \in F(x, \mu), \quad (1)$$

где $F: X \times \mathbb{R} \rightarrow K(X)$ является CJ -мультиотображением, а $\mu \in \mathbb{R}$ – параметром.

Пусть справедливы следующие предположения:

- (F1) мультиотображение F является вполне пн. св. и $0 \in F(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$;
- (F2) существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого μ , $0 < |\mu| < \varepsilon_0$ найдется $\delta_\mu > 0$ такое, что $x \notin F(x, \mu)$ для всех $x \in B_X(0, \delta_\mu) \setminus \{0\}$, где $B_X(0, \delta_\mu)$ обозначает замкнутый шар в X радиуса δ_μ с центром в нуле;
- (F3) бифуркационный индекс в точке $(0, 0)$, определяемый равенством

$$Bi(F; (0, 0)) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \deg(i - F, B_X(0, \delta_\mu)) - \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \deg(i - F, B_X(0, \delta_\mu)),$$

отличен от нуля.

Символом $\mathfrak{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (1), т. е.

$$\mathfrak{S} = \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R}: x \neq 0 \text{ и } x \in F(x, \mu)\}.$$

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены условия (F1) – (F3). Тогда существует связное множество $\mathcal{R} \subset \mathfrak{S}$ такое, что $(0, 0) \in \bar{\mathcal{R}}$ и либо $\mathcal{R}$ является неограниченным, либо $\bar{\mathcal{R}} \ni (0, \mu_*)$ для некоторого $\mu_* \neq 0$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$x'(t) = f(t, x(t), \mu) \quad (2)$$

в предположении, что

- (f1) непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является T -периодическим по первому аргументу ($T > 0$);
- (f2) существует $c > 0$ и положительная функция $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такие, что $h(0) = 0$ и

$$|f(t, x, \mu)| \leq c h(|\mu|) |x|$$

для всех $(t, x, \mu) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;

- (f3) для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ уравнение (2) имеет решение $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $x(0) = x(T) = 0$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n > 2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = i - q$, где i – тождественный оператор. Ниже элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ обозначаются через ξ . Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} = h(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \\ \frac{d\rho}{dt} = w(t, \xi, \varphi, \rho, \mu), \end{cases} \quad (3)$$

где непрерывные функции g, h, w являются T -периодичными по первому аргументу.

Для $(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ символом Σ_z обозначим множество решений следующей задачи:

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu), \\ x(0) = z. \end{cases}$$

Известно, что Σ_z является R_δ -множеством в пространстве $C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ (см., например, [5, 15]). Определим мультиотображение $\Sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ как

$$\Sigma(z, \mu) = \Sigma_{(z, \mu)}.$$

Тогда Σ является J -мультиотображением (см., например, [5, 15]).

Определим мультиоператор $U_T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ сдвига по траекториям уравнения (2) следующим образом

$$U_T(z, \mu) = \{x(T): x \in \Sigma(z, \mu)\}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) эквивалентно включению

$$z \in U_T(z, \mu). \quad (4)$$

Из условий (f1) – (f2) следует, что U_T является CJ -мультиоператором (см., например, [5, 15]). Кроме того, $0 \in U_T(0, \mu)$ для всех $\mu \in \mathbb{R}$. Символом $\mathcal{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (4), т. е.

$$\mathcal{S} = \{(z, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}: z \neq 0 \text{ и } z \in U_T(z, \mu)\}.$$

4. Основной результат

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi, \rho): \varphi \in (-\infty, \infty), \rho \in (0, \infty)\}.$$

На Π для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ пусть $W: \Pi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задает скалярную непрерывно дифференцируемую функцию $W(\cdot, \cdot, \mu)$, для которой

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} W(\varphi, \rho, \mu) > 0, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi, \quad (5)$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = W(\varphi, \rho, \mu) + 2\pi, \quad (\varphi, \rho) \in \Pi. \quad (6)$$

Из (6) легко следует, что

$$\nabla W(\varphi + 2\pi, \rho, \mu) = \nabla W(\varphi, \rho, \mu),$$

где $\nabla W(\varphi, \rho, \mu) = \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \rho} \right)$.

Для $r_* > 0$ определим область $G(r_*) = \{z \in \mathbb{R}^n : |pz| < r_*, |qz| < r_*\}$.

О п р е д е л е н и е 4. Пара функций $\{V(\xi, \mu), W(\varphi, \rho, \mu)\}$, обладающих свойствами (5)–(6), называется *локальной многолистной направляющей функцией* задачи (4) относительно $(0, 0)$, если для всех $\mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\frac{\partial V(0, \mu)}{\partial \xi} = 0$, и если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\mu : 0 < |\mu| \leq \varepsilon_0$ найдется $r_\mu > 0$ такое, что:

(a1) для $0 < |pz| < r_\mu$ и $|qz| < r_\mu$:

$$\left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle < 0;$$

(a2) для $0 < |qz| < r_\mu$:

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} h(t, 0, \varphi, \rho, \mu) + \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \rho} w(t, 0, \varphi, \rho, \mu) < 0;$$

(a3) функции $\alpha(t, \mu)$ и $\beta(t, \mu)$, определяемые равенствами

$$\alpha(t, \mu) = \sup_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qf(t, z, \mu) \right\rangle,$$

$$\beta(t, \mu) = \inf_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz, \mu)}{\partial qz}, qf(t, z, \mu) \right\rangle,$$

являются непрерывными;

(a4) существует такое целое число N_μ , что

$$2\pi(N_\mu - 1) < \int_0^T \alpha(s, \mu) ds, \int_0^T \beta(s, \mu) ds < 2\pi N_\mu.$$

Из приведенного определения следует, что для каждого $\mu : 0 < |\mu| \leq \varepsilon_0$ корректно определена топологическая степень $\deg\left(\frac{\partial V(\cdot, \mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)\right)$ (см., например, [2]). Обозначим

$$\text{ind}V = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot, \mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)\right) - \lim_{\mu \rightarrow 0^-} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot, \mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)\right).$$

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия (f1) – (f3). Предположим, что для уравнения (2) можно указать локальную многолистную направляющую функцию относительно $(0, 0)$ такую, что $\text{ind}V \neq 0$. Тогда существует связное множество $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ такое, что:

(i) каждой точке $(z, \mu) \in \bar{\mathcal{C}}$ соответствует решение $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ уравнения (2), для которого $x(0) = x(T) = z$;

(ii) $(0, 0) \in \bar{\mathcal{C}}$ и либо $\mathcal{C}$ неограничено, либо $\bar{\mathcal{C}} \ni (0, \mu_*)$ для некоторого $\mu_* \neq 0$.

В частности, существует последовательность $\{x_n\}$ решений уравнения (2), $\{z_n\} \subset \mathcal{S}$, $x_n(0) = x_n(T) = z_n$, такая, что $\{x_n\}$ неограничена или $\{x_n\}$ сходится к решению x_* уравнения (2), для которого $x_*(0) = x_*(T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, мультиоператор сдвига U_T удовлетворяет условию (F1) теоремы 1. Покажем, что он удовлетворяет и условию (F2). Для этой цели покажем,

что включение (4) имеет для каждого μ , $0 < |\mu| \leq \varepsilon_0$ только тривиальные решения на шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu)$, где

$$\delta_\mu = \frac{1}{2e^{cTh(|\mu|)}} r_\mu.$$

Предположим противное, что существует нетривиальное решение $z \in B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu)$. Тогда существует функция x такая, что

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \mu) & \text{для } t \in [0, T], \\ x(0) = x(T) = z. \end{cases}$$

Из равенства

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s), \mu) ds$$

следует, что

$$|x(t)| \leq |z| + \int_0^t |f(s, x(s), \mu)| ds \leq |z| + \int_0^t c h(|\mu|) |x(s)| ds.$$

Применяя лемму Гронуэлла, получаем

$$|x(t)| \leq |z| e^{cTh(|\mu|)} \leq \frac{1}{2} r_\mu < r_\mu.$$

Если найдется $\Omega \subset (0, T)$ такое, что

$$\xi(t) = px(t) = 0 \quad \text{для } t \in \Omega$$

и

$$\xi(t) \neq 0 \quad \text{для } t \in (0, T) \setminus \Omega,$$

то из определения 4 следует соотношение

$$\left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle < 0$$

для всех $t \in (0, T) \setminus \Omega$. Следовательно,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle dt < 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, g(t, \xi, \varphi, \rho, \mu) \right\rangle dt &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial V(\xi, \mu)}{\partial \xi}, \frac{d\xi}{dt} \right\rangle dt = \\ &= V(\xi(T), \mu) - V(\xi(0), \mu) = 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие.

Если $\xi(t) = 0$ для всех $t \in (0, T)$, например, $x(t) = qx(t) \in \mathbb{R}^2$ для всех $t \in (0, T)$, то, из того, что $x \neq 0$ следует, что найдется $\Omega \subset (0, T)$ такое, что $x(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, T] \setminus \Omega$ и $x(t) = 0$ для $t \in \Omega$. Поэтому

$$\frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} h(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) + \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \rho} w(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) < 0$$

для $t \in [0, T] \setminus \Omega$.

Следовательно,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} h(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) + \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \rho} w(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) \right\rangle dt < 0.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \varphi} h(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) + \frac{\partial W(\varphi, \rho, \mu)}{\partial \rho} w(t, 0, \varphi(t), \rho(t), \mu) \right\rangle dt = \\ = W(\varphi(T), \rho(T), \mu) - W(\varphi(0), \rho(0), \mu) = 0. \end{aligned}$$

Получили противоречие. Таким образом, условие (F2) так же выполняется.

Итак, топологическая степень $\deg(i - U_T(\cdot, \mu), B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu))$ существует. Для ее вычисления выберем $\tilde{r}_\mu > 0$ такое, что

$$G(\tilde{r}_\mu) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu).$$

Так как включение (4) имеет только тривиальные решения на $B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu)$, то

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_\mu)) = \deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\tilde{r}_\mu)).$$

Рассмотрим мультиотображение

$$\Phi(t, z, \mu) = z - pU_t(z, \mu) - qU_T(z, \mu), \quad t \in (0, T], \quad z \in G(\tilde{r}_\mu).$$

Так как $p\Phi(t, z, \mu) = p(z - U_t(z, \mu))$, $q\Phi(t, z, \mu) = q(z - U_T(z, \mu))$ и нет нетривиальных решений на $G(\tilde{r}_\mu)$, то имеем

$$\begin{aligned} 0 \notin p\Phi(t, z, \mu), \quad t \in (0, T], \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu); \\ 0 \notin q\Phi(t, z, \mu), \quad t \in (0, T], \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu). \end{aligned}$$

Поэтому

$$0 \notin \Phi(t, z, \mu), \quad t \in (0, T], \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu).$$

Если $U_t(z, \mu)$ – траектория, выпущенная из точки z , то

$$\frac{d}{dt} U_t(z, \mu) = f(t, U_t(z, \mu)),$$

поэтому

$$\frac{d}{dt} pU_t(z, \mu) = pf(t, U_t(z, \mu)).$$

Полагая здесь $t=0$, получим

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{pU_t(z, \mu) - pz}{t} = pf(0, z, \mu).$$

Откуда следует, что поля $-pf(0, z, \mu)$ и $p(z - U_\varepsilon(z, \mu))$ при малых $\varepsilon > 0$ направлены непротивоположно.

В силу (a1)

$$\langle \nabla V(pz, \mu), -pf(0, z, \mu) \rangle > 0, \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu),$$

где $\nabla V(pz, \mu) = \frac{\partial V(pz, \mu)}{\partial pz}$.

Так как

$$0 \notin q(z - U_T(z, \mu)), \quad t \in (0, T], \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu),$$

то поля

$$\begin{aligned} & -pf(0, z, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), \\ & \nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), \end{aligned}$$

а также поля

$$\begin{aligned} & -pf(0, z, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), \\ & p(z - U_\varepsilon(z, \mu)) + q(z - U_T(z, \mu)) = \Phi(\varepsilon, z, \mu) \end{aligned}$$

непротивоположно направлены при $z \in \partial G(\tilde{r}_\mu)$.

Поэтому

$$\begin{aligned} & \deg(\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), G(\tilde{r}_\mu)) = \\ & = \deg(-pf(0, z, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\Phi(\varepsilon, z, \mu), G(\tilde{r}_\mu)). \end{aligned}$$

Откуда

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), G(\tilde{r}_\mu)). \quad (7)$$

Из условия (5) вытекает, что уравнение

$$W(\varphi, \rho, \mu) = w$$

однозначно разрешимо относительно φ .

Определим функцию $\Psi(\lambda, z, \mu) : [0, 1] \times G(\tilde{r}_\mu) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ равенствами

$$\begin{aligned} \varphi(\Psi(\lambda, z, \mu)) &= \theta((1 - \lambda)\rho(qU_T(z, \mu)), W(\varphi(qU_T(z, \mu)), \rho(qU_T(z, \mu)), \mu)), \\ \rho(\Psi(\lambda, z, \mu)) &= (1 - \lambda)\rho(qU_T(z, \mu)). \end{aligned}$$

Полагая $\varphi = \varphi(qU_T(z, \mu))$, $\rho = \rho(qU_T(z, \mu))$ в тождестве $\theta(\rho, W(\varphi, \rho, \mu)) \equiv \varphi$, получим

$$\theta(\rho(qU_T(z, \mu)), W(\varphi(qU_T(z, \mu)), \rho(qU_T(z, \mu)), \mu)) = \varphi(qU_T(z, \mu))$$

или

$$\theta(\Psi(0, z, \mu)) = \varphi(qU_T(z, \mu)).$$

Отсюда и из соотношений $\rho(\Psi(0, z, \mu)) = \rho(qU_T(z, \mu))$, $\rho(\Psi(1, z, \mu)) \equiv 0$ следуют равенства

$$\Psi(0, z, \mu) = qU_T(z, \mu), \quad \Psi(1, z, \mu) \equiv 0.$$

Таким образом, кривая $\Gamma_{z, \mu}(\lambda) = \Psi(\lambda, z, \mu)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$ а z, μ фиксированы, соединяет точки $\xi_0 = qU_T(z, \mu)$ и $\xi_1 = 0$. Далее, так как $W(\theta(\rho, w), \rho, \mu) = w$, то

$$W(\varphi(\Psi(\lambda, z, \mu)), \rho(\Psi(\lambda, z, \mu)), \mu) = W(\varphi(qU_T(z, \mu)), \rho(qU_T(z, \mu)), \mu),$$

т. е. функция $W(\varphi, \rho, \mu)$ имеет постоянное значение на $\Gamma_{z, \mu}(\lambda)$.

Положим

$$\Phi_1(\lambda, z, \mu) = \nabla V(pz, \mu) + qz - \Psi(\lambda, z, \mu), \quad \lambda \in [0, 1], \quad z \in G(\tilde{r}_\mu).$$

Непрерывная деформация $\Phi_1(\lambda, z, \mu)$ соединяет поля

$$\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)) \quad \text{и} \quad \nabla V(pz, \mu) + qz.$$

Покажем, что она невырождена на $\partial G(\tilde{r}_\mu)$ и, более того,

$$0 \notin q\Phi_1(\lambda, z, \mu), \quad \lambda \in [0, 1], \quad z \in \partial G(\tilde{r}_\mu). \quad (8)$$

Предположим противное: найдутся $\lambda_* \in [0, 1]$, $z_* \in \partial G(\tilde{r}_\mu)$ такие, что

$$0 \in q\Phi_1(\lambda_*, z_*, \mu), \quad 0 \in qz_* - q\Psi(\lambda_*, z_*, \mu).$$

Тогда

$$\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \varphi(qz_*) + 2\pi k, \quad \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \rho(qz_*).$$

Из условия (6) вытекает равенство

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) + 2\pi k.$$

Но

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qU_T z_*), \rho(qU_T z_*), \mu)$$

и, следовательно,

$$W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) = 2\pi k. \quad (9)$$

Положим $\omega_*(t, \mu) = W(\varphi(qU_t(z_*, \mu)), \rho(qU_t(z_*, \mu)), \mu)$. Так как $z_* \in G(\tilde{r}_\mu)$, то

$$U_t(z_*, \mu) \in G(r_\mu), \quad t \in (0, T].$$

Поэтому верны оценки

$$2\pi(N_\mu - 1) < \omega_*(T, \mu) - \omega_*(0, \mu) < 2\pi N_\mu.$$

Подставляя сюда равенства

$$\omega_*(0, \mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu),$$

$$\omega_*(T, \mu) = W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu),$$

получим

$$2\pi(N_\mu - 1) < W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) < 2\pi N_\mu,$$

что противоречит оценкам (9). Из соотношения (8) и

$$p\Phi_1(\lambda, z, \mu) = \nabla V(pz, \mu) \neq 0, \quad z \in G(\tilde{r}_\mu),$$

следует, что $\Phi_1(\lambda, z, \mu)$ невырождена. Поэтому

$$\begin{aligned} \deg(\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), G(\tilde{r}_\mu)) &= \\ &= \deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\tilde{r}_\mu)) \end{aligned}$$

и в силу (7)

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\tilde{r}_\mu)).$$

Отсюда, применяя теорему о произведении степеней и свойство нормализации топологической степени, получаем

$$\deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\tilde{r}_\mu)) \cdot \deg(qz, G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\tilde{r}_\mu)).$$

Таким образом, получаем

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\tilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)).$$

Теперь утверждение следует из теоремы 1 и того факта, что $\text{ind } V \neq 0$. Теорема доказана.

Авторы искренне благодарны профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Перов А.И. Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. Москва, 1958. Т. 123. № 2. С. 235–238.
2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
3. Rachinskiĭ D.I. Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. Amsterdam, 1996. V. 26. № 3. P. 631–639.
4. Kryszewski W. Homotopy properties of set-valued mappings. Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.
5. Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.
6. Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S. Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // Differ. Equ. Dyn. Syst. Berlin, 2012. V. 20. P. 285–300.
7. Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C. A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems // Set-Valued Var. Anal. Berlin, 2013. V. 21. P. 247–269.
8. Obukhovskii V., Liu Z. and Loi N.V. Existence and global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities // Int. J. Bifurcation and Chaos. Munich, 2013. V. 23. P. 1350125.
9. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.
10. Obukhovskii V., Loi N.V. and Liu Z. On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 127–142.
11. Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C. A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 353–370.
12. Корнев С.В. О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Автоматика и телемеханика. Москва, 2003. № 3. С. 72–83.
13. Корнев С.В., Обуховский В.В. О негладких многолистных направляющих функциях // Дифференциальные уравнения. Москва, 2003. Т. 39. № 11. С. 1497–1502.
14. Kisielewicz M. Differential inclusions and optimal control. Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw Kluwer, 1991.
15. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
16. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2011.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана за счет средств гранта РФФИ–Тайвань № 14-01-92004, РФФИ №№ 14-01-00468, 16-01-00386, а также РНФ № 14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Лой Нгуен Ван, ПетроВьетнам университет, Ханой, Вьетнам, доктор физико-математических наук, декан факультета фундаментальных наук, e-mail: loinv14@yahoo.com

UDC 517.925.52

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-390-401

METHOD OF MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS IN THE BIFURCATION PROBLEM OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

© S. V. Kornev, N. V. Loi

In this paper we use the multivalent guiding functions method to study a bifurcation problem for differential equations.

Key words: differential equation; bifurcation of periodic solutions; multivalent guiding function; bifurcation index.

ACKNOWLEDGEMENTS: This research is supported by the joint Taiwan NSC - Russia RFBR grant 14-01-92004 and the RFBR grants 14-01-00468, 16-01-00386, as well as RSF grant 14-21-00066 (in Voronezh State University)

REFERENCES

1. *Krasnosel'skii M.A., Perov A.I.* On a certain principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. Moscow, 1958. V. 123. № 2. P. 235–238 (in Russian).
2. *Krasnosel'skii M.A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs, V. 19. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
3. *Rachinskii D.I.* Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // *Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl.* Amsterdam, 1996. V. 26. № 3. P. 631–639.
4. *Kryszeński W.* Homotopy properties of set-valued mappings. Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.
5. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.
6. *Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S.* Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // *Differ. Equ. Dyn. Syst.* Berlin, 2012. V. 20. P. 285–300.
7. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems // *Set-Valued Var. Anal.* Berlin, 2013. V. 21. P. 247–269.
8. *Obukhovskii V., Liu Z. and Loi N.V.* Existence and global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. Munich, 2013. V. 23. P. 1350125.
9. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.
10. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Liu Z.* On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system // *Fixed Point Theory*. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 127–142.
11. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system // *Fixed Point Theory*. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 353–370.
12. *Kornev S.V.* On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions // *Autom. Remote Control*. Moscow, 2003. V. 64. P. 409–419.
13. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On nonsmooth multivalent guiding functions // *Differ. Equat.* Moscow, 2003. V. 39. P. 1578–1584.
14. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw Kluwer, 1991.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
16. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions. 2nd Ed. Moscow: Librokomb, 2011.

Received 21 March 2016.

Kornev Sergei Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Department of Physics and Mathematics, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Loi Nguen Van, PetroVietNam University, Quoc Oai - Ha Noi, Vietnamese, Doctor of Physics and Mathematics, Dean of the Fundamental Science Department, e-mail: loinv14@yahoo.com

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ КРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ УЧЕБНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ ШКОЛЬНИКОВ

© И. В. Кривопалова

Статья посвящена проблеме оценивания результатов учебной деятельности школьников. Автор рассматривает разработанную систему оценки знаний, умений, навыков, необходимость приведения системы в соответствие с поставленными целями образования, предлагает признать необходимость оценивать содержательное движение ученика к цели.

Ключевые слова: оценочная система; функции традиционной оценочной системы; противоречия количественного и качественного оценивания; технологии открытого образования; процедура самооценки; рейтинговые исследования; объективное оценивание результатов.

Неотъемлемой частью содержания образования является объективная и достоверная система оценки учебных достижений обучающихся.

Самые различные способы проверки знаний и умений существовали во все времена. В процессе исторического развития менялись формы, приемы выставления отметок, частотность проведения контрольно-измерительных мероприятий и их содержание, меры воздействия на учащихся, мотивационные элементы и многие другие факторы [1].

На протяжении многих десятилетий оценивание заключалось в сравнении достижений учащегося с результатами других учащихся, а такой подход к оцениванию имеет целый **ряд недостатков:**

- **отсутствие четких критериев оценки** достижения результатов обучения, понятных учащимся, родителям и педагогам;
- выставление отметки, ориентированной на средний уровень знаний класса в целом, а **не на основе единых критериев достижения** результатов каждым учеником;
- отсутствие четкой картины усвоения конкретных знаний, умений, навыков учеником по отдельным разделам учебной программы, что **не позволяет определить индивидуальную траекторию обучения каждого ученика**;
- учет только текущих оценок при выставлении итоговой, что не является объективным оцениванием **конечного результата обучения**;
- **отсутствие оперативной связи между учеником и учителем** в процессе обучения, что не способствует мотивации учащихся к обучению.

Федеральный государственный образовательный стандарт нового поколения содержит четкие требования к системе оценки достижения планируемых результатов. В соответствии с ними система оценки должна:

1. Фиксировать цели оценочной деятельности:

- а) ориентировать на достижение результата духовно-нравственного развития и воспитания (личностные результаты), формирования универсальных учебных действий (метапредметные результаты), освоения содержания учебных предметов (предметные результаты);

- б) обеспечивать комплексный подход к оценке всех перечисленных результатов образования (предметных, метапредметных и личностных);
- в) обеспечивать возможность принятия педагогических мер для улучшения и совершенствования процессов образования в каждом классе, в школе, в региональной и федеральной системах образования [2].

2. Фиксировать критерии, процедуры, инструменты оценки и формы представления её результатов.

3. Фиксировать условия и границы применения системы оценки.

Становится совершенно очевидным – прежде всего, **изменяется инструментарий – формы и методы оценки**, основанный на **критериальном оценивании**.

Критериальное оценивание – это процесс, основанный на сравнении учебных достижений учащихся с четко определенными, коллективно выработанными, заранее известными всем участникам образовательного процесса (учащимся, администрации школы, родителям, законным представителям и т. д.) критериями, соответствующими целям и содержанию образования, способствующими формированию учебно-познавательной компетентности учащихся.

Критерий – признак, основание, правило принятия решения по оценке чего-либо на соответствие предъявленным требованиям.

Критерии описываются *показателями*, в которых (для каждой конкретной работы) дается четкое представление о том, как в идеале должен выглядеть результат выполнения учебного задания [3].

Основные положения системы критериального оценивания:

- разработка критериев на основе поставленных учебных целей;
- отсутствие открытого сравнения результатов разных учащихся;
- участие самих учащихся в оценивании (самооценка, взаимооценка);
- процессный характер оценивания: оцениваются не только продукты учебной деятельности, но и процесс обучения;
- использование электронных инструментов для оценивания.

При разработке критериев оценки необходимо учитывать:

- оценивается только работа учащегося, а не его личность;
- работа учащегося проверяется по критериям оценивания, которые известны им заранее;
- оценки учащимся выставляются только за то, что они изучали, т. к. критерии оценивания представляют конкретное выражение учебных целей;
- учащемуся известен четкий алгоритм выведения оценки, по которому он сам может определить уровень успешности своего обучения и информировать родителей;
- повышается мотивация учащихся к самооцениванию и обучению [4].

Новый ФГОС устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы основного общего образования: **личностным, метапредметным, предметным**.

Каждый педагог, начавший работу по новым образовательным стандартам, столкнулся с рядом вопросов, касающихся оценки новых образовательных результатов обучающихся. Какова она, система критериального оценивания? Как, опираясь на теоретические умозаключения, перейти к конкретной работе? Как, организовав учебный процесс по-новому, оценивать учебные достижения школьников? Как разработать универсальную систему оценки? Что является мерилом объективности разработанной критериальной оценки? Подобных вопросов возникает немало и большинство из них имеет неоднозначный ответ [4].

Итак, будем опираться на то, что оценка **личностных результатов** представляет собой оценку достижения ценностных отношений обучающихся – к себе, другим участникам образовательного процесса, самому образовательному процессу и его результатам, сформированные в образовательном процессе. Формирование личностных результатов обеспечивается в ходе реализации всех компонентов образовательного процесса, включая внеурочную деятельность, реализуемую семьёй и школой. В соответствии с требованиями Стандарта *достижение личностных результатов не выносится на итоговую оценку обучающихся*, а является предметом оценки эффективности воспитательно-образовательной деятельности образовательного учреждения и образовательных систем разного уровня [5].

Оценка **метапредметных результатов** предполагает оценку сформированности ряда регулятивных, коммуникативных и познавательных универсальных действий, которые **направлены на анализ и управление своей познавательной деятельностью**.

Оценка **предметных результатов** представляет собой оценку достижения обучающимися планируемых результатов по отдельным предметам. Основным **объектом** оценки предметных результатов в соответствии с требованиями Стандарта является *способность к решению учебно-познавательных и учебно-практических задач*, основанных на изучаемом учебном материале, с использованием способов действий, соответствующих содержанию учебных предметов, в т. ч. **метапредметных** (познавательных, регулятивных, коммуникативных) действий.

Согласно новым образовательным стандартам приоритетными в диагностике **метапредметных и предметных результатов** становятся не репродуктивные задания (на воспроизведение информации), а *продуктивные задания* (задачи по применению знаний и умений), предполагающие создание учеником в ходе решения своего информационного продукта: вывода, оценки и т. п. Вместе с тем, при разработке критериев оценки учебных достижений школьников необходимо учитывать, что задания репродуктивного уровня являются неотъемлемой частью процесса обучения (знание терминологии; конкретных фактов; способов и средств работы со спецификой) и тоже требуют разработки новой системы оценки. В связи с этим, при разработке системы критериев для оценки учебных достижений школьников по предметам естественнонаучного цикла необходимо учитывать репродуктивный и продуктивный характер их деятельности.

Таким образом, критериальное оценивание выполняет функцию обратной связи, когда ученик получает информацию о своих успехах и неудачах. Оценка результатов позволяет корректировать содержание учебного материала, выбор форм, методов, средств обучения, деятельность обучающихся и обучаемых на отдельных этапах, соотносить полученный результат с поставленной целью и определять пути коррекционной работы [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Инструменты формирующего оценивания в деятельности учителя-предметника. URL: <http://www.narva.ut.ee/sites/default/files/nc/oppevahend.pdf>. (дата обращения: 15.01.2016).
2. Критериальное оценивание. URL: <http://nis.edu.kz/ru/programs/criter-eval/> (дата обращения: 15.01.2016).
3. *Задорожная С.В.* Развитие навыков работы с учебной информацией // Физика: метод. газ. для преподавателей физики, астрономии и естествознания. 2008. 16-31 июля (№ 14). С. 40–42.
4. Малышева Н.В. Планирование учебной деятельности в условиях реализации технологии смешанного обучения: методические рекомендации. Котовск, 2013.
5. Федеральный государственный образовательный стандарт. URL: <http://standart.edu.ru/> (дата обращения: 15.01.2016).

Поступила в редакцию 1 февраля 2016 г.

Кривопалова Ирина Викторовна, Тамбовское областное государственное образовательное автономное учреждение дополнительного профессионального образования «Институт повышения квалифика-

ции работников образования», г. Тамбов, Российская Федерация, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин, e-mail: 00Irina@rambler.ru

UDC 001.8

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-402-405

DEVELOPMENT OF THE CRITERIA-BASED ASSESSMENT SYSTEM OF THE STUDENTS EDUCATIONAL ACHIEVEMENTS

© I. V. Krivopalova

Article is devoted to a problem of estimation of results of the educational activity of school students. The author considers the developed system of the assessment of knowledge, abilities, skills, need of reduction of system in compliance with education goals, suggests to recognize the need to estimate the substantial movement of a student toward the purpose.

Key words: estimation system; functions of traditional estimation system; contradiction of quantitative and high-quality estimation; technology of open education; procedure of self-assessment; rating researches; objective estimation of results.

REFERENCES

1. Instrumenty formiruyushchego ocenivaniya v deyatel'nosti uchitelya-predmetnika. URL: <http://www.narva.ut.ee/sites/default/files/nc/oppevahend.pdf>. (acctssed 15.01.2016).
2. Kriterial'noe ocenivanie. URL: <http://nis.edu.kz/ru/programs/criter-eval/> (acctssed 15.01.2016).
3. Zadorozhnaya S. V. Razvitie navykov raboty s uchebnoj informaciej // Fizika: metod. gaz. dlya prepodavatelej fiziki, astronomii i estestvoznaniya. 2008. 16-31 iyulya (№ 14). S. 40–42.
4. Malysheva N. V. Planirovanie uchebnoj deyatel'nosti v usloviyah realizacii tekhnologii smeshannogo obucheniya: metodicheskie rekomendacii. Kotovsk, 2013.
5. Federal'nyj gosudarstvennyj obrazovatel'nyj standart. URL: <http://standart.edu.ru/> (acctssed 15.01.2016).

Received 1 February 2016.

Krivopalova Irina Viktorovna, Tambov Regional State Educational Autonomous Establishment of Additional Professional Education «Institute of Professional Development of Educators», Tambov, the Russian Federation, Associate Professor of the General Studies Department, e-mail: 00Irina@rambler.ru

МОДИФИЦИРОВАННОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, ОСНОВАННОЕ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ ГРУППЫ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ИЗ ЕДИНИЦЫ

© Е. В. Рыжкова, С. М. Ситник

В работе рассматривается набор преобразований, которые обобщают известное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Эти обобщения определяются при помощи группы перестановок комплексных корней из единицы. Различным перестановкам соответствуют различные новые ДПФ. На этом пути удастся построить преобразования с лучшими по сравнению со стандартным ДПФ спектральными свойствами. Например, для размерности равной четырем, стандартное ДПФ имеет неполный кратный спектр, а большинство новых преобразований имеют простой спектр. Приводятся результаты расчетов параметров преобразований на компьютере, а также некоторые гипотезы об их спектральных свойствах. Рассматривается возможность применения введенных обобщенных преобразований Фурье в криптографии.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье; корни из единицы; перестановки; спектр матрицы; собственные вектора.

1. Введение

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из самых известных и полезных на практике математических инструментов. Это преобразование широко применяется, например, в электродинамике и оптике, теории кодирования и криптографии, при анализе систем связи и фильтрации сигналов, в алгоритмах сжатия информации и вычислительной томографии.

Важность ДПФ для приложений определяется в том числе и тем, что задачи о вычислении ДПФ, циклической свертки последовательностей, произведения больших чисел или многочленов по существу эквивалентны [1]. Фундаментальное значение также имеют быстрые алгоритмы ДПФ, в которых число необходимых операций уменьшено по сравнению с обычным бесхитростным вычислением за счет изощренной оптимизации порядка выполнения действий [2]–[3]. Наиболее известны быстрые алгоритмы Гуда, Кули и Тьюки, Винограда, Рейдера. Фундаментальную роль ДПФ играет в современной криптографии [5].

ДПФ определяется матрицей порядка n с элементами

$$f_{kj} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(-i \frac{2\pi k j}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Таким образом, матрица ДПФ устроена так: первая строка и столбец состоят из единиц, во второй строке стоят комплексные корни из единицы (с точностью до множителя) порядка n , следующие строки являются последовательными степенями второй строки. Так, например, при $n=4$ матрица ДПФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Несмотря на широкую известность преобразования ДПФ, некоторые стандартные задачи для него имеют малоизвестные широкому кругу специалистов свойства. Рассмотрим в качестве примера естественную задачу о нахождении спектра ДПФ при любом n . Решение этой задачи отсутствует в литературе по преобразованиям Фурье и нетривиально. Известно, что четвертая степень ДПФ есть тождественное преобразование, поэтому собственными значениями могут быть лишь числа $\pm 1, \pm i$. Вопрос состоит в вычислении кратностей этих чисел. Аналогия с непрерывным преобразованием Фурье, для которого четыре этих числа совершенно равноправны, приводит к весьма правдоподобному предположению, что хотя бы в случае размерности $n = 4N$ собственные значения ДПФ также равноправны, и, следовательно, все имеют кратность N . Однако вычисления уже при $n = 4$ опровергают это предположение. В этом случае значения $-1, -i$ являются простыми, значение 1 имеет кратность 2 , а значение i вообще отсутствует в спектре! Все это нарушает симметрию спектра, присущую непрерывному случаю.

Приведем таблицу кратностей собственных значений матрицы ДПФ для начальных значений размерности n . Из табл. 1 видно, что если отбросить начальные размерности $n = 2$ и $n = 3$, то несимметричность спектра проявляется при $n = 4$, а затем при переходе к следующей размерности кратность одного из четырех собственных значений увеличивается на единицу. Мы отметили в таблице соответствующие приращения размерностей знаками «+» и выделили жирным шрифтом, закономерность появления этих приращений простая: они добавляются циклически обходом четырех корней против часовой стрелки.

n	1	i	-1	$-i$
2	1	0	1	0
3	1	1+	1	0
4	2	0	1	1+
5	2	1+	1	1
6	2	1	2+	1
7	2	1	2	2+
8	3+	1	2	2
9	3	2+	2	2
10	3	2	3+	2
11	3	2	3	3+
12	4+	2	3	3
13	4	3+	3	3
14	4	3	4+	3
15	4	3	4	4+
16	5+	3	4	4
17	5	4+	4	4
18	5	4	5+	4
19	5	4	5	5+
20	6+	4	5	5

Таблица 1. Кратности собственных значений матриц ДПФ

Окончательные значения кратностей точек спектра при всех значениях размерностей матрицы n приведены в следующей табл. 2.

n	1	i	-1	- i
4N	$N+1$ (+)	N-1	N	N
4N+1	N+1	N (+)	N	N
4N+2	N+1	N	$N+1$ (+)	N
4N+3	N+1	N	N+1	$N+1$ (+)

Таблица 2. Формулы для кратностей собственных значений матриц ДПФ

Данный результат был для произвольного значения n доказан знаменитым математиком Исаем Шуром (I. Schur) в 1921 году [7], результат несколько раз переоткрывался и стал фольклорным. (Отметим, что в одной замечательной книге, знаменитой множеством нестандартных фактов и заключений, Исайа Шур назван белорусским математиком, он действительно родился в Бобруйске). Основным моментом при доказательстве неожиданно является тот факт, что для нахождения указанных кратностей необходимо вычисление знаменитых квадратичных тригонометрических сумм Гаусса [4], которые являются следами матриц ДПФ. Нахождение точной формулы для квадратичных тригонометрических сумм заняло у Гаусса около 10 (!) лет с 1801 по 1811 гг., сам он написал об этой задаче, «что решение многих трудных вопросов теории чисел не отняло столько дней, сколько взяло лет работы решение вопроса об этом». Для сравнения, теория гипергеометрических функций была создана Гауссом за несколько месяцев, что прослеживается по его подробным дневникам.

Непросто выписываются и соответствующие наборы собственных векторов для матрицы ДПФ. В этом направлении представляют интерес либо несложные алгоритмы получения собственных векторов, либо их особенно простой вид. Например, интересны вещественные наборы собственных векторов.

Данная работа возникла из наблюдения, что матрица ДПФ составляется нами по очевидно-му геометрическому способу: корни из единицы обходятся против часовой стрелки. Например, при $n = 4$ порядок такой: $1, -i, -1, i$. Но равновозможны и логичны и все другие способы упорядочивания множества корней, при этом возникает целое множество различных новых дискретных преобразований Фурье.

2. Группы перестановок корней и модифицированные дискретные преобразования Фурье.

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим множество корней степени n из единицы, упорядоченное произвольным способом: $r_1, r_2, \dots, r_n$. Назовем модифицированным дискретным преобразованием Фурье (МДПФ), построенным по данной перестановке множества корней из единицы, оператор с матрицей размеров $n \times n$, для которой в строке с номером k стоят величины $r_1^{k-1}, r_2^{k-1}, \dots, r_n^{k-1}$ в соответствии с выбранной перестановкой.

Ясно, что в результате получится некоторая матрица Вандермонда. Мы будем также нормировать эту матрицу множителем $\frac{1}{\sqrt{n}}$. В результате получится такая матрица МДПФ:

$$F_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Всего при данном n получится $n!$ различных модифицированных преобразований. Обычное классическое ДПФ также входит в этот набор, остальные являются новыми. Так при $n = 4$ получаются 24 различных МДПФ, при $n = 5$ получаются 120 преобразований. Целью работы является изучение спектральных свойств указанных новых модифицированных преобразований Фурье. В частности, представляют особый интерес при $n = 4N$ преобразования с симметричным спектром (при $n = 4$ с простым), что не выполняется для обычных МДПФ ни в каких размерностях. Такие преобразования с симметричным спектром являются в определенном смысле более естественными, чем обычное МДПФ, так как они более похожи на свой непрерывный аналог в плане равноправности точек спектра. Не исключено, что такие преобразования за счет более простых спектральных свойств могут оказаться полезными при различных приложениях.

Далее приводятся результаты расчетов на компьютере для случая $n = 4$. Получившиеся 24 модифицированных преобразования Фурье разбиты нами на группы из похожих по своим свойствам преобразований. Далее мы указываем номер соответствующего преобразования, образующую его перестановку корней и для каждой группы кратко перечисляем основные особенности на примере первого преобразования из данной группы.

1) $r = (1, -i, -1, i)$ (это обычное ДПФ), 2) $r = (1, i, -1, -i)$ (это его обратное).

Квадрат преобразования с номером 1 является действительной матрицей перестановок вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $(1, 1, -1, -i)$, характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - (1 - i)x^3 - (1 + i)x^2 + (1 - i)x + i$, как и набор действительных собственных векторов: $(-1, 1, 1, 1), (0, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)$.

3) $r = (-1, i, 1, -i)$ 4) $r = (-1, -i, 1, i)$.

Квадрат преобразования с номером 3 является действительной матрицей вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

спектр кратный $(1, i, i, -i)$, характеристический полином получен в явном виде

$$x^4 - (1 + i)x^3 + (1 + i)x^2 - (1 + i)x + i,$$

как и набор комплексных собственных векторов: $(0, -1, 0, 1), (-1, -2i, 1, 0), (i, 1, -i, 1), (1, 0, 1, 0)$.

В случаях 1–4 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причем нумерация начинается не с первообразных корней $-1, 1$. Четвертая степень преобразования есть единичная матрица. Построено явно диагонализующее преобразование.

5) $r = (-1, i, 1, -i)$, 6) $r = (-1, -i, 1, i)$, 7) $r = (i, -1, -i, 1)$, 8) $r = (-i, -1, i, 1)$.

В случаях 5–8 перестановки состоят из корней, занумерованных по кругу, причем нумерация начинается с первообразных корней $-i, i$. Степени преобразования с номером 5 имеют вид:

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad F_r^4 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad F_r^{16} = E.$$

Отметим, что F_r^2 напоминает матрицы спинорных представлений, а ее ненулевые блоки похожи на матрицы Паули. Это модифицированное МДПФ имеет простой спектр, состоящий из значений $\sqrt[4]{i}$, в отличие от классического преобразования той же размерности с кратным спектром !!! Характеристический полином получен в явном виде: $x^4 - i$.

С этого момента начинаются вычислительные затруднения у пакета MATHEMATICA, он не смог посчитать по одной компоненте каждого из собственных векторов по своему алгоритму, выдав их как корни некоторых уравнений высокой степени. Например, первому собственному значению соответствует такой собственный вектор

$$\left\{ s, \left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \right) i, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i, 1 \right\},$$

где s является первым по нумерации пакета MATHEMATICA корнем возвратного уравнения восьмой степени

$$s^8 - 8s^7 + 32s^6 - 24s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 32s^2 + 8s + 1 = 0.$$

$$9) \ r = \{1, -1, i, -i\}, \quad 10) \ r = \{1, -1, -i, i\}, \quad 11) \ r = \{1, i, -i, -1\}, \quad 12) \ r = \{1, -i, i, -1\}.$$

Это оставшиеся перестановки, начинающиеся с 1.

Квадрат преобразования с номером 9 является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично устроены другие четные степени данной матрицы.

Это МДПФ также имеет простой спектр:

$$\left\{ -\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{\sqrt{7}-1}{4}i, \frac{\sqrt{7}-1}{4} + \frac{\sqrt{7}+1}{4}i, -1, 1 \right\}.$$

Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) x^3 - (1+i)x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) x + i.$$

Найден в явном виде набор из двух комплексных и двух вещественных собственных векторов: $\{0, \frac{1}{2}i((2+i)+\sqrt{7}), -\frac{1}{2}i((2-i)+\sqrt{7}), 1\}$, $\{0, -\frac{1}{2}i((-2-i)+\sqrt{7}), \frac{1}{2}i((-2+i)+\sqrt{7}), 1\}$, $\{-1, 1, 1, 1\}$, $\{3, 1, 1, 1\}$.

Осталось рассмотреть оставшиеся преобразования.

$$13) \ r = \{i, 1, -1, -i\}, \quad 14) \ r = \{-i, 1, -1, i\}, \quad 15) \ r = \{-1, 1, i, -i\}, \quad 16) \ r = \{-1, 1, -i, i\},$$

$$17) \ r = \{i, -1, 1, -i\}, \quad 18) \ r = \{-i, i, 1, -1\}, \quad 19) \ r = \{-i, -1, 1, i\}, \quad 20) \ r = \{i, -i, 1, -1\},$$

$$21) \ r = \{i, -i, -1, 1\}, \quad 22) \ r = \{-i, i, -1, 1\}, \quad 23) \ r = \{-1, i, -i, 1\}, \quad 24) \ r = \{-1, -i, i, 1\}.$$

Для первого из них с номером 13 квадрат преобразования является комплексной матрицей следующего вида

$$F_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Остальные степени состоят из заполненных матриц со все более громоздкими элементами.

Все эти МДПФ имеют простой спектр !!! Для преобразования с номером 13 спектр состоит из значения 1 и трех занумерованных в определенном порядке корней уравнения

$$2s^6 - 2s^5 + 3s^4 - 2s^3 + 3s^2 - 2s + 2 = 0,$$

которые МАТНЕМАТИСА не сумела вычислить в явном виде (хотя это возможно, т. к. данное возвратное уравнение сводится к кубическому). Характеристический полином получен в явном виде:

$$x^4 - \left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right)x^3 + (1+i)x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}\right)x + i.$$

Собственный вектор один найден в явном виде $\{1, 1, -1, 1\}$, в трех остальных по одной компоненте равны 1, остальные найдены в неявном виде как занумерованные в определенном порядке корни уравнений вида

$$s^6 + 2s^5 + 6s^4 + 14s^3 + 25s^2 + 12s + 4 = 0, s^3 - s^2 - 4s + 2 = 0.$$

Таким образом, получается довольно неожиданный результат, что подавляющее большинство МДПФ при $n = 4$ в плане спектральных свойств устроены проще стандартного, так как все они имеют простой спектр. Из приведенных результатов вычислений следует, что лишь четыре преобразования имеют кратный спектр, как и классическое. Они отвечают случаям, когда в перестановке корни обходятся на единичной окружности по часовой стрелке или против нее, причем начиная не с первообразных корней. При этом, МДПФ, отвечающие обходу по окружности при старте с первообразных корней, по-видимому, обладают наиболее простыми спектральными свойствами.

3. Некоторые обобщения, дополнения и приложения

При произвольных n доказана унитарность всех МДПФ. Следовательно, все их спектры лежат на единичной окружности, и получен явный вид обратных преобразований. Это несложно установить пользуясь тем, что все МДПФ являются произведениями обычного ДПФ и соответствующих матриц перестановок. Отметим, что некоторые частные случаи рассмотренных здесь матриц МДПФ известны и используются в современных быстрых алгоритмах Гуда и Рейдера [1].

К сожалению, установить строго другие содержательные результаты о спектральных свойствах при произвольных n не удастся ввиду сложности доказательств. При помощи компьютера для небольших n вычислены начальные степени преобразований, проекторы на собственные подпространства и резольвенты, различные стандартные алгебраические факторизации матриц. На основании анализа компьютерных вычислений представляется верной следующая гипотеза.

Гипотеза 1. При всех размерностях матриц МДПФ, кратных четырем, размерности собственных подпространств не совпадают только для МДПФ, отвечающим циклическим круговым перестановкам, которые начинаются не с первообразных корней.

Если эта гипотеза верна, то за стандартный ДПФ выбран самый неудачный вариант с точки зрения вопроса о простоте устройства спектра.

Гипотеза 2. Все МДПФ имеют базис из вещественных собственных векторов.

Заметим, что автору не известен общий критерий наличия вещественного базиса из собственных векторов у произвольной комплексной матрицы. Для обычного ДПФ способ построения такого базиса предложен в [6], идея построения следующая. Пусть уже вычислены

кратности всех собственных чисел и соответствующие проекторы на собственные подпространства, тогда собственные вектора можно получить по следующему элементарному алгоритму: выбрать стандартный базис (а в принципе – и любой другой), и подействовать на орты последовательно всеми проекторами нужное число раз с учетом кратности значений спектра. К сожалению, полного набора собственных векторов при произвольном выборе начального базиса может и не получиться.

Мы рассмотрели в работе варианты с перестановками корней, т. е. столбцов матрицы обычного ДПФ. Можно рассмотреть дальнейшее обобщение, когда одновременно переставляются и строки, т. е. мы отказываемся от того, чтобы МДПФ определялось степенной матрицей. Такие преобразования также являются унитарными и частично исследованы на компьютере. Их удобно использовать для анализа сигналов, в которых редкие ненулевые элементы разбросаны среди нулевых. Для таких сигналов ДПФ неустойчиво при вычислениях и обладает другими нежелательными свойствами. Тогда можно при помощи первой матрицы перестановки собрать все ненулевые элементы вместе, выполнить преобразование, а затем при помощи второй матрицы обратной перестановки восстановить первоначальный порядок следования элементов в массиве данных. Применение МДПФ к преобразованному сгруппированному сигналу является более предпочтительным и дает ряд вычислительных преимуществ.

Введенные МДПФ позволяют также обобщить тригонометрические суммы Гаусса [4].

О п р е д е л е н и е 2. *Обобщенной квадратичной суммой Гаусса называется след матрицы соответствующего МДПФ, то есть*

$$G(P, Q, n) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp \left(i \frac{2\pi}{n} p(k)q(k) \right), P = (p(0), p(1), \dots, p(n-1)), Q = (q(0), q(1), \dots, q(n-1)),$$

где P, Q – две произвольные перестановки множества чисел $(0, 1, \dots, n-1)$.

ОТКРЫТАЯ ПРОБЛЕМА. Вычислить в явном виде обобщенные квадратичные суммы Гаусса в терминах заданных перестановок P и Q , порождающих соответствующее МДПФ.

Авторам представляется, что это чрезвычайно сложная задача, никаких даже приближенных путей ее решения в настоящее время не видно (с такой оценкой согласился в частной переписке и один из авторов монографии [4] Bruce Berndt). Тем не менее, решение сформулированной открытой проблемы позволило бы находить размерности собственных подпространств МДПФ при любых размерностях теоретически, без компьютера.

Представляют также интерес быстрые модифицированные ДПФ в сравнении со стандартным БПФ.

Отметим, что ДПФ широко применяются в криптографии. На основе результатов настоящей работы можно предложить следующий алгоритм шифрования информации. Отправитель и получатель заранее знают, какой из вариантов МДПФ данного порядка используется при обмене, а противнику (атакующему) это не известно. Ввиду огромности числа $n!$ подобный алгоритм может быть не менее стойким, чем стандартные алгоритмы с большой длиной ключа. Кроме того, при данном методе требуется минимальная модификация существующих алгоритмов и программ, сводящаяся к простой замене одной матрицы на другую. Кроме того, модифицированное преобразование Фурье и суммы Гаусса связаны с квадратичным или дробным преобразованием Фурье, которое находит применения в методе квадратичной экспоненциальной аппроксимации сигналов [8]–[11], а также в теории операторов преобразования [12]–[15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ноден П., Кумме К. Алгебраическая алгоритмика М.: Мир, 1999.
2. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985.

3. Блэйхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
4. Berndt B.C., Evans R.J., Williams K.S. Gauss and Jacobi Sums. Wiley and Sons, 1998.
5. Яценко В. (ред.) Введение в криптографию. СПб.: Питер, 2001.
6. Matveev V.B. Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform // *Inverse Problems*. 2001. No. 17. P. 633–657.
7. Schur I. Über die Gaussschen Summen // *Nach. Gessel. Gottingen, Math-Phys Klasse*. 1921. P. 147–153.
8. Киселев Е.А., Минин Л.А., Новиков И.Я., Ситник С.М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // *Математические заметки*. 2014. Т. 96. Вып. 2. С. 239–250.
9. Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M. Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // *Journal of Mathematical Sciences, Springer*. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.
10. Минин Л.А., Журавлев М.В., Ситник С.М. О вычислительных особенностях интерполяции с помощью целочисленных сдвигов гауссовых функций // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2009. № 13 (68). Вып. 17/2. С. 89–99.
11. Ситник С.М., Тымашов А.С., Ушаков С.Н. Метод конечномерных приближений в задачах квадратичной экспоненциальной интерполяции // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Математика. Физика*. 2015. № 17 (214). Вып. 40. С. 130–142.
12. Sitnik S.M. Transmutations and Applications: a survey // *arXiv: 1012.3741* 2012. 141 P.
13. Катрахов В.В., Ситник С.М. Краевая задача для стационарного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // *Доклады Академии наук СССР*. 1984. Т. 278. № 4. С. 797–799.
14. Ситник С.М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана-Эрдейи // *ДАН СССР*. 1991. Т. 320. № 6. С. 1326–1330.
15. Ситник С.М. Компьютерный анализ спектральных свойств модифицированных дискретных преобразований Фурье. // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*. 2007. Т. 9. № 1. С. 98–103.

Поступила в редакцию 25 февраля 2016 года.

Рыжкова Елена Валерьевна, Воронежский институт Министерства внутренних дел России, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, e-mail: dikareva_ev@mail.ru

Ситник Сергей Михайлович, Воронежский институт Министерства внутренних дел России, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и моделирования систем, e-mail: mathsms@yandex.ru

UDC 517.443

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-406-414

THE MODIFIED DISCREET FOURIER TRANSFORM BASED ON THE GROUP OF ROOTS OF UNITY

© E. V. Ryzhkova, S. M. Sitnik

In the paper we consider a set of transformations which generalize a standard discreet Fourier transform (DFT). These generalizations are based on permutations for the group of roots of unity. Different permutations define different new DFT's. On this way we construct transformations with more natural spectral properties. For example in dimension four the standard DFT has incomplete multiple spectrum but almost all newly defined transforms a simple one. We give some numerical computer results and spectral hypotheses. Applications to cryptography is briefly outlined.

Key words: discreet Fourier transform; roots of unity; permutations; matrix spectrum; eigenvectors.

REFERENCES

1. *Noden P., Kittle K.* Algebraic algorithmics. M.: Mir, 1999.
2. *Nussbaumer G.* Fast Fourier transform and convolution numerical algorithms. M.: Radio I Svyaz, 1985.
3. *Blayhoo P.* Fast algorithms for digital signal processing. M.: Mir, 1989.
4. *Berndt B.C., Evans R.J., Williams K.S.* Gauss and Jacobi Sums. Wiley and Sons, 1998.
5. *Yaschenko V.* Introduction to cryptology. St. Petersburg, 2001.
6. *Matveev V.B.* Intertwining relations between the Fourier transform and discrete Fourier transform // Inverse Problems. 2001. № 17. P. 633–657.
7. *Schur I.* Über die Gaussischen Summen // Nach. Gessel. Gottingen, Math-Phys Klasse. 1921. P. 147–153.
8. *Kiselev E.A., Minin L.A., Novikov I. Ya., Sitnik S.M.* On Riesz constants for some systems of integer translations // Math. Notes. 2014. V. 96. № 2. P. 239–250.
9. *Zhuravlev M.V., Kiselev E.A., Minin L.A., Sitnik S.M.* Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions // Journal of Mathematical Sciences, Springer. 2011. V. 173. № 2. P. 231–241.
10. *Zhuravlev M.V., Minin L.A., Sitnik S.M.* On numerical analysis of interpolation by integer translations of the Gaussian function // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2009. V. 13 (68). № 17/2. P. 89–99.
11. *Sitnik S.M., Timashov A.S., Uschakov S.N.* Finite dimensional approximations in problems of quadratic interpolation // Scientific Bulletin of Belgorod State University. 2015. V. 17 (214). № 40. P. 130–142.
12. *Sitnik S.M.* Transmutations and Applications: a survey // arXiv: 1012.37412012. 2012. 141 P.
13. *Katrahov V.V., Sitnik S.M.* Boundary-value problem for stationary Schrodinger equation with singular potential // DAN SSSR. 1984. V. 278. № 4. P. 797–799.
14. *Sitnik S.M.* Factorization and norm estimates in weighted Lebesgue spaces of Buschman-Erdelyi transmutations // DAN SSSR. 1991. V. 320. № 6. P.1326–1330.
15. *Sitnik S.M.* Computer analysis of spectral properties of modified discrete Fourier transforms // Doklady Adygskoj International Academy of Sciences. 2007. V. 9. № 1 P. 98–103.

Received 25 February 2016.

Ryzhkova Elena Valeryevna, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: dikareva_ev@mail.ru

Sitnik Sergei Michailovich, Voronezh Institute of the Russian Ministry of Internal Affairs, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics and System Modelling Department, e-mail: mathsms@yandex.ru

УДК 517.977.5, 517.929.7, 519.62
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-415-429

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Т. Х. М. Тахир

Рассматриваются некоторые линейные функционально-дифференциальные уравнения, решение которых можно записать аналитически. Для рассматриваемых уравнений получены функция Коши; функция Грина двухточечной (в частном случае, периодической и аperiodической) краевой задачи.

Ключевые слова: линейное функционально-дифференциальное уравнение; функция Коши; функция Грина; общее решение.

Введение

В статье рассматриваются конкретные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием и нейтрального типа, решение которых $x(t)$, $t \geq 0$, удастся записать аналитически. Если запаздывающий аргумент $h(t) \leq t - \tau$, $\tau > 0$, то решение строится последовательно на каждом участке времени $[0, \tau]$, $(\tau, 2\tau)$, $\dots$. В других случаях решение основано на представлении задачи Коши для соответствующего функционально-дифференциального уравнения в операторной виде

$$y(t) - (Ky)(t) = f(t), \quad t \in [0, T],$$

где $y = \dot{x}$ — производная искомого решения, $K: L([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow L([0, T], \mathbb{R})$ — линейный ограниченный оператор со спектральным радиусом $\rho(K) < 1$, $f \in L([0, T], \mathbb{R})$, T — любое положительное число. Для нахождения y мы используем ряд Неймана

$$y = f + Kf + K^2f + \dots$$

Отметим, что интегрируемые в квадратурах функционально-дифференциальные уравнения используются, например, в качестве модельных уравнений при исследовании краевых задач, проблем устойчивости, задачи о периодических решениях, получении оценок решений (подробнее см. [1]). В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых случаи интегрируемости в квадратурах подробно изучены (см. [2]), в научной литературе содержится очень мало сведений о конкретных уравнениях с запаздыванием, интегро-дифференциальных уравнениях, уравнениях нейтрального типа и др., решение которых удастся записать аналитически. Для линейных функционально-дифференциальных уравнений в [3] предлагается построение функции Грина с использованием ряда Неймана. Методы нахождения функции Коши рассмотрены в [4]–[7]. Вопросам выделения решаемых явно функционально-дифференциальных уравнений посвящена статья [8]; предлагаемая работа продолжает это исследование.

Статья состоит из трех параграфов, в заголовке каждого параграфа вынесено рассматриваемое в нем уравнение. Для каждого исследуемого уравнения найдено общее решение, фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения и функция Коши. Получены также условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи, определена ее функция Грина. На основании этих результатов исследуется периодическая краевая задача.

1. Уравнение $\dot{x}(t) - x(t-1) = f(t)$.**1.1. Задача Коши**

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - x(t-1) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0 \quad (1)$$

при начальном условии

$$x(0) = \alpha.$$

Если $t \in [0, 1]$, то $x(t-1) \in [-1, 0]$, следовательно получаем $\dot{x}(t) - 0 = f(t)$. Решением этого уравнения будет $x(t) = \alpha + \int_0^t f(s)ds$.

Если $t \in (1, 2]$, то $x(t-1) \in (0, 1]$, следовательно получаем $\dot{x}(t) - \left(\alpha + \int_0^{t-1} f(s)ds\right) = f(t)$. Решением этого уравнения будет

$$x(t) = x(1) + \int_1^t \left(f(s) + \alpha + \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi\right)ds.$$

Подставим $x(1) = \alpha + \int_0^1 f(s)ds$, получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha + \int_0^1 f(s)ds + \int_1^t \left(f(s) + \alpha + \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi\right)ds = \\ &= \alpha + \int_0^1 f(s)ds + \int_1^t f(s)ds + \int_1^t \alpha ds + \int_1^t \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi ds = \\ &= \alpha + \alpha(t-1) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^{t-1} \int_{\xi+1}^t ds f(\xi)d\xi = \\ &= \alpha + \alpha(t-1) + \int_0^t f(s)ds + \int_0^{t-1} (t-s-1)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Если $t \in (2, 3]$, то $x(t-1) \in (1, 2]$, следовательно получаем

$$\dot{x}(t) - \left(\alpha + \alpha(t-2) + \int_0^{t-1} f(s)ds + \int_0^{t-2} (t-\xi-2)f(\xi)d\xi\right) = f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t) = x(2) + \int_2^t \left(f(s) + \alpha + \alpha(s-2) + \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi + \int_0^{s-2} (s-\xi-2)f(\xi)d\xi\right)ds.$$

Подставим $x(2) = 2\alpha + \int_0^2 f(s)ds + \int_0^1 (1-s)f(s)ds$, получим

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 2\alpha + \int_0^2 f(s)ds + \int_0^1 (1-s)f(s)ds + \\
 &+ \int_2^t \left(f(s) + \alpha + \alpha(s-2) + \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi + \int_0^{s-2} (s-\xi-2)f(\xi)d\xi \right) ds = \\
 &= 2\alpha + \alpha(t-2) + \int_0^2 f(s)ds + \int_0^1 (1-s)f(s)ds + \\
 &+ \int_2^t f(s)ds + \int_2^t \alpha(s-2)ds + \int_2^t \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi ds + \int_2^t \int_0^{s-2} (s-\xi-2)f(\xi)d\xi ds = \\
 &= 2\alpha + \alpha(t-2) + \int_0^2 f(s)ds + \int_0^1 (1-s)f(s)ds + \\
 &+ \int_2^t f(s)ds + \int_2^t \alpha(s-2)ds + \int_2^t \int_0^1 f(\xi)d\xi ds + \int_2^t \int_1^{s-1} d\xi ds + \int_0^{t-2} \int_{\xi+2}^t (s-\xi-2)ds f(\xi)d\xi = \\
 &= \alpha + \alpha(t-1) + \int_0^2 f(s)ds + \int_0^1 (1-s)f(s)ds + \int_2^t f(s)ds + \int_2^t \alpha(s-2)ds + \int_0^1 (t-2)f(s)ds + \\
 &+ \int_1^{t-1} (t-s-1)ds + \int_0^{t-2} \frac{(t-s-2)^2}{2} f(s)ds = \\
 &= \alpha + \alpha(t-1) + \alpha \frac{(t-2)^2}{2} + \int_0^t f(s)ds + \int_0^{t-1} (t-s-1)f(s)ds + \int_0^{t-2} \frac{(t-s-2)^2}{2} f(s)ds.
 \end{aligned}$$

Докажем методом математической индукции, что для для любого n при $t \in (n, n+1]$, выполнено

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \alpha + \alpha(t-1) + \dots + \frac{\alpha(t-n)^n}{n!} + \int_0^t f(s)ds + \\
 &+ \int_0^{t-1} (t-s-1)f(s)ds + \dots + \int_0^{t-n} \frac{(t-s-n)^n}{n!} f(s)ds.
 \end{aligned}$$

Это равенство проверено при $n = 1, 2, 3$. Предположим, что равенство справедливо при $n = k - 1$, т. е. для $t \in (k - 1, k]$, выполнено

$$x(t) = \alpha + \alpha t + \dots + \frac{\alpha(t - k + 1)^{k-1}}{(k - 1)!} + \int_0^t f(s)ds + \\ + \int_0^{t-1} (t - s - 1)f(s)ds + \dots + \int_0^{t-k+1} \frac{(t - s - k + 1)^{k-1}}{(k - 1)!} f(s)ds.$$

Тогда при $n = k$ для $t \in (k, k + 1]$, так как $x(t - 1) \in (k - 1, k]$, получаем

$$\dot{x}(t) - \left(\alpha + \alpha(t - 1) + \dots + \frac{\alpha(t - k)^{k-1}}{(k - 1)!} + \int_0^{t-1} f(s)ds + \int_0^{t-2} (t - s - 2)f(s)ds + \dots + \right. \\ \left. + \int_0^{t-k} \frac{(t - s - k)^{k-1}}{(k - 1)!} f(s)ds \right) = f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t) = x(k) + \int_k^t \left(f(s) + \alpha + \alpha(s - 1) + \dots + \alpha(s - k)^{k-1} + \int_0^{s-1} f(\xi)d\xi + \int_0^{s-2} (s - \xi - 2)f(\xi)d\xi + \right. \\ \left. + \dots + \int_0^{s-k} \frac{(s - \xi - k)^{k-1}}{(k - 1)!} f(\xi)d\xi \right) ds.$$

Подставим

$$x(k) = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k - 1)^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k - 2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k - 1)!} + \int_0^k f(s)ds + \\ + \int_0^{k-1} (k - s - 1)f(s)ds + \int_0^{k-2} \frac{(k - s - 2)^2}{2!} f(s)ds + \dots + \int_0^1 \frac{(1 - s)^{k-1}}{(k - 1)!} f(s)ds,$$

получим

$$x(t) = x(k) + \int_k^t \left(f(s) + x(s - 1) \right) ds = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k - 1)^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k - 2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k - 1)!} + \\ + \int_0^k f(s)ds + \int_0^{k-1} (k - s - 1)f(s)ds + \int_0^{k-2} \frac{(k - s - 2)^2}{2!} f(s)ds + \dots + \int_0^1 \frac{1 - s}{(k - 1)!} f(s)ds + \\ + \int_k^t f(s)ds + \int_k^t \left(\alpha + \alpha(s - 1) + \dots + \alpha(s - k)^{k-1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{s-1} f(\xi) d\xi + \int_0^{s-2} (s-\xi-2)f(\xi) d\xi + \dots + \int_0^{s-k} \frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!} f(\xi) d\xi \Big) ds = \\
& = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k-1)^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^k f(s) ds + \\
& + \int_0^{k-1} (k-s-1)f(s) ds + \int_0^{k-2} \frac{(k-s-2)^2}{2!} f(s) ds + \dots + \int_0^1 \frac{1-s}{(k-1)!} f(s) ds + \\
& + \int_k^t f(s) ds + \int_k^t \alpha ds + \int_k^t \alpha(s-1) ds + \dots + \int_k^t \alpha(s-k)^{k-1} ds + \int_k^t \int_0^{k-1} f(\xi) d\xi ds + \\
& + \int_k^t \int_{k-1}^{s-1} f(\xi) d\xi ds + \dots + \int_k^t \int_0^{k-2} (s-\xi-2)f(\xi) d\xi ds + \int_k^t \int_{k-2}^{s-2} (s-\xi-2)f(\xi) d\xi ds + \dots + \\
& + \int_0^{t-k} \int_{\xi+k}^t \frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!} ds f(\xi) d\xi = \\
& = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k-1)^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(2)^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha(1)^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^k f(s) ds + \int_0^{k-1} (k-s-1)f(s) ds + \\
& + \int_0^{k-2} \frac{(k-s-2)^2}{2!} f(s) ds + \dots + \int_0^1 \frac{1-s}{(k-1)!} f(s) ds + \int_k^t f(s) ds + \int_k^t \alpha ds + \\
& + \int_k^t \alpha(s-1) ds + \dots + \int_k^t \alpha(s-k)^{k-1} ds + \int_0^{k-1} \int_k^t ds f(\xi) d\xi + \int_{k-1}^{t-1} \int_{\xi+1}^t ds f(\xi) d\xi + \dots + \\
& + \int_0^{k-2} \int_k^t (s-\xi-2) ds f(\xi) d\xi + \int_{k-2}^{t-2} \int_{\xi+2}^t (s-\xi-2) ds f(\xi) d\xi + \dots + \\
& + \int_0^{t-k} \int_{\xi+k}^t \frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!} ds f(\xi) d\xi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k-1)^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^k f(s)ds + \int_0^{k-1} (k-s-1)f(s)ds + \\
 &\quad + \int_0^{k-2} \frac{(k-s-2)^2}{2!} f(s)ds + \dots + \int_0^1 \frac{1-s}{(k-1)!} f(s)ds + \int_k^t f(s)ds + \int_k^t \alpha ds + \\
 &\quad + \int_k^t \alpha(s-1)ds + \dots + \int_k^t \alpha(s-k)^{k-1}ds + \int_0^{k-1} (t-k)f(\xi)d\xi + \int_{k-1}^{t-1} (t-\xi-1)f(\xi)d\xi + \dots + \\
 &\quad + \int_0^{k-2} \frac{[(t-\xi-2)^2] - [(k-\xi-2)^2]}{2} d\xi + \int_{k-2}^{t-2} \frac{(t-\xi-2)^2}{2} f(\xi)d\xi + \dots + \int_0^{t-k} \frac{(t-\xi-k)^k}{k!} f(\xi)d\xi.
 \end{aligned}$$

Итак, при $t \in (k, k+1]$ имеем

$$\begin{aligned}
 x(t) = \alpha + \alpha(t-1) + \dots + \frac{\alpha(t-k)^k}{k!} + \int_0^t f(s)ds + \\
 + \int_0^{t-1} (t-s-1)f(s)ds + \dots + \int_0^{t-k} \frac{(t-s-k)^k}{k!} f(s)ds \dots
 \end{aligned}$$

Таким образом, при любых $t \geq 0$ решение задачи Коши представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[n, \infty)}(t) \left(\frac{\alpha p^n (t-n)^n}{n!} + \int_0^{t-n} \frac{p^n (t-s-n)^n}{n!} f(s) ds \right). \quad (2)$$

Отсюда для уравнения (1) определяем функцию Коши

$$C(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-s-n)^n \chi_{[n, \infty)}(t) \chi_{[0, t-n]}(s)}{n!}.$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-n)^n \chi_{[n, \infty)}(t)}{n!}.$$

1.2. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - x(t-1) = f(t), \quad t \in [0, k], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \quad (3)$$

$$Ax(0) + Bx(k) = C. \quad (4)$$

Аналогично представлению (2) общего решения уравнения (1), для уравнения (3) получаем общее решение в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^k \chi_{[n, k]}(t) \left(\frac{\alpha p^n (t-n)^n}{n!} + \int_0^{t-n} \frac{p^n (t-s-n)^n}{n!} f(s) ds \right), \quad t \in [0, k]. \quad (5)$$

Отсюда, учитывая равенство $\chi_{[n,k]}(k) = 1$, вычисляем

$$x(0) = \alpha, \quad x(k) = \alpha \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{k-n} \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (4):

$$\alpha \left(A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!} \right) + B \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{k-n} \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds = C.$$

Краевая задача (3), (4) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!} \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{k-n} \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}}.$$

Таким образом, решением краевой задачи (3), (4) является

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{C - B \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{k-n} \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^k \chi_{[n,k]}(t) \frac{p^n(t-n)^n}{n!} + \\ & + \int_0^{t-n} \sum_{n=0}^k \chi_{[n,k]}(t) \frac{p^n(t-s-n)^n}{n!} f(s) ds, \quad t \in [0, k]. \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{C}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} - \\ & - \frac{B \sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{k-n} \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} + \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \int_0^{t-j} \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} f(s) ds = \\ = & \frac{C}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} + \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \int_0^k \chi_{[0,t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} f(s) ds - \\ & - \int_0^k \frac{B}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0,k-n]}(s) \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Отсюда для задачи (3), (4) определяем функцию Грина

$$G(t, s) = \sum_{j=0}^k \chi_{[n, k]}(t) \chi_{[0, t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} - \\ - \frac{B}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{[0, k-n]}(s) \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^k \chi_{[j, k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \frac{1}{A + B \sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j, k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Рассмотрим частный случай задачи (3), (4) — периодическую краевую задачу с условием

$$X(k) - X(0) = C. \quad (6)$$

Это условие совпадает с (4), если $A = -1$, $B = 1$. Таким образом, задача (3), (6) однозначно разрешима при любых f, c тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!} \neq 1. \quad (7)$$

При $k = 1$ это условия нарушено, то есть задача (3), (6) не является однозначно разрешимой. При $k \geq 2$ условие (7) эквивалентно неравенству

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!} \neq 0. \quad (8)$$

При выполнении (8), решение краевой задачи (4), (6) определяется формулой

$$x(t) = \frac{C}{\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j, k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!} + \sum_{j=0}^k \chi_{[n, k]}(t) \int_0^k \chi_{[0, t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} f(s) ds - \\ - \int_0^k \frac{1}{\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^k \chi_{[0, k-n]}(s) \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} f(s) ds \sum_{j=0}^k \chi_{[j, k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Следовательно, функция Грина задачи (3), (6) равна

$$G(t, s) = \sum_{j=0}^k \chi_{[n, k]}(t) \chi_{[0, t-j]}(s) \frac{p^j(t-s-j)^j}{j!} - \\ - \frac{1}{\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n(k-n)^n}{n!}} \sum_{n=0}^k \chi_{[0, k-n]}(s) \frac{p^n(k-s-n)^n}{n!} \sum_{j=0}^k \chi_{[j, k]}(t) \frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения равно

$$X(t) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{k-1} \frac{p^n (k-n)^n}{n!}} \sum_{j=0}^k \chi_{[j,k]}(t) \frac{p^j (t-j)^j}{j!}.$$

2. Уравнение $\dot{x}(t) - p x(t/2) = f(t)$.

2.1. Задача Коши

Здесь рассматривается линейное дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) - p x(t/2) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Задача Коши с начальным условием $x(0) = 0$ для уравнения (9) заменой $y = \dot{x}$ сводится к интегральному уравнению

$$y(t) = p \int_0^{t/2} y(s) ds + f(t), \quad t \in [0, T], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \quad (10)$$

где T — любое положительное число. Так как спектральный радиус вольтеррова интегрального оператора $K : L([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow L([0, T], \mathbb{R})$, $(Ky)(t) = p \int_0^{t/2} y(s) ds + f(t)$, равен нулю, то существует единственное решение уравнения (10), и это решение представимо суммой ряда Неймана $y(t) = f(t) + (Kf)(t) + (K^2f)(t) + \dots$

Имеем

$$(K^2f)(t) = p^2 \int_0^{t/2} \int_0^{s/2} f(\xi) d\xi ds = p^2 \int_0^{t/4} \int_{2\xi}^{t/2} f(\xi) ds d\xi = p^2 \int_0^{t/4} \left(\frac{t}{2} - 2\xi\right) f(\xi) d\xi.$$

Аналогичными вычислениями по индукции устанавливаем

$$(K^n f)(t) = p^n \int_0^{t/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\right)^{n-1} f(\xi) d\xi.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (K^n f)(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (K^n f)(s) ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^t \int_0^{s/2^n} \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \left(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\right)^{n-1} f(\xi) d\xi ds = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^{t/2^n} \int_{2^n \xi}^t \frac{2^0 2^1 \dots 2^{n-2}}{(n-1)!} \left(\frac{s}{2^{n-1}} - 2\xi\right)^{n-1} f(\xi) ds d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^n \int_0^{t/2^n} \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2\xi\right)^n f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Итак, получено общее решение уравнения (9)

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds. \quad (11)$$

Заметим, что справедливость этого равенства следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [9], с. 200). Действительно, подынтегральная функция удовлетворяет при $t \in [0, T]$, $s \in [0, t]$ неравенству

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) \right| \leq \\ \leq \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} \right)^n |f(s)| = |f(s)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|p|^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}},$$

где числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (n! 2^{n(n-1)/2})^{-1} |p|^n T^n$ сходится.

Из (11) для уравнения (9) получаем функцию Коши

$$C(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения (см. [1], с. 63)

$$X(t) = C(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}.$$

2.2. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - p x(t/2) = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (12)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \quad (13)$$

Аналогично представлению (11) общего решения уравнения (9), для уравнения (12) получаем общее решение в виде

$$x(t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds. \quad (14)$$

Из предоставления (14) получаем

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (13):

$$A\alpha + B\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + B \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds = C.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}}.$$

Следовательно, решением краевой задачи (12), (13) является

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{C - B \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \\ &+ \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds = \\ &= \frac{C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}}{A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}} - \frac{B \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^k}{k! 2^{k(k-1)/2}} f(s) ds}{A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}} + \\ &+ \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s \right)^n f(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, получена функция Грина уравнения (12), (13)

$$\begin{aligned} G(t, s) &= - \frac{B}{A + B \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n \chi_{[0, T/2^n]}(s) (T - 2^n s)^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^k}{k! 2^{k(k-1)/2}} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n \chi_{[0, t/2^n]}(s) (t - 2^n s)^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}. \end{aligned}$$

Для уравнения (12) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \quad (15)$$

Условие (15) — частный случай условия (13) при $A = -1$, $B = 1$. Из приведенных выше результатов получаем, что краевая задача (12), (15) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} \neq 0.$$

Таким образом, получена функция Грина задачи (12),(15)

$$G(t, s) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0, T/2^n]}(s)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}} \frac{(T - 2^n s)^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k t^k}{k! 2^{k(k-1)/2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n \chi_{[0, t/2^n]}(s) (t - 2^n s)^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}.$$

3. Уравнение $\dot{x}(t) - p \dot{x}(t/2) = f(t)$.

3.1. Задача Коши

В заключение рассмотрим линейное уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - p \dot{x}(h(t)) = f(t), \quad t \geq 0, \quad x(\xi) = 0, \quad \text{если } \xi < 0. \quad (16)$$

Будем предполагать, что измеримая функция $h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $h(t) \leq t$ и выполнено следующее условие

$$|p| \frac{\mu(h^{-1}(\Omega))}{\mu \Omega} < 1, \quad (17)$$

где символом μ обозначена мера Лебега.

Определим оператор $(S_h y)(t) = \begin{cases} y(h(t)), & \text{если } h(t) \geq 0, \\ 0, & \text{если } h(t) < 0, \end{cases}$ Вследствие принятых предположений, при любом $T > 0$ оператор S_h действует в $L([0, T], \mathbb{R})$ и $\|S_h\| < 1$ (см. [1], с. 21), следовательно, при любых α, f задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима. Решение может быть определено через ряд Неймана

$$\dot{x}(t) = f(t) + p(S_h f)(t) + p^2(S_{h^2} f)(t) + \dots \quad (18)$$

Для упрощения выкладок приведем решение уравнения (16) в частном случае при $h(t) = t/2$. Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - p \dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Условие (17) приобретает вид неравенства $|p| < 1/2$. В силу (18) имеем

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n f(t/2^n), \quad x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t/2^n} (2p)^n f(s) ds. \quad (20)$$

Таким образом, функция Коши уравнения (19) равна

$$C(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0, t/2^n]}(s) (2p)^n,$$

или, что то же самое

$$C(t, s) = \frac{1 - (2p)^{n+1}}{1 - 2p}, \quad \text{если } c \in [t/2^n, t/2^{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В [3] предложен метод нахождения функции Грина уравнения (16), использующий, как и в нашей работе, ряд Неймана (18).

3.2. Краевая задача

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения

$$\dot{x}(t) - p\dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (21)$$

с условием

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \quad (22)$$

Представление (20) общего решения уравнения (19) при $t \in [0, T]$ дает и общее решение уравнения (21). Таким образом, получаем

$$x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t/2^n} (2p)^n f(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (23)$$

Отсюда имеем

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (22):

$$\alpha(A + B) = C - B \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$(A + B) \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds}{A + B}.$$

Таким образом, решением краевой задачи (21), (22) является

$$x(t) = \frac{C - B \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{T/2^n} (2p)^n f(s) ds}{A + B} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{t/2^n} (2p)^n f(s) ds.$$

Таким образом, получена функция Грина краевой задачи (21), (22)

$$G(t, s) = -\frac{B \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0, T/2^n]}(s) (2p)^n}{A + B} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0, t/2^n]}(s) (2p)^n.$$

Для уравнения (21) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \quad (24)$$

Как уже отмечалось, условие (24) — частный случай условия (22) при $A = -1$, $B = 1$. Так как $A + B = 0$, периодическая задача не является однозначна разрешимой ни при каких значениях p, T .

В отличие от периодической задачи аperiodическая задача с условием

$$x(T) + x(0) = C \quad (25)$$

однозначно разрешимой при любых p, T , так как $A + B = 2 \neq 0$. Ее функция Грина равна

$$G(t, s) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0, T/2^n]}(s) (2p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0, t/2^n]}(s) (2p)^n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
3. Жуковский Е.С. Использование ряда Неймана для построения функции Грина // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. № 2. С. 205–206.
4. Ким А.В., Пименов В.Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.
5. Жуковская Т.В., Молоканова Е.А. Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. № 5. С. 1352–1359.
6. Жуковская Т.В. Интерполяция функции Коши // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2002. Т. 7. № 1. С. 110–111.
7. Жуковская Т.В. Метод построения функции Коши уравнения с обобщенно вольтерровым оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2003. Т. 8. № 1. С. 162–163.
8. Борзова М.В., Козадаев А.В., Тахир Х.М.Т. Некоторые интегрируемые в квадратурах линейные функционально-дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. № 5. С. 1079–1083.
9. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Тахир Халид Мизхир Тахир, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

UDC 517.977.5, 517.929.7, 519.62

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-415-429

ON SOLVING LINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

© T. Kh. M. Takhir

We consider some linear functional-differential equations the solutions of which can be written analytically. For these equations we derive the Cauchy function, the Green function for a two-point (in particular, for periodic and aperiodic) boundary value problem.

Key words: linear functional-differential equation; the Cauchy function; the Green function; general solution.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F. Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. M.: Nauka, 1991. 280 s.
2. Kamke E.H. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam. M.: Nauka, 1976. 576 s.
3. Zhukovskiy E.S. Ispol'zovanie ryada Nejmana dlya postroeniya funktsii Grina // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 1997. T. 2. № 2. S. 205–206.
4. Kim A.V., Pimenov V.G. i-Gladkiy analiz i chislennyye metody resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Izevsk: Regul'yarnaya i haoticheskaya dinamika, 2004. 256 s.
5. Zhukovskaya T.V., Molokanova E.A. Chislennyye metody resheniya evolyutsionnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2012. T. 17. № 5. S. 1352–1359.
6. Zhukovskaya T.V. Interpolyatsiya funktsii Koshi // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2002. T. 7. № 1. S. 110–111.
7. Zhukovskaya T.V. Metod postroeniya funktsii Koshi uravneniya s obobshchenno vol'terrovym operatorom // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2003. T. 8. № 1. S. 162–163.
8. Borzova M.V., Kozadaev A.V., Tahir H.M.T. Nekotorye integriruemye v kvadraturakh linejnye funktsional'no-differentsial'nye uravneniya // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. № 5. S. 1079–1083.
9. Vulih B.Z. Kratkiy kurs teorii funktsiy veshchestvennoy peremennoy. M.: Nauka, 1973. 352 s.

Received 21 March 2016.

Tahir Khalid Mizhir Tahir, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© В. С. Трещев

Предлагаются условия разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений неявного вида. Используются результаты о векторно накрывающих отображениях, полученные Е. С. Жуковским.

Ключевые слова: система неявных дифференциальных уравнений; задача Коши; векторно накрывающие отображения; метрические пространства.

Идея приложения утверждений о накрывающих отображениях к исследованию неявных дифференциальных уравнений предложена в [1] и развита в ряде работ (см. [2]–[5]). В цитируемых работах рассматривались вопросы существования и продолжаемости решений задачи Коши, их непрерывной зависимости от параметров. В работах [6]–[8] были начаты исследования векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, полученные результаты применялись к краевым задачам и задачам управления. В [10] получена теорема о возмущениях векторно накрывающих отображений в произведениях метрических пространств, наделенных векторной метрикой. Эти результаты позволяют более эффективно исследовать различные системы, в том числе, системы неявных дифференциальных уравнений. Здесь методами, основанными на утверждениях о векторно накрывающих отображениях пространств с векторной метрикой, доказывается теорема о разрешимости задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений. Полученное утверждение уточняет результат [6].

Используются следующие обозначения: $\mathcal{I}_m$ — матрица размерности $m \times m$, все компоненты которой равны 1, I_m — единичная $m \times m$, матрица, $\mathbb{R}^n$ — n -мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}_+^n$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^n$, $\text{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \text{vrai} \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$; $AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих почти всюду производную $\dot{x} \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$, с нормой $\|x\|_{AC_\infty([a, b], \mathbb{R})} = \|\dot{x}\|_{L_\infty([a, b], \mathbb{R})} + |x(a)|$.

Пусть заданы метрические пространства $X_i \doteq (X_i, \rho_{X_i})$, $Y_j \doteq (Y_j, \rho_{Y_j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим произведение этих пространств

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^n X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^m Y_j$$

и зададим в них векторные метрики, полагая для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{X}$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \overline{X}$ и $y = (y_1, \dots, y_m) \in \overline{Y}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in \overline{Y}$

$$\overline{\rho}_X(x, u) = (\rho_{X_1}(x_1, u_1), \dots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)), \quad \overline{\rho}_Y(y, \omega) = (\rho_{Y_1}(y_1, \omega_1), \dots, \rho_{Y_m}(y_m, \omega_m)).$$

Обозначим $B_{X_i}(u_i, d_i) \doteq \{x_i \in X_i : \rho_{X_i}(u_i, x_i) \leq d_i\}$ — замкнутый шар в пространстве X_i с центром в точке $u_i \in X_i$ радиуса $d_i \geq 0$. Аналогично, обозначим $B_{Y_j}(\omega_j, r_j)$ замкнутый шар в

$$\overline{B}_X(u, d) \doteq \prod_{i=1}^n B_{X_i}(u_i, d_i), \text{ где } d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Пусть, задано множество $W \subset \overline{Y}$, $n \times m$ матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. По заданным $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}_+^m$ определим множество

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $F: \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ называем векторно условно A -накрывающим множество W на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R)$ если

Далее будем рассматривать пространства $\mathbb{R}^n$, $L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$, $AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ как произведения соответствующих метрических пространств, т. е. определим в этих пространствах векторные метрики равенствами

Пусть заданы функция $y \in L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори (т. е. измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r \in \mathbb{R}_+^m$ существует такая функция $\eta_r \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x, \omega \in \bar{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ выполнено неравенство $|f(t, x, \omega)| \leq \eta_r(t)$. Рассмотрим при $t \in [a, b]$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

с начальными условиями

Пусть $c \in (a, b]$. Решением задачи (2), (3), определенным на $[a, c]$, будем называть функцию $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнениям системы (2) при почти всех $t \in [a, c]$ и начальным условиям (3).

$$\mathfrak{B}(u^0(t), R) \doteq \{(u, r) \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R) \times \mathbb{R}_+^m : Ar + \bar{\rho}_{\mathbb{R}^n}(u, u^0(t)) \leq R\}.$$

Заметим, что отображение $t \in [a, b] \mapsto \mathfrak{B}(u^0(t), R) \in \text{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m)$ измеримо. Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_i^0(t) = \gamma_i + \int_a^t u_i^0(s) ds$ и для некоторого $\sigma > 0$ положим $D(t) = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(x^0(t), \sigma \bar{1})$, $\bar{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$.

Пусть задано $d \in \mathbb{R}_+^m$. Определим при почти всех $t \in [a, b]$, любом $x \in D(t)$ множество

$$W(t, x) \doteq \overline{B}_{\mathbb{R}^m}(f(t, x, u^0(t)), d).$$

Т е о р е м а 1. Пусть для некоторых матриц $A_{n \times m}$ и $B_{m \times n}$ с неотрицательными компонентами при почти всех $t \in [a, b]$, любых $\omega \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R)$, $x \in D(t)$ выполнены условия:

- отображение $f(t, x, \cdot): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ векторно условно A -накрывающее множество $W(t, x)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0(t), R)$;
- отображение $f(t, \cdot, \omega): D(t) \rightarrow \mathbb{R}^m$ B -липшицево;
- имеет место включение $y(t) \in f(t, x, \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R))$.

Далее, пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что имеют место неравенства

$$r(y) \doteq (I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m) \bar{\rho}_{L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m)}(y^0, y) \leq d, \quad Ar(y) \leq R, \quad \text{где } y^0(t) = f(t, x^0(t), u^0(t)).$$

Тогда для некоторого значения $c \in (a, b]$ существует определенное на $[a, c]$ решение $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее оценке

$$\bar{\rho}_{L_\infty([a, a+\delta], \mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, P_c u^0) \leq A(I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m) \bar{\rho}_{L_\infty([a, c], \mathbb{R}^m)}(P_c y^0, P_c y),$$

здесь символом P_c обозначена операция сужения на $[a, c]$ соответствующих функций.

Это утверждение уточняет результаты о разрешимости задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений цитируемых выше работ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В., Аваков Е.Р., Жуковский Е.С. Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Жуковский С.Е., Мингалеева З.Т. О разрешимости управляемых систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. № 2. С. 380–383.
5. Перейра Ф.Л., Жуковский С.Е. О Приложениях накрывающих отображений к задаче Коши для дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2626–2628.
6. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–456.
7. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.
8. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А. О периодической краевой задаче для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 52–53.
9. Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Об условиях разрешимости краевой задачи для нелинейного абстрактного функционально-дифференциального уравнения // Известия ИМИ УдГУ. 2012. № 1 (39). С. 50–51.
10. Жуковский Е.С., Мунембе Ж. П. О возмущениях многозначных векторно накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. № 5. С. 1146–1150.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Трещев Валентин Сергеевич, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: treshchev.math@mail.ru

UDC 517.988.5

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-430-434

ABOUT THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATIONS

© V. S. Treshchev

Conditions of solvability of the Cauchy problem for a system of implicit differential equations are offered. The results about vector covering mappings due to E.S. Zhukovsky are used.

Key words: system of differential equations; the Cauchy problem; vector covering mappings; metric spaces.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-97504).

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Avakov E.R., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchie otobrazheniya i ih prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2009. T. 45. № 5. S. 613–634.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.
3. Arutyunov A., de Oliveira V.A., Lobo Pereira F., Zhukovskiy S., Zhukovskiy E. On the solvability of implicit differential inclusions // Applicable Analysis. 2015. V. 94. Iss. 1. P. 129–143.
4. Zhukovskiy S.E., Mingaleeva Z.T. O razreshimosti upravlyaemyh sistem // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2014. T. 19. № 2. S. 380–383.
5. Perejra F.L., Zhukovskiy S.E. O Prilozheniyah nakryvayushchih otobrazheniy k zadache Koshi dlya differentsial'nyh vklucheniyy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2013. T. 18. № 5-2. S. 2626–2628.
6. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Nakryvayushchie otobrazheniya v proizvedenii metrisheskih prostranstv i kraevye zadachi dlya differentsial'nyh uravneniy, ne razreshennyh otnositel'no proizvodnoy // Differentsial'nye uravneniya. 2013. T. 49. № 4. S. 439–456.
7. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Ob upravlenii ob"ektami, dvizhenie kotoryh opisyvaetsya neyavnyymi nelinejnymi differentsial'nymi uravneniyami // Avtomatika i telemekhanika. 2015. № 1. S. 31–56.
8. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. O periodicheskoy kraevoy zadache dlya differentsial'nogo uravneniya, ne razreshennogo otnositel'no proizvodnoy // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 52–53.
9. Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya T.V. Ob usloviyah razreshimosti kraevoy zadachi dlya nelinejnogo abstraktnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya // Izvestiya IMI UdGU. 2012. № 1 (39). S. 50–51.

10. Zhukovskiy E.S., Munembe ZH.P. O vozmushcheniyah mnogoznachnyh vektorno nakryvayushchih otobrazheniy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. № 5. S. 1146–1150.

Received 21 March 2016.

Treshchev Valentin Sergeyevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: treshchev.math@mail.ru

УДК 517.983

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-435-438

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА БЕСОВА–СОБОЛЕВА

© В. М. Тюрин

Изучается задача обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными типа Бесова.

Ключевые слова: корректный оператор; функциональные пространства.

В заметке приняты следующие обозначения. X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$; $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ — лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ с обычной нормой $\|u\|_0$ ($p > 1$); B_γ^p — пространство функций $u \in L^p$, норма которых определяется равенством

$$\|u\|_\gamma^p = \|u\|_0^p + \langle u \rangle_\gamma^p, \quad \langle u \rangle_\gamma^p = \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\|u(x) - u(y)\|^p}{|x - y|^{n+p\gamma}} dx dy \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Пространство Соболева $H^m = H^m(\mathbb{R}^n, X)$ состоит из функций $u \in L^p$, которые имеют обобщенные производные $D^\alpha u \in L^p$ и норму

$$\|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_0, \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс ([1], с. 60; [2], с. 31), пространство $B_{m\gamma}^p$ функций $u \in H^m$, норма которых находится по формуле

$$\|u\|_{m\gamma}^p = \|u\|_m^p + \langle u \rangle_{m\gamma}^p, \quad \langle u \rangle_{m\gamma}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)\|^p}{|x - y|^{n+p\gamma}} dx dy \right)^{1/p},$$

$B_{m\gamma}^{pt}$ — пространство Бесова-Соболева ([2], с. 301; [3], с. 293; [4], с. 401) с нормой

$$\begin{aligned} \|u\|_{m\gamma}^{pt} &= \|u\|_m + \\ &+ \sum_{k=1}^t \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\left\| \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j-1} \Delta(y-x) D^\alpha u(x + (j-1)(y-x)) \right\|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}} dx dy \right)^{1/p} = \\ &= \|u\|_m + \langle u \rangle_{m\gamma}^{pt} < \infty : \end{aligned}$$

$B_{m\gamma}^p = B_{m\gamma}^{p1}$. Отметим также, что разность $\Delta(z)u(x) = u(x+z) - u(x)$.

Рассмотрим функциональные пространства G и $F \in L^p$ функций $u: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ с нормами $\|u\|_G$, $\|u\|_F$. Предположим, что задан линейный ограниченный оператор $P: G \rightarrow F$ в частных производных $D^\alpha u \in L^p$. Производные $D^\alpha u$ понимаются в обобщенном смысле.

Оператор $P: G \rightarrow F$ назовем корректным, если найдется такая положительная постоянная $k = k(P, G, F)$, что выполняется неравенство

$$\|u\|_G \leq k \|Pu\|_F \quad (1)$$

для всех $u \in G$ ([5], с. 165).

Построим гладкую финитную функцию $\varphi_1(x, \xi, T): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ с носителем в шаре $B(\xi, 2T)$, причем $\varphi_1(x, \xi, T) = 1$, если $|D^\alpha \varphi_1| \leq b_0 T^{-1}$ ($0 < b_0$ не зависит от параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$, $T \geq 2n$, $\alpha \neq 0$, то есть $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) и $x \in B(\xi, T)$. Положим $\varphi_T(x) = \varphi_1(x, 0, T)\varphi_1(0, T) = \varphi_1^2(x, 0, T)$.

Л е м м а [6]. При $T \geq 2n$ справедливо неравенство

$$\|\varphi_T u\|_{m\gamma}^p \leq a T^{-\gamma} \|u\|_m + a \langle u \rangle_{m\gamma}^p, \quad u \in B_{m\gamma}^p, \quad (2)$$

постоянная $a > 0$ не зависит от u и T .

Т е о р е м а. Оператор $P: B_{m\gamma}^{pt} \rightarrow B_\gamma^p$ корректен тогда и только тогда, когда корректен оператор $P: B_{m\gamma}^p \rightarrow B_\gamma^p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть корректен оператор $P: B_{m\gamma}^{pt} \rightarrow B_\gamma^p$. Предположим, что оператор $P: B_{m\gamma}^p \rightarrow B_\gamma^p$ не является корректным. В этом случае можно найти последовательность $u_j \in B_{m\gamma}^p$ такую, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|Pu_j\|_\gamma^p = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{m\gamma}^p = 1. \quad (3)$$

Так как $\varphi(x, T)u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(\varphi_T u) = \varphi_T Pu + Q(u, \varphi_T), \quad (4)$$

$\varphi_T u \in B_{m\gamma}^{pt}$, то из (4) следует

$$\|\varphi_T u\|_{m\gamma}^{pt} \leq k_1 \|\varphi_T Pu\|_\gamma^p + k_1 \|Q(u, \varphi_T)\|_\gamma^p.$$

Выражение $Q(u, \varphi_T)$ есть некоторый линейный дифференциальный оператор в частных производных порядка не более $n - 1$ по переменной u , коэффициенты которого финитны и подчиняются следующей оценке:

$$\|Q(u, \varphi_T)\|_\gamma^p \leq a_1 T^{-1} \|u\|_m + a_2 T^{-1} \langle u \rangle_{m\gamma}^p, \quad (5)$$

постоянные $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ не зависят от u и T . Отметим, что из (5) следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|Q(u, \varphi_T)\|_\gamma^p = 0. \quad (6)$$

Далее воспользуемся следующими соотношениями

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T Pu)\|_0 = \|Pu\|_0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T Pu)\|_\gamma^p \leq b_1 \|Pu\|_\gamma^p, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T u)\|_{m\gamma}^p = \|u\|_{m\gamma}^p. \quad (7)$$

Учитывая (6) и (7) будем иметь ($b_1 > 0$ не зависит от u и T)

$$\begin{aligned} 1 = \|u\|_{m\gamma}^p &= \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T u)\|_{m\gamma}^p \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T u)\|_{m\gamma}^{pt} \leq k_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T Pu)\|_\gamma^p + \\ &+ k_1 \lim_{T \rightarrow \infty} \|Q(u, \varphi_T)\|_\gamma^p \leq b_1 k_1 \|Pu\|_\gamma^p, \quad \text{т.е.} \\ 1 &\leq k_1 b_1 \|Pu\|_\gamma^p. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит (3). Следовательно, оператор $P: B_{m\gamma}^p \rightarrow B_\gamma^p$ корректен (1).

В другую сторону. Допустим, что оператор $P: B_{m\gamma}^p \rightarrow B_\gamma^p$ корректен. В выражение

$$A(\varphi_T u) = \sum_{k=1}^t \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\left\| \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j-1} \Delta(y-x) D^\alpha \left(\begin{array}{c} \varphi_T(x+(j-1)) \times \\ \times u(x+(j-1)(y-x)) \end{array} \right) \right\|^p}{|y-x|^{n+p\gamma}} dx dy \right)^{1/p}$$

сделаем замену переменных по формулам $x = (1-j)z_j + jw_j$, $y = (2-j)z_j + (j-1)w_j$, $0 \neq \frac{\partial(x,y)}{\partial(z_j,w_j)} \leq a_3$, a_3 не зависит от j . После замены получим

$$\begin{aligned} A(\varphi_T u) &\leq \\ &= a_3 \sum_{k=1}^t \sum_{|\alpha| \leq m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\left\| \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} C_{k-1}^{j-1} (D^\alpha \varphi_T(z_j) u(z_j)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D^\alpha(\varphi_T(w_j) u(w_j)) \right\|^p}{|z_j - w_j|^{n+p\gamma}} dz_j dw_j \right)^{1/p} \leq \\ &\leq a_3 \sum_{k=1}^t \sum_{|\alpha| \leq m} \left(2^k \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{\| (D^\alpha \varphi_T(z_j) u(z_j)) - D^\alpha(\varphi_T(w_j) u(w_j)) \|^p}{|z_j - w_j|^{n+p\gamma}} dz_j dw_j \right)^{1/p} \leq \\ &\leq a_3 t 2^{t+1} \langle \varphi_T u \rangle_{m\gamma}^p. \end{aligned}$$

Согласно лемме (2)

$$\begin{aligned} A\langle \varphi_T u \rangle &\leq a_3 t 2^{t+1} \langle \varphi_{1T}^2(\varphi_{1T}^2 u) \rangle_{m\gamma}^p \leq 2^{t+1} a a_3 t \langle \varphi_{1T}^2 u \rangle_{m\gamma}^p + \\ &+ 2^{t+1} a a_3 t T^{-\gamma} \|\varphi_{1T}^2 u\|_m = a_4 \langle \varphi_{1T}^2 u \rangle_{m\gamma}^p + a_4 T^{-\gamma} \|\varphi_{1T}^2 u\|_m, \quad a_4 = 2^{t+1} a a_3 t. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как оператор $P: B_{m\gamma}^p \rightarrow B_\gamma^p$ корректен, то

$$\begin{aligned} \|\varphi_{1T}^2 u\|_m &\leq (k_1 + b_2 k_1 T^{-2\gamma}) \|Pu\|_0 + b_3 k_1 T^{-1} \|u\|_m + \\ &+ b_4 k_1 \langle Pu \rangle_\gamma^p + b_5 k_1 T^{-\gamma} \langle u \rangle_{m\gamma}^p \quad \text{и} \end{aligned}$$

$\langle \varphi_{1T}^2 u \rangle_{m\gamma}^p \leq a \langle u \rangle_{m\gamma}^p + a T^{-\gamma} \|u\|_m$, $b_3 - b_5$ некоторые положительные постоянные не зависящие от u и T . Следовательно, из (8) получаем

$$\begin{aligned} A\langle \varphi_T u \rangle &\leq a_4 T^{-\gamma} (k_1 + b_2 k_1 T^{-2\gamma}) \|Pu\|_0 + b_4 k_1 \langle Pu \rangle_\gamma^p + \\ &+ b_3 k_1 T^{-1} \|u\|_m + b_5 k_1 T^{-\gamma} \langle u \rangle_{m\gamma}^p + a_4 T^{-\gamma} \|u\|_m + a_4 \langle u \rangle_{m\gamma}^p. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A\langle \varphi_T u \rangle = a_4 \langle u \rangle_{m\gamma}^p + b_4 k_1 \langle Pu \rangle_\gamma^p.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T u)\|_{m\gamma}^p &= \lim_{T \rightarrow \infty} \|(\varphi_T u)\|_m + \lim_{T \rightarrow \infty} A(\varphi_T u) = \|u\|_m \pm a_4 \langle u \rangle_{m\gamma}^p + \\ &+ b_4 k_1 \langle Pu \rangle_\gamma^p \leq (a_4 + b_4) k_1 \|Pu\|_\gamma^p, \quad \text{то} \end{aligned}$$

$\|u\|_{m\gamma}^{pt} \leq (a_4 + b_4) k_1 \|Pu\|_\gamma^p$, т. е. оператор $P: B_{m\gamma}^{pt} \rightarrow B_\gamma^p$ корректен.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд., доп. и перераб. М.: Наука, 1988. 336 с.
2. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы М. Тейлор. М.: Мир, 1985. 472 с.
3. *Бесов О.В., Ильин В.П.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М., 1975. 480 с.
4. *Трибелъ Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.
5. *Левитан Б.М., Жиков В.В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 204 с.
6. *Кузнецова Т.Б., Тюрин В.М.* Материалы всероссийской научной конференции. Липецк, 2007. Т. 1. 230 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Тюрин Василий Михайлович, Липецкий государственный педагогический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, e-mail: tvmla@yandex.ru

UDC 517.983

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-435-438

ABOUT SOME LINEAR DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SPACES OF BESOV-SOBOLEV TYPE

© V. M. Tyurin

The problem of invertibility of linear differential operators with partial derivatives of Besov type is studied.

Key words: well-posed operator, functional spaces.

REFERENCES

1. *Sobolev S.L.* Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoy fizike. 3-e izd., dop. i pererab. M.: Nauka, 1988. 336 s.
2. *Taylor M.* Pseudodifferential'nye operatory M. Teylor. M.: Mir, 1985. 472 s.
3. *Besov O.V., Il'in V.P.* Integral'nye predstavleniya funkciy i teoremy vlozheniya. M., 1975. 480 s.
4. *Tribel' H.* Teoriya interpol'yacii, funkcional'nye prostranstva, differencial'nye operatory. M.: Mir, 1980. 664 s.
5. *Levitan B.M., Zhikov V.V.* Pochti periodicheskie funkciy i differencial'nye uravneniya. M.: Izd-vo MGU, 1978. 204 s.
6. *Kuznecova T.B., Tyurin V.M.* Materialy vserossiyskoy nauchnoy konferencii. Lipeck, 2007. T. 1. 230 s.

Received 21 March 2016.

Tyurin Vasily Mikhaylovich, Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics Department, e-mail: tvmla@yandex.ru

УДК 517.911, 517.968

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-439-447

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВИДА ИМПУЛЬСНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© О. В. Филиппова

Исследована краевая задача для импульсных функционально-дифференциальных включений с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений в пространстве суммируемых функций. Введено понятие обобщенного решения. Получены условия существования обобщенных решений и найдены их оценки.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; краевая задача; выпуклость по переключению.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n -мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\rho_{\mathbf{X}}[x; U]$ – расстояние от точки $x \in \mathbf{X}$ до множества $U \subset \mathbf{X}$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$; $h_{\mathbf{X}}^+[U_1; U] \equiv \sup_{x \in U_1} \rho_{\mathbf{X}}[x, U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset \mathbf{X}$ от множества U в пространстве $\mathbf{X}$; $h_X[U_1; U] = \max\{h_X^+[U_1; U]; h_X^+[U; U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $\mathbf{L}^n[a, b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a, b]} = \int_a^b |x(s)| ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Пусть $t_k \in [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, m$, $(a < t_1 < \dots < t_m < b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ ($\tilde{\mathbf{D}}^n[a, b]$) множество всех непрерывных (абсолютно-непрерывных) на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\dots$, $(t_m, b]$ функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} = \sup\{|x(t)| : t \in [a, b]\}$ ($\|x\|_{\tilde{\mathbf{D}}^n[a, b]} = |x(a)| + \|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^n[a, b]} + \sum_{k=1}^m |\Delta(x(t_k))|$), где $\Delta(x(t_k)) = x(t_k + 0) - x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Пусть $y \in \mathbf{L}^n[a, b]$, β_k , $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим вначале линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$\mathcal{L}x = y, \quad \Delta x(t_k) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$lx = \alpha, \quad (2)$$

где $\mathcal{L}: \tilde{\mathbf{D}}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{L}^n[a, b]$ – линейное непрерывное отображение, $l: \tilde{\mathbf{D}}^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Пусть задача (1), (2) однозначно разрешима. Тогда ее решение представимо в виде

$$x = X\alpha + Gy + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k, \quad (3)$$

где X – фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, $\Delta x(t_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$ при условии, что $l(X) = E$, E – единичная $n \times n$ матрица; $(Gy)(t) = \int_a^b G(t, s)y(s)ds$ – оператор Грина $G: \mathbf{L}^n[a, b] \rightarrow \mathbf{D}^n[a, b]$ с ядром $G(t, s)$, называемым матрицей Грина; $(G_k \beta_k)(t) = \chi_{(t_k, b]}(t) \int_a^b G(t_k, s)\beta_k ds$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция.

Применим представление (3) решения задачи (1), (2) к исследованию краевой задачи для импульсного функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x), \quad \Delta x(t_k) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (4)$$

$$lx \in \varphi(x), \quad (5)$$

где $\Phi: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$; $\varphi: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$.

Согласно представлению (3), задача (4), (5) эквивалентна включению

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x) + \sum_{k=1}^m G_k\beta_k.$$

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $sw\Phi$ множества Φ , называется совокупность всех элементов вида $y = \sum_{i=1}^l \chi(\mathcal{U}_i)x_i$, где $x_i \in \Phi$, l – любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, l}$, осуществляют разбиение отрезка $[a, b]$, т. е. $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^l \mathcal{U}_i = [a, b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Под **обобщенным решением задачи** (4), (5) понимается функция $x \in \tilde{\mathbf{D}}^n[a, b]$, удовлетворяющая соотношениям

$$\mathcal{L}x \in \overline{sw}\Phi(x), \quad \Delta x(t_k) = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$lx \in \varphi(x).$$

Отметим, что если x – обобщенное решение задачи (4), (5), то существуют такие $z \in \varphi(x)$ и $v \in \overline{sw}\Phi(x)$, что $x = Xz + Gv + \sum_{k=1}^m G_k\beta_k$.

Пусть $q_0 \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = Xz_0 + Gv_0 + \sum_{k=1}^m G_k\beta_k + e, \quad (6)$$

где $e = q_0 - Xz_0 - Gv_0 - \sum_{k=1}^m G_k\beta_k$. Пусть далее для функции $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$ существует функция $\kappa \in \mathbf{L}^1[a, b]$ такая, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_0, \overline{sw}\Phi(q_0)] \leq \int_{\mathcal{U}} \kappa(s)ds. \quad (7)$$

Определим функцию $\omega \in \mathbf{C}_+^1[a, b]$ равенством

$$\omega(t) = \int_a^b |G(t, s)|\kappa(s)ds + |e(t)|, \quad (8)$$

где $|G(t, s)|$, $|e(t)|$ – норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц $G(t, s)$ и $e(t)$.

Будем предполагать, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ и любых $x, y \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ существует такая функция $\kappa_{\Phi} \in \mathbf{L}^1[a, b]$ и такое $\kappa_{\varphi} \geq 0$, что

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leq \|x - y\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} \kappa_{\Phi}(s) ds; \quad (9)$$

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x), \varphi(y)] \leq \kappa_{\varphi} \|x - y\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]}; \quad (10)$$

$$\max_{t \in [a, b]} \int_a^b |G(t, s)| \kappa_{\Phi}(s) ds + \kappa_{\varphi} \max_{t \in [a, b]} |X(t)| < 1. \quad (11)$$

Пусть для функции $\omega \in \mathbf{C}_+^1[a, b]$, определенной соотношением (8), равномерно сходится ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \omega, \quad \mathcal{A}^0 \omega = \omega, \quad \mathcal{A}^i \omega = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{i-1} \omega), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A}: \mathbf{C}_+^1[a, b] \rightarrow \mathbf{C}_+^1[a, b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}\tilde{\omega})(t) = \left(\int_a^b |G(t, s)| \kappa_{\Phi}(s) ds + \kappa_{\varphi} \right) \|\tilde{\omega}\|.$$

Пусть $\xi(\omega)$ – сумма ряда (12), то есть

$$\xi(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i \omega. \quad (13)$$

Для любой функции $\tilde{\omega} \in \mathbf{C}_+^1[a, b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (12) сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a, b]$.

Т е о р е м а. Пусть $q_0 \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$ и пусть функция q_0 представима равенством (6). Далее, пусть отображения $\Phi: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$, $\varphi: \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$ удовлетворяют соотношениям (9) – (11). Тогда найдется обобщенное решение x задачи (4), (5), для которого выполняются следующие оценки: при любом $t \in [a, b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leq \xi(\omega)(t); \quad (14)$$

$$|z - z_0| \leq \kappa_{\varphi} \max_{t \in [a, b]} |X(t)| \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{C}^1[a, b]}; \quad (15)$$

при почти всех $t \in [a, b]$

$$|v(t) - v_0(t)| \leq \kappa(t) + \|\kappa_{\Phi}(t)\|_{\mathbf{L}^1[a, b]} \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{L}^1[a, b]}. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $q_0 \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$ представима в виде (6) и пусть функция $v_1 \in \overline{w}\Phi(q_0)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ удовлетворяет равенству

$$\|v_1 - v_0\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_0, \overline{w}\Phi(q_0)].$$

Тогда в силу неравенства (7) при почти всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|v_1(t) - v_0(t)| \leq \kappa(t). \quad (17)$$

Далее, пусть

$$q_1 = z_1 + Gv_1 + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k,$$

где $z_1 \equiv z_0$. Тогда согласно (17) для любого $t \in [a, b]$ получаем соотношения

$$\begin{aligned} |q_1(t) - q_0(t)| &= |(G(v_1 - v_0))(t) - e(t)| \leq |(G(v_1 - v_0))(t)| + |e(t)| \leq \\ &\leq \int_a^b |G(t, s)| |v_1(s) - v_0(s)| ds + |e(t)| \leq \int_a^b |G(t, s)| k(s) ds + |e(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ выполняется оценка:

$$|q_1(t) - q_0(t)| \leq (\mathcal{A}^0 \omega)(t). \quad (18)$$

Существует $z_2 \in \varphi(q_1)$ удовлетворяющее равенству

$$|z_2 - z_1| = \rho[z_1, \varphi(q_1)].$$

Тогда в силу (10) имеют место неравенства

$$|z_2 - z_1| \leq h[\varphi(q_0); \varphi(q_1)] \leq \kappa_\varphi \|q_0 - q_1\|_{\tilde{\mathcal{C}}^n[a, b]} \leq \kappa_\varphi \mathcal{A}^0 \omega.$$

Пусть для функции $v_2 \in \overline{sw}\Phi(q_1)$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a, b]$ справедливо соотношение

$$\|v_2 - v_1\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_1, \overline{sw}\Phi(q_1)].$$

Из определения функции v_2 и неравенств (9), (18) для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ вытекают оценки

$$\|v_2 - v_1\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_0); \overline{sw}\Phi(q_1)] \leq \|q_0 - q_1\|_{\tilde{\mathcal{C}}^n(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s) ds \leq \|\kappa_\Phi\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \|\mathcal{A}^0 \omega\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Пусть

$$q_2 = z_2 + Gv_2 + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |q_2(t) - q_1(t)| &= |z_2(t) + (Gv_2)(t) - z_1(t) - (Gv_1)(t)| \leq \\ &\leq |z_2(t) - z_1(t)| + |G(v_2 - v_1)(t)| \leq \kappa_\varphi (\mathcal{A}^0 \omega)(t) + \int_a^b |G(t, s)| |v_2(s) - v_1(s)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, при всех $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|q_2(t) - q_1(t)| \leq (\mathcal{A} \omega)(t). \quad (19)$$

Пусть $z_3 \in \varphi(q_2)$ удовлетворяет равенству

$$|z_3 - z_2| = \rho[z_2, \varphi(q_2)].$$

Тогда из соотношений (10), (19) получаем неравенства

$$|z_3 - z_2| \leq h[\varphi(q_1); \varphi(q_2)] \leq \kappa_\varphi \|q_1 - q_2\|_{\tilde{C}^n[a,b]} \leq \kappa_\varphi \mathcal{A}\omega. \quad (20)$$

Далее, пусть $v_3 \in \overline{sw}\Phi(q_2)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ удовлетворяет равенству

$$\|v_3 - v_2\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_2, \overline{sw}\Phi(q_2)].$$

Из соотношений (9), (19) вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|v_3 - v_2\|_{L^n(\mathcal{U})} &\leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_1); \overline{sw}\Phi(q_2)] \leq \\ &\leq \|q_1 - q_2\|_{\tilde{C}^n(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s) ds \leq \|\kappa_\Phi \mathcal{A}\omega\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь пусть

$$q_3 = z_3 + Gv_3 + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k.$$

Тогда из (20), (21) для любого $t \in [a, b]$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} |q_3(t) - q_2(t)| &\leq |z_3(t) - z_2(t)| + |G(v_3 - v_2)(t)| \leq \\ &\leq \kappa_\varphi \mathcal{A}\omega + \int_a^b |G(t, s)| (\kappa_\Phi \mathcal{A}\omega)(s) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $t \in [a, b]$ справедлива оценка

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leq (\mathcal{A}^2\omega)(t). \quad (22)$$

Наконец, пусть для $z_4 \in \varphi(q_3)$ имеет место равенство

$$|z_4 - z_3| = \rho[z_3, \varphi(q_3)].$$

Тогда из (10) и (22) вытекают соотношения

$$|z_4 - z_3| \leq h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(q_2); \varphi(q_3)] \leq \kappa_\varphi \|q_2 - q_3\|_{\tilde{C}^n[a,b]} \leq \kappa_\varphi \mathcal{A}^2\omega.$$

Пусть $v_4 \in \overline{sw}\Phi(q_3)$ – такая функция, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется равенство

$$\|v_4 - v_3\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_3, \overline{sw}\Phi(q_3)].$$

Из определения функции v_4 и из соотношений (9), (22) для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ вытекают оценки

$$\begin{aligned} \|v_4 - v_3\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} &\leq h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_2); \overline{sw}\Phi(q_3)] \leq \\ &\leq \|q_2 - q_3\|_{\tilde{C}^n(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s) ds \leq \|\kappa_\Phi\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \|\mathcal{A}^2\omega\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \end{aligned}$$

Далее, пусть

$$q_4 = z_4 + Gv_4 + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k.$$

Тогда для любого $t \in [a, b]$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |q_4(t) - q_3(t)| &\leq |z_4(t) - z_3(t)| + |G(v_4 - v_3)(t)| \leq \\ &\leq \kappa_\varphi \mathcal{A}^2 \omega + \int_a^b |G(t, s)| (\kappa_\Phi \mathcal{A}^2 \omega)(s) ds = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2 \omega)(t) = (\mathcal{A}^3 \omega)(t). \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательности $\{q_i\}$, $\{z_i\}$ и $\{v_i\}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$q_i = z_i + Gv_i \sum_{k=1}^m G_k \beta_k, \quad (23)$$

где $z_i \in \varphi(q_{i-1})$, $v_i \in \Phi(q_{i-1})$, причем имеют место следующие соотношения:

$$|q_i(t) - q_{i-1}(t)| \leq (\mathcal{A}^{i-1} \omega)(t), \quad (24)$$

$$\|z_i - z_{i-1}\|_{\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]} \leq \kappa_\varphi \mathcal{A}^{i-2} \omega \quad (25)$$

и при почти всех $t \in [a, b]$

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \leq \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \|(\mathcal{A}^{i-2} \omega)(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \quad (26)$$

Покажем, что последовательность $\{q_i\}$ сходится. Действительно, согласно неравенству (24) для любых $j = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и $t \in [a, b]$ получаем оценку

$$\begin{aligned} |q_{j+i}(t) - q_j(t)| &\leq |q_{j+i}(t) - q_{j+i-1}(t)| + |q_{j+i-1}(t) - q_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &+ |q_{j+1}(t) - q_j(t)| \leq (\mathcal{A}^{j+i-1} \omega)(t) + (\mathcal{A}^{j+i-2} \omega)(t) + \dots + (\mathcal{A}^j \omega)(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для любых $j = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и при любом $t \in [a, b]$ выполняются соотношения

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leq \sum_{k=j}^{\infty} (\mathcal{A}^k \omega)(t). \quad (27)$$

Из сходимости ряда (12) следует, что последовательности $\{q_i\}$ фундаментальна в пространстве $\tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, поэтому последовательность $\{q_i\}$ сходится. Пусть

$$x = \lim_{i \rightarrow \infty} q_i.$$

Докажем, что x удовлетворяет теореме. Покажем, что для x справедливо неравенство (14). Пусть в неравенстве (27) $j = 0$. Тогда, учитывая, что $\xi(\omega) \in \mathbf{C}^1[a, b]$ – сумма ряда (12), при любом $t \in [a, b]$ получим оценку

$$|q_i(t) - q_0(t)| \leq \xi(\omega)(t).$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в этом соотношении, получим неравенство (14).

Докажем далее сходимость последовательности $\{z_i\}$. Так как при $t \in [a, b]$ и любых $i, j = 1, 2, \dots$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} |z_{j+i}(t) - z_j(t)| &\leq |z_{j+i}(t) - z_{j+i-1}(t)| + |z_{j+i-1}(t) - z_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &+ |z_{j+1}(t) - z_j(t)|, \end{aligned}$$

то, согласно (25) справедлива оценка

$$|z_{j+i} - z_j| \leq \kappa_\varphi \sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{A}^k \omega. \quad (28)$$

Отсюда и из сходимости ряда (12) вытекает, что последовательность $\{z_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$z = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i.$$

Приняв в соотношении (28) $j = 1$ и переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$, при этом учитывая, что $z_1 \equiv z_0$, получим, что z удовлетворяет неравенству (15).

Наконец, рассмотрим последовательность $\{v_i\}$. Докажем ее сходимость. В самом деле, для любых $j = 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} |v_{j+i}(t) - v_j(t)| &\leq |v_{j+i}(t) - v_{j+i-1}(t)| + |v_{j+i-1}(t) - v_{j+i-2}(t)| + \dots + \\ &\quad + |v_{j+1}(t) - v_j(t)| \end{aligned}$$

Поэтому из (26) следует, что при почти всех $t \in [a, b]$ выполняется оценка

$$|v_{j+i}(t) - v_j(t)| \leq \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \sum_{k=j-1}^{\infty} (\mathcal{A}^k \omega)(t) \|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \quad (29)$$

Следовательно, последовательность $\{v_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$. Пусть

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i.$$

Покажем, что при почти всех $t \in [a, b]$ z удовлетворяет соотношению (16). Действительно, так как при почти всех $t \in [a, b]$ и любом $i = 1, 2, \dots$ выполняется оценка

$$|v_{i+1}(t) - v_0(t)| \leq |v_{i+1}(t) - v_1(t)| + |v_1(t) - v_0(t)|,$$

то из (29) для любого $i = 1, 2, \dots$ и при почти всех $t \in [a, b]$ имеем неравенство

$$|v_{i+1}(t) - v_0(t)| \leq \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^k \omega)(t) \|_{\mathbf{L}^1[a, b]} + |v_1(t) - v_0(t)|.$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $i \rightarrow \infty$ и учитывая (13), (17), при почти всех $t \in [a, b]$ получим оценку (16). Далее, переходя в равенстве (23) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получим равенство

$$x = Xz + Gv + \sum_{k=1}^m G_k \beta_k,$$

$z \in \varphi(x)$, $v \in \overline{sw}\Phi(x)$ причем из непрерывности по Хаусдорфу отображений $\varphi : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow \text{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi : \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \rightarrow Q(\mathbf{L}^n[a, b])$ вытекают включения $v \in \overline{sw}\Phi(x)$ и $z \in \varphi(x)$, т. е. x – обобщенное решение задачи (4), (5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенная теорема дает несколько больше, чем просто условия существования решения краевой задачи (4), (5). Она дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q_0 \in \tilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$. При этом функция $\xi(\omega)$, зависящая от функций $q_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ и $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$, дает оценку погрешности приближенного решения – функции q_0 .

Таким образом, для импульсных функционально-дифференциальных включений с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, получены оценки обобщенных решений (см. [2], [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275-1313.
3. Чугунов П.И. Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155-179.
4. Булгаков А.И., Полянский А.И. Обобщенные решения квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 1. С. 52-54.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-97504, № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

UDC 517.911, 517.968

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-439-447

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE TYPE IMPULSE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© O.V. Filippova

A boundary value problem for one type impulse functional-differential inclusions with a multi-valued map not necessarily convex-valued with respect to switching in the space of summable functions is considered. Concept of a generalized solution is represented. Existence conditions for generalized solutions are obtained and their estimates are found.

Key words: functional-differential inclusion; boundary value problem; convexity with respect to switching.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 14-01-97504, № 14-01-00877).

REFERENCES

1. *Filippov A.F.* Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu. M.: Nauka, 1985. 224 s.
2. *Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V.* Funktsional'no-differentsial'nye vklucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. CHasti 1-6 // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2009. T. 14. Vyp. 6. S. 1275-1313.
3. *Chugunov P.I.* Svoystva resheniy differentsial'nykh vklucheniye i upravlyaemye sistemy // Prikl. matematika i pakety prikl. programm. Irkutsk: Izd-vo SEISO AN SSSR, 1980. S. 155-179.
4. *Bulgakov A.I., Polyanskiy A.I.* Obobshchennye resheniya kvazilineynykh kraevykh zadach dlya funktsional'no-differentsial'nykh vklucheniye // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2007. T. 12. Vyp. 1. S. 52-54.

Received 21 March 2016.

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЯДРА ОПЕРАТОРА, АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО B -ПОТЕНЦИАЛА РИССА

© Э. Л. Шишкина

В статье рассматривается ядро, предел обобщенной свертки с которым реализует обратный оператор для гиперболического потенциала Рисса, порожденного многомерным обобщенным сдвигом. Для такого ядра получено представление в виде интеграла, содержащего функцию Апеля F_4 .

Ключевые слова: расстояние Лоренца, преобразование Фурье–Бесселя, B -потенциал Рисса, функция Апеля.

Введение

Одним из наиболее полезных и хорошо изученных уравнений математической физики является гиперболическое уравнение вида

$$\square = 0, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Это уравнение является частным случаем как уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу

$$B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = 0,$$

где $\gamma_1 > 0$,

$$B_{\gamma_1} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{1}$$

— сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, так и обобщенного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу или, следуя терминологии И. А. Киприянова, B -гиперболического уравнения

$$\square_{\gamma} = 0,$$

$$\square_{\gamma} = B_{\gamma_1} - \sum_{i=2}^n B_{\gamma_i}, \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В связи с развитием дробного интегро-дифференциального исчисления особый интерес представляет изучение дробных степеней операторов $\square$ и $\square_{\gamma}$. Отрицательная дробная степень волнового оператора $\square$ называется *гиперболическим потенциалом Рисса* (см. [1] стр. 406, [2]). Такие потенциалы изучались в работах [1]–[6] с использованием преобразования Фурье. Отрицательная дробная степень оператора $\square_{\gamma}$, называемая *гиперболическим B -потенциалом Рисса*, была рассмотрена в [7].

Дробные степени операторов, содержащих сингулярный дифференциальный оператор Бесселя (1) обычно изучаются в образах преобразования Фурье–Бесселя (см. [8]–[10]). Так в работах [11]–[16] с помощью этого подхода были изучены эллиптические B -потенциалы Рисса,

которые являются отрицательными степенями оператора $\Delta_\gamma = \sum_{k=1}^n B_{\gamma_k}$. Однако существует и прямой подход, при котором дробные степени этого оператора строятся в явном интегральном виде, аналогично дробным интегралам Римана–Лиувилля (см. [17]–[18]). Более абстрактный подход к построению подобных операторов разработан в связи с теорией дифференциальных уравнений и функций гипербесселевого типа, а также обобщенных операторов преобразования (см. [19], [20]).

1. Основные определения

Положим

$$\mathbb{R}_n^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n, \ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}.$$

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел и $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Следуя И. А. Киприянову, функцию определенную на $\mathbb{R}_n^+$ будем называть четной по x_i , если она может быть продолжена на $\mathbb{R}_n$ четным образом по переменной x_i с сохранением класса принадлежности функции.

Через $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ будем обозначать часть класса функций Шварца, состоящее из четных по каждой из своих переменных функций, определенных на $\mathbb{R}_n^+$.

Преобразование Фурье–Бесселя имеет вид (см. [8]):

$$F_B[\varphi](\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathbf{j}_\gamma(x; \xi) \varphi(x) x^\gamma dx, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Здесь $\mathbf{j}_\gamma(x; \xi) = \prod_{j=1}^n j_{\frac{\gamma_j-1}{2}}(x_j \xi_j)$, а функция $j_\nu(t)$ связана с функцией Бесселя первого рода $J_\nu(t)$ соотношением

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu + 1) \frac{J_\nu(t)}{t^\nu}. \quad (2)$$

Для функций из S_{ev} преобразование F_B обратимо и обратное преобразование имеет вид

$$F_B^{-1}[\widehat{f}](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} F_B[\widehat{f}](x).$$

Многомерный оператор Пуассона имеет вид (см. [8])

$$\mathcal{P}_x^\gamma f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(x_1 \cos \alpha_1, \dots, x_n \cos \alpha_n) \prod_{j=1}^n \sin^{\gamma_j-1} \alpha_j d\alpha_j,$$

$$C(\gamma) = \pi^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_j}{2}\right)}.$$

Гиперболический B -потенциал Рисса имеет вид

$$(I_B^\alpha f)(x) = \int_{K^+} [y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_n^2]^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} (T^y f)(x) y^\gamma dy, \quad y^\gamma = \prod_{i=1}^n y_i^{\gamma_i}, \quad (3)$$

где $K^+ = \{y \in \mathbb{R}_n^+ : y_1^2 \geq y_2^2 + \dots + y_n^2\}$. Порядок потенциала α удовлетворяет неравенствам $n + |\gamma| - 2 < \alpha < n + |\gamma|$. В (3) $(T^y f)(x) = (T_{x_1}^{y_1} \dots T_{x_n}^{y_n} f)(x)$ — многомерный обобщенный сдвиг, каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен при $i=1, \dots, n$ выражением (см. [21], [22])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + \tau_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i d\varphi_i.$$

Пусть

$$w_{\alpha, \varepsilon}(\xi) = \tau^{-1} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon \xi_1 - \varepsilon |\xi'|}, \quad \tau = \begin{cases} e^{\frac{\alpha \pi i}{2}}, & \xi_1^2 > |\xi'|^2; \\ 1, & \xi_1^2 < |\xi'|^2. \end{cases}$$

Обратный к потенциалу $h(x) = (I_B^\alpha f)(x)$ оператор строится в виде

$$((I_B^\alpha)^{-1} h)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1} h)(x),$$

где

$$((I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1} h)(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_x^t(G_{\alpha, \varepsilon}(x)) h(t) t^\gamma dt, \\ G_{\alpha, \varepsilon}(x) = F_B^{-1}[w_{\alpha, \varepsilon}](x) = \\ = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_n^+} \tau^{-1} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon \xi_1 - \varepsilon |\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \xi^\gamma d\xi = \\ = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} F_B[w_{\alpha, \varepsilon}](x), \quad (4)$$

$\tau = e^{\frac{\alpha \pi i}{2}}$ при $\xi_1^2 > |\xi'|^2$ и $\tau = 1$ при $\xi_1^2 < |\xi'|^2$.

В следующем пункте получим представление ядра $G_{\alpha, \varepsilon}(x)$ оператора $(I_B^\alpha)_\varepsilon^{-1}$ через интеграл, содержащий функцию Аппеля $F_4(a, b, c_1, c_2; x, y)$ (см. [23], с. 658), которая при $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} < 1$ имеет вид:

$$F_4(a, b, c_1, c_2; x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(c_1)_m (c_2)_n m! n!} x^m y^n, \quad (5)$$

а при $|x|^{1/2} + |y|^{1/2} \geq 1$ функция $F_4(a, b, c_1, c_2; x, y)$ понимается как аналитическое продолжение, которое определяется формулами из [24]. В (5) выражение $(x)_n$ — символ Похгаммера:

$$(x)_n = \prod_{k=1}^n (x + k - 1).$$

2. Интегральное представление ядра оператора, аппроксимирующего обратный оператор для гиперболического B -потенциала Рисса

Т е о р е м а. Преобразование Фурье–Бесселя функции

$$w_{\alpha,\varepsilon}(\xi) = \tau^{-1} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|}, \quad \tau = \begin{cases} e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}, & \xi_1^2 > |\xi'|^2; \\ 1, & \xi_1^2 < |\xi'|^2, \end{cases}$$

имеет вид

$$F_B[e_{\alpha,\varepsilon}](x) = \frac{\Gamma(n + |\gamma| + \alpha) \prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i + 1}{2}\right)}{2^{n-2} \varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-1}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^\infty e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-r)} (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^{n+|\gamma|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}} \times \\ \times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}, \frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2}; \frac{\gamma_1+1}{2}, \frac{n+|\gamma|-1}{2}; -\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2}, -\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right) dr,$$

где $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда, а $F_4(a, b, c_1, c_2; x, y)$ — функция Аппеля, определенная формулой (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g_{\alpha,\varepsilon}(x) = F_B[\tau^{-1} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|}](\xi)$. Представим функцию $g_{\alpha,\varepsilon}(x)$ в виде суммы:

$$g_{\alpha,\varepsilon}(x) = \int_{\mathbb{R}_n^+} \tau^{-1} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \xi^\gamma d\xi = \\ = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \int_{\xi_1^2 > |\xi'|^2} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \xi^\gamma d\xi + \\ + \int_{\xi_1^2 < |\xi'|^2} |\xi_1^2 - |\xi'|^2|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \xi^\gamma d\xi = J_1(x) + J_2(x).$$

Рассмотрим интеграл $J_1(x)$. Имеем

$$J_1(x) = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \int_{\xi_1^2 > |\xi'|^2} (\xi_1^2 - |\xi'|^2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon\xi_1 - \varepsilon|\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \xi^\gamma d\xi = \\ = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1} j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1) \xi_1^{\alpha+\gamma_1} d\xi_1 \times \\ \times \int_{\xi_1^2 > |\xi'|^2} \left(1 - \frac{|\xi'|^2}{\xi_1^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon|\xi'|} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi') (\xi')^{\gamma'} d\xi'.$$

Во внутреннем интеграле произведем замену переменных $\frac{\xi'}{\xi_1} = y$, а затем перейдем к сферическим координатам $y = r\sigma$, $|y| = r$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, получим

$$J_1(x) = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\xi_1} j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1) \xi_1^{n-1+\alpha+|\gamma|} d\xi_1 \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{|y| > 1} (1 - |y|^2)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\varepsilon \xi_1 |y|} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi_1 y) y^{\gamma'} dy = \\
 & = e^{-\frac{\alpha \pi i}{2}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \xi_1} j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1 \xi_1) \xi_1^{n-1+\alpha+|\gamma|} d\xi_1 \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{n-2+|\gamma'|} e^{-\varepsilon \xi_1 r} dr \times \\
 & \quad \times \int_{S_{n-2}^+} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi_1 r \sigma) \sigma^{\gamma'} dS.
 \end{aligned}$$

Найдем

$$\int_{S_{n-2}^+} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi_1 r \sigma) \sigma^{\gamma'} dS = \int_{S_{n-2}^+} \mathcal{P}_\sigma^{\gamma'}(e^{-i\langle x', \xi_1 r \sigma \rangle}) \sigma^{\gamma'} dS.$$

Используя формулу «интеграла по сфере от весовой плоской волны» (см. [25]) вида

$$\int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_\xi^\gamma f(\langle \xi, x \rangle) x^\gamma d\omega_x = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 f(|\xi|p) (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}} : dp,$$

получим

$$\int_{S_{n-2}^+} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi_1 r \sigma) \sigma^{\gamma'} dS = \frac{\prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-2}{2}\right)} \int_{-1}^1 e^{-ir\xi_1|x'|p} (1-p^2)^{\frac{n+|\gamma'|-4}{2}} dp.$$

Последний интеграл найдем по формуле 2.3.5.3 из [26], с. 260, будем иметь

$$\int_{S_{n-2}^+} \mathbf{j}_\gamma(x', \xi_1 r \sigma) \sigma^{\gamma'} dS = \frac{\prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2} (r\xi_1|x'|/2)^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= e^{-\frac{\alpha \pi i}{2}} \frac{\prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma'|-1}{2}} |x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} \int_0^\infty e^{-\varepsilon \xi_1} j_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1 \xi_1) \xi_1^{\frac{n+|\gamma|+\gamma_1+1}{2}+\alpha} d\xi_1 \times \\
 & \quad \times \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}} e^{-\varepsilon \xi_1 r} J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|) dr.
 \end{aligned}$$

Во внешнем интеграле перейдем к функции $J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1 \xi_1)$ по формуле (2) и поменяем местами порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= e^{-\frac{\alpha \pi i}{2}} \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}} x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}} |x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}} dr \times \\
 & \quad \times \int_0^\infty \xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1} e^{-\varepsilon \xi_1(1+r)} J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1 \xi_1) J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|) d\xi_1.
 \end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим формулу 2.12.38.2 из [23], тогда

$$J_1(x) = e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}} \frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha) \prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2} \varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)} \int_0^1 (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}} \times \\ \times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}, \frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}, \frac{n+|\gamma'|-1}{2}; -\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2}, -\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right) dr$$

Аналогично найдем $J_2(x)$:

$$J_2(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{\frac{n-|\gamma|}{2}} x_1^{\frac{\gamma_1-1}{2}} |x'|^{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}} \times \\ \times \int_1^\infty (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} r^{\frac{n+|\gamma'|-1}{2}} dr \times \\ \times \int_0^\infty \xi_1^{\frac{n+|\gamma|}{2}+\alpha+1} e^{-\varepsilon\xi_1(1+r)} J_{\frac{\gamma_1-1}{2}}(x_1\xi_1) J_{\frac{n+|\gamma'|-3}{2}}(r\xi_1|x'|) d\xi_1 = \\ = \frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha) \prod_{i=2}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-2} \varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)} \int_1^\infty (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}} \times \\ \times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}, \frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}, \frac{n+|\gamma'|-1}{2}; -\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2}, -\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right) dr.$$

Складывая $J_1(x)$ и $J_2(x)$ получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Из (4) следует, что интересующая нас функция $G_{\alpha,\varepsilon}(x)$ имеет интегральное представление

$$G_{\alpha,\varepsilon}(x) = \frac{2^{2-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1+1}{2}\right) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \frac{\Gamma(n+|\gamma|+\alpha)}{\varepsilon^{n+|\gamma|+\alpha} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|-1}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^\infty e^{\frac{\alpha\pi i}{2}\theta(1-r)} (1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{r^{n+|\gamma'|-2}}{(1+r)^{n+|\gamma|+\alpha}} \times \\ \times F_4\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}, \frac{n+|\gamma|+\alpha+1}{2}, \frac{\gamma_1+1}{2}, \frac{n+|\gamma'|-1}{2}; -\frac{x_1^2}{(\varepsilon(1+r))^2}, -\frac{(r|x'|)^2}{(\varepsilon(1+r))^2}\right) dr.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.
2. Ногин В.А., Сухинин Е.В. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 5. С. 550–552.
3. Riesz M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. № 1-2. P. 1–223.

4. Ногин В.А., Сухинин Е.В. Обращение и описание гиперболических потенциалов с L_p -плотностями. Депонирована в ВИНИТИ. Москва. 1992. № 2512–92. 50 с.
5. Ногин В.А., Сухинин Е.В. Дробные степени оператора Клейна-Гордона-Фока в L_p -пространствах // ДАН, 1995. Т. 341. № 2. С. 166–168.
6. Киприянов И. А., Иванов Л. А. Потенциалы Рисса на пространствах Лоренца // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). № 4 (8). С. 465–474.
7. Шишкина Э.Л. Ограниченность B -гиперболического потенциала // Тезисы докладов международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V» (г. Ростов-на-Дону, 2015 г.). С. 147–148.
8. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 200 с.
9. Киприянов И.А. Преобразование Фурье-Бесселя и дробные степени дифференциальных операторов // ДАН 2000. Т. 373. № 1. С. 17–20.
10. Roschupkin S. , Lyakhov L. N. A Priori Estimates for Solutions of Singular B -Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel Operators // Journal of Mathematical sciences. 2014. V. 196. № 4. P. 563–571.
11. Ляхов Л.Н. Обращение B -потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 3. С. 466–469.
12. Ляхов Л.Н. Пространства B -потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1994. Т. 334. № 3. С. 278–280.
13. Ляхов Л.Н. О символе интегрального оператора типа B -потенциала с однократной характеристикой // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 164–168.
14. Ляхов Л.Н. Шишкина Э.Л. Обобщенные B -потенциалы Рисса смешанного типа // ДАН. 2006. Т. 406. № 3. С. 303–307.
15. Ляхов Л.Н., Шишкина Э.Л. Обращение общих B -потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых пространствах // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 443–447.
16. Lyakhov L.N., Shishkina E.L. Inversion of general Riesz B -potentials // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013. P. 115–126.
17. Ситник С.М. О явных реализациях дробных степеней дифференциального оператора Бесселя и их приложениях к дифференциальным уравнениям // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12. № 2. С. 69–75.
18. Ситник С.М. Дробное интегрирование для дифференциального оператора Бесселя // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 22–26 мая 2004. С. 163–167.
19. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications // Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Sci. UK. 1994. № 301. 402 p.
20. Dimovski I.H. Convolutional Calculus // Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1990. 196 p.
21. Delsartes J. Une extension nouvelle de la theorie de fonctions presque-periodiques de Bohr // Acta Mathematica. 1939. V. 69. P. 257–317.
22. Левитан Б.М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи математических наук. 1951. Т. 6. Вып. 2 (42). С. 102–143.
23. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции 2-е изд., Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 664 с.
24. Exton H. On the system of partial differential equations associated with Appell's function F_4 // J. Phys. A: Math. Gen. 28, 1995. P. 631–641.
25. Ляхов Л.Н. B -гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B -потенциальными ядрами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 232 с.
26. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. 2-е изд. М.: Физматлит, 2002. Т. 1. 632 с.

Поступила в редакцию 11 марта 2016 г.

Шишкина Элина Леонидовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и прикладного анализа, e-mail: ilina_dico@mail.ru

UDC 517.911, 517.968

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-448-456

INTEGRAL REPRESENTATION OF APPROXIMATING INVERSE OPERATORS FOR HYPERBOLIC RIESZ B -POTENTIAL KERNEL

© E. L. Shishkina

The article deals with the special kernel. The limit of the generalized convolution with this kernel is the inverse operator for hyperbolic Riesz potential generated by multidimensional generalized translation. The integral representation containing Appel F_4 function was obtained for this kernel.

Key words: Lorenz distance, Fourier-Bessel transform, Riesz B -potential, Appel function.

REFERENCES

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and Fractional Derivatives and Some Their Applications. Minsk: Science and Engineering, 1987. 687 p.
2. Nogin V.A., Sukhinin E.V. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p -spaces // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1993. V. 329. № 5. P. 550–552.
3. Riesz M. L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. № 1-2. P. 1–223.
4. Nogin V.A., Sukhinin E.V. Inversion and characterization of hyperbolic potentials in L_p -spaces. Deponiert in VINITI, Moscow, 1992. № 2512-92. 50 p.
5. Nogin V.A., Sukhinin E.V. Fractional powers of the Klein-Gordon-Fock operator in L_p -spaces // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1995. V. 51. № 2. P. 194–196.
6. Kipriyanov I.A., Ivanov L.A. Riesz potentials on Lorentz spaces // Math. Sb. 1986. V. 130 (172). № 4 (8). P. 465–474.
7. Shishkina E.L. Boundedness of B -hyperbolic potential // Abstracts of Five International Conference on Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis, 2015, Rostov-on-Don, RUSSIA. P. 147–148.
8. Kipriyanov I.A. Singular Elliptic Problems. Nauka, Moscow, 1997. 200 p.
9. Kipriyanov I.A. The Fourier-Bessel transform and fractional powers of differential operators // Dokl. Math., 2000. V. 62. № 1. P. 10–13.
10. Roschupkin S., Lyakhov L.N. A Priori Estimates for Solutions of Singular B -Elliptic Pseudodifferential Equations with Bessel Operators // Journal of Mathematical sciences. 2014. V. 196. № 4. P. 563–571.
11. Lyakhov L.N. Inversion of Riesz B -potential // Sov. Math., Dokl., 1992. V. 44. № 3. P. 717–720.
12. Lyakhov L.N. Space of Riesz B -potential // Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., 1994. V. 49. № 1. P. 83–87.
13. Lyakhov L.N. On the symbol of the integral operator of the B -potential type with a single characteristic // Dokl. Math. 1996. V. 54. № 3. 852–856.
14. Lyakhov L.N., Shishkina E.L. Generalized Riesz B -potentials of mixed type // Dokl. Math. 2006. V. 73. № 1. P. 42–45.
15. Lyakhov L.N., Shishkina E.L. Inversion of general Riesz B -potentials with homogeneous characteristic in weight classes of functions // Dokl. Math. 2009. V. 79. № 3. 377–381.
16. Lyakhov L.N., Shishkina E.L. Inversion of general Riesz B -potentials // Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2012 (Edited by M.V.Dubatovskaya, S.V.Rogosin), Cambridge Scientific Publishers, Cottenham, 2013, P. 115–126.
17. Sitnik S.M. On explicit implementations of fractional powers of the Bessel differential operator and its applications to differential equations // Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoi akademii nauk. 2010. V. 12. № 2. P. 69–75.
18. Sitnik S.M. Fractional integro-differentiation for the Bessel differential operator // Proceedings of the International Russian-Kazakh Symposium «Mixed-type equations and related problems of the analysis and informatics». Nalchik, Elbrus. 2004. P. 163–167.
19. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications // Pitman Research Notes in Math. Series. Longman Sci. UK. 1994. № 301. 402 p.

20. *Dimovski I.H.* Convolutional Calculus // Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1990. 196 p.
21. *Delsartes J.* Une extension nouvelle de la theorie de fonctions presque-periodiques de Bohr // Acta Mathematica. 1939. V. 69. P. 257–317.
22. *Levitani B.M.* Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspehi mat. nauk. 1951. V. 6. Issue 2 (42). P. 102–143.
23. *Prudnikov, A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Special functions. 2-nd edition. V. 2. M.: FML, 2003. 664 p.
24. *Extton H.* On the system of partial differential equations associated with Appell's function F_4 // J. Phys. A: Math. Gen. 28, 1995. P. 631–641.
25. *Lyakhov L.N.* B -hypersingular integrals and their applications to description of Kipriyanov functional class and to integral equations with B -potential kernels. Lipetsk: LGPU, 2007. 232 p.
26. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integrals and Series. Elementary functions. 2-nd edition. M.: FML. 2002. V. 1. 632 p.

Received 11 March 2016

Shishkina Elina Leonidovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical and Applied Analysis Department, e-mail: ilina_dico@mail.ru

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОКРЕСТНОСТНОЙ СТРУКТУРЫ

© А. М. Шмырин, Н. М. Мишачев, А. С. Косарева

В статье определяется метрика на множестве узлов окрестностной структуры и рассматривается задача кластеризации окрестностной структуры по этой метрике или, что то же самое, задача построения *окрестностной фактор-структуры*. Определяемая метрика учитывает как связи между узлами структуры, так и имеющиеся экспериментальные данные – кортежи состояний и управлений.

Ключевые слова: окрестностная структура; метрика; кластеризация; фактор-структура.

Окрестностная структура (см. [1]) является удобным средством формализации связей между элементами моделируемой системы. Эту структуру можно рассматривать как «дискретный каркас» на основе которого можно строить математические модели следующего уровня, например линейные или билинейные. В книге [1] математические модели, надстроенные над окрестностной структурой, называются *окрестностными системами*. При моделировании систем с большим количеством элементов возникает необходимость построения фактор-структуры, содержащей меньшее количество укрупненных элементов (кластеров). Для этого нужно определить метрику на множестве элементов системы и правило преобразования связей между ними в связи между кластерами.

1. Окрестностные структуры.

Для того, чтобы корректно определить кластеризацию окрестностной структуры, т. е. переход к фактор-структуре, нам пришлось, по сравнению с [1], модифицировать основное определение и сопутствующие ему обозначения.

Окрестностной структурой мы называем взвешенный ориентированный граф с n вершинами и ребрами двух сортов, назовем их s -ребрами и u -ребрами. Эти ребра символизируют два типа связей между вершинами: связи «по состоянию» и связи «по управлению». Две вершины a_i и a_j могут быть соединены не более чем двумя s -ребрами (от a_i к a_j и от a_j к a_i) и, аналогично, не более чем двумя u -ребрами. Можно считать, что два таких s -ребра (или u -ребра) – это одно ребро с двумя ориентациями: от a_i к a_j и от a_j к a_i . Вершины графа называются *узлами* окрестностной структуры. Вес каждого ребра – это пара чисел $(\tilde{c}, \bar{c})$ из интервала $[0, 1]$, таких что $\tilde{c} + \bar{c} > 0$. Мы считаем, что ребро с весом $(\tilde{c}, \bar{c})$, ведущее из узла a_i в узел a_j , описывает две связи a_i с a_j : *мягкую* связь с весом $\tilde{c}$ и *жесткую* связь с весом $\bar{c}$. Если $\bar{c} = 0$, то имеется только мягкая связь узлов, если $\tilde{c} = 0$, то имеется только жесткая связь узлов. Мягким связям будут соответствовать *вычисляемые* коэффициенты математической модели, жестким – *заданные* коэффициенты.

Окрестностью узла a_i по состоянию (управлению) называется множество всех концевых узлов всех s -ребер (u -ребер) исходящих из узла a_i . Мы будем описывать окрестностную структуру *матрицей смежностей* $[S, \tilde{S}, U, \bar{U}]$, составленной из четырех матриц порядка $n \times n$. Строка $\tilde{S}_i = [\tilde{s}_{i1}, \dots, \tilde{s}_{in}]$ матрицы $\tilde{S}$ задает веса мягких (вычисляемых) связей узла a_i по состояниям: $\tilde{s}_{ij} \in (0, 1]$ (вес связи), если узел a_j входит в окрестность узла a_i по состоянию и $\tilde{s}_{ij} = 0$ если узел a_j не входит в эту окрестность. Аналогично определяются строки

остальных матриц $\bar{S}, \tilde{U}, \bar{U}$. Обычно $\tilde{s} + \bar{s}_{ij} \neq 0$ и $\tilde{u} + \bar{u}_{ij} \neq 0$, т. е. каждый узел входит в свои окрестности по состояниям и по управлениям (этому соответствует петли графа), но, вообще говоря, мы не исключаем случай, когда $\tilde{s} + \bar{s}_{ij} \neq 0$ или $\tilde{u} + \bar{u}_{ij} \neq 0$.

З а м е ч а н и е. В книге [1], если использовать нашу терминологию, все ребра графа являются одинарными, т. е. описывают либо мягкую либо жесткую связь. В наших обозначениях это соответствует тому, что одно из двух чисел $\tilde{s}$ или $\bar{s}$ является нулем. Наличие весовых множителей для связей i -го узла с остальными узлами в книге [1] интерпретируется как *нечеткость* соответствующих окрестностей.

2. Кортежи данных.

Статистику наблюдений реальной системы, описываемой окрестностной структурой, запишем в виде $K \times 2n$ -матрицы данных $[X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n]$, где K – количество наблюдений системы. Строки $[X^k, V^k]$ матрицы данных являются результатами k -го наблюдения (эксперимента): $X^k = [x_1^k, \dots, x_n^k]$ и $V^k = [v_1^k, \dots, v_n^k]$ – это состояния и управления в узлах структуры, наблюдавшиеся в k -м эксперименте. Мы будем называть эти строки *кортежами данных*. Столбцы матрицы данных X_i или V_i – это векторы данных всех наблюдений соответствующего узла. В общем случае состояние или управление в узлах структуры могут быть многопараметрическими и потому элементы матрицы данных могут быть векторами (вообще говоря, разных размерностей). В простейшем случае, который мы далее и будем рассматривать, эти элементы являются *числами*. Итак, мы будем считать состояния и управления в узлах структуры *скалярами*. Это ограничение не является принципиальным и все дальнейшее нетрудно переписать для случая векторных состояний и управлений.

З а м е ч а н и е. Мы будем считать, что единицы измерения состояний и управлений в каждом узле выбраны таким образом, что выборки $\{x_i^k\}, k = 1, \dots, K$ и $\{v_i^k\}, k = 1, \dots, K$ (здесь i – номер узла) центрированы и нормированы. Переход к таким единицам измерения всегда возможен, но, как правило, требует пересчета заданных («жестких») коэффициентов математической модели.

3. Окрестностные системы.

Простейшей математической моделью, ассоциированной с окрестностной структурой (и описывающей работу соответствующей реальной системы), является *линейная симметричная окрестностная система (модель)*. В рамках нашего подхода к определению метрики и дальнейшей кластеризации окрестностной структуры можно было бы рассматривать и более сложные модели, например билинейные (см [1]), но мы для простоты ограничимся здесь линейным случаем.

Мы будем использовать далее обозначение $A \circ B$ для поэлементного произведения (произведения Адамара) матриц A и B . Линейная симметричная окрестностная система имеет вид

$$(\tilde{\Omega} \circ \tilde{S})X + (\tilde{T} \circ \tilde{U})V = (\bar{\Omega} \circ \bar{S})X + (\bar{T} \circ \bar{U})V, \quad (1)$$

где $[S, \tilde{S}, U, \tilde{U}]$ – определенная выше $n \times 4n$ матрица смежности окрестностной структуры, $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\omega}_{iq}\}$ и $\tilde{T} = \{\tilde{\tau}_{iq}\}$ – $n \times n$ -матрицы вычисляемых коэффициентов системы, $\bar{\Omega} = \{\bar{\omega}_{iq}\}$ и $\bar{T} = \{\bar{\tau}_{iq}\}$ – $n \times n$ -матрицы заданных коэффициентов системы, X и V – n -кортежи состояний и управлений, являющиеся неизвестными окрестностной системы. Вычисляемые коэффициенты системы соответствуют мягким связям, заданные коэффициенты соответствуют жестким связям. Напомним, что мы считаем состояния и управления в узлах структуры скалярами, и потому элементы матриц $\tilde{\Omega}, \tilde{T}, \bar{\Omega}, \bar{T}$ являются скалярами. В общем случае, когда состояния и управления являются векторами, элементы матриц $\tilde{\Omega}, \tilde{T}, \bar{\Omega}, \bar{T}$ будут матрицами.

З а м е ч а н и я.

1. Отличие системы (1) от аналогичной системы в книге [1] состоит в том, что узел a_j , участвующий в записи i -го уравнения системы, может порождать слагаемое и в левой и в правой частях уравнения. Слагаемое в левой части содержит синтезируемый (вычисляемый) коэффициент и соответствует мягкой связи узла a_i с узлом a_j . Слагаемое в правой части содержит заданный коэффициент и соответствует жесткой связи узла a_i с узлом a_j . В книге [1] узел a_j (в уравнении для узла a_i) мог порождать слагаемое только в одной из частей.

2. Система (1) записана в виде, удобном для дальнейшей идентификации. После идентификации синтезированные и заданные коэффициенты при одинаковых неизвестных x_i (или u_i) можно объединить.

3. Не следует путать коэффициенты $\tilde{\Omega}, \tilde{T}, \bar{\Omega}, \bar{T}$ и веса $[S, \tilde{S}, U, \bar{U}]$. В окрестностной системе (1) *заранее заданы* матрицы $\bar{\Omega}, \bar{T}$ (заданные коэффициенты) и $[S, \tilde{S}, U, \bar{U}]$ (веса). Матрицы $\tilde{\Omega}, \tilde{T}$ – синтезируемая часть системы.

4. Вообще говоря, левая часть системы может еще содержать неизвестный вектор $\tilde{C}$, а правая – заданный вектор $\bar{C}$. Но такую систему всегда можно привести к виду (1). Для этого нужно формально ввести в систему два дополнительных узла, которые входят в окрестности всех узлов по состояниям, а их собственные окрестности – пустые. Все остальные узлы нужно считать мягко связанными с первым формальным узлом и жестко – со вторым. При этом соответствующий столбец матрицы $\tilde{\Omega}$ (столбец вычисляемых коэффициентов) равен $\tilde{C}$ и соответствующий столбец матрицы $\bar{\Omega}$ (столбец заданных коэффициентов) равен $\bar{C}$. Все данные по состояниям формальных узлов – единицы ($x_{n+1}^k = x_{n+2}^k = 1$) и все данные по управлениям – нули ($v_{n+1}^k = v_{n+2}^k = 0$). Такие формальные узлы не порождают дополнительные уравнения системы.

В координатной записи линейная симметричная окрестностная система имеет вид

$$\sum_{q=1}^n [(\tilde{\omega}_{iq} \tilde{s}_{iq}) x_j + (\tilde{\tau}_{iq} \tilde{u}_{iq}) v_q] = \sum_{q=1}^n [(\bar{\omega}_{iq} \bar{s}_{iq}) x_q + (\bar{\tau}_{iq} \bar{u}_{iq}) v_q], \quad (2)$$

где $\tilde{\omega}_{iq} = 0$ если $\tilde{s}_{iq} = 0$, $\tilde{\tau}_{iq} = 0$ если $\tilde{u}_{iq} = 0$, $\bar{\omega}_{iq} = 0$ если $\bar{s}_{iq} = 0$ и $\bar{\tau}_{iq} = 0$ если $\bar{u}_{iq} = 0$.

4. Синтез (идентификация) линейной окрестностной системы.

Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов $\tilde{\omega}_{iq}$ и $\tilde{\tau}_{iq}$ окрестностной системы (2) по экспериментальным данным – кортежам $[X^k, V^k]$, $k = 1, \dots, K$. Подстановка кортежей данных в уравнение окрестностной модели (2) приводит к системе nK линейных уравнений для неизвестных коэффициентов $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{T}$ окрестностной модели. Вообще говоря, в окрестностной модели могут быть дополнительные условия, связывающие искомые коэффициенты разных уравнений модели, например условие симметричности или антисимметричности матриц $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{T}$. Если таких условий нет, то система уравнений для нахождения коэффициентов окрестностной модели распадается на n систем, по одной системе для каждого узла модели:

$$\sum_{q=1}^n [\tilde{\omega}_{iq} (\tilde{s}_{iq} x_j^k) + \tilde{\tau}_{iq} (\tilde{u}_{iq} v_q^k)] = b_i^k, \quad (3)$$

где $b_i^k = \sum_{q=1}^n [\bar{\omega}_{iq} (\bar{s}_{iq} x_q^k) + \bar{\tau}_{iq} (\bar{u}_{iq} v_q^k)]$. Подчеркнем, что неизвестными в системе (3) являются искомые коэффициенты $\tilde{\omega}_{iq}$ и $\tilde{\tau}_{iq}$ i -го уравнения окрестностной модели, а коэффициентами – числа $\tilde{s}_{iq} x_j^k$ и $\tilde{u}_{iq} v_q^k$. Обозначим через r_i количество (ненулевых) неизвестных $\tilde{\omega}_{iq}$ и $\tilde{\tau}_{iq}$ в системе (4). В невырожденном случае, т. е. когда ранг матрицы системы максимален, коэффициенты $\tilde{\omega}_{iq}$ и $\tilde{\tau}_{iq}$ i можно найти как:

а) нормальное решение системы (решение с минимальной нормой), если $K < r_i$;

b) решение определенной системы при $K = r_i$;

c) псевдорешение переопределенной системы (вектор неизвестных, минимизирующий норму вектора невязки), если $K > r_i$.

Если ранг матрицы системы не максимален, то искомые коэффициенты можно найти как псевдорешение системы: минимальный по норме вектор, минимизирующий невязку.

5. Метрика на множестве узлов окрестностной структуры.

Для каждого узла a_i окрестностной структуры определим *взвешенную матрицу данных*

$$D_i = [\tilde{s}_{i1}X_1, \dots, \tilde{s}_{in}X_n, \bar{s}_{i1}X_1, \dots, \bar{s}_{in}X_n, \tilde{u}_{i1}V_1, \dots, \tilde{u}_{in}V_n, \bar{u}_{i1}V_1, \dots, \bar{u}_{in}V_n,] \quad (4)$$

этого узла. Ненулевыми столбцами матрицы D_i являются взвешенные столбцы матрицы данных $[X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n]$, соответствующие всем узлам из окрестностей узла a_i . Зададим метрику на множестве узлов окрестностной структуры формулой

$$r_{ij} = \sqrt{\|D_i - D_j\|^2 + \|X_i - X_j\|^2 + \|V_i - V_j\|^2}. \quad (5)$$

Первое слагаемое под корнем оценивает сходство окрестностей узлов *с учетом экспериментальных данных и взвешенных связей*. Узел, входящий в окрестности по состояниям (управлениям) узлов a_i и a_j , или не входящий ни в одну из этих окрестностей, даст нулевой вклад в $\|D_i - D_j\|$. Узел a_q , входящий только в одну из этих окрестностей, даст вклад, пропорциональный взвешенным данным наблюдений в a_q . Сумма двух следующих слагаемых под корнем – это квадрат расстояния между векторами данных узлов a_i и a_j . Таким образом, определенная метрика вычисляет близость узлов по данным наблюдений и по их взвешенным связям (окрестностям) в окрестностной системе.

З а м е ч а н и я.

1. Вместо взвешенной матрицы данных D_i в формуле (5) можно использовать нормированные строки весов $\hat{D}_i = C_i / \|C_i\|$, где

$$C_i = [\tilde{s}_{i1}, \dots, \tilde{s}_{in}, \bar{s}_{i1}, \dots, \bar{s}_{in}, \tilde{u}_{i1}, \dots, \tilde{u}_{in}, \bar{u}_{i1}, \dots, \bar{u}_{in},]. \quad (6)$$

Определенная таким образом метрика $\hat{r}_{ij}$ в некоторых случаях может оказаться удобнее чем r_{ij} . Например, метрика $\hat{r}_{ij}$ оценивает расстояния между узлами окрестностями структуры и в том случае, когда данных нет.

2. Другой подход к определению меры близости узлов окрестностной структуры по связям и данным обсуждался в [2]. Заметим, что определенная в [2] мера d_{ij} , вообще говоря, не является метрикой (не выполнено неравенство треугольника).

6. Окрестностные фактор-структуры.

Используя определенную выше метрику r_{ij} (или $\hat{r}_{ij}$), можно разбить узлы окрестностной структуры на кластеры с помощью какого-либо алгоритма кластеризации. В любом случае, далее нужно пересчитать матрицу смежности окрестностной структуры и матрицу данных. В качестве вектора данных (по управлению или состоянию) кластера можно взять среднее арифметическое векторов данных всех вошедших в кластер узлов. Далее, окрестность кластера I по состояниям (управлениям) будем считать состоящей из всех кластеров J , таких что хотя бы один из узлов кластера J входит в окрестность хотя бы одного из узлов кластера I . Вес соответствующей мягкой связи кластера I с кластером J положим равным среднему арифметическому весов всех мягких связей узлов из кластера I с узлами из кластера J .

Аналогично, вес соответствующей жесткой связи кластера I с кластером J положим равным среднему арифметическому весов всех жестких связей узлов из кластера I с узлами из кластера J . Заданные коэффициенты жестких связей кластеров можно определить как средние арифметические соответствующих заданных коэффициентов жестких связей узлов из I с узлами из J .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М. Окрестностные системы. Липецк: ЛЭГИ, 2005.
2. Shmyrin, A.M., Kosareva, A.S. The measure of similarity in solving the problem of clustering neighborhood structures // Modern informatization problems in the technological and telecommunication systems analysis and synthesis: Proceedings of the XXI-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, Januar 2016), 2016. P. 341–346.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 16-07-00854 а).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Мишачёв Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Косарева Анастасия Сергеевна, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, аспирант, кафедра высшей математики, e-mail: kosarewanastya@yandex.ru

UDC 512.8

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-457-462

CLUSTERING OF NEIGHBORHOOD STRUCTURE

© A. M. Shmyrin, N. M. Mishachev, A. C. Kosareva

We define a metric on the set of nodes of neighborhood structure and consider the clustering problem for the structure with respect to the metric, or, what is the same, the problem of constructing the factor-structure. Determined metric takes into account both the connections between the nodes of the structure and the experimental data at the nodes.

Key words: neighborhood structures; metrics; clustering; factor-structure.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 а)

REFERENCES

1. *Blyumin S.L., Shmyrin A.M.* Neighborhood system. Lipetsk: LEGI, 2005.
2. *Shmyrin, A.M., Kosareva, A.S.* The measure of similarity in solving the problem of clustering neighborhood structures // Modern informatization problems in the technological and telecommunication systems analysis and synthesis: Proceedings of the XXI-th International Open Science Conference (Yelm, WA, USA, Januar 2016), 2016. P. 341–346.

Received 21 March 2016.

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Kosareva Anastasia Sergeevna, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, graduate student of the Higher Mathematics Department, e-mail: kosarewanastya@yandex.ru

УДК 519.854

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-463-470

ТРИЛИНЕЙНАЯ ОКРЕСТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ СМОТКИ ГОРЯЧЕКАТАНОЙ ПОЛОСЫ

© А. М. Шмырин, А. Г. Ярцев, В. В. Правильникова

Рассматривается трилинейная окрестностная модель процесса формирования температуры смотки горячекатаной полосы, где в качестве параметров выступают состояние, управление и информация. Целью работы является нахождение значений компонентов модели, обеспечивающих устойчивую работу системы. Представлена методика определения состава экстремумов. Получено условие существования экстремумов, которое было проверено на конкретном примере. Высказано предположение об области, в которой невозможно с определенностью говорить об устойчивости системы. Высказана гипотеза об условии потери положения стабильного равновесия и перехода системы в новое состояние.

Ключевые слова: окрестностная система, горячекатаная полоса, отводящий рольганг, температура смотки, общее параметрическое уравнение.

1. Введение

Окрестностные модели [1, 2] являются перспективным направлением в моделировании сложных систем, т. к. отличаются гибкостью описания с помощью окрестностей структуры связей между узлами системы. Теория окрестностных систем является универсальным средством моделирования класса дискретных распределенных систем: стационарных и динамических, четких и нечетких, с линейными и нелинейными связями. Данная теория является обобщающей для многих дискретных распределенных систем, использование окрестностного подхода в прикладных задачах охватывает системы разной природы и направленности – от технических до экономических. Окрестностные модели – исключительно эффективный метод моделирования, позволяющий воспроизводить сложные зависимости.

В текущей работе рассмотрена возможность нахождения значений компонентов модели, которые обеспечивают устойчивую работу системы ускоренного охлаждения отводящего рольганга стана горячей прокатки.

Микроструктура горячекатаной стали зависит от температуры конца прокатки и температуры смотки. Для получения мелкозернистой равномерной структуры металла низкоуглеродистой стали ее прокатку необходимо заканчивать при температуре $760 - 900^{\circ}\text{C}$, а сматывать рулон при температуре смотки $540 - 720^{\circ}\text{C}$ [3, 4]. Охлаждение полосы после чистовой группы клетей осуществляется на отводящем рольганге. Отводящий рольганг стана горячей прокатки представляет собой значительный участок пути, через который проходит полоса после прокатки до моталок. Основная функция участка отводящего рольганга – охлаждение полосы от температуры прокатки до температуры, приемлемой для смотки. Сверху и снизу полосы, движущейся на рольганге, установлены бачки с водой для охлаждения. Бачки объединены в полусекции – минимальные управляемые устройства для охлаждения. Система состоит из 40 секций (80 полусекций) охлаждения полосы. Вода душирует поверхность полосы через ряд трубок, установленных по ширине бачка. Для управления последовательным включением и выключением бачков на стане установлена автоматизированная система управления душирующей установкой.

2. Идентификация

Рассмотрим реализацию методики построения трилинейной окрестностной модели на примере сложного распределенного объекта — технологического процесса ускоренного охлаждения горячекатаной полосы на широкополосном стане горячей прокатки.

В общей форме трилинейная окрестностная модель имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\alpha \in O_x[a]} w_x[a, \alpha] X[\alpha] + \sum_{\beta \in O_v[a]} w_v[a, \beta] V[\beta] + \sum_{\gamma \in O_y[a]} w_y[a, \gamma] Y[\gamma] + \\
 & + \sum_{\substack{\alpha \in O_x[a] \\ \beta \in O_v[a]}} w_{xv}[a, \alpha, \beta] X[\alpha] V[\beta] + \sum_{\substack{\alpha \in O_x[a] \\ \gamma \in O_y[a]}} w_{xy}[a, \alpha, \gamma] X[\alpha] Y[\gamma] + \\
 & + \sum_{\substack{\beta \in O_v[a] \\ \gamma \in O_y[a]}} w_{vy}[a, \beta, \gamma] V[\beta] Y[\gamma] + \sum_{\substack{\alpha \in O_x[a] \\ \beta \in O_v[a] \\ \gamma \in O_y[a]}} w_{xvy}[a, \alpha, \beta, \gamma] X[\alpha] V[\beta] Y[\gamma]
 \end{aligned} \quad (1)$$

где $X[a] \in R^n$, $V[a] \in R^m$, $Y[a] \in R^l$ — состояние, управление и информация в узле системы; $w_x[a, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_v[a, \beta] \in R^{c \times m}$, $w_y[a, \gamma] \in R^{c \times l}$, $w_{xy}[a, \alpha, \gamma] \in R^{c \times n \times l}$, $w_{xv}[a, \alpha, \beta] \in R^{c \times n \times m}$, $w_{vy}[a, \beta, \gamma] \in R^{c \times m \times l}$, $w_{xvy}[a, \alpha, \beta, \gamma] \in R^{c \times n \times m \times l}$ — матрицы-параметры; $O_x[a]$, $O_v[a]$, $O_y[a]$ — окрестности узла a по состоянию, управлению и информации соответственно; $a, \alpha, \beta, \gamma \in A$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ — конечное множество узлов системы.

Модель (1) с подробной записью принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & w_x[1, 1]x[1] + w_x[1, 2]x[2] + w_v[1, 1]v[1] + w_v[1, 2]v[2] + \\
 & + w_y[1, 1]y[1] + w_{xv}[1, 1, 1]x[1]v[1] + w_{xv}[1, 1, 2]x[1]v[2] + \\
 & + w_{xv}[1, 2, 1]x[2]v[1] + w_{xv}[1, 2, 2]x[2]v[2] + w_{xy}[1, 1, 1]x[1]y[1] + \\
 & + w_{xy}[1, 2, 1]x[2]y[1] + w_{vy}[1, 1, 1]v[1]y[1] + w_{vy}[1, 2, 1]v[2]y[1] + \\
 & + w_{xvy}[1, 1, 1, 1]x[1]v[1]y[1] + w_{xvy}[1, 1, 2, 1]x[1]v[2]y[1] + \\
 & + w_{xvy}[1, 2, 1, 1]x[2]v[1]y[1] + w_{xvy}[1, 2, 2, 1]x[2]v[2]y[1] = 0; \\
 & w_x[2, 1]x[1] + w_x[2, 2]x[2] + w_x[2, 3]x[3] + w_v[2, 1]v[1] + \\
 & + w_v[2, 2]v[2] + w_v[2, 3]v[3] + w_y[2, 2]y[2] + w_{xv}[2, 1, 1]x[1]v[1] + \\
 & + w_{xv}[2, 1, 2]x[1]v[2] + w_{xv}[2, 1, 3]x[1]v[3] + w_{xv}[2, 2, 1]x[2]v[1] + \\
 & + w_{xv}[2, 2, 2]x[2]v[2] + w_{xv}[2, 2, 3]x[2]v[3] + w_{xv}[2, 3, 1]x[3]v[1] + \\
 & + w_{xv}[2, 3, 2]x[3]v[2] + w_{xv}[2, 3, 3]x[3]v[3] + w_{xy}[2, 1, 2]x[1]y[2] + \\
 & + w_{xy}[2, 2, 2]x[2]y[2] + w_{xy}[2, 3, 2]x[3]y[2] + \\
 & + w_{vy}[2, 1, 2]v[1]y[2] + w_{vy}[2, 2, 2]v[2]y[2] + w_{vy}[2, 3, 2]v[3]y[2] + \\
 & + w_{xvy}[2, 1, 1, 2]x[1]v[1]y[2] + w_{xvy}[2, 1, 2, 2]x[1]v[2]y[2] + \\
 & + w_{xvy}[2, 1, 3, 2]x[1]v[3]y[2] + w_{xvy}[2, 2, 1, 2]x[2]v[1]y[2] + \\
 & + w_{xvy}[2, 2, 2, 2]x[2]v[2]y[2] + w_{xvy}[2, 2, 3, 2]x[2]v[3]y[2] + \\
 & + w_{xvy}[2, 3, 1, 2]x[3]v[1]y[2] + w_{xvy}[2, 3, 2, 2]x[3]v[2]y[2] + \\
 & + w_{xvy}[2, 3, 3, 2]x[3]v[3]y[2] = 0; \\
 & w_x[3, 2]x[2] + w_x[3, 3]x[3] + w_v[3, 2]v[2] + w_v[3, 3]v[3] + \\
 & + w_y[3, 3]y[3] + w_{xv}[3, 2, 2]x[2]v[2] + w_{xv}[3, 2, 3]x[2]v[3] + \\
 & + w_{xv}[3, 3, 2]x[3]v[2] + w_{xv}[3, 3, 3]x[3]v[3] + \\
 & + w_{xy}[3, 2, 3]x[2]y[3] + w_{xy}[3, 3, 3]x[3]y[3] + \\
 & + w_{vy}[3, 2, 3]v[2]y[3] + w_{vy}[3, 3, 3]v[3]y[3] + \\
 & + w_{xvy}[3, 2, 2, 3]x[2]v[2]y[3] + w_{xvy}[3, 2, 3, 3]x[2]v[3]y[3] + \\
 & + w_{xvy}[3, 3, 2, 3]x[3]v[2]y[3] + w_{xvy}[3, 3, 3, 3]x[3]v[3]y[3] = 0.
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Для модели были выделены существенные компоненты состояния x , управления v и третьего параметра, в качестве которого может быть принята информация y (табл. 1).

Таблица 1.

Компоненты состояния, управления и информации.

$x[1]$	Температура смотки для первой зоны участка полосы, °C
$x[2]$	Температура смотки для второй зоны участка полосы, °C
$x[3]$	Температура смотки для третьей зоны участка полосы, °C
$v[1]$	Количество включенных полусекций охлаждения водой для первой зоны участка полосы, шт.
$v[2]$	Количество включенных полусекций охлаждения водой для второй зоны участка полосы, шт.
$v[3]$	Количество включенных полусекций охлаждения водой для третьей зоны участка полосы, шт.
$y[1]$	Температура охлаждающей воды, °C
$y[2]$	Температура охлаждающей воды, °C
$y[3]$	Температура охлаждающей воды, °C

Зададим значения компонентов состояния, управления и информации и проведем идентификацию трилинейной окрестной модели по разработанным ранее алгоритмам [2].

Значения состояния в соответствии с технологическими параметрами (рис. 1):

$x[1] = 587^\circ \text{C}$; $x[2] = 573^\circ \text{C}$; $x[3] = 587^\circ \text{C}$.

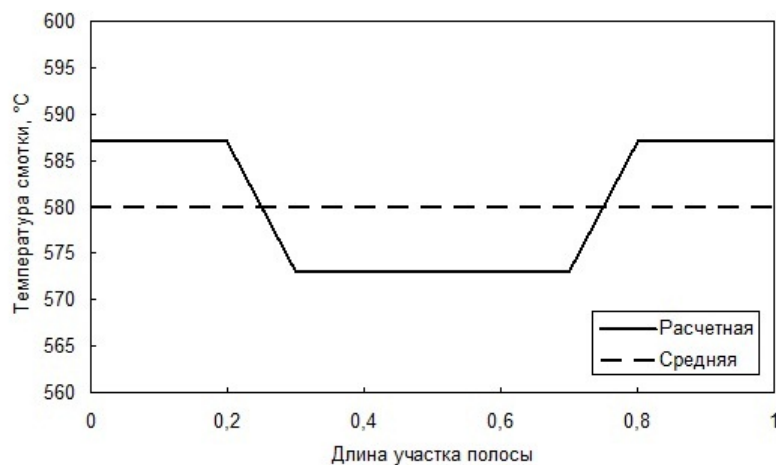


Рис. 1: Пример распределения температуры смотки по зонам участка полосы

Значения управления в соответствии с технологическими параметрами:

$v[1] = 15$ шт.; $v[2] = 28$ шт.; $v[3] = 18$ шт.

Значения информации в соответствии с технологическими параметрами: $y[1] = y[2] = y[3] = 40^\circ \text{C}$. В связи с разным порядком входных данных производим их нормализацию по формуле:

$$x' = \frac{x - \bar{x}}{\sigma},$$

где x — нормализуемое значение, $\bar{x}$ — среднее арифметическое, σ — среднее квадратическое отклонение значений.

После нормализации получаем:

$x[1] = 0,70711$; $x[2] = -1,41421$; $x[3] = 0,70711$;

$v[1] = -0,95962$; $v[2] = 1,37945$; $v[3] = -0,41983$;

$y[1] = y[2] = y[3] = 1$.

Примем, что $w_y[1, 1] = w_y[2, 2] = w_y[3, 3] = 1$. В результате идентификации получаем:

$w_x [1,1] = -0,029;$	$w_x [1,2] = 0,057;$	$w_v [1,1] = 0,039;$
$w_v [1,2] = -0,056;$	$w_{xv} [1,1,1] = 0,027;$	$w_{xv} [1,1,2] = -0,039;$
$w_{xv} [1,2,1] = -0,055;$	$w_{xv} [1,2,2] = 0,079;$	$w_{xy} [1,1,1] = -0,029;$
$w_{xy} [1,2,1] = 0,057;$	$w_{vy} [1,1,1] = 0,039;$	$w_{vy} [1,2,1] = -0,056;$
$w_{xvy} [1,1,1,1] = 0,027;$	$w_{xvy} [1,1,2,1] = -0,039;$	$w_{xvy} [1,2,1,1] = -0,055;$
$w_{xvy} [1,2,2,1] = 0,079;$	$w_x [2,1] = -0,024;$	$w_x [2,2] = 0,047;$
$w_x [2,3] = -0,024;$	$w_v [2,1] = 0,032;$	$w_v [2,2] = -0,046;$
$w_v [2,3] = 0,014;$	$w_{xv} [2,1,1] = 0,023;$	$w_{xv} [2,1,2] = -0,033;$
$w_{xv} [2,1,3] = 0,009896;$	$w_{xv} [2,2,1] = -0,045;$	$w_{xv} [2,2,2] = -0,065;$
$w_{xv} [2,2,3] = -0,02;$	$w_{xv} [2,3,1] = 0,023;$	$w_{xv} [2,3,2] = -0,033;$
$w_{xv} [2,3,3] = 0,009896;$	$w_{xy} [2,1,2] = -0,024;$	$w_{xy} [2,2,2] = 0,047;$
$w_{xy} [2,3,2] = -0,024;$	$w_{vy} [2,1,2] = 0,032;$	$w_{vy} [2,2,2] = -0,046;$
$w_{vy} [2,3,2] = 0,014;$	$w_{xvy} [2,1,1,2] = 0,023;$	$w_{xvy} [2,1,2,2] = -0,033;$
$w_{xvy} [2,1,3,2] = 0,009896;$	$w_{xvy} [2,2,1,2] = -0,045;$	$w_{xvy} [2,2,2,2] = 0,065;$
$w_{xvy} [2,2,3,2] = -0,02;$	$w_{xvy} [2,3,1,2] = 0,023;$	$w_{xvy} [2,3,2,2] = -0,033;$
$w_{xvy} [2,3,3,2] = 0,009893;$	$w_x [3,2] = 0,072;$	$w_x [3,3] = -0,036;$
$w_v [3,2] = -0,071;$	$w_v [3,3] = 0,021;$	$w_{xv} [3,2,2] = 0,1;$
$w_{xv} [3,2,3] = -0,03;$	$w_{xv} [3,3,2] = -0,05;$	$w_{xv} [3,3,3] = 0,015;$
$w_{xy} [3,2,3] = 0,072;$	$w_{xy} [3,3,3] = -0,036;$	$w_{vy} [3,2,3] = -0,071;$
$w_{vy} [3,3,3] = 0,021;$	$w_{xvy} [3,2,2,3] = 0,1;$	$w_{xvy} [3,2,3,3] = -0,03;$
$w_{xvy} [3,3,2,3] = -0,05;$	$w_{xvy} [3,3,3,3] = 0,015.$	

3. Параметрическое представление

Выразим окрестностные переменные x , v и y через параметрическую переменную U . В качестве примера возьмем представление компонента управления v . Укажем границы допустимых значений компонента управления третьего узла:

$$v_{min} = 0; v_{max} = 80.$$

Примем, что значение U изменяется от U_1 до U_2 , которые взяты константами.

Таблица 2

Пример параметрического представления компонента v

U	v	v нормализ.
-1000	0	-3,65854
-900	4	-2,93882
-800	8	-2,21911
-700	12	-1,4994
-600	16	-0,77969
-500	20	-0,05998
-400	24	0,659736
-300	28	1,379448
-200	32	2,099161
-100	36	2,818873
0	40	3,538585
100	44	4,258297
200	48	4,978009
300	52	5,697721
400	56	6,417434
500	60	7,137146
600	64	7,856858
700	68	8,57657
800	72	9,296282
900	76	10,01599
1000	80	10,73571

Линейные зависимости представлены ниже:

$$x[1] = x[3] = 0.0015U + 1.1617; x[2] = 0.0015U - 1.8688;$$

$$v[1] = v[2] = v[3] = 0.0072U + 3.5386;$$

$$y[1] = y[2] = y[3] = 0.0005U + 1;$$

Подставляя приведенные зависимости в систему (1) и, складывая уравнения, получаем общее параметрическое уравнение окрестностной модели:

$$Z = -0.00285 \cdot U + 1.11056 \cdot 10^{-7} \cdot U^2 + 2.5266 \cdot 10^{-10} \cdot U^3 - 0.0259 \quad (3)$$

4. Условие наличия экстремумов

По аналогии с (3) рассмотрим функцию

$$V_{a,b}(x) = x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x \quad (4)$$

первая и вторая производные которой имеют вид:

$$\frac{dV}{dx} = 3x^2 + 2ax + b \quad (5)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 6x + 2a \quad (6)$$

Исключая x из уравнений (6) и (7), получим уравнение параболы (рис. 2):

$$b = \frac{1}{3}a^2 \quad (7)$$

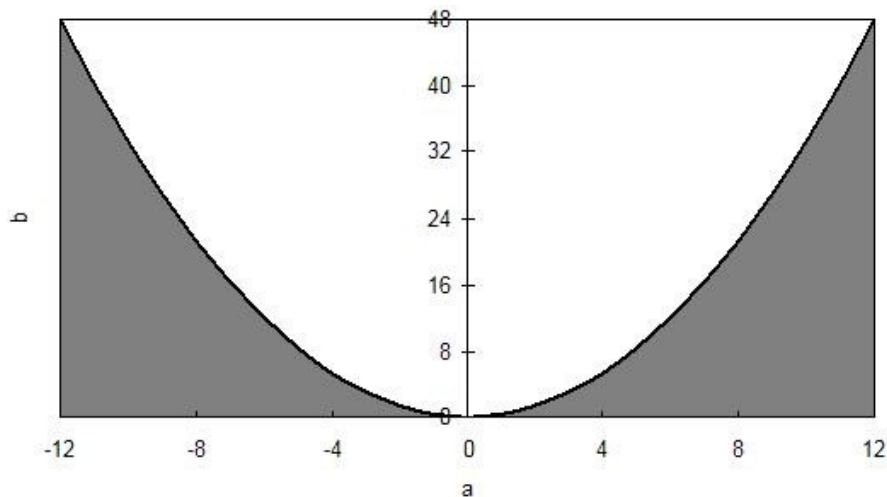


Рис. 2: Поверхность параболы $b = \frac{1}{3}a^2$

Определим вид экстремумов выражения (4) в зависимости от условия (7). Для этого найдем критические точки, решив уравнение (5).

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot b = 4a^2 - 12b;$$

$$U_{1,2} = \frac{-2a}{2 \cdot 3} \pm \frac{\sqrt{4a^2 - 12b}}{2 \cdot 3}.$$

Далее возможны два варианта развития событий:

1) при условии $b > \frac{1}{3}a^2$, $\sqrt{4a^2 - 12b} < 0$ – действительных корней нет, т. е. нет критических точек;

2) при условии $b < \frac{1}{3}a^2$, $\sqrt{4a^2 - 12b} > 0$, т. е. имеются критические точки:

$$U_{1,2} = \frac{-1}{3}a \pm \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}$$

Определим характер критических точек, подставив их значения в уравнение (6):

$$U_1 = \frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b},$$

$$6U + 2a = 6\left[\frac{-1}{3}a + \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\right] + 2a = -2a + 2\sqrt{a^2 - 3b} + 2a = 2\sqrt{a^2 - 3b} > 0,$$

– критическая точка U_1 является точкой минимума;

$$U_2 = \frac{-1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b},$$

$$6U + 2a = 6\left[\frac{-1}{3}a - \frac{1}{3}\sqrt{a^2 - 3b}\right] + 2a = -2a - 2\sqrt{a^2 - 3b} + 2a = -2\sqrt{a^2 - 3b} < 0,$$

– критическая точка U_2 является точкой максимума.

Таким образом, при условии $b < \frac{1}{3}a^2$ (темная зона на рис. 2), функция (4) имеет две критические точки типа минимум и максимум, а при $b > \frac{1}{3}a^2$ (светлая зона на рис. 2) критических точек нет.

5. Результаты

Приведем общее параметрическое уравнение (3) к стандартному виду:

$$Z = U^3 + 439.547U^2 - 1.13 \cdot 10^{-7} - 1.025 \cdot 10^8 \quad (8)$$

Выполняется условие $b < \frac{1}{3}a^2$, т.е. $-1.13 \cdot 10^{-7} < \frac{1}{3}(439.547)^2$. Поэтому функция (8) имеет одну точку минимума $U = 1799,7$ и одну точку максимума $U = -2092,8$. При обратном переходе от параметрической переменной к окрестностным, подставляя значения U , соответствующие минимуму и максимуму, значения x , v и y выходят за пределы допустимых значений. Это означает, что при работе в положениях стабильного (минимум) или нестабильного (максимум) равновесия получаем нарушение технологии.

Подстановка найденных значений параметров в уравнения указывает некоторое отклонение от правой части. Минимизация же модуля общего параметрического уравнения (3) приводит к отклонению $6,4 \cdot 10^{-9}$.

При этом получаем точку минимума $U = -9.07$, которой соответствуют окрестностные переменные $x[1] = x[3] = 590^\circ$ С, $x[2] = 570^\circ$ С, $\bar{v} = 40$ шт., $y[1] = y[2] = y[3] = 39,8^\circ$ С, где $\bar{v} = 0.25v[1] + 0.5v[2] + 0.25v[3]$ – среднее по длине участка полосы количество включенных полусекций охлаждения водой.

При работе системы при значениях параметров, отличных от точек экстремума, система находится в области, в которой невозможно с определенностью говорить об устойчивости системы. При такой работе могут изменяться значения коэффициентов общего параметрического уравнения, что влечет за собой риск возникновения обратного условия $b > \frac{1}{3}a^2$, что, в

соответствии с [5], говорит о потере положения равновесия и возможности перехода системы в новое состояние.

6. Заключение

В работе получена математическая трилинейная окрестностная модель процесса формирования температуры смотки горячекатаной полосы, представлена методика определения состава экстремумов по коэффициентам функции. Предложена гипотеза об областях устойчивости системы. Разработанная математическая окрестностная модель может учитывать и другие технологические параметры процесса прокатки и химического состава стали.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shmyrin A. M., Sedykh I. A Identification and Control Algorithms of Functioning for Neighborhood Systems Based on Petri Nets // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. Issue 6. P. 1265–1274.*
2. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А. Билинейные окрестностные системы: монография. Липецк: ЛГТУ, 2006.*
3. *Коновалов Ю.В. Справочник прокатчика. Книга 1. Производство горячекатаных листов и полос. М.: Теплотехник, 2008.*
4. *Mukhin U.A., Soloviev V.N., Makarov E. V. Improving of Low-Carbon Hot-Rolled Strips Production at the High Acceleration Rolling // New Technologies and Achievements in Metallurgy and Materials Engineering: a collective monograph. Czestochowa. 2012. P. 423–427.*
5. *Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1984.*

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 16-07-00854 а).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Ярцев Алексей Геннадьевич, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, магистрант физико-технологического факультета, e-mail: yartsevekha@mail.ru

Правильникова Валерия Владимировна, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, ассистент кафедры высшей математики, e-mail: pravilnik@mail.ru

UDC 519.854

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-463-470

TRILINEAR NEIGHBORHOOD MODEL OF THE PROCESS OF FORMING THE TEMPERATURE OF HOT-ROLLED STRIP COILING

© A. M. Shmyrin, A. G. Yartsev, V. V. Pravilnikova

The trilinear neighborhood model of the process of forming the temperature of hot-rolled strip coiling where the parameters are a state, control and information is considered. The purpose of the work is to find the values of the components of the model ensuring steady functioning of the system. The technique of defining the structure of the extrema is presented. The existence condition for extrema is received and checked on a concrete example. The suggestion about the area in which it is impossible to speak with definiteness about stability of the system is made. The hypothesis about a condition of the stable balance loss and of the transition of system to a new state is proposed.

Key words: neighborhood system, hot-rolled strip, run-off table, coiling temperature, general parametric equation.

ACKNOWLEDGEMENTS: This research was supported by the Russian Fund for Basic Research, project code 16-07-00854 a.

REFERENCES

1. *Shmyrin A. M., Sedykh I. A.* Identification and Control Algorithms of Functioning for Neighborhood Systems Based on Petri Nets // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. Issue 6. P. 1265–1274.
2. *Blyumin S.L., Shmyrin A.M., Shmyrina O.A.* Bilineynye okrestnostnyie sistemy: monografiya. Lipetsk: LGTU, 2006.
3. *Konovalov Yu.V.* Spravochnik prokatchika. Kniga 1. Proizvodstvo goryachekatannyih listov i polos. M.: Teplotekhnika, 2008.
4. *Mukhin U.A., Soloviev V.N., Makarov E. V.* Improving of Low-Carbon Hot-Rolled Strips Production at the High Acceleration Rolling // New Technologies and Achievements in Metallurgy and Materials Engineering: a collective monograph. Czestochowa. 2012. P. 423–427.
5. *Gilmor R.* Prikladnaya teoriya katastrof: V 2-h knigah. Kn. 1. Per. s angl. M.: Mir, 1984.

Received 21 March 2016.

Shmyrin Anatoliy Mihaylovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Yartsev Aleksey Gennadevich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Master program student, Faculty of Physics and Technology, e-mail: yartsevlekha@mail.ru

Pravilnikova Valeriya Vladimirovna, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Lecturer of the Higher Mathematics Department, e-mail: pravilnik@mail.ru

УДК 519.6

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-471-478

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

© А.А. Арзамасцев, Д.В. Залевский

Разработана неявная разностная схема для математической модели биологического объекта с распределенными параметрами. Модель описывает процесс аутостабилизации температуры в пространственно-распределенной клеточной ткани.

Ключевые слова: неявная разностная схема; математическая модель; аутостабилизация; система дифференциальных уравнений в частных производных.

Явление аутостабилизации температуры для биологических объектов с сосредоточенными параметрами (биореактор) было впервые обнаружено и изучалось экспериментально в работе [1].

Позднее данное явление исследовалось с помощью математических моделей в работах [2–11]. В работе [2] объяснена сущность явления аутостабилизации факторов среды на основе идеализированной схемы протяженной проточной системы. С помощью математической модели было показано отличие явления аутостабилизации от простой стабилизации факторов на примере проточной системы типа хемостата. Авторами была предложена описание проточной системы, представляющее собой балансовые дифференциальные уравнения по температуре, концентраций биомассы и др. Все вышеперечисленные математические модели саморегулирования температуры биологических объектов лишь на качественном уровне объясняют суть явления и некоторые из его феноменов. Однако ни одна из моделей не позволяла описывать явление при наличии саморегулирования температуры, так и без него, т. е., по сути дела, они не являлись адекватными реальному объекту. Поэтому и объяснения различных явлений, базируемых на их применении, можно было рассматривать лишь в качестве первого приближения.

В работе [4] была представлена математическая модель процесса аутостабилизации температуры в клеточных тканях для случая взаимодействия нескольких биологических объектов. Подобные математические модели представляют наибольший интерес, т. к. в реальных процессах всегда участвуют несколько объектов, взаимодействующих между собой. В работе [5] был рассмотрен упрощенный (одномерный) случай математической модели системы аутостабилизации температуры в клеточной ткани и применение неявных разностных схем к упрощенному случаю математической модели. В данной статье будет рассматриваться трехмерная математическая модель системы аутостабилизации температуры.

Рассмотрим объект, представляющий собой прямоугольный параллелепипед, находящийся во внешней среде. Внешняя среда и сам объект представляют собой фрагменты клеточные ткани, различающиеся своими теплотворными и кинетическими свойствами. Будем

считать, что во внешней области такие параметры, как температура, концентрация веществ являются постоянными, что позволяет задавать их воздействие на внутреннюю область граничными условиями, а именно функциями $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$. Математическая модель внутренней области должна быть составлена таким образом, чтобы с ее помощью можно было изучить, как изменяются температура, концентрация веществ (субстрата и кислорода), а также зависимые от них параметры, такие как скорость процесса во внутренней области объекта.

При разработке математической модели примем следующие возможные допущения [6]: рассматриваемая система является открытой по энергии и веществу; макрокинетика ферментативных реакций описывается уравнением Михаэлиса–Ментен; плотность, удельная теплоемкость среды, коэффициенты диффузии, теплопроводности, скорости конвективного переноса, потребления кислорода на эндогенное дыхание, ростовые процессы, кинетические параметры являются постоянными величинами по всему объему; повышение температуры в объекте сверх супраоптимального значения приводит к обратимому ингибированию его ферментной системы; это означает, что при повышении температуры сверх супраоптимальной ферментные системы биологического объекта полностью ингибируются, т. е. скорость реакций становится равной нулю, но при уменьшении температуры эти свойства полностью восстанавливаются спустя некоторое время, которое задается соответствующей постоянной времени; единственным фактором, влияющим на максимальную скорость ферментативных реакций, является температура; зависимость максимальной удельной скорости ферментативных реакций от температуры может быть представлена в виде разности двух компонент, каждая из которых подчиняется уравнению Аррениуса; суммарный тепловой эффект биохимических реакций положительный; данное допущение выполнимо, поскольку подавляющее большинство реакций промежуточного обмена относится к реакциям свободного окисления, единственным энергетическим эффектом которых является образование тепла.

Математическая модель, разработанная с указанными выше допущениями, принимает следующий вид [7]:

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \left[\frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] +$$

$$+ w_x \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial t} = D_S \left[\frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] +$$

$$+ w_x \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_S, \quad (2)$$

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = D_C \left[\frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right] +$$

$$+ w_x \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + w_y \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} + w_z \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} + Q_C. \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения (1)–(3) описывают динамику температуры, субстрата и кислорода. В этих уравнениях: $T(x, y, z, t)$, $S(x, y, z, t)$, $C(x, y, z, t)$ – температура, концентрации субстрата и растворенного кислорода в точке с координатами x , y , z в момент времени t ; λ – коэффициент теплопроводности; c , ρ – удельная теплоемкость и плотность клеточной ткани; D_S , D_C – коэффициенты диффузии для субстрата и кислорода; w_x , w_y , w_z – скорости конвективного переноса; Q_T , Q_S , Q_C – распределенные функции источников для температуры, субстрата и кислорода.

Для получения однозначного решения, система (1)–(3) должна быть дополнена краевыми условиями.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, 0) &= T_0, \\ S(x, y, z, 0) &= S_0, \\ C(x, y, z, 0) &= C_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \eta_1 [T(0, y, z, t) - g_1(t)] \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \eta_1 [T(x, 0, z, t) - g_1(t)] \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \eta_1 [T(x, y, 0, t) - g_1(t)] \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=L_1} &= -\eta_1 [T(L_1, y, z, t) - g_1(t)] \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} &= -\eta_1 [T(x, L_2, z, t) - g_1(t)] \\ \left. \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} &= -\eta_1 [T(x, y, L_3, t) - g_1(t)] \end{aligned} \quad (5)$$

где η_1 – коэффициент теплопереноса. В нашем случае

$g_1(t) = \text{const} = T^{**}$, где T^{**} – температура области;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \eta_2 [S(0, y, z, t) - g_2(t)] \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \eta_2 [S(x, 0, z, t) - g_2(t)] \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \eta_2 [S(x, y, 0, t) - g_2(t)] \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=L_1} &= -\eta_2 [S(L_1, y, z, t) - g_2(t)] \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} &= -\eta_2 [S(x, L_2, z, t) - g_2(t)] \\ \left. \frac{\partial S(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} &= -\eta_2 [S(x, y, L_3, t) - g_2(t)] \end{aligned} \quad (6)$$

где η_2 – коэффициент массопереноса;

$g_2(t) = \text{const} = S^*$, где S^* – концентрация субстрата области;

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= \eta_3 [C(0, y, z, t) - g_3(t)] \\ \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= \eta_3 [C(x, 0, z, t) - g_3(t)] \\ \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} &= \eta_3 [C(x, y, 0, t) - g_3(t)] \\ \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} \right|_{x=L_1} &= -\eta_3 [C(L_1, y, z, t) - g_3(t)] \\ \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} \right|_{y=L_2} &= -\eta_3 [C(x, L_2, z, t) - g_3(t)] \\ \left. \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} \right|_{z=L_3} &= -\eta_3 [C(x, y, L_3, t) - g_3(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

где η_3 – коэффициент массопереноса;

$g_3(t) = \text{const} = C^*$, где C^* – концентрация субстрата области.

С учетом специфики биохимических превращений и макрокинетики реакций выражения для расчета функций источников могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_T &= V^{\max} [T(x, y, z, t)] \frac{H}{c\rho} \cdot \frac{S(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t) + K_S} \times \\ &\times \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C} \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q_S = -\frac{V^{\max}[T(x, y, z, t)]}{Y} \cdot \frac{S(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t) + K_S} \times \\ \times \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C} \quad (9)$$

$$Q_C = \frac{S(x, y, z, t)}{S(x, y, z, t) + K_S} \cdot \frac{C(x, y, z, t)}{C(x, y, z, t) + K_C} \times \\ \times (V^{\max}[T(x, y, z, t)] \cdot \beta + \alpha) \quad (10)$$

где $V^{\max}$ – максимальная удельная скорость биохимических реакций; H – интегральный тепловой эффект биохимической реакции; Y , K_S , K_C – кинетические параметры; α , β – скорость потребления кислорода на эндогенное дыхание, ростовые процессы;

$$V^{\max}[T(x, y, z, t)] = a_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT(x, y, z, t)}\right) - \\ - a_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT(x, y, z, t)}\right) \quad (11)$$

где a_1 , a_2 – предэкспоненциальные множители; E_1 , E_2 – энергии активации.

Таким образом, модель (1)–(11) представляет собой замкнутую систему, которая может быть решена при задании следующих параметров: размер клеточной ткани, H , K_S , K_C , a_1 , a_2 , E_1 , E_2 , c , ρ , α , β , D_S , D_C , w_x , w_y , w_z , λ , T_0 , S_0 , C_0 , T^* , S^* , C^* , η_1 , η_2 , η_3 , на выходе будут динамика изменения температуры, концентрации субстрата и кислорода в любой точке. Данная система уравнений представляет собой систему уравнений параболического типа. Она может быть решена численно разностными методами.

Для рассматриваемого случая применим неявную разностную схему с обратной связью, которая была наиболее эффективной при рассмотрении одномерного случая в работе [1]. Так же будем использовать схемы расщепления при рассмотрении уравнений по каждой из существующих переменных в системе уравнений (1)–(3).

Рассмотрим уравнение (1) и используем схему расщепления к следующим временным интервалам: $[n; n+1/3]$, $[n+1/3; n+2/3]$, $[n+2/3; n+1]$.

Составим разностную схему для интервала $[n; n+1/3]$ и в качестве переменной дифференцирования выберем параметр X :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j,k}^{n+1/3} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j-1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i,j,k-1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k+1}^n}{\Delta z^2}$$

Так же сделаем дополнительное предположение о том, что будем использовать прямоугольный параллелепипед, т. е. $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$.

Подставим полученные схемы в уравнение (1) и проведем дополнительные преобразования.

$$T_{i,j,k}^{n+1/3} - T_{i,j,k}^n = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \times \\ \times \left[T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2 \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + T_{i,j-1,k}^n \right. \\ \left. - 2 \cdot T_{i,j,k}^n + T_{i,j+1,k}^n + T_{i,j,k-1}^n - 2 \cdot T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k+1}^n \right] + \\ + \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \cdot [T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3}] + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \cdot [T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n] + \\ + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \cdot [T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n] + Q_t \\ - \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \left[1 - \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} - \\ - \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i+1,j,k}^{n+1/3} = \left[1 - \frac{4 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \cdot T_{i,j,k}^n + \\ + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j+1,k}^n + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j-1,k}^n + \\ + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j,k+1}^n + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j,k-1}^n + \\ + Q_t$$

Введем дополнительные коэффициенты:

$$r_1 = -\left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \\ r_2 = \left[1 - \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \\ r_3 = -\left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \\ r_4 = \left[1 - \frac{4 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \\ r_5 = \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \\ r_6 = \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right]$$

$$r_7 = \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right]$$

$$r_8 = \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right]$$

И преобразуем уравнение выше к следующему виду:

$$r_1 \cdot T_{i-1,j,k}^{n+1/3} + r_2 \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} + r_3 \cdot T_{i+1,j,k}^{n+1/3} =$$

$$= r_4 \cdot T_{i,j,k}^n + [r_5 \cdot T_{i,j+1,k}^n + r_6 \cdot T_{i,j-1,k}^n] +$$

$$+ [r_7 \cdot T_{i,j,k+1}^n + r_8 \cdot T_{i,j,k-1}^n] + Q_t$$

В результате получается трехдиагональная матрица, которую можно решать с использованием метода Гаусса

$$A \cdot x = B.$$

В результате получаем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} r_2 & r_3 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & r_3 \\ 0 & 0 & r_1 & r_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} r_4 \cdot T_{i,j,k}^n + [r_5 \cdot T_{i,j+1,k}^n + r_6 \cdot T_{i,j-1,k}^n] + \\ + [r_7 \cdot T_{i,j,k+1}^n + r_8 \cdot T_{i,j,k-1}^n] + Q_{1,j,k} \\ r_4 \cdot T_{2,j,k}^n + [r_5 \cdot T_{2,j+1,k}^n + r_6 \cdot T_{2,j-1,k}^n] + \\ + [r_7 \cdot T_{2,j,k+1}^n + r_8 \cdot T_{2,j,k-1}^n] + Q_{2,j,k} \\ \dots \\ r_4 \cdot T_{m_1-1,j,k}^n + [r_5 \cdot T_{m_1-1,j+1,k}^n + r_6 \cdot T_{m_1-1,j-1,k}^n] + \\ + [r_7 \cdot T_{m_1-1,j,k+1}^n + r_8 \cdot T_{m_1-1,j,k-1}^n] + Q_{m_1-1,j,k} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} T_{1,j,k}^{n+1/3} \\ T_{2,j,k}^{n+1/3} \\ \dots \\ T_{m_1-1,j,k}^{n+1/3} \end{pmatrix}$$

Так же аналогичным образом осуществим преобразование дополнительных уравнений (8)–(11).

$$V^{\max} [T_{i,j,k}^n] = \begin{bmatrix} a_1 \cdot e^{-\frac{E_1}{RT_{i,j,k}^n}} - a_2 \cdot e^{-\frac{E_2}{RT_{i,j,k}^n}} \end{bmatrix}$$

$$Q [T_{i,j,k}^n] = V^{\max} [T_{i,j,k}^n] \cdot \frac{H}{\rho \cdot c} \cdot \frac{S_{1,j,k}^n}{S_{1,j,k}^n + K_s} \cdot \frac{C_{1,j,k}^n}{C_{1,j,k}^n + K_c}$$

Далее аналогичным образом составим схему расщепления для второго временного интервала, выбрав в качестве параметра дифференцирования – Y .

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i,j,k}^{n+2/3} - T_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^{n+2/3} - T_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^{n+1/3} - T_{i,j,k-1}^{n+1/3}}{2\Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j-1,k}^{n+2/3} - 2T_{i,j,k}^{n+2/3} + T_{i,j+1,k}^{n+2/3}}{\Delta y^2}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{T_{i,j,k-1}^{n+1/3} - 2T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i,j,k+1}^{n+1/3}}{\Delta z^2}$$

Так же сделаем дополнительные предположение о том, что будем использовать квадратную область, т. е. $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$.

Подставим полученные схемы в уравнение (1) и проведем дополнительные преобразования, аналогичные преобразованиям, выполненным в предыдущем абзаце.

$$T_{i,j,k}^{n+2/3} - T_{i,j,k}^{n+1/3} = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \times$$

$$\left[T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - 2 \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + T_{i,j-1,k}^{n+2/3} - 2 \cdot T_{i,j,k}^{n+2/3} \right] +$$

$$+ T_{i,j+1,k}^{n+2/3} + T_{i,j,k-1}^{n+1/3} - 2 \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} + T_{i,j,k+1}^{n+1/3}$$

$$+ \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \cdot [T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - T_{i-1,j,k}^{n+1/3}] + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \times$$

$$\times [T_{i,j+1,k}^{n+2/3} - T_{i,j-1,k}^{n+2/3}] + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \cdot [T_{i,j,k+1}^{n+1/3} - T_{i,j,k-1}^{n+1/3}] + Q_t$$

$$- \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j-1,k}^{n+2/3} + \left[1 - \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \cdot T_{i,j,k}^{n+2/3} -$$

$$- \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j+1,k}^{n+2/3} = \left[1 - \frac{4 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} +$$

$$+ \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j-1,k}^n +$$

$$+ \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j,k+1}^{n+1/3} + \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right] \cdot T_{i,j,k-1}^{n+1/3} +$$

$$+ Q_t$$

Введем дополнительные коэффициенты:

$$r_1 = \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right]$$

$$r_2 = \left[1 - \frac{2 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= -\left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_y \cdot \Delta t}{h} \right] \\
r_4 &= \left[1 - \frac{4 \cdot \lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} \right] \\
r_5 &= \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \\
r_6 &= \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_x \cdot \Delta t}{h} \right] \\
r_7 &= \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} + \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right] \\
r_8 &= \left[\frac{\lambda \cdot \Delta t}{c \cdot \rho \cdot h^2} - \frac{w_z \cdot \Delta t}{h} \right]
\end{aligned}$$

И преобразуем уравнение выше к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&r_1 \cdot T_{i,j-1,k}^{n+2/3} + r_2 \cdot T_{i,j,k}^{n+2/3} + r_3 \cdot T_{i,j+1,k}^{n+2/3} = \\
&= r_4 \cdot T_{i,j,k}^{n+1/3} + [r_5 \cdot T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + r_6 \cdot T_{i-1,j,k}^{n+1/3}] + \\
&+ [r_7 \cdot T_{i,j,k+1}^{n+1/3} + r_8 \cdot T_{i,j,k-1}^{n+1/3}] + Q_t
\end{aligned}$$

В результате получается трехдиагональная матрица, которую можно решать с использованием метода Гаусса, аналогично решению матрицы на интервале $[n; n+1/3]$. Преобразования дополнительных уравнений (8)–(11) осуществляется точно таким же образом, как в случае рассмотрения предыдущего интервала.

Далее аналогично предыдущим двум интервалам – составляем разностные схемы для интервала $[n+2/3; n+1]$, аналогичным образом осуществляем составление систем уравнений S и C .

В результате на каждом из рассматриваемых интервалов разбиения дифференцируемого уравнения – все показатели известны, и мы можем получить новые значения на интервале времени $t + 1/3$.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Общий алгоритм решения системы из трех уравнений (1)–(3) выглядит следующим образом.

1. Из начальных (4) и граничных (5) условий – получаем значения T , S , C в момент времени, равный нулю.

2. Решаем последовательно каждое из преобразованных уравнений на интервале времени $[n + 1/3]$, т. е. первоначально осуществляем получение значения $T_{i,j,k}^{n+1/3}$, $S_{i,j,k}^{n+1/3}$, $C_{i,j,k}^{n+1/3}$ (с учетом того, что показатели в нулевой момент времени известны).

3. Исходя из уравнений (5)–(7) получаем соответствующие значения температуры и концентраций субстрата и кислорода при выполнении граничных условий.

4. В качестве начальных значений выбираем показатели, полученные в п. 2, и производим соответствующие вычисления для момента времени $[n + 2/3]$.

Так как показатели T , S , C при решении в п. 2 не связаны в момент времени $[n+1/3]$, то можно сделать вывод о возможности распараллеливания процесса

вычисления соответствующих показателей, что приведет к увеличению производительности работы всей системы в целом.

Приведенные неявные разностные схемы были реализованы в виде программного обеспечения на языке программирования Java, которое позволяет варьировать всеми управляющими параметрами процесса аутостабилизации температуры, а также проводить вычислительные эксперименты для различного рода входных параметров. Программный комплекс позволяет получать результаты вычислительного эксперимента для любой заданной клетки, а также интерпретировать данные в разрезах по определенным слоям для различного рода условий. В качестве объекта для эксперимента была выбрана клеточная ткань, содержащая в себе $10 \times 10 \times 10$ клеток, а в качестве клетки для получения статистических данных – был выбран слой $z = 6$. В результате использования указанного выше подхода удалось сократить время вычислений с 14–16 ч (с использованием явной разностной схемы) до 45–60 мин. С учетом возможности распараллеливания процесса вычисления – данное время также сократится в 1,5–2 раза.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАТУРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 1 показана зависимость концентрации растворенного кислорода в центре куба от времени. В начальный момент времени C быстро уменьшается от концентрации насыщения до уровня, близкого к 0. Это значение сохраняется в течение всего периода, пока аутостабилизации температуры не наступает ($t = 0,01$ – $14,5$ ч). Как только процесс входит в режим аутостабилизации, скорость обменных процессов, потребление кислорода на эндогенные и экзогенные цели уменьшаются, в результате чего концентрация возрастает и достигает при $t = 20$ – 25 ч уровня насыщения.

На рис. 2 изображена динамика изменения концентрационных профилей кислорода при фиксированной координате z объекта и при различных координатах x и y . На рис. 2а видно, что концентрация кислорода падает практически до 0, ненулевые линии концентрации наблюдаются лишь в граничных областях, что связано с поступлением кислорода с соответствующими конвективными потоками. По мере того как температура объекта увеличивается и приближается к супраоптимальной рис. 2, наблюдается увеличение скорости биохимической реакции, что приводит к увеличению концентрации кислорода. Это говорит о том, что биохимические процессы идут при аутостабилизации менее интенсивно, поэтому снижается потребление кислорода. Эта же тенденция видна на рис. 2б, где концентрация кислорода становится практически в три раза меньше, чем концентрация насыщения при данной температуре. Таким образом, видно, что по мере приближения температуры к температуре аутостабилизации (рис. 2) концентрация кислорода в целом возрастает, и интересным является то, что на рис. 2 практически линейно изменяется по отношению к x и y . Линейность ранее наблюдалась в работах [6] при изменении концентраций биомассы и субстрата. Таким образом, было показано, что явление аутостабилизации часто сопряжено с нулевым порядком биохимической реакции. В данном случае ограничивающим агентом является кислород.

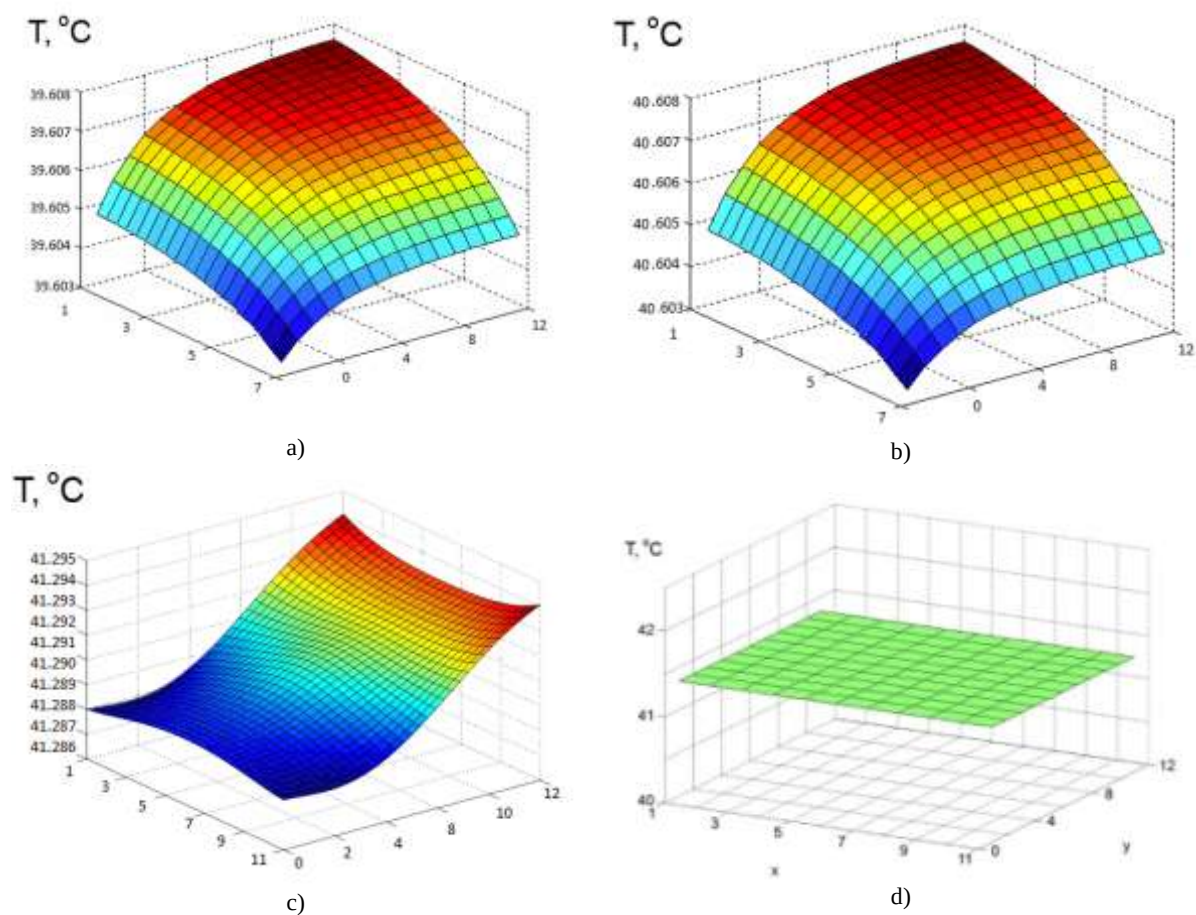


Рис. 1. Температура в клеточной ткани при $z = 6$ в момент времени t : а) 0,1; б) 13; в) 14; г) 15 ч. x, y, z – номера клеток; точность вычислений $dh = 0,0001$

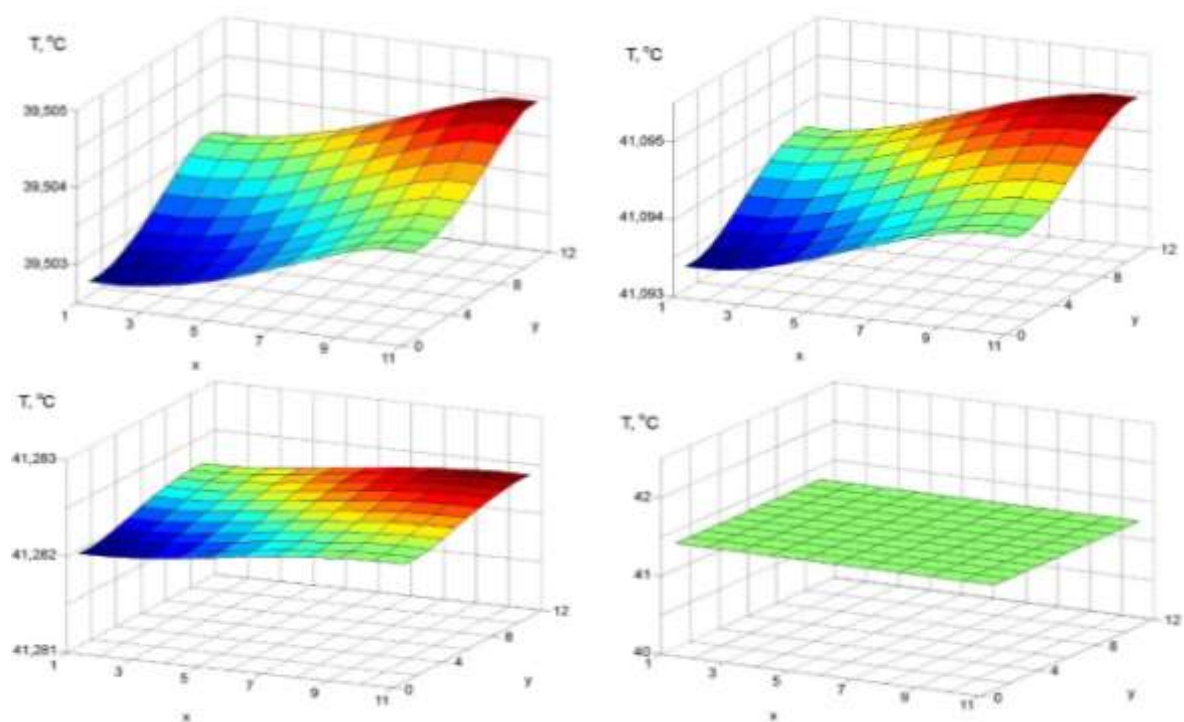


Рис. 2. Температура в клеточной ткани при $z = 6$ в промежутки времени t : а) 0,1; б) 13; в) 14; г) 15 ч. x, y, z – номера клеток

Заключающим этапом исследования стали вычислительные эксперименты, направленные на определение величины, которая влияет на скорость процесса во внутренней области объекта. Эти эксперименты показали, что, изменяя коэффициент теплопередачи на границе η_1 , можно контролировать рост внутренней области биообъекта. При $\eta_1 = 0$ в момент времени $t = 23$ ч концентрация растворенного кислорода достигает стабильного значения, которое равно уровню насыщения, в это же время концентрация субстрата становится равной концентрации во внешней области. Эти данные свидетельствуют о том, что скорость метаболизма в данный момент достигает нулевого значения. При увеличении значения $\eta_1 = 0,001 \text{ ч}^{-1}$ достигаемые уровни концентраций субстрата и растворенного кислорода снижаются. Это означает, что скорость процесса увеличивается, и при значении $\eta_1 = 0,01 \text{ ч}^{-1}$ скорость биохимической реакции становится настолько велика, что концентрация кислорода достигает значения, равного половине значения уровня насыщения. При дальнейшем увеличении значения коэффициента η_1 аутостабилизация отсутствует. Таким образом, для внутренней области биологического объекта существует такое значение коэффициента теплопередачи на ее границе, при значениях меньше которого существует возможность ограничения скорости метаболизма в этой области посредством аутостабилизации.

ВЫВОДЫ

Таким образом, с помощью неявной разностной схемы получено численное решение уравнений математической модели биологического объекта с распределенными параметрами. Данная разностная схема имеет преимущества перед явной схемой как по точности вычислений, так и по скорости работы алгоритма. Исследованы динамические режимы аутостабилизации температуры в распределенном биологическом объекте. Вычислительный эксперимент позволил осуществить интерпретацию результатов натурного эксперимента по части соответствия реальных и модельных профилей концентраций и температуры, объяснения

феноменов уменьшения скорости процесса при аутостабилизации температуры и вариировании коэффициентами тепло-массопередачи на границах объекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рылкин С.С., Шкидченко А.Н., Стеркин В.Э., Боев А.В. Эффект аутотермостатирования микробных популяций и его влияние на рост и газообмен микроорганизмов // Микробиология. 1973. Т. 42. С. 445-451.
2. Дегерменджи А.Г., Печуркин Н.С., Шкидченко А.Н. Аутостабилизация контролирующего рост факторов в биологических системах. Новосибирск: Наука, 1979.
3. Печуркин Н.С., Шкидченко А.Н. Явление аутостабилизации факторов, ограничивающих рост микробных популяций в открытых системах // Доклады АН СССР. 1976. Т. 227. № 3. С. 719-722.
4. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н. Математическое моделирование явления саморегулирования температуры в биореакторе // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. № 10. С. 93-108.
5. Арзамасцев А.А., Залевский Д.В. Математическое моделирование процессов аутостабилизации температуры в клеточной ткани для одномерного случая на основе неявных разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 6. С. 80-83.
6. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н., Тепляков Д.В. Математическая модель аутостабилизации температуры в клеточной ткани // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 284-286.
7. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н. Исследование аутостабилизации температуры в распределенной клеточной ткани // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 3. С. 776-783.
8. Arzamastsev A.A., Albitskaya E.N. Simulation of temperature self-regulation in a bioreactor // Mathematical models and computer simulations. 2011. V. 3. № 3. P. 299-310.
9. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н. Математическое моделирование саморегулирования температуры в популяциях микроорганизмов: непрерывный процесс // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 6. С. 709-714.
10. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н. Вычислительные эксперименты по моделированию саморегулирования температуры в популяциях микроорганизмов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 80-83.
11. Арзамасцев А.А., Альбицкая Е.Н., Черемисина Е.В. Математическое моделирование аутостабилизации температуры в клеточной ткани // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1843-1848.

Поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

UDC 519.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-471-478

THE STUDY OF CRYPTIC DIFFERENT SYSTEMS OF MATHEMATICAL MODELS OF DISTURBED BIOLOGICAL OBJECTS

© A.A. Arzamastsev, D.V. Zalevskiy

Cryptic differential scheme for mathematical model of biological object with disturbed parameters is developed. The model describes autostabilization of temperature in spatial-disturbed cell tissue.

Key words: implicit differential scheme; mathematical model; autostabilization; system of differential equations in partial derivatives.

REFERENCES

1. Arzamastsev A.A., Zalevskiy D.V. Matematicheskoe modelirovanie protsessov avtostabilizatsii temperatury v kletochnoy tkani dlya odnomernogo sluchaya na osnove neyavnykh raznostnykh skhem. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014, vol. 19, no. 6, pp. 80-83.
2. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. Matematicheskoe modelirovanie yavleniya samoregulirovaniya temperatury v bioreaktore. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2010, vol. 22, no. 10, pp. 93-108.
3. Arzamastsev A.A., Albitskaya E.N. Simulation of temperature self-regulation in a bioreactor. *Mathematical models and computer simulations*, 2011, vol. 3, no. 3, pp. 299-310.
4. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. Matematicheskoe modelirovanie samoregulirovaniya temperatury v populyatsiyakh mikroorganizmov: nepreryvnyy protsess. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2007, vol. 12, no. 6, pp. 709-714.
5. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. Vychislitel'nye eksperimenty po modelirovaniyu samoregulirovaniya temperatury v populyatsiyakh mikroorganizmov. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 80-83.
6. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N., Teplyakov D.V. Matematicheskaya model' avtostabilizatsii temperatury v kletochnoy tkani. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 284-286.
7. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N., Cheremisina E.V. Matematicheskaya modelirovanie avtostabilizatsii temperatury v kletochnoy tkani. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 1843-1848.
8. Arzamastsev A.A., Al'bitskaya E.N. Issledovanie avtostabilizatsii temperatury v raspredelennoy kletochnoy tkani. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2011, vol. 16, no. 3, pp. 776-783.
9. Rylkin S.S., Shkidchenko A.N., Sterkin V.E., Boev A.V. Effekt avtotermostatirovaniya mikrobnnykh populyatsiy i ego vliyaniye na rost i gazoobmen mikroorganizmov. *Mikrobiologiya*, 1973, vol. 42, pp. 445-451.
10. Degermendzhi A.G., Pechurkin N.S., Shkidchenko A.N. *Avtostabilizatsiya kontroliruyushchikh rost faktorov v biologicheskikh sistemakh*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1979.
11. Pechurkin N.S., Shkidchenko A.N. Yavlenie avtostabilizatsii faktorov, ogranichivayushchikh rost mikrobnnykh populyatsiy v otkrytykh sistemakh. *Doklady AN SSSR*, 1976, vol. 227, no. 3, pp. 719-722.

Received 14 March 2016

Арзамасцев Александр Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Arzamastsev Aleksander Anatolevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Mathematical Modelling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

Залевский Дмитрий Вадимович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Zalevskiy Dmitriy Vadimovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Mathematical Modelling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

УДК 517.977
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-479-486

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНОЙ СРЕДЫ В СЕТЕПОДОБНОЙ ГИДРОСИСТЕМЕ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

© О.Р. Балабан, А.В. Иванов

Работа посвящена вопросам построения разностной схемы для численного анализа процесса переноса многофазных сред в гидросистемах сетеподобного типа и базируется на анализе начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетях или сетеподобных областях. Представлены общие подходы к построению разностной схемы для ламинарного и турбулентного движений среды, исследуются ее свойства: аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Ключевые слова: дифференциальная система; распределенные параметры на сетеподобных областях; разностная схема; устойчивость; сходимость.

1. Введение. Работа продолжает исследования, приведенные в [1–3], и посвящена общему описанию метода конечных разностей и некоторых принципов построения сходящихся разностных схем динамики многофазных сред с распределенными параметрами на сети или сетеподобных областях. Этот метод состоит в сведении начально-краевой задачи к системе алгебраических уравнений, неизвестными которой являются значения сеточных функций, и последующему изучению предельного перехода, когда длины сторон ячеек сетки стремятся к нулю. Принципиальным отличием от классических схем является аппроксимация начально-краевой задачи в слабом смысле, что позволяет рассматривать уравнения с коэффициентами, имеющими не более счетного числа разрывов-скачков. При этом обобщенное решение с конечной энергетической нормой определяется как предел слабо сходящейся последовательности приближений в энергетическом пространстве [4–6].

2. Постановки задач и формулировка основных результатов. Численный анализ прикладных задач переноса многофазных сред в различного вида гидросистемах сетеподобного типа носит фрагментарный характер, т. к. сопряжен с исследованием начально-краевых задач для дифференциальных систем с распределенными параметрами на сетях или сетеподобных областях [2–3]. Ниже представлены подходы к исследованию таких задач для двух базовых случаев ламинарного и турбулентного движения среды. Используемые подходы обладают достаточно большой общностью и применимы к различным видам гидросетей.

2.1. Ламинарные потоки (линейный случай). Ламинарный характер течений обусловлен соотношением диаметра и длины каналов гидронесителя: диаметр много меньше длин всех элементов гидросистемы. Конструктивные особенности таковых сетей, как правило, исключают турбулентный характер динамики течений (либо турбулентностями можно пренебречь). Последнее означает, что осевое изменение характера

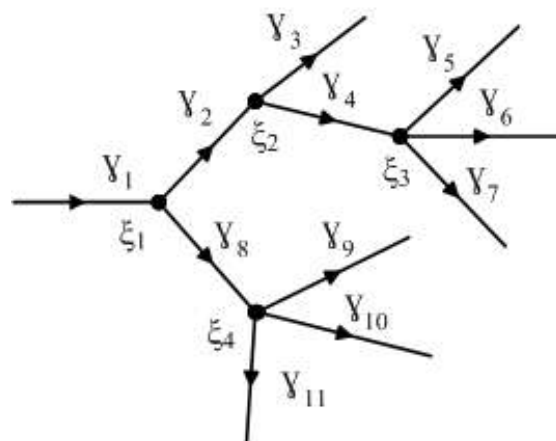


Рис. 1. Фрагмент гидросети

течения представляет наиболее информативную составляющую гидродинамики течения; таким образом, достаточно интерпретации линейных фрагментов гидросистемы одномерными континуумами, параметризованными одномерной переменной x пространства $\mathbb{R}^1$ (рис. 1).

Математическое описание процесса ламинарного течения в сетеподобной гидросистеме (функция $u(x, t)$ описывает скорость течения, $p(x, t)$ – давление в гидросистеме) использует линейаризованную систему Навье–Стокса, аналогичную уравнениям передачи масс с распределенными параметрами на сети

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Psi u + \Phi p = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x) \quad (1)$$

с условиями согласования в узлах сопряжения линейных фрагментов гидросистемы (2), где

$$\Psi u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x, t),$$

$$\Phi p(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x},$$

(здесь $a(x)$, $b(x)$ – коэффициенты, характеризующие динамику процесса). К системе (1) следует присоединить соотношение, описывающее краевые условия (5), и соотношения, устанавливающие связь гидродинамических процессов с температурой среды (6), (7).

Для математического описания гидродинамического процесса в гидросистеме рассмотрим интерпретирующую ее геометрическую сеть Γ с ребрами γ (соответствуют линейным фрагментам гидросистемы) и введем следующие обозначения (работы В.В. Провоторова, А.С. Волковой, Ю.А. Гнилицкой [4; 6–8]): $\partial\Gamma$ – множество граничных узлов ξ (соответствуют входам в гидросистему), $J(\Gamma)$ – множество внутренних ξ узлов (соответствуют узлам ветвления гидросистемы) и пусть Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\partial\mathfrak{R}$ – множество всех граничных ребер (ребер, содержащих граничные узлы $\xi \in \partial\Gamma$; $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$ ($\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0, t)$), $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$ ($\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0, t)$). Каждое ребро γ сети Γ ориентировано, параметризуется отрезком $[0, 1]$ и переменной $x \in [0, 1]$. Подробные описания используемых пространств приведены в [7]), здесь же по мере необходимости представлены только их общие свойства.

Основным пространством допустимых состояний $u(x, t)$ динамики ламинарного течения является пространство $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, элементы которого суть непрерывные по переменной t и суммируемые по пространственной переменной x функции $u(x, t)$ с обобщенной производной $u_x(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$, причем для них справедливы условия согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)\gamma_j \frac{\partial u(1, t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)\gamma_j \frac{\partial u(0, t)_{\gamma_j}}{\partial x}, \quad (2)$$

(здесь $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «от узла ξ »), и нулевые условия в граничных узлах: $u(x, t)|_{\partial\Gamma} = 0$.

Рассматривается базирующаяся на системе (1) математическая модель динамики многофазной среды в гидросети для несжимаемой вязкой многофазной жидкости в терминах формализмов начально-краевой задачи в области $\overline{\Gamma_T} = \Gamma \times [0, T]$:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) + b(x)y(x, t) + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = f(x, t), \quad (3)$$

$$y|_{t=0} = y_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

Коэффициенты $a(x)$ и $b(x)$, характеризующие внутренние свойства текущей среды (плотность, вязкость и пр.), являются фиксированными измеримыми ограниченными на Γ_0 функциями, суммируемые с квадратом; соотношения (2) – условия согласования (баланс потоков в узле ξ) во всех внутренних узлах гидросети; соотношения (4) – начальные условия; краевые условия определяются соотношениями

$$y|_{\partial\Gamma_T} = 0. \quad (5)$$

Замечание 1. Наличие функции $f(x, t)$ в правой части (3) обусловлено использованием при анализе однородных краевых условий (5) для описания пространств решений системы (1) для неоднородной исходной задачи относительно функции $u(x, t)$ с нулевой правой частью в первом уравнении (1) и ненулевым краевым условием $u|_{x \in \partial\Gamma} = \psi(x, t)$; аддитивная замена $y = u - \psi$ переводит неоднородность из краевого условия в правую часть уравнения (3).

В неизотермических условиях к соотношениям (3)–(5) следует присоединить уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - y \frac{\partial T}{\partial x} + f_T(x, t) \quad (6)$$

с добавленными для скалярной функции $T(x, t)$ начальным

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (7)$$

и краевыми

$$T|_{\partial\Gamma} = 0 \quad (8)$$

условиями. Здесь α – коэффициент теплопроводности среды.

Соотношения (3)–(8) являются математической моделью динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях (см. также замечание 1).

Замечание 2. Следует отметить, что отыскание решения начально-краевой задачи (3)–(5) никак не связано с наличием решения начально-краевой задачи (6)–(8), что обуславливает введение понятия решения системы (8)–(13) как «разделенные» решения задач (3)–(5) и (6)–(8).

Пусть $f(x, t), f_T(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $T_0(x) \in L_2(\Gamma)$ (элементами пространств $L_{2,1}(\Gamma_T)$ и $L_2(\Gamma)$ являются суммируемые на Γ_T и Γ функции соответственно).

Определение 1. Слабым решением [3] начально-краевой задачи (3)–(8) называется пара $\{y(x, t), T(x, t)\}$,

$y(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, $T(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ где функция $y(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} y(x, t) \eta(x, t) dx - \int_{\Gamma_T} y(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} dx dt + \ell_t(y, \eta) + \\ & + \int_{\Gamma_T} p(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} dx dt = \\ & = \int_{\Gamma} y_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_{\Gamma_T} f(x, t) \eta(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (9)$$

а функция $T(x, t)$ – соотношению

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_i} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \eta(x, t) dx dt + \Theta_i(T, \eta) + \\ & + \int_{\Gamma_i} p(x, t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} dx dt = \int_{\Gamma_i} f_T(x, t) \eta(x, t) dx dt, \quad (10) \\ & T(x, 0) = T_0(x) \end{aligned}$$

для любых $\eta(x, t), \zeta(x, t) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ и при любом $t \in [0, T]$; здесь $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$ пространство суммируемых функций с суммируемыми обобщенными производными η_t и η_x , $\ell_t(y, \eta), \Theta_i(T, \eta)$ – билинейные формы вида

$$\begin{aligned} \ell_t(y, \eta) &= \int_{\Gamma_i} (a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + b(x) y(x, t) \eta(x, t)) dx dt, \\ \Theta_i(T, \eta) &= \alpha \int_{\Gamma_i} (\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} + y(x, t) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \eta(x, t)) dx dt. \end{aligned}$$

Имеют место следующие утверждения, полное доказательство которых приведено в работах [6; 8].

Теорема 1. Начально-краевая задача (3)–(5) имеет единственное слабое решение $\{y(x, t), T(x, t)\}$, непрерывно зависящее от исходных данных $f(x, t)$ и $y_0(x)$.

Теорема 2. Начально-краевая задача (6)–(8) имеет единственное слабое решение $T(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$, непрерывно зависящее от исходных данных $f_T(x, t)$ и $T_0(x)$.

Теорема 3. Начально-краевая задача (3)–(8) имеет единственное слабое решение $T(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$, непрерывно зависящее от исходных данных $f(x, t)$, $f_T(x, t)$ и $y_0(x)$, $T_0(x)$, т. е. является корректной по Адамару.

Замечание 3. Утверждение теоремы 3 лежит в основе анализа задач оптимизации дифференциальных систем (3), (6), к которым относятся, например, задачи граничной и стартовой оптимизации [4; 6].

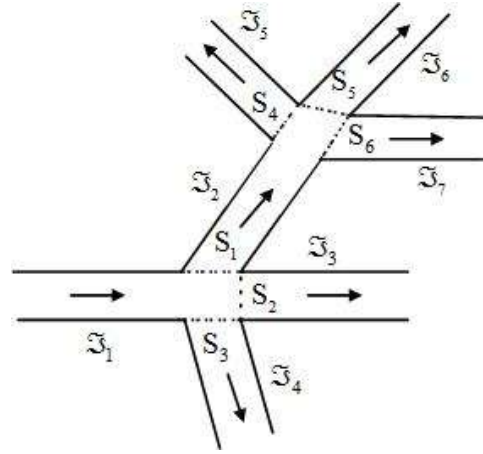


Рис. 2. Фрагмент сетеподобной гидросистемы

2.2. Турбулентные потоки (нелинейный случай).

Рассмотрим, далее, математическую модель динамики вязких турбулентных потоков в пространственных сетеподобных гидропроводах (рис. 2). Все рассмотрения для сохранения общности подхода проводятся для сетеподобных областей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности n (в конкретных ситуациях чаще всего используются случаи $n = 2$ или $n = 3$). Понятие «сетеподобная область» подразумевает конструкцию, построенную из областей по принципу вышеприведенной сети (см. п. 2.1), а именно: каждая область сопрягается частью своей границы с другой областью (другими областями) в узловых местах, аналогичным внутренним узлам сети.

Для дифференциальной системы, рассматриваемой в сетеподобной области $\mathfrak{T}_T = \mathfrak{T} \times [0, T]$

$(\overline{\mathfrak{T}_T} = (\mathfrak{T} \cup \partial \mathfrak{T}) \times [0, T])$, введем следующие обозначения [14]. Пусть $\mathfrak{T}$ – открытая область пространства $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial \mathfrak{T}$, имеющая сетеподобную структуру, состоящую из областей $\mathfrak{T}_k : \mathfrak{T} = \bigcup_k \mathfrak{T}_k \cup S_1$ (рис. 4,

поверхности S_1 отделяют области $\mathfrak{T}_k$ друг от друга, S_1^- и S_1^+ – односторонние поверхности для S_1 , определяемые направлением нормалей n_1^-, n_1^+ к ним) и пусть $(0, T)$ ($T < \infty$) – интервал в $\mathbb{R}^1$. Для рассматриваемого случая используются аналогичные приведенным выше пространства, где обозначение сети Γ заменено на обозначение сетеподобной области $\mathfrak{T}$, а соотношения (2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u|_{S_1^-} &= u|_{S_1^+}, \quad \sum_i \frac{\partial u}{\partial n_i^-} \Big|_{S_1^-} + \sum_i \frac{\partial u}{\partial n_i^+} \Big|_{S_1^+} = 0, \quad u|_{\partial \mathfrak{T}} = 0, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим дифференциальную систему и ей соответствующую начально-краевую задачу в замкнутой области $\overline{\mathfrak{T}_T}$ для вектор-функции $Y(x, t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} - \Delta Y(x,t) + \sum_{i=1}^n Y_i(x,t) \frac{\partial Y(x,t)}{\partial x_i} + \text{grad} p(x,t) = F(x,t), \quad (11)$$

$$\text{div} Y = 0, \quad (12)$$

$$Y(x,0) = Y_0(x), x \in \mathfrak{T}, \quad (13)$$

$$Y|_{\partial \mathfrak{T}_T} = 0. \quad (14)$$

Соотношения (11), (12) образуют систему уравнений Навье–Стокса относительно вектор-функции $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, характеризующей течение несжимаемой (соотношение (12)) вязкой (ν – коэффициент вязкости) многофазной среды в сетеподобной замкнутой области $\overline{\mathfrak{T}_T}$ с постоянным давлением $p(x,t)$; Δ – оператор Лапласа; вектор-функция $Y(x,t)$ определяет скорости перемещения среды по всем координатным направлениям; $f(x,t) \in L_2(\partial \mathfrak{T}_T)$, $Y_0(x) \in L_2(\mathfrak{T})$ – заданные функции (исходные данные).

В неизотермических условиях к соотношениям (11)–(14) следует присоединить уравнение теплопереноса для скалярной функции $T(x,t)$, описывающей тепловое поле многофазной среды. Для этого введем пространство $V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$ скалярных функций $v(x,t)$ по аналогии с пространством $V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$ (в описании множества $\Omega(\mathfrak{T}_T)$ отсутствует соотношение $\text{div} u = 0$). Функция $T(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \Delta T - (Y, \text{grad} T) + F_T(x,t) \quad (15)$$

с добавленными начальными

$$T(x,0) = T_0(x) \in L_2(\mathfrak{T}) \quad (16)$$

и краевыми

$$T(x,t)|_{\partial \mathfrak{T}_T} = 0 \quad (17)$$

условиями. Здесь α – коэффициент теплопроводности многофазной среды, $\text{grad} T$ характеризует температурные потоки вдоль координатных осей.

Замечание 4. Как и выше (замечание 1) наличие неоднородностей $F(x,t)$ и $F_T(x,t)$ в (11) и (15) обусловлено неоднородными краевыми условиями $Y|_{\partial \mathfrak{T}_T} = Y_0(x,t)$ и $T(x,t)|_{\partial \mathfrak{T}_T} = T_0(x,t)$ ($Y_0(x,t), T_0(x,t)$ – заданные значения скоростей и начальной температуры среды при входе в гидросеть) и последующей заменой, приводящей эти неоднородные условия к однородным.

Введем следующие формы ($\rho_1(u, \nu)$ – билинейная форма):

$$\rho_1(u, \nu) = \sum_{i,j=1}^n \int \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial \nu_j}{\partial x_i} dx,$$

$$\rho_2(u, \nu, \omega) = \sum_{i,j=1}^n \int u_k \frac{\partial \nu_j}{\partial x_k} \omega_j dx,$$

$$\rho_3(u, \nu, \mu) = \sum_{k=1}^n \int u_k \frac{\partial \nu}{\partial x_k} \mu$$

на вектор-функциях u, ν, ω и скалярных функциях ν, μ (при этом сходятся интегралы в представлении данных форм).

Определение 2. Турбулентным решением начально-краевой задачи (11)–(17) называется пара функций $\{Y(x,t), T(x,t)\}$ ($Y(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$,

$T(x,t) \in W_{2,0}^1(S_1, \mathfrak{T}_T)$). При этом вектор-функция $Y(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (Y, \eta) - \int_{\mathfrak{T}_t} Y(x, \tau) \frac{\partial \eta(x, \tau)}{\partial \tau} dx d\tau + \nu \int_0^t \rho_1(Y, \eta) d\tau + \\ + \int_0^t \rho_2(Y, Y, \eta) d\tau + (\text{grad} p, \eta) = \\ = (Y_0(x), \eta(x, 0)) + \int_{\partial \mathfrak{T}_t} F(x, \tau) \eta(x, \tau) dx, d\tau \end{aligned}$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых вектор-функций $\eta(x, t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{T}_T)$, а скалярная функция $T(x, t)$ – интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{T}_t} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} \zeta(x, \tau) dx d\tau + \alpha \int_0^t \rho_1(T, \zeta) d\tau + \int_{\mathfrak{T}_t} \rho_3(Y, T, \zeta) dx d\tau = \\ = \int_{\partial \mathfrak{T}_t} F_t(x, \tau) \zeta(x, \tau) dx d\tau \end{aligned}$$

для любых $t \in [0, T]$ и любых скалярных функций $\zeta(x, t) \in W_2^1(S_1, \mathfrak{T}_T)$ (пространство $W_2^1(S_1, \mathfrak{T}_T)$ строится по аналогии с $W_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$)

Теорема 4. Начально-краевая задача (11)–(14) при указанных выше условиях имеет турбулентное решение $Y(x,t) \in V_{2,0}^1(S_1, \mathfrak{T}_T)$, непрерывно зависящее от исходных данных $F(x,t)$ и $Y_0(x)$.

Теорема 5. Начально-краевая задача (15)–(17) имеет турбулентное решение $T(x,t) \in V_{2,0}^{1,0}(S_1, \mathfrak{T}_T)$, непрерывно зависящее от исходных данных $F_T(x,t)$ и $T_0(x)$.

Доказательства утверждений представленных теорем приведены в работе [1].

Следствие из теорем 4 и 5. Начально-краевая задача (11)–(17) имеет турбулентное решение, непрерывно зависящее от исходных данных $F(x, t)$, $F_T(x, t)$ и $Y_0(x)$, $T_0(x)$.

3. Разностная схема численного анализа. Для упрощения анализа остановимся на случае ламинарного потока (п. 2.1), случай турбулентного потока (п. 2.2) аналогичен.

Разобьем ребра γ сети Γ точками kh (k – натуральные числа, $h > 0$ – фиксированное число, равное длине элементарного отрезка ω_h , называемого ниже элементарной ячейкой ребра сети), при этом считаем, что внутренние узлы $\xi \in J(\Gamma)$ графа входят в число таких точек. Множество точек $\{kh\}$ назовем сеткой Γ и обозначим Γ^h . Для сеточных функций u_h (индекс h для упрощения записи иногда опускается), определенных на Γ^h и соответствующих функциям $u(x)$, $x \in \Gamma$, введем разностные операции (разностные отношения) $u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$, $u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h))$ (правое и левое разностные отношения). Разностные операции от произведения сеточных функций имеют следующий вид:

$$(uv)_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x+h)v_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x+h)v_x(x+h),$$

$$(uv)_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x-h)v_x(x) = u_x(x)v(x) + u(x-h)v_x(x-h).$$

Разностным аналогом формулы интегрирования по частям является формула

$$h \sum_{k=0}^{M-1} u_x(kh)v_h(kh) = -h \sum_{k=1}^M u_h(kh)v_x(kh) + u_h(Mh)v_h(Mh) - u_h(0)v_h(0),$$

здесь u_x, v_h – произвольные сеточные функции, заданные в точках $kh, k = 0, 1, \dots, M$ (M – число всех точек сетки Γ^h , в прикладных задачах обычно $h = 1/M$). Ниже для удобства чтения индекс k у сеточной функции $u_h(k)$ указывает на то, что функция u_h берется на слое $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}, N = [T/\tau]$).

Рассмотрим следующую разностную схему (в работе [6] приведена аналогичная):

$$u_t(k) - (a_h u_x(k))_x + b_h u(k) = f_h(k), \quad (18)$$

$$u_h(k)|_{\partial\Gamma^h} = 0, \quad (19)$$

$$u_h|_{t=0} = \varphi_h. \quad (20)$$

Разностные уравнения (18) должны выполняться на слоях $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) в точках сетки Γ^h ; равенства (19) выполняются для $kh, k = 0, 1, \dots, M$; равенство (9) – в точках Γ^h . При этом в (20) сеточная функция φ_h в точке kh ячейки ω_{kh} равна усреднению

$$\varphi_h = \frac{1}{h} \int_{\omega_{kh}} \varphi(x) dx, \text{ взятому по ячейке } \omega_{kh}. \text{ Аналогично}$$

строятся сеточные функции a_h и b_h . Сеточная функция $f_h(k)$ строится по заданной функции f в соответствии с соотношением (усреднение)

$$f_h|_{x=kh, t=k_0\tau} = \frac{1}{h\tau} \int_{\Gamma_T(k, k_0)} f(x, t) dx dt, \text{ где } \Gamma_T(k, k_0) = \omega_{kh} \times (k_0\tau, (k_0+1)\tau).$$

Для каждого слоя $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) разностная схема (18)–(20) являет собой линейную систему алгебраических уравнений, однозначно разрешимую для всех $\tau < \tau_0$, где $\tau_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Соотношения (18), (19) эквивалентны тождествам

$$\sum_{\Gamma_+^h} (u_t \eta_h + a_h u_x \eta_x + b_h u_h \eta_h) = \sum_{\Gamma_+^h} f_h \eta_h, \quad (21)$$

которые выполняются на всех слоях $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) и в которых η_h – произвольная сеточная функция Γ^h , равная нулю $\partial\Gamma^h$.

Теорема 6. Система (18), (19) при $\tau < \tau_0$ (значение τ_0 указано ниже) однозначно разрешима на слое $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) при любых $f_h(k)$.

Доказательство. На произвольном слое $t = t_k$ возьмем однородную систему, соответствующую системе (18), (19), или, что то же, тождество (21), где f_h и u_{k-1} (u_{k-1} входит в выражение $u_t(k)$) заменены нулями. Положив в этом тождестве $\eta_h = u_h$, получим

$$\text{равенство } \sum_{\Gamma_+^h} \left(\frac{1}{\tau} u_h^2 + a_h u_x^2 + b_h u_h^2 \right) = 0. \text{ В силу оценок}$$

для функций $a(x)$ и $b(x)$ из него вытекает

$$\sum_{\Gamma_+^h} \frac{1}{\tau} u_h^2 \leq \sum_{\Gamma_+^h} \left(\frac{1}{\tau} u_h^2 + a_h u_x^2 \right) \leq \sum_{\Gamma_+^h} (b_h u_h^2) \leq \sum_{\Gamma_+^h} (b^* u_h^2).$$

При $1/\tau > b^*$ ($\tau < 1/b^* = \tau_0$) из полученной оценки следует $u_h(k) \equiv 0$.

Теорема 7. Разностная схема (18), (19) устойчива.

Доказательство. Положим в (21) $\eta_h = 2\tau u_h(k)$ и воспользуемся соотношением $2\tau u_t(k) u_h(k) =$

$= u_h^2(k) - u_h^2(k-1) + \tau^2 u_t^2(k)$, а также неравенствами для функций $a(x)$ и $b(x)$, которые остаются справедливыми и для их усреднений. Получим

$$\begin{aligned} & \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 - \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}^2 + \tau^2 \|u_t\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + \\ & + 2\tau a_* \|u_x\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 \leq -2\tau \sum_{\Gamma_+^h(k)} b_h u_h^2 + \sum_{\Gamma_+^h(k)} f_h u_h \leq \\ & \leq 2\tau b^* \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}. \end{aligned}$$

Здесь $\|f_h\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} f_h^2}$, $\|u_x\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} u_h^2}$,

$$\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h} = \sqrt{h \sum_{\Gamma_+^h} u_h^2}.$$

Из полученного неравенства

$$\begin{aligned} & \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 - \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}^2 \leq 2\tau b^* \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}^2 + \\ & + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \end{aligned}$$

и при последующем делении на $\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} + \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)}$ – неравенство

$$(1 - 2\tau b^*) \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \leq \|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k-1)} + 2\tau \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}.$$

При $\tau < 1/(2b^*)$ из этого рекуррентного соотношения для произвольного слоя $t = t_k$ ($k \geq 2$) окончательно получаем

$$\|u_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)} \leq C(\|f_h\|_{2,\Gamma_+^h} + \|f_h\|_{2,\Gamma_+^h(k)}), \quad (22)$$

где C – постоянная, зависящая только от b^* и T . Неравенства (22) гарантируют устойчивость схемы (18), (19). Теорема доказана.

На основе неравенств (22) доказывается слабая сходимость в $W_{2,0}^{1,0}(\Gamma_T)$ задачи (6)–(8). Именно из тождеств (21) для слоев $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) следует тождество

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_T} (-\tilde{u}_h \tilde{\eta}_t + a_h \tilde{u}_x \tilde{\eta}_x + b_h \tilde{u}_h \tilde{\eta}_h) dx dt - \int_{\Gamma} \tilde{\varphi} \tilde{\eta}_h(0) dx = \\ & = \int_{\Gamma_T} f_h \tilde{\eta}_h dx dt \end{aligned} \quad (23)$$

(здесь через $\tilde{\eta}$ обозначены кусочно-постоянные интерполяции сеточных функций v_h : $\tilde{\eta}(x, t) = v_{kh, (k_0+1)\tau}$) при любой функции $\eta_h(k)$, равной нулю на $\partial\Gamma^h$ при всех k и равной нулю на слое $t = T$. Предельный переход по $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ в (23) осуществляется, взяв в качестве η_h значения в точках сетки Γ_T^h какой-либо глад-

кой функции $\eta(x, t)$, равной нулю в окрестности боковой поверхности цилиндра Γ_T и его верхнего основания. Таким образом, имеет место

Теорема 8. Пусть для начально-краевой задачи (6)–(8) $\varphi(x) \in W_{2,0}^1(a, \Gamma)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Тогда разностная схема (18)–(20) однозначно определяет сеточную функцию u_h при всех $\tau < 1/b^*$ и ее интерполяции при $h \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$ слабо сходятся в $L_2(\Gamma_T)$ к обобщенному решению $u(x, t) \in W_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$ задачи (6)–(8), производные от интерполяций сходятся слабо в $L_2(\Gamma_T)$ к $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \in L_2(\Gamma_T)$.

4. Заключение. Следует отметить, что представленные выше идеи использованы ранее в работе [3], а также могут быть использованы при решении ряда смежных задач: оптимальное управление грузоперевозками в условиях мегаполиса, когда требуется учитывать переменную скорость движения в течение суток [9]; аппроксимация процессов специальных течений в реакторах вытеснения [10]; построение систем мониторинга и управления объектами повышенной сложности – от ядерных реакторов до мобильных роботов [11]. Представленные результаты аналогичны классическим исследованиям устойчивости дифференциальных систем и оптимизации [12–14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балабан О.Р. Математическое описание динамики многофазной среды в сетеподобной гидросистеме при неизотермических условиях // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 4.1 (62). С. 192–198.
2. Балабан О.Р., Гнилицкая Ю.А. Математическая модель каскадно-последовательного течения несжимаемой вязкой многофазной среды // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015): сборник трудов 8 Междунар. конф., Воронеж, 21–26 сент. 2015 г. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2015. С. 43–45.
3. Балабан О.Р., Гнилицкая Ю.А., Приходько И.В. Задача оптимизации динамики течения вязких многофазных сред в сетеподобных объектах // Заметки ученого. Ростов н/Д, 2015. № 1 (1). С. 156–161.
4. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 126–128.
5. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // International Conference “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 117–119.
6. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2015. № 3. С. 126–142.
7. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3–18.
8. Гнилицкая Ю.А. Математическое моделирование и численное исследование процессов в сетеподобных объектах, описываемых эволюционными уравнениями: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2015.
9. Сергеев С.М. Математическое моделирование сети торговых предприятий // Вестник Воронежского государственного технического университета. Воронеж, 2012. Т. 8. № 1. С. 66–71.
10. Потапов Д.К. Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291–296.
11. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник

Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2011. № 1. С. 117-134.

12. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 5. С. 3-12.
13. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.
14. Жабко А.П., Зараник У.П. О приближении решений экспоненциально устойчивых систем дифференциально-разностных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: При-

кладная математика. Информатика. Процессы управления. СПб., 2011. Вып. 3. С. 29-38.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена в Военном учебно-научном центре Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» в 3-м научно-исследовательском отделе НИЦ.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

UDC 517.977

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-479-486

DIFFERENCE SCHEME FOR THE NUMERICAL ANALYSIS OF MULTIPHASE FLUIDS IN HYDRAULIC NET-LIKE TYPE AT NONISOTHERMAL CONDITIONS

© O.R. Balaban, A.V. Ivanov

The work is devoted to questions of constructing a difference scheme for the numerical analysis of the migration process of multiphase fluids in hydraulic net-like type and is based on the analysis of the initial-boundary value problems for differential systems with distributed parameters on the network or net-like domains. We present a common approach to the construction of a difference scheme for laminar and turbulent motions of the medium, its properties are investigated: approximation, stability, convergence.

Key words: differential system; distributed parameters on the net-like domains; finite difference scheme; stability; convergence.

REFERENCES

1. Balaban O.R. Matematicheskoe opisaniye dinamiki mnogofaznoy sredy v setepodobnoy gidrosisteme pri neizotermicheskikh usloviyakh. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*, 2015, no. 4.1 (62), pp. 192-198.
2. Balaban O.R., Gnilitkaya Yu.A. Matematicheskaya model' kaskadno-posledovatel'nogo tekheniya neszhimaemoy vyazkoy mnogofaznoy sredy. *Sbornik trudov 8 Mezhdunarodnoy konferentsii "Sovremennyye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy (PMTUKT-2015)"*. Voronezh, Scientific Book Publishing House, 2015, pp. 43-45.
3. Balaban O.R., Gnilitkaya Yu.A., Prikhod'ko I.V. Zadacha optimizatsii dinamiki tekheniya vyazkikh mnogofaznykh sred v setepodobnykh ob'ektakh. *Nauchno-prakticheskiy zhurnal «Zametki uchenogo»*, Rostov-on-Don, 2015, no. 1 (1), pp. 156-161.
4. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 126-128.
5. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 117-119.
6. Podval'nyy S.L., Provotorov V.V. Startovoe upravleniye parabolicheskoy sistemoy s raspredelennymi parametrami na grafe. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsestry upravleniya*, St. Petersburg, 2015, no. 3, pp. 126-142.
7. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshchennyye resheniya i obobshchennyye sobstvennyye funktsii kraevykh zadach na geometricheskom grafe. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2014, no. 3, pp. 3-18.
8. Gnilitkaya Yu.A. Matematicheskoe modelirovaniye i chislennoye issledovaniye protsessov v setepodobnykh ob'ektakh, opisyyaemykh evolyutsionnymi uravneniyami. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Voronezh, 2015.
9. Sergeev S.M. Matematicheskoye modelirovaniye seti togovykh predpriyatiy. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, Voronezh, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 66-71.
10. Potapov D.K. Nepreryvnaya approksimatsiya odnornernogo analoga modeli Gol'dshtika otryvnykh tekheniy neszhimaemoy zhidkosti. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2011, vol. 14, no. 3, pp. 291-296.
11. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Stabilizatsiya plazmy na baze prognoza s ustoychivym lineynym priblizheniem. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protsestry upravleniya*, St. Petersburg, 2011, no. 1, pp. 117-134.
12. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob asimptoticheskoy ustoychivosti resheniy odnogo klassa sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvaniem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2012, no. 5, pp. 3-12.
13. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustoychivosti resheniy odnogo klassa nelineynykh sistem s zapazdyvaniem. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 9, pp. 3-14.

14. Zhabko A.P., Zaranik U.P. O priblizhenii resheniy eksponentsial'no ustoychivyykh sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya*, St. Petersburg, 2011, no. 3, pp. 29-38.

Received 18 March 2016

Балабан Олеся Руслановна, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, инженер 3-го научно-исследовательского отдела НИЦ, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Balaban Olesya Ruslanovna, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Engineer of 3rd Scientific-Research Centre Department of Scientific Research Centre, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Иванов Алексей Владимирович, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник 3 научно-исследовательского отдела НИЦ, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Ivanov Aleksey Vladimirovich, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Head of 3rd Scientific-Research Centre Department of Scientific Research Centre, e-mail: bal-olesya@mail.ru

УДК 517.958
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-487-491

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД В ГИДРОСЕТИ

© И.В. Приходько, А.В. Иванов

Рассматривается дифференциальная система с распределенными параметрами на графе, состояние которой определяется слабым решением начально-краевой задачи для уравнения с частными производными гиперболического типа. Представлены условия однозначной разрешимости такой задачи и условия непрерывности решения по исходным данным. Последнее означает корректность задачи по Адамару и во многом определяет однозначную разрешимость оптимизационных задач разного типа для такого рода систем.

Ключевые слова: дифференциальная система; распределенные параметры на графе; однозначная слабая разрешимость; корректность по Адамару.

1. Введение. В предлагаемой работе сделана попытка описать математическими формализмами пульсовое движение многофазной среды в сетеподобной гидросистеме и последующего анализа полученной математической модели распространения волн. При этом предполагается, что диаметр трубопроводов гидросистемы достаточно мал, и имеется возможность использовать т. н. «лучевой метод» решения одномерных динамических систем, в который вкладывается понятие луча как ортогональной траектории волнового фронта и представления решения за волновым фронтом как функции длины вдоль этого луча за волновой фронт. В данной работе понятие луча упрощается, т. е. волновой фронт есть перемещающееся вдоль трубопровода нормальное сечение, и луч есть осевая линия трубопровода. В некоторой специальной литературе такую ситуацию называют квази-одномерной. Основой такой модели является начально-краевая задача для гиперболического уравнения с распределенными параметрами на графе (математический аналог гидросети). Эта модель допускает построение решений, не обладающих классическим свойством гладкости, – решения (слабые решения) являются суммируемыми функциями и являются элементами пространства соболевского типа с определенными свойствами.

Результаты исследования получены под непосредственным влиянием идей, заложенных в работах [1–5].

1. Основные понятия и определения. Анализ волновых процессов в сетеподобной гидросистеме основан на естественной аналогии ее с пространственным геометрическим графом. При этом представленное математическое описание использует произвольный связный ограниченный ориентированный граф Γ , допускающий наличие циклов, сохраняются обозначения, используемые в [2–4]: через V обозначено множество узлов ξ графа Γ , $\partial\Gamma$ – множество граничных (всего таких узлов $p+1$), $J(\Gamma)$ – множество внутренних узлов ($V = \partial\Gamma \cup J(\Gamma)$); Γ_0 – объединение всех ребер (длина каждого ребра равна 1), не содержащих концевых

точек ($\Gamma_0 = \Gamma \setminus V$), $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «от узла ξ », $r(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ »; $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$, каждое ребро γ графа Γ параметризуется параметром $x \in [0, 1]$.

Обозначим через $C(\Gamma)$ множество непрерывных на Γ функций, $C(\overline{\Gamma_0})$ – множество кусочно непрерывных функций (непрерывность на ребрах, пределы в узле ξ по разным ребрам могут быть различными), $C^n(\overline{\Gamma_0})$ – множество функций, для которых все производные до n -го порядка включительно принадлежат $C(\overline{\Gamma_0})$. Через $L_2(\Gamma)$ обозначим пространство функций, интегрируемых с квадратом на графе Γ ; $W_2^k(\Gamma) \cdot (k=1, 2)$ – пространства функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенные производные до k -го порядка включительно, также принадлежащие $L_2(\Gamma)$. Аналогично вводятся пространства $L_2(\Gamma_T)$ и $W_2^k(\Gamma_T) \cdot (k=1, 2)$. По мере необходимости ниже вводятся и другие пространства.

Сужение функции $f(x)$ на ребро γ_k будем обозначать через $f(x)_{\gamma_k}$. Интеграл от функции $f(x)$ по графу Γ понимается как сумма интегралов от сужений $f(x)_{\gamma_k}$ по каждому ребру:
$$\int_{\Gamma} f(x) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(x)_{\gamma_k} dx \quad (\text{знаки интегралов по ребрам } \gamma_k)$$

зависят от выбора ориентации на каждом γ_k).

На графе Γ рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(\Lambda u)(x) \equiv \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) + b(x)u(x) = f(x). \quad (1)$$

Сделаем следующие необременительные в приложениях допущения, имеющие место на протяжении всего исследования:

1) коэффициент $a(x) \geq a_* > 0$ суть непрерывная на $\overline{\Gamma_0}$ функция, имеющая непрерывную на $\overline{\Gamma_0}$ производную: $a(x) \in C(\overline{\Gamma_0}) \cap C^1(\overline{\Gamma_0})$, $b_* \leq b(x) \leq 0$, – непрерывная на $\overline{\Gamma_0}$ функция: $b(x) \in C(\overline{\Gamma_0})$;

2) уравнению $(\Lambda u)(x) = 0$, $x \in \Gamma$ при заданных граничных условиях в узлах множества $\partial\Gamma$ удовлетворяет лишь функция $u = 0$, $x \in \Gamma$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}_0$ множество функций $u(x)$ класса $C(\Gamma) \cap C^2(\overline{\Gamma_0})$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0) \frac{du(0)_{\gamma_j}}{dx} = \sum_{\gamma_j \in R(\xi)} \frac{du(1)_{\gamma_j}}{dx}, \quad \xi \in J(\Gamma) \quad (2)$$

во всех внутренних узлах графа Γ (здесь $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «от узла ξ », и соотношениям:

$$u(x)|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (3)$$

в граничных узлах графа.

Замечание 1. Соотношения (3) (условия Дирихле) могут быть заменены и смешанными условиями

$$\begin{aligned} \left(a(0) \frac{du(0)}{dx} + h_j u(0) \right)_{\gamma_j} &= 0, \\ \left(a(1) \frac{du(1)}{dx} + H u(1) \right)_{\gamma_{p+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

в граничных узлах графа, здесь $h_j (j = \overline{1, p})$, H – фиксированные положительные постоянные.

На множестве $\mathfrak{Z}_0$ оператор, порожденный дифференциальным выражением $(\Lambda u)(x)$, имеет ограниченный в норме $L_2(\Gamma)$ обратный оператор в силу следующего неравенства:

$$\|u\|_{L_2(\Gamma)} \leq c \|\Lambda u\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (5)$$

c – постоянная, что вытекает из вышеприведенных допущений.

Обозначим через $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ замыкание множества $\mathfrak{Z}_0$ в норме, определяемой скалярным произведе-

$$(u, v) = \int_{\Gamma} (uv + u_x v_x + u_{xx} v_{xx}) dx.$$

Функции $u(x)$ из $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ имеют обобщенные производные до второго порядка включительно, принадлежащие $L_2(\Gamma)$. При этом значения $u(x)$ на $\partial\Gamma$ равны нулю. Ясно, что $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ суть подпространство $L_2(\Gamma)$.

2. Вспомогательные предложения. Дальнейшее исследование предварим следующими вспомогательными утверждениями, полное доказательство которых содержится в работе [5]. На функциях из $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ рассмотрим оператор $\Lambda : \Lambda u \in L_2(\Gamma)$ (для простоты изложения мы оставляем обозначения оператора таким же, что используется в обозначении соответствующего ему дифференциального выражения $(\Lambda u)(x)$). Возьмем последовательность функций $u_n(x)$ из $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ такую, что $f_n = \Lambda u_n(x)$ сходится в норме $L_2(\Gamma)$ к некоторой функции $f \in L_2(\Gamma)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Оператор Λ замкнут в $L_2(\Gamma)$.

Из утверждения теоремы следует, что предельная функция $u(x)$ для последовательности $\{u_n(x)\}_{n \geq 1}$ также принадлежит $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$. При этом если множество значений Λu , $u \in \mathfrak{Z}_0$ плотно в $L_2(\Gamma)$, то краевая задача (1), (3) разрешима для любой правой части $f \in L_2(\Gamma)$ уравнения (1) и ее решение принадлежит $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$. Утверждение теоремы имеет место и для оператора краевой задачи (1), (4). Таким образом, при высказанных предположениях оператор Λ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ и $L_2(\Gamma)$.

Лемма 1. Для любой функции $u(x) \in W_{2,0}^2(\Gamma, J(\Gamma))$ справедливо неравенство:

$$\|u\|_{W_{2,0}^2(\Gamma)} \leq c \|\Lambda u\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (6)$$

C – некоторая фиксированная постоянная.

3. Постановка задачи. Исходим из свойства следов элементов $W_2^1(\Gamma_T)$, а именно, они определены на каждом сечении Γ_T плоскостью $t = t_0 \cdot (t_0 \in [0, T])$ как элементы $L_2(\Gamma)$ и непрерывны по t в норме $L_2(\Gamma)$ [2]. Определим $\Omega_0(a, \Gamma_T)$ как множество функций $u(x, t) \in W_2^1(\Gamma_T)$, которые при фиксированном $t \in [0, T]$ принадлежат классу $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_0(a, \Gamma_T)$ по норме $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим $W_{2,0}^1(a, \Gamma_T)$. Ясно, что элемент $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma_T)$ при фиксированном $t \in [0, T]$ удовлетворяет аналогичным (2) соотношениям вида:

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,2)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x}, \quad (7)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. По мере необходимости будут введены другие пространства и их подпространства с интересующими нас свойствами.

Далее, в области $\overline{\Gamma_T}$ рассмотрим задачу нахождения решения $y(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) + b(x) y(x, t) = f(x, t), \quad (8)$$

удовлетворяющего соотношениям (2) во всех внутренних узлах графа Γ , начальным

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Psi(x), \quad x \in \Gamma \quad (9)$$

и граничному

$$y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (10)$$

условиям. В прикладных задачах гидродинамики соотношения (7) выражают баланс волновых импульсов, соотношения (10) – условия непротекания стенок гидросистемы (изолированность текучих сред от внешней среды).

4. Разрешимость краевой задачи (8)–(10). Для удобства получения результатов представим задачу (8)–(10) в операторной форме, используя известное преобразование, сводящее неоднородности начальных данных в правую часть уравнения (8) (для простоты изложения обозначение правой части f оставим неизменным). Относительно новой функции $u(x, t)$ рассмотрим уравнение:

$$Lu \equiv u_{tt} - \Lambda u = f, \quad x, t \in \Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T) \quad (11)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \Gamma_0 \quad (12)$$

и граничном условии

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (13)$$

или смешанного типа (4).

Обозначим через Ψ оператор, порожденный дифференциальным выражением Lu и рассматриваемый на функциях класса $W_{2,0}^2(a, \Gamma_T)$. Такие функции удовлетворяют уравнению (11) для почти всех $x, t \in \Gamma_T$. Элементы $u(x, t)$ этого класса при всех $t \in [0, T]$ принадлежат пространству $W_2^2(\Gamma, J(\Gamma))$ и непрерывно зависят от t в норме этого пространства (т. е.

$\|u(x, t + \delta) - u(x, t)\|_{W_2^2(\Gamma)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $t, t + \delta \in [0, T]$). Производная $u_t(x, t)$ при всех $t \in [0, T]$ является элементом пространства $L_2(\Gamma_0)$ и непрерывно зависит от t в норме $L_2(\Gamma_0)$. В соответствии с этим начальные условия (12) понимаются в смысле $\|u(x, t)\|_{W_2^2(\Gamma)} \rightarrow 0$, $\|u_t(x, t)\|_{L_2(\Gamma_0)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$, а граничное условие (13) – в том, что $u(x, t) \in W_{2,0}^1(\Gamma, J(\Gamma))$. Через D_Ψ , R_Ψ обозначим область определения и область значения оператора Ψ соответственно.

Для функций $u_t(x, t)$ из D_Ψ справедливо энергетическое неравенство [4] вида:

$$\|u\|_{W_2^1(\Gamma_T)} \leq c \|f\|_{L_2(\Gamma_T)}. \quad (14)$$

Обозначим через $\overline{\Psi}$ замыкание оператора Ψ . Неравенство (14) будет справедливо и для функций из $D_{\overline{\Psi}}$, которое будет замкнутым подпространством $L_2(\Gamma_T)$ и состоит из всех функций u , квадратично суммируемых на Γ_T вместе со своими обобщенными производными u_t , u_{tt} , u_x , u_{xx} и удовлетворяющих условиям (13). Для доказательства однозначной разрешимости операторного уравнения $\overline{\Psi} = f$ для любой $f \in L_2(\Gamma_T)$ достаточно доказать теорему:

Теорема 3. Пространство $L_2(\Gamma_T)$ не содержит элемента, ортогонального $R_{\overline{\Psi}}$, т. е. если

$$\int Lu \cdot v dx dt = 0 \quad \text{для всех } u \in R_{\overline{\Psi}}, \text{ то } v = 0.$$

Доказательство. Доказательство проведем для функций $u(x, t)$ из D_Ψ . По функции $v(x, t)$ построим функцию $\omega(x, t)$, а в качестве $u(x, t)$ возьмем функцию:

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{t_0}^t d\tau \int_{\Gamma_0} \omega(x, \zeta) d\zeta, & t \in [t_0, t], \\ 0, & t \in [0, t_0] \end{cases}$$

Тогда соотношение $\int Lu \cdot v dx dt = 0$ после нескольких интегрирований по частям, учитывая утверждение леммы 2 и свойства функции $\omega(x, t)$, дает:

$$0 = \int_{\Gamma_T} Lu \cdot v dx dt = \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \omega(x, t) \Lambda \omega_t(x, t) dx dt + I(\Lambda \omega),$$

$$\text{Здесь } I(\Lambda \omega) = \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \left(\int_{t_0}^t \Lambda \omega(x, \zeta) d\zeta \right) \Lambda \omega(x, t) dx dt.$$

Рассмотрим первый интеграл $\int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \omega(x, t) \Lambda \omega_t(x, t) dx dt$,
равный сумме интегралов
 $\int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \omega(x, t) (a \omega_{tx}(x, t))_x(x, t) dx dt$ и $\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} b(\omega^2(x, t))_t dx dt$.

Учитывая соотношение $\omega|_{\partial \Gamma} = 0 (t \in [0, T])$, а также условия согласования (7) в узлах $\xi \in J(\Gamma)$, проведем следующие преобразования:

$$\int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \omega(x, t) (a \omega_{tx}(x, t))_x dx dt = \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} \omega(x, t) \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} (a \omega_{tx})_x(x, t) dx dt = - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \int_{\Gamma} a(x) (\omega_x^2(x, t))_t dx dt.$$

Отсюда окончательно получаем:

$$0 = \int_{\Gamma_T} Lu \cdot v dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [a(x) \omega_x^2(x, t_0) - b(x) \omega^2(x, t_0)] dx + \int_{\Gamma} I(\Lambda \omega) dx. \quad (15)$$

В интеграле $I(\Lambda \omega)$ сделаем замену $\vartheta(x, t) = \int_{t_0}^t \omega^2(x, \zeta) d\zeta$ и соотношение (15) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} [a(x) \omega_x^2(x, t_0) - b(x) \omega^2(x, t_0)] dx + \frac{1}{2\Gamma} (\Lambda \vartheta)^2(x, T) = 0.$$

Отсюда заключаем ($-b(x) > 0$ на Γ), что $\omega(x, t_0)$ для любого $t_0 \in [0, T]$, т. е. $v(x, t) = \Lambda \omega_t(x, t) = 0$. Теорема доказана.

Приведенное доказательство без каких-либо существенных изменений переносится на уравнение (11) с начальными (12) и граничными условиями (4). Из утверждения теоремы вытекает, что оператор $\bar{\Psi}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функциями из $D_{\bar{\Psi}}$ и функциями из $L_2(\Gamma_T)$, уравнение (11) однозначно разрешимо для любой функции $f \in L_2(\Gamma_T)$.

5. Заключение. Все рассмотрения без особенных изменений переносятся на случай краевых условий 2 и 3 рода. Пространство $W_{2,0}^2(a, \Gamma_T)$ заменяется на $W_2^2(a, \Gamma_T)$, определение обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения (11) претерпевает несущественные изменения.

Предлагаемый в данной статье подход имеет большое значение для построения компьютерных систем мониторинга и эффективного управления [6–14] сложных объектов различной природы, которые описываются уравнениями в частных производных как при анализе энергетических и экономических процессов [6–10], так и при анализе устойчивости механических систем по внешним воздействиям [11–14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph // International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP). 2015. С. 117-119.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 58. № 4. С. 70-74.
3. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Стартовое управление параболической системой с распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2015. № 3. С. 126-142.
4. Volkova A.S., Gnilitkaya Yu.A., Provotorov V.V. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs // Automation and Remote Control. 2014. Т. 75. № 2. С. 405-412.
5. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph // International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP). 2015. С. 126-128.
6. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. № 1. С. 117-134.
7. Веремей Е.И. Спектральное представление оптимальных решений задач среднеквадратичного синтеза // Системы управления и информационные технологии. 2012. № 3.1 (49). С. 124-128.
8. Потопов Д.К. Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштита отрывных течений несжимаемой жидкости // Сибирский журнал вычислительной математики. 2011. Т. 14. № 3. С. 291-296.
9. Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation // Electron. J. Differ. Equ. 2013. № 255. Р. 1-6.
10. Борисоглебская Л.Н., Сергеев С.М., Миронова И.А. Система оценки конкурентоспособности предприятия с учетом базовых экономических индексов, инфляционного фона, сезонных трендов (на примере легкой промышленности) // Вестник Университета (Государственный университет управления). 2013. № 13. С. 14-22.
11. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 5. С. 3-12.
12. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об устойчивости решений одного класса нелинейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 3-14.
13. Сотникова М.В. МРС-управление движением перевернутого маятника на вращающейся платформе // Системы управления и информационные технологии. 2014. Т. 55. № 1. С. 38-42.
14. Жабко А.П., Зараник У.П. О приближении решений экспоненциально устойчивых систем дифференциально-разностных уравнений // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2011. Вып. 3. С. 29-38.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

UDC 517.958
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-487-491

MATHEMATICAL MODEL OF WAVE PROCESS DYNAMICS OF MULTIPHASE MEDIUM SPHERES IN HYDROGRAPHIC NETWORK

© I.V. Prikhodko, A.V. Ivanov

We consider the differential system with distributed parameters on the graph, the state of which is determined by a weak solution of initial boundary value problems for partial differential equations of hyperbolic type. Presents the conditions for the unique solvability of this problem and the conditions of continuity of the solution on the initial data. This means correct problems Hadamard and largely determines the unique solvability of optimization problems by a different type for this kind of systems.

Key words: differential system; distributed parameters on the graph; the unique solvability of the weak; the correctness of Hadamard.

REFERENCES

1. Podvalny S.L., Provotorov V.V. The questions of controllability of a parabolic systems with distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 117-119.
2. Podval'nyy S.L., Provotorov V.V. Optimizatsiya po startovym usloviyam parabolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 70-74.
3. Podval'nyy S.L., Provotorov V.V. Startovoe upravlenie parabolicheskoy sistemoy s raspredelennymi parametrami na grafe. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya*, 2015, no. 3, pp. 126-142.
4. Volkova A.S., Gnilit'skaya Yu.A., Provotorov V.V. On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 405-412.
5. Provotorov V.V. Boundary control of a parabolic system with delay and distributed parameters on the graph. *International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP)*, 2015, pp. 126-128.
6. Veremey E.I., Sotnikova M.V. Stabilizatsiya plazmy na baze prognoza s ustoychivym lineynym priblizheniem. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 117-134.
7. Veremey E.I. Spektral'noe predstavlenie optimal'nykh resheniy zadach srednekvadratichnogo sinteza. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2012, no. 3.1 (49), pp. 124-128.
8. Potapov D.K. Nepreryvnaya approksimatsiya odnomernogo analoga modeli Gol'dshtika otryvnykh techeniy neszhimaemoy zhidkosti. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki*, 2011, vol. 14, no. 3, pp. 291-296.
9. Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Lavrent'ev problem for separated flows with an external perturbation. *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, no. 255, pp. 1-6.
10. Borisoglebskaya L.N., Sergeev S.M., Mironova I.A. Sistema otsenki konkurentosposobnosti predpriyatiya s uchetom bazovykh ekonomicheskikh indeksov, inflyatsionnogo fona, sezonnykh trendov (na primere legkoy promyshlennosti). *Vestnik Universiteta (Gosudarstvennyy universitet upravleniya)*, 2013, no. 13, pp. 14-22.
11. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob asimptoticheskoy ustoychivosti resheniy odnogo klassa sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvaniem. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika*, 2012, no. 5, pp. 3-12.
12. Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Ob ustoychivosti resheniy odnogo klassa nelineynykh sistem s zapazdyvaniem. *Avtomatika i telemekhanika*, 2006, no. 9, pp. 3-14.
13. Sotnikova M.V. MPC-upravlenie dvizheniem perevernutogo mayatnika na vrashchayushcheysya platforme. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 38-42.
14. Zhabko A.P., Zaranik U.P. O priblizhenii resheniy eksponentsial'no ustoychivyykh sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 10: Prikladnaya matematika. Informatika. Protssesy upravleniya*, 2011, no. 3, pp. 29-38.

Received 18 March 2016

Приходько Инна Владимировна, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник НИЦ, e-mail: prihodko84@mail.ru
Prikhodko Inna Vladimirovna, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Junior Research Worker of Scientific Research Center, e-mail: prihodko84@mail.ru

Иванов Алексей Владимирович, Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, начальник 3 научно-исследовательского отдела НИЦ, e-mail: bal-olesya@mail.ru

Ivanov Aleksey Vladimirovich, Air Force Academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Head of 3rd Scientific Research Department of Scientific Research Center, e-mail: bal-olesya@mail.ru

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ЛЕГИРУЮЩЕЙ ПРИМЕСИ НА ВОЛЬТ-АМПЕРНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ СВЕРХРЕШЕТКИ

© А.О. Сельский, Д.В. Лопатин

В настоящей работе исследуется влияние пространственной локализации возмущения концентрации легирующей примеси на коллективную динамику транспорта заряда в полупроводниковой сверхрешетке. Показано, что характеристики тока, протекающего через сверхрешетку, сильно зависят от точки локализации возмущения. Вследствие изменения порогового значения напряжения, при котором возникает генерация колебаний тока, частота и амплитуда колебаний при фиксированном значении напряжения, приложенного к сверхрешетке, также сильно зависят от пространственной локализации возмущения.

Ключевые слова: примесь; ВАХ; полупроводниковая сверхрешетка.

Объектом исследования в настоящей работе является гетероструктура, состоящая из чередующихся слоев (ширина слоя, как правило, не превышает нескольких десятков нанометров) различных полупроводниковых материалов с близкими периодами кристаллической решетки – полупроводниковая сверхрешетка [1–2]. Сверхрешетки служат удобной моделью для изучения различных квантово-механических эффектов [3–4]. Не меньший интерес вызывает коллективная динамика электронов при приложении к сверхрешетке постоянного напряжения, поскольку в этом случае в структуре могут образовываться пространственно-временные электронные структуры, называемые доменами (по аналогии с доменами в диоде Ганна [5–6]). Прохождение доменов через полупроводниковую сверхрешетку приводит к возникновению колебаний тока, протекающего через структуру, частота которых составляет, как правило, несколько десятков гигагерц. Следует отметить, что в настоящее время все больше внимания исследователей уделяется рассмотрению транспорта электронов через полупроводниковую сверхрешетку с позиций нелинейной динамики, что позволяет выявлять и объяснять различные эффекты, наблюдающиеся в исследуемой системе [7–18].

Важным фактом является то, что при создании полупроводниковых гетероструктур возможно возникновение большого числа различных пространственных неоднородностей (к примеру, случайные флуктуации концентрации легирующей примеси [19–20]), которые оказывают влияние на характеристики сверхрешетки. Помимо случайных флуктуаций возможно целенаправленное изменение концентрации легирующей примеси для улучшения характеристик прибора. В настоящей работе исследован вопрос, как пространственное положение неоднородности в виде возмущения концентрации легирующей примеси влияет на коллективную динамику электронов в полупроводниковой сверхрешетке.

Типовой моделью при описании процессов транспорта заряда в полупроводниковой сверхрешетке является система уравнений, включающая в себя уравнение

непрерывности, уравнение Пуассона и выражение для плотности тока с учетом дрейфовой скорости электронов [2; 9]:

$$\begin{aligned} e \frac{\partial n}{\partial t} &= \frac{\partial J}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{e}{\epsilon_0 \epsilon_r} (n - n_{D0}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$J = env_d(\bar{F}),$$

где t обозначает время, а координата x соответствует направлению движения электронов в полупроводниковой сверхрешетке. Величины $n(x, t)$, $F(x, t)$ и $J(x, t)$ определяют концентрацию, напряженность электрического поля и плотность тока, соответственно. Параметры $\epsilon_0, \epsilon_r = 12,5$ соответствуют абсолютной и относительной диэлектрическим проницаемостям; $n_{D0} = 3 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ – равновесная концентрация электронов; v_d – дрейфовая скорость электрона, вычисленная для среднего значения напряженности электрического поля $\bar{F}$, и $e > 0$ – заряд электрона. Зависимость дрейфовой скорости, входящей в уравнение (1), от напряженности электрического поля определяется по формуле Эсаки–Тсу [4].

В качестве рассматриваемого возмущения используется локальное увеличение концентрации легирующей примеси. Для введения возмущения модифицируем Пуассона из (1) следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0 \epsilon_r} (n - (n_{D0} + n_{D1}(x))) \quad (2)$$

где $n_{D1}(x)$ – кусочно-линейная функция следующего вида:

$$n_{D1}(x) = \begin{cases} 0, & x < x' - \Delta x \\ 0,5, & x' - \Delta x < x < x' + \Delta x \\ 0, & x > x' + \Delta x \end{cases} \quad (3)$$

здесь x' – положение центра возмущения; $\Delta x = 12,45$ нм – определяет размер рассматриваемого возмущения. Вид профиля концентрации легирующей примеси $n_D(x) = n_{D0} + n_{D1}(x)$ при различных значениях x' продемонстрирован на рис. 1. На рис. 1 для удобства значения концентрации нормированы на значение n_{D0} , а значения координаты центра возмущения нормированы на длину структуры $L = 116,2$ нм.

Рассмотрим результаты моделирования влияния неоднородности легирования. Важной характеристикой коллективной динамики электронов является вольт-амперная характеристика. Для построения вольт-амперной характеристики на участке, где есть колебания тока, значение тока на вольт-амперной характеристике усреднялось по времени (метод построения вольт-амперных характеристик и их вид для невозмущенного состояния концентрации легирующей примеси ($n_{D1}(x) = 0$ вдоль всей сверхрешетки) описан в [11]), см. рис. 1с, 1д.

В качестве характеристики изменения вольт-амперной характеристики при смещении центра возмущения концентрации легирующей примеси введем величину Θ , рассчитываемую следующим образом:

$$\Theta = \frac{\int |I(V) - I_0(V)| dV}{\int I_0(V) dV}, \quad (4)$$

где $I(V)$ – значение тока при данном напряжении для возмущенного состояния; $I_0(V)$ – значение тока при данном напряжении для невозмущенного состояния. Зависимость данной величины от координаты центра возмущения приведена на рис. 2а. Можно видеть, что значение Θ существенно заметно отличается от нуля, когда возмущение находится в начале гетероструктуры (соответствует разнице между кривыми 1 и 2 на рис. 1с), и быстро уменьшается при приближении возмущения к концу сверхрешетки (см. кривые 1 и 2 на рис. 1д). Это говорит о том, что динамика рассматриваемой системы зависит не только от наличия и размера возмущения концентрации легирующей примеси, но и от его локализации в пространстве.

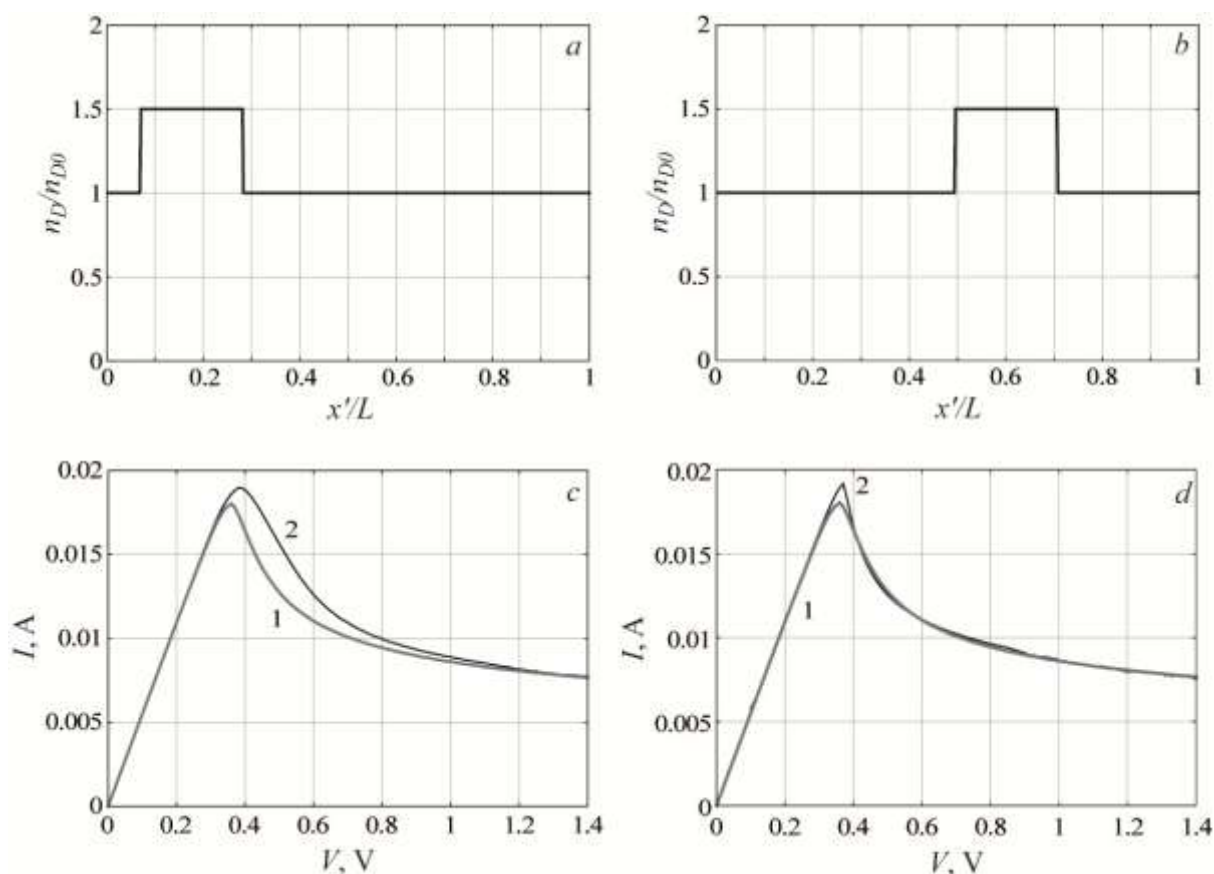


Рис. 1. Профили концентрации легирующей примеси при различных значениях координаты центра возмущения: а – $x' = 20,75$ нм; б – $x' = 70,55$ нм. Кривые 1 (с, д) – вольт-амперные характеристики для случая без возмущения. Кривые 2 – вольт-амперные характеристики в случае локального возмущения концентрации легирующей примеси при различных значениях координаты центра возмущения: с – $x' = 20,75$ нм; д – $x' = 70,55$ нм

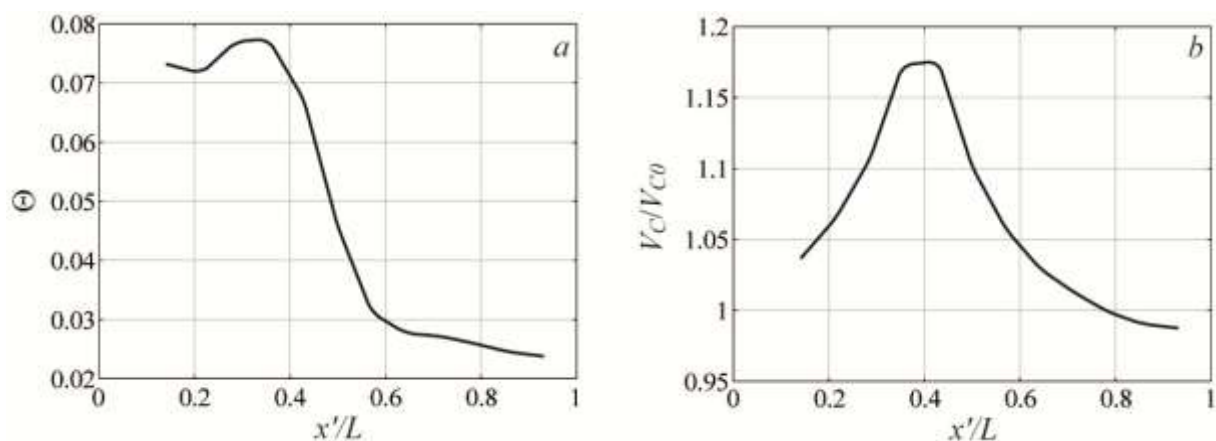


Рис. 2. *a* – зависимость интеграла модуля разности токов для возмущенного и невозмущенного состояний по напряжению, Θ , от различных значений координаты центра возмущения; *b* – зависимость порогового значения напряжения, V_c , при котором начинается генерация колебаний тока, от значения координаты центра возмущения

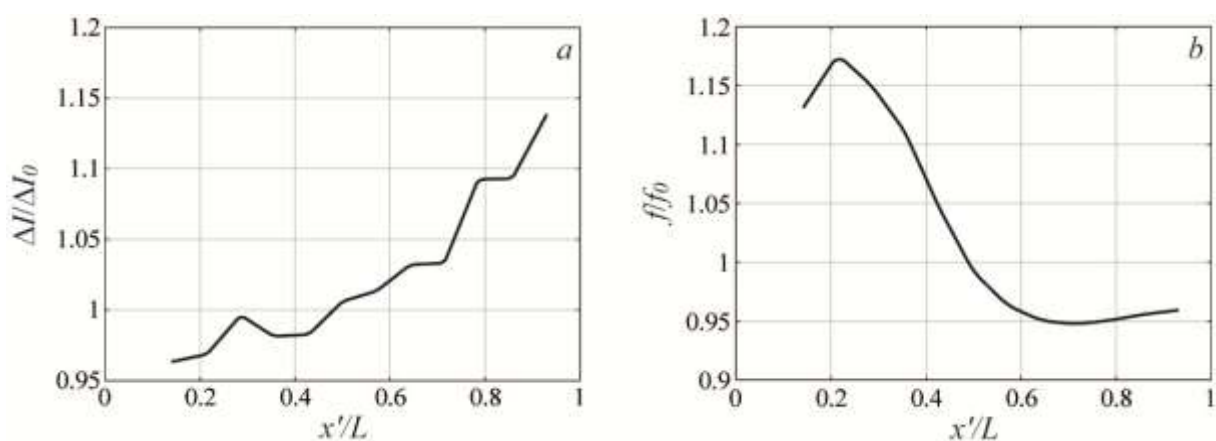


Рис. 3. Зависимости амплитуды (*a*) и частоты (*b*) колебаний тока, протекающего через полупроводниковую сверхрешетку, при напряжении $V = 0,6$ В от различных значений координаты центра возмущения

Еще одной важной характеристикой коллективной динамики электронов является пороговое значение напряжения, V_c , при котором возникает генерация колебаний тока. Зависимость данной величины от координаты центра возмущения показана на рис. 2*b*. На рисунке хорошо заметно, что есть максимум порогового напряжения для значения $x'/L = 0,4$ ($x' = 46,5$ нм). При других пространственных локализациях возмущения пороговое значение напряжения, при котором начинается генерация колебаний тока, меньше.

Из работы [9] известно, что после начала генерации, с ростом напряжения, амплитуда колебаний монотонно возрастает, а частота – монотонно убывает. Таким образом, изменение порогового напряжения должно приводить к тому, что при одних и тех же значениях напряжения, в зависимости от локализации возмущения, частота и амплитуда колебаний будут различаться. В области увеличенного порогового значения напряжения, приложенного к полупроводниковой сверхрешетке (т. е. в случае, когда возмущение находится в первой части сверхрешетки), частота колебаний должна быть выше, а амплитуда – ниже, для одних и тех же значений приложенного напряжения (см. рис. 3, построенный при напряжении $V = 0,6$ В). Более того, если

пространственное возмущение локализовано во второй половине сверхрешетки, частота колебаний может быть ниже, чем частота для случая без возмущения при том же значении приложенного напряжения.

Таким образом, в настоящей работе было показано, что характеристики колебаний тока, протекающего через сверхрешетку, существенно зависят от пространственной локализации возмущения концентрации легирующей примеси. Если возмущение находится ближе к началу системы, в первой половине сверхрешетки, то вольт-амперная характеристика существенно изменяется, увеличивается пороговое значение напряжения, при котором начинается генерация колебаний, и, как следствие, увеличивается частота колебаний при фиксированном напряжении, по сравнению с невозмущенной динамикой электронов в сверхрешетке. Если же сместить возмущение ближе к концу исследуемой системы, то пороговое значение напряжения и вольт-амперная характеристика оказываются близки к случаю без возмущения, однако, амплитуда при фиксированном напряжении будет выше, а частота – ниже, по сравнению с невозмущенной динамикой электронов в сверхрешетке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шик А.Я. Полупроводниковые структуры с дельта-слоями // ФТП. 1974. Т. 8. С. 1841-1864.
2. Wacker A. Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport // *Phys. Rep.* 2002. V. 357. P. 1-111.
3. Келдыш Л.В. О влиянии ультразвука на электронный спектр кристалла // *Физика твердого тела*. 1962. Т. 4. С. 2265-2267.
4. Esaki L., Tsu R. Superlattice and negative differential conductivity // *IBM J. Res. Develop.* 1970. V. 14. P. 61-65.
5. Scheuerer R., Schomburg E., Renk K.F., Wacker A., Schöll E. Feasibility of a semiconductor superlattice oscillator based on quenched domains for the generation of sub-millimeter waves // *Appl. Phys. Lett.* 2002. V. 81. P. 1515-1517.
6. Eisele H., Khanna S.P., Linfield E.H. Superlattice electronic devices as high-performance oscillators between 60–220 GHz // *Appl. Phys. Lett.* 2010. V. 96. P. 072-101.
7. Bonilla L.L., Grahn H.T. Nonlinear dynamics of semiconductor superlattices // *Rep. Prog. Phys.* 2005. V. 68. P. 577-683.
8. Fromhold T.M., Patané A., Bujkiewicz S. et al. Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices // *Nature*. 2004. V. 428. P. 726-730.
9. Selskii A.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E. et al. Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices // *Phys. Rev.* 2011. V. 84. P. 235-311.
10. Bonilla L.L., Teitworth S.W. Nonlinear Wave Methods for Charge Transport // WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2010. V. 9. P. 255-272.
11. Hramov A.E., Makarov V.V., Koronovskii A.A. et al. Subterahertz Chaos Generation by Coupling a Superlattice to a Linear Resonator // *Physical review letters*. 2014. V. 112. P. 116603.
12. Selskii A.O., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Balanov A.G. Bifurcation phenomena in a semiconductor superlattice subject to a tilted magnetic field // *Phys. Lett. A*. 2016. V. 380. № 1–2. P. 98-105.
13. Макаров В.В., Максименко В.А., Короновский А.А., Скворцова Ю.М., Храмов А.Е. Высокочастотный импеданс полупроводниковой сверхрешетки во внешней резонансной системе // *Письма в ЖТФ*. 2015. Т. 41. № 24. С. 44-50.
14. Баланов А.Г., Журавлев М.О., Короновский А.А., Сельский А.О., Ханенко М.В., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. К вопросу о моделировании распределения электронов по импульсам в полупроводниковой сверхрешетке // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 2. С. 519-523.
15. Макаров В.В., Храмов А.Е., Короновский А.А., Москаленко О.И., Максименко В.А., Алексеев К.Н., Баланов А.Г. Переход к хаосу и хаотическая генерация в полупроводниковой сверхрешетке во внешней резонансной системе // *Изв. РАН. Сер. Физическая*. 2014. Т. 78. № 12. С. 1564-1567.
16. Maksimenko V.A., Makarov V.V., Koronovskii A.A., Alekseev K.N., Balanov A.G., Hramov A.E. The effect of collector doping on the high-frequency generation in strongly coupled semiconductor superlattice // *Europhysics Letters*. 2015. V. 109. P. 47007.
17. Makarov V.V., Maksimenko V.A., Khramova M.V., Pavlov A.N., Hramov A.E. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIII // *Proc. SPIE*. 2016. V. 9707. P. 9707-9713.
18. Алексеев К.Н., Баланов А.Г., Короновский А.А., Максименко В.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Эволюция возмущения опорного состояния полупроводниковой сверхрешетки вблизи порога генерации // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20. № 2. С. 165-178.
19. Wacker A., Schwarz G., Prengel F. et al. Probing growth-related disorder by high-field transport in semiconductor superlattices // *Phys. Rev. B*. 1995. V. 52. P. 13788.
20. Patra M., Schwarz G., Schöll E. Bifurcation analysis of stationary and oscillating field domains in semiconductor superlattices with doping fluctuations // *Phys. Rev.* 1998. V. 57. P. 18-24.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-32-60059).

Поступила в редакцию 1 апреля 2016 г.

UDC 530.182:621.385.6
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-492-496

INFLUENCE OF THE CHANGE OF THE SPATIAL POSITION OF THE PERTURBATION OF THE DOPING CONCENTRATION ON THE CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTIC IN THE SEMICONDUCTOR SUPERLATTICE

© A.O. Selskiy, D.V. Lopatin

In the present paper the influence of the change of the spatial position of the perturbation of the doping concentration on the electron collective dynamics in the semiconductor superlattice is considered. It is shown that the amplitude and frequency of the current oscillations in superlattice distinct dependence sufficiently on the spatial position of the perturbation.

Key words: doping concentration; current-voltage characteristic; semiconductor superlattice.

REFERENCES

1. Shik A.Ya. Poluprovodnikovye struktury s del'ta-sloyami. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov*, 1974, vol. 8, pp. 1841-1864.
2. Wacker A. Semiconductor superlattices: a model system for nonlinear transport. *Phys. Rep.*, 2002, vol. 357, pp. 1-111.
3. Keldysh L.V. O vliyaniy ul'trazvuka na elektronnyy spektr kristalla. *Fizika tverdogo tela*, 1962, vol. 4, pp. 2265-2267.
4. Esaki L., Tsu R. Superlattice and negative differential conductivity. *IBM J. Res. Develop.*, 1970, vol. 14, pp. 61-65.
5. Scheuerer R., Schomburg E., Renk K.F., Wacker A., Schöll E. Feasibility of a semiconductor superlattice oscillator based on quenched domains for the generation of sub-millimeter waves. *Appl. Phys. Lett.*, 2002, vol. 81, pp. 1515-1517.
6. Eisele H., Khanna S.P., Linfield E.H. Superlattice electronic devices as high-performance oscillators between 60–220 GHz. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, vol. 96, pp. 072-101.
7. Bonilla L.L., Grahn H.T. Nonlinear dynamics of semiconductor superlattices. *Rep. Prog. Phys.*, 2005, vol. 68, pp. 577-683.

8. Fromhold T.M., Patanè A., Bujkiewicz S. et al. Chaotic electron diffusion through stochastic webs enhances current flow in superlattices. *Nature*, 2004, vol. 428, pp. 726-730.
9. Selskii A.O., Koronovskii A.A., Hramov A.E. et al. Effect of temperature on resonant electron transport through stochastic conduction channels in superlattices. *Phys. Rev.*, 2011, vol. 84, pp. 235-311.
10. Bonilla L.L., Teitsworth S.W. Nonlinear Wave Methods for Charge Transport. *WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA*, Weinheim, 2010, vol. 9, pp. 255-272.
11. Hramov A.E., Makarov V.V., Koronovskii A.A. et al. Subterahertz Chaos Generation by Coupling a Superlattice to a Linear Resonator. *Physical review letters*, 2014, vol. 112, p. 116603.
12. Selskii A.O., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Balanov A.G. Bifurcation phenomena in a semiconductor superlattice subject to a tilted magnetic field. *Phys. Lett., A*, 2016, vol. 380, no. 1-2, pp. 98-105.
13. Makarov V.V., Maksimenko V.A., Koronovskiy A.A., Skvortsova Yu.M., Khramov A.E. Vysokochastotnyy impedans poluprovodnikovoy sverkhreshetki vo vneshney rezonansnoy sisteme. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki (Pis'ma v ZhTF) – Applied Physics Letters*, 2015, vol. 41, no. 24, pp. 44-50.
14. Balanov A.G., Zhuravlev M.O., Koronovskiy A.A., Sel'skiy A.O., Khanenko M.V., Khramov A.E., Shurygina S.A. K voprosu o modelirovani raspredeleeniya elektronov po impul'sam v poluprovodnikovoy sverkhreshetke. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2010, vol. 15, no. 2, pp. 519-523.
15. Makarov V.V., Khramov A.E., Koronovskiy A.A., Moskalenko O.I., Maksimenko V.A., Alekseev K.N., Balanov A.G. Perekhod k khaosu i khaoticheskaya generatsiya v poluprovodnikovoy sverkhreshetke vo vneshney rezonansnoy sisteme. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya Fizicheskaya*, 2014, vol. 78, no. 12, pp. 1564-1567.
16. Maksimenko V.A., Makarov V.V., Koronovskii A.A., Alekseev K.N., Balanov A.G., Hramov A.E. The effect of collector doping on the high-frequency generation in strongly coupled semiconductor superlattice. *Europhysics Letters*, 2015, vol. 109, p. 47007.
17. Makarov V.V., Maksimenko V.A., Khramova M.V., Pavlov A.N., Hramov A.E. Dynamics and Fluctuations in Biomedical Photonics XIII. *Proc. SPIE*, 2016, vol. 9707, pp. 9707-9713.
18. Alekseev K.N., Balanov A.G., Koronovskiy A.A., Maksimenko V.A., Moskalenko O.I., Khramov A.E. Evolyutsiya vozmushcheniya opornogo sostoyaniya poluprovodnikovoy sverkhreshetki vblizi poroga generatsii. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, 2012, vol. 20, no. 2, pp. 165-178.
19. Wacker A., Schwarz G., Prengel F. et al. Probing growth-related disorder by high-field transport in semiconductor superlattices. *Phys. Rev. B*, 1995, vol. 52, p. 13788.
20. Patra M., Schwarz G., Schöll E. Bifurcation analysis of stationary and oscillating field domains in semiconductor superlattices with doping fluctuations. *Phys. Rev.*, 1998, vol. 57, pp. 18-24.

GRATITUDE: The work is fulfilled under support of Russian Fund of Fundamental Research (project no. 16-32-60059).

Received 1 April 2016

Сельский Антон Олегович, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского; Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: feanorberserk@gmail.com
Selskiy Anton Olegovich, National Research Saratov State University; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Research Worker, e-mail: feanorberserk@gmail.com

Лопатин Дмитрий Валерьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий, e-mail: +79107540080@ya.ru

Lopatin Dmitriy Valerevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Mathematical Modeling and Information Technology Department, e-mail: +79107540080@ya.ru

УДК 530.182,621.373.826
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-497-502

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ, ИНДУЦИРОВАННОЙ ШУМОМ, В ЛЕГИРОВАННОМ ЭРБИЕМ ОПТОВОЛОКОННОМ ЛАЗЕРЕ

© М.О. Журавлев, Д.В. Лопатин, О.И. Москаленко,
М.В. Храмова, А.Н. Писарчик, Р. Джаймс-Райте

В настоящей работе приводятся результаты численного исследования индуцированной шумом перемежаемости в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулируемым параметром. В рамках работы предложен модифицированный метод для выделения статистических характеристик перемежающегося поведения, и с помощью данной методики получены зависимости средней длительности существования различных колебательных режимов от параметра надкритичности в легированном эрбием оптоволоконном лазере.

Ключевые слова: вейвлет-анализ; колебательный режим; легированной эрбием оптоволоконный лазер.

Мультистабильность является одним из фундаментальных физических явлений, наблюдаемых в различных областях науки и техники, в т. ч. в электронике [1], оптике [2], механике [3] и биологии [4]. Впервые термин «мультистабильность» был введен в работе, посвященной зрительному восприятию [5]. Для диссипативных систем мультистабильность означает одновременное существование нескольких возможных конечных устойчивых состояний (аттракторов) при фиксированном наборе значений параметров системы. Устойчивое состояние, к которому стремится система, зависит от начальных условий, т. е. долгосрочная динамика системы, соответствующая одному из устойчивых состояний, определяется ее начальными условиями.

При этом в настоящее время, несмотря на большое количество работ, направленных на изучение мультистабильности [6–8], ряд вопросов, связанных с изучением этого явления, до сих пор остается не решенным. Одним из них является изучение поведения мультистабильных систем, находящихся под внешним шумовым воздействием. В работах [9–10] было показано, что воздействие флуктуаций может приводить к тому, что изначально мультистабильная система превращается в метастабильную, и в динамике системы наблюдается перемежающееся поведение, при котором происходят индуцированные шумом переключения между различными аттракторами. Однако в настоящее время не существует общей теоретической модели, которая бы описывала поведение мультистабильных систем, демонстрирующих перемежающееся поведение в присутствии шума. В связи с этим возникает необходимость детального изучения индуцированной шумом перемежаемости в динамических системах, что говорит о необходимости определения статистических характеристик такого типа поведения в мультистабильных системах, что является важным шагом исследования любого типа перемежающегося поведения [11–14]. В роли таких характеристик, как обычно, выступают зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметра надкритичности и распределение длительно-

стей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров, что позволяет однозначно определить, какой тип перемежающегося поведения реализуется в исследуемой системе.

Таким образом, целью настоящей работы являлось получение статистических характеристик перемежающегося поведения, индуцированного шумом, в мультистабильных системах, что в дальнейшем позволит построить общую теорию, описывающую данный тип перемежаемости.

В качестве объекта исследований в рамках данной работы был выбран легированный эрбием оптоволоконный лазер с модулируемым параметром [15]. В ряде недавних работ [16–17] показано, что данная динамическая система является мультистабильной, причем при внешнем шумовом воздействии на нее она демонстрирует индуцированное шумом перемежающееся поведение, которое проявляется в том, что происходит попеременная смена одного колебательного режима другим. Данная динамическая система описывается следующими уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2L}{T_r} x \{ r_w \alpha_0 [N(\xi_1 - \xi_2) - 1] - \alpha_{th} \} + P_{sp},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\sigma_{12} r_w x}{\pi r_0^2} (y \xi_1 - 1) - \frac{x}{\tau} + P_{pump},$$

где x – это интенсивность излучения лазера; y – это среднее значение верхнего уровня лазерной генерации; L – длина активного волокна в лазере; ξ_1 и ξ_2 представляют собой параметры, определяемые соотношением между основными состояниями: поглощением σ_{12} , вынужденным переходом σ_{21} и возбужденным состоянием поглощения σ_{23} ; T_r – время внутрирезонаторного кругового обхода фотона; α_0 – коэффициент поглощения слабого сигнала эрбиевого волокна на длине волны лазера; α_{th} – коэффициент внутрирезонаторных потерь на границе; τ – время жизни ионов эрбия в возбужденном состоянии; r_0 – радиус сердцевины волокна; w_0 –

радиус основной моды волокна; r_w – коэффициент, указывающий на совпадение между основной модой лазера и активного волокна, легированного эрбием. Слагаемое P_{sp} отвечает за спонтанное излучение основной моды лазера, а P_{pump} – за мощность накачки в лазере и выражается как

$$P_{pump} = P_p \frac{1 - \exp[-\alpha_0 \beta L(1 - y)]}{N_0 \pi r_0^2 L}, \quad (2)$$

где P_p – это мощность накачки на входе волокна, а β – безразмерный коэффициент. Параметры для моделирования были выбраны следующими: $L = 0,88$ м,

$$T_r = 8,7 \text{ нс}, r_w = 0,308, \alpha_0 = 40 \text{ м}^{-1}, \xi_1 = 2, \xi_2 = 0,4,$$

$$\alpha_{th} = 3,92 \cdot 10^{-2}, \sigma_{12} = 2,3 \cdot 10^{-17} \text{ м}^2, r_0 = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$\tau = 10^{-2} \text{ с}, \lambda_g = 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ м}, w_0 = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \text{ и } \beta = 0,5,$$

что связано с тем, что при таком выборе параметров данные численного моделирования хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Мощность накачки на входе волокна модулируется гармоническим сигналом

$$P_p = p[1 - m_d \sin(2\pi f_d t)], \quad (3)$$

где p – это мощность накачки; m_d – амплитуда колебаний; f_d – собственная частота колебаний лазера ($f_d = 80$ кГц в рамках настоящей работы), при этом в данной системе возможно сосуществование до четырех периодических орбит A_i ($i = 1, 3, 4, 5$) с частотой субгармоник $f_i = f_d / i$: период колебаний один ($f_1 = f_d = 80$ кГц), период колебаний три ($f_3 \approx 27$ кГц), период колебаний четыре ($f_4 = 20$ кГц) и период колебаний пять ($f_5 = 16$ кГц). Если же в мощности накачки будет присутствовать слагаемое с шумом, то получим следующее соотношение

$$P_p = p[1 - m_d \sin(2\pi f_d t) + \eta G(\zeta, f_n)], \quad (4)$$

где η – амплитуда шума, а $G(\zeta, f_n)$ – функция с ненулевым средним, характеризующая шум, причем ζ меняется в пределах $[-1, 1]$. В результате влияния шума фазовая траектория будет периодически посещать различные бассейны притяжения устойчивых аттракторов, т. е. будет происходить смена одного колебательного режима другим. Таким образом, исследуемая система перейдет из мультистабильного состояния в метастабильное, и в этом случае можно будет детектировать перемежающееся поведение, индуцированное шумом. При этом влиять на количество сосуществующих устойчивых состояний и наиболее вероятное из них будут параметры стохастической модуляции f_n и η . В рамках настоящей работы они были выбраны следующими: $f_n = 30$ Гц и $m_d = 0,95$.

Чтобы определить статистические характеристики перемежающегося поведения, индуцированного шумом, в легированном эрбием оптоволоконном лазере с модулируемым параметром, была использована методика, предложенная в работе [18]. Данный метод осно-

ван на использовании непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным базисом [19–21], при этом для того чтобы определить, какой из колебательных режимов реализуется в настоящий момент в исследуемой системе, необходимо сопоставить значения мгновенных распределений энергии вейвлетного преобразования на характерных временных масштабах, соответствующих каждому из колебательных режимов, которые могут существовать в данной системе, при этом необходимо учитывать нормировку вейвлетного спектра [22]. Подробно данная методика определения длительности характерных колебательных режимов описана в работе [18].

Тем не менее, данная методика не всегда позволяет корректно определить, какой колебательный режим реализуется в исследуемой системе, что хорошо иллюстрирует рис. 1а, где представлена интенсивность излучения лазера, и рис. 1б, где приведены соответствующие ей нормированные зависимости мгновенного распределения энергии вейвлетного преобразования от времени для периодов колебаний: период колебаний один ($f_1 = f_d = 80$ кГц), период колебаний три ($f_3 \approx 27$ кГц), период колебаний четыре ($f_4 = 20$ кГц) и период колебаний пять ($f_5 = 16$ кГц). Очевидно, что в данном случае в исследуемой системе не реализуется период колебаний один, при этом согласно данной методике он присутствует, кроме этого длительность существования «ошибочного» колебательного режима меньше одного периода. Стоит отметить, что данный артефакт метода является достаточно серьезным, т. к. полученные таким образом статистические характеристики будут значительно отличаться от реальных. В связи с этим при использовании данной методики выделения статистических характеристик было наложено дополнительное условие, что длительность любого колебательного режима не может быть меньше одного периода колебаний. Такая модернизация исходного метода позволила избавиться от артефактов.

Далее было проведено численное моделирование легированного эрбием оптоволоконного лазера и были получены статистические характеристики (зависимость средней длительности существования колебательного режима от параметра надкритичности) для каждого из колебательных режимов. При этом в качестве параметра надкритичности выступал параметр $(\eta - \eta_0)$, где η_0 – граничное значение амплитуды шума, при котором в исследуемой системе становится возможным наблюдать тот или иной колебательный режим. На рис. 2 представлены зависимости средней длительности существования различных колебательных режимов от параметра надкритичности. Стоит отметить, что средние длительности существования всех колебательных режимов не подчиняются ни одному из известных теоретических законов для различных типов перемежаемости. Тем не менее, для периода 1 (рис. 2а) данная зависимость ведет себя очень схоже с теоретическими закономерностями для известных типов перемежаемости, а именно, при минимальных значениях параметра надкритичности среднее время существования данного типа колебания максимально, а при увеличении данного параметра среднее время существования уменьшается и после некоторого значения становится почти постоянным. Тем не менее, для других колебательных режимов (рис. 2б–2г) это не свойственно.

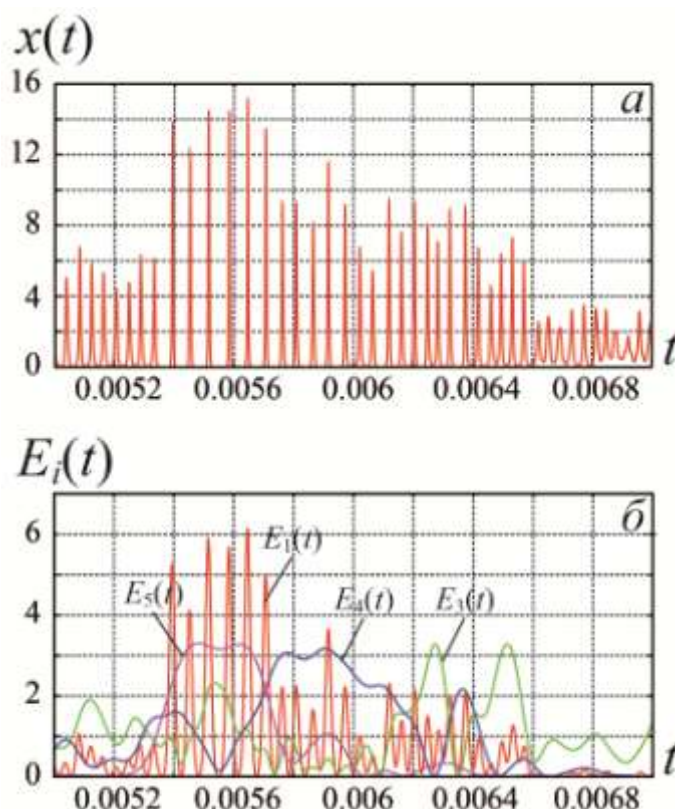


Рис. 1. *a* – приведена зависимость интенсивности излучения от времени для оптоволоконного лазера, легированного эрбием с модулируемым параметром, при этом амплитуда шума равна $\eta = 0,85$, *б* – представлены нормированные зависимости мгновенного распределения энергии вейвлетного преобразования от времени для периода колебаний один $f_1 = f_d = 80$ кГц, для периода колебаний три $f_3 \approx 27$ кГц, для периода колебаний четыре $f_4 = 20$ кГц и для периода колебаний пять $f_5 = 16$ кГц

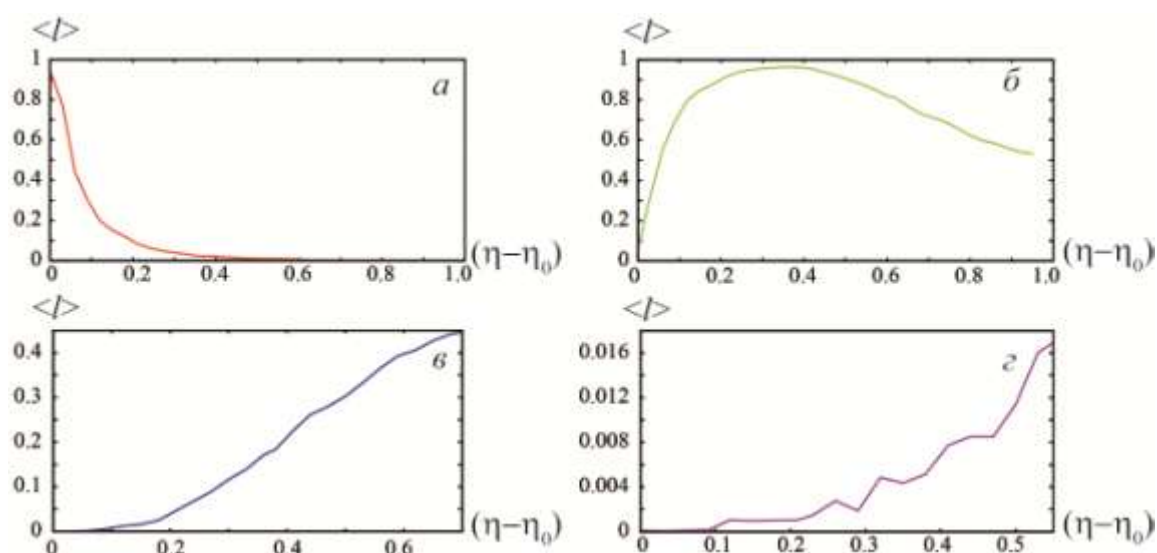


Рис. 2. *a* – зависимость средней длительности существования периода колебаний один от параметра надкритичности $(\eta - \eta_0)$, где $\eta_0 = 0,05$, *б* – зависимость средней длительности существования периода колебаний три от параметра надкритичности $(\eta - \eta_0)$, где $\eta_0 = 0,05$, *в* – зависимость средней длительности существования периода колебаний четыре от параметра надкритичности $(\eta - \eta_0)$, где $\eta_0 = 0,29$, *г* – зависимость средней длительности существования периода колебаний пять от параметра надкритичности $(\eta - \eta_0)$, где $\eta_0 = 0,44$

Таким образом, результаты, полученные в рамках настоящей работы, представляют значительный интерес, т. к. в дальнейшем позволят построить корректную теоретическую модель, описывающую индуцированную шумом перемежаемость в мультстабильных системах. Кроме этого, модифицированный метод для выделения статистических характеристик в мультстабильных системах может быть использован при дальнейших исследованиях индуцированной шумом перемежаемости [23–24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maurer J., Libchaber A. Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He // *Journal de Physique Lettres*. 1980. V. 41. № 21. P. 515-518.
2. Brun E., Derighetti B., Meier D., Holzner R., Ravani M.J. Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser // *Opt. Soc. Amer. B*. 1985. V. 2. P. 156-167.
3. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester: Wiley, 1986. 460 p.
4. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.G. Multistability and delayed recurrent loops // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 708-711.
5. Atteneave F. Multistability in perception // *Sci. Am.* 1971. V. 225. № 6. P. 63-71.
6. Giglio M., Musazzi S., Perini U. Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations // *Phys. Rev. Lett.* 1981. V. 47. P. 243-246.
7. Bachar G., Segev E., Shtempluck O., Shaw S.W., Buks E. Noise-induced intermittency in a superconducting microwave resonator // *EPL*. 2010. V. 89. № 1. P. 17003.
8. Pedaci F., Giudici M., Tredice J.R., Giacomelli G. Stochastic resonance in bulk semiconductor lasers // *Phys. Rev. E*. 2005. V. 71. P. 36125.
9. Kuno M., Fromm D.P., Hamann H.F., Gallagher A., Nesbitt D.J. Nonexponential “blinking” kinetics of single CdSe quantum dots: A universal power law behavior // *J. Chem. Phys.* 2000. V. 112. P. 3117-3120.
10. Stone E., Holmes P. Noise induced intermittency in a model of a turbulent boundary layer // *Physica D*. 1989. V. 37. P. 20-32.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E.Yu., van Rijn C.M. On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy // *CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2006. V. 16. P. 043111.
12. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A. On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy // *Brain research*. 2012. V. 1436. P. 147-156.
13. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 78. P. 036212.
14. Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е. Распределение длительностей ламинарных фаз для перемежаемости типа I в присутствии шума // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2009. Т. 17. № 5. С. 43-59.
15. Pisarchik A. N., Kir'yanov A., Barmenkov Y., Jaimes-Reategui R. Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2005. V. 22. № 10. P. 2107-2114.
16. Campos-Mejia A., Pisarchik A.N., Arroyo-Almanza D.A. Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor laser // *Chaos Solitons Fractals*. 2013. V. 54. P. 96-100.
17. Pisarchik A. N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System // *Phys. Rev. Lett.* 2011. V. 107. P. 274101.
18. Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Писарчик А.Н., Ридер Д.Р., Храмов А.Е. Выделение характерных колебательных режимов в динамике легированного эрбием оптоволоконного лазера // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2015. Т. 79. № 12. С. 1711-1714.
19. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
20. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2004. V. 14. № 3. P. 603-610.
21. Короновский А.А., Храмов А.Е. Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖТФ*. 2001. Т. 27. № 1. С. 3-11.
22. Koronovskii A.A., Hramov A.E., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform // *Phys. Rev. E*. 2007. V. 75. P. 056207.
23. Короновский А.А., Храмов А.Е., Шурыгина С.А. Неавтономная индуцированная шумом синхронизация // *Изв. РАН. Сер. физическая*. 2009. Т. 73. № 12. С. 1728-1731.
24. Короновский А.А., Храмов А.Е., Храмова А.Е. К вопросу о синхронном поведении связанных систем с дискретным временем // *Письма в ЖЭТФ*. 2005. Т. 82. № 3. С. 176-179.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-32-20299 и 16-32-60078).

Поступила в редакцию 4 апреля 2016 г.

UDC 530.182,621.373.826

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-497-502

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF NOISE-INDUCED INTERMITTENCY IN ERBIUM-DOPED FIBER LASER

© M.O. Zhuravlev, D.V. Lopatin, O.I. Moskalenko,
M.V. Khramova, A.N. Pisarchik, R. Jaimes-Reategui

In this paper we present the results of numerical studies of noise-induced intermittency in the erbium-doped optical fiber laser with a modulated parameter. We propose modified wavelet-based method for the determination of the statistical characteristics of intermittent behaviour and using this technique obtain dependences of the average duration of the existence of different oscillation regimes on the critical parameter in the erbium-doped optical fiber laser.

Key words: wavelet; oscillation regimes; erbium-doped optical fiber laser.

REFERENCES

1. Maurer J., Libchaber A. Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid 4He. *Journal de Physique Lettres*, 1980, vol. 41, no. 21, pp. 515-518.
2. Brun E., Derighetti B., Meier D., Holzner R., Ravani M.J. Observation of order and chaos in a nuclear spin-flip laser. *Opt. Soc. Amer. B.*, 1985, vol. 2, pp. 156-167.
3. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Chichester, Wiley Publ., 1986. 460 p.
4. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.G. Multistability and delayed recurrent loops. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, pp. 708-711.
5. Atteneave F. Multistability in perception. *Sci. Am.*, 1971, vol. 225, no. 6, pp. 63-71.
6. Giglio M., Musazzi S., Perini U. Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 1981, vol. 47, pp. 243-246.
7. Bachar G., Segev E., Shtempluck O., Shaw S.W., Buks E. Noise-induced intermittency in a superconducting microwave resonator. *EPL*, 2010, vol. 89, no. 1, p. 17003.
8. Pedaci F., Giudici M., Tredicce J.R., Giacomelli G. Stochastic resonance in bulk semiconductor lasers. *Phys. Rev. E.*, 2005, vol. 71, pp. 36125.
9. Kuno M., Fromm D.P., Hamann H.F., Gallagher A., Nesbitt D.J. Nonexponential "blinking" kinetics of single CdSe quantum dots: A universal power law behavior. *J. Chem. Phys.*, 2000, vol. 112, pp. 3117-3120.
10. Stone E., Holmes P. Noise induced intermittency in a model of a turbulent boundary layer. *Physica D.*, 1989, vol. 37, pp. 20-32.
11. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E.Yu., van Rijn S.M. On-off intermittency in time series of spontaneous paroxysmal activity in rats with genetic absence epilepsy. *CHAOS: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2006, vol. 16, p. 043111.
12. Sitnikova E.Yu., Hramov A.E., Grubov V.V., Ovchinnikov A.A., Koronovskii A.A. On-off intermittency of thalamo-cortical oscillations in the electroencephalogram of rats with genetic predisposition to absence epilepsy. *Brain research*, 2012, vol. 1436, pp. 147-156.
13. Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. Zero Lyapunov exponent in the vicinity of the saddle-node bifurcation point in the presence of noise. *Phys. Rev. E.*, 2008, vol. 78, p. 036212.
14. Koronovskiy A.A., Kurovskaya M.K., Khramov A.E. Raspredelenie dlitel'nostey laminarnykh faz dlya peremezhayemosti tipa I v prisutstvii shuma. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, 2009, vol. 17, no. 5, pp. 43-59.
15. Pisarchik A. N., Kir'yanov A., Barmenkov Y., Jaimes-Reategui R. Dynamics of an erbium-doped fiber laser with pump modulation: theory and experiment. *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2005, vol. 22, no. 10, pp. 2107-2114.
16. Campos-Mejia A., Pisarchik A.N., Arroyo-Almanza D.A. Noise-induced on-off intermittency in mutually coupled semiconductor laser. *Chaos Solitons Fractals*, 2013, vol. 54, pp. 96-100.
17. Pisarchik A. N., Jaimes-Reategui R., Sevilla-Escoboza R., Huerta-Cuellar G., Taki M. Rogue Waves in a Multistable System. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, p. 274101.
18. Zhuravlev M.O., Koronovskiy A.A., Moskalenko O.I., Pisarchik A.N., Rider D.R., Khramov A.E. Vydelenie kharakternykh kolebatel'nykh rezhimov v dinamike legirovannogo erbiem optovolokonnogo lazera. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya*, 2015, vol. 79, no. 12, p. 1711-1714.
19. Koronovskiy A.A., Khramov A.E. *Nepreryvnyy vevletnyy analiz i ego prilozheniya*. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003. 176 p.
20. Hramov A.E., Koronovskii A.A. An approach to chaotic synchronization. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2004, vol. 14, no. 3, pp. 603-610.
21. Koronovskiy A.A., Khramov A.E. Ob effektivnom analize perekhoda k khaosu cherez peremezhayemost' s pomoshch'yu veyvletnogo preobrazovaniya. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki (Pis'ma v ZhTF) – Applied Physics Letters*, 2001, vol. 27, no. 1, pp. 3-11.
22. Koronovskii A.A., Hramov A.E., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D. Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform. *Phys. Rev. E.*, 2007, vol. 75, pp. 056207.
23. Koronovskiy A.A., Khramov A.E., Shurygina S.A. Neavtonomnaya indutsirovannaya shumom sinkhronizatsiya. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya fizicheskaya*, 2009, vol. 73, no. 12, pp. 1728-1731.
24. Koronovskiy A.A., Khramov A.E., Khramova A.E. K voprosu o sinkhronnom povedenii svyazannykh sistem s diskretnym vremenem. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki (Pis'ma v ZhETF) – Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 2005, vol. 82, no. 3, pp. 176-179.

GRATITUDE: The work is fulfilled under support of Russian Fund of Fundamental Research (projects no. 15-32-20299 and 16-32-60078).

Received 4 April 2016

Журавлев Максим Олегович, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Zhuravlev Maksim Olegovich, National Research Saratov State University; Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Research Worker, e-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Лопатин Дмитрий Валерьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий, e-mail: +79107540080@ya.ru

Lopatini Dmitriy Valerevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Mathematical Modeling and Information Technology Department, e-mail: +79107540080@ya.ru

Москаленко Ольга Игоревна, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Moskalenko Olga Igorevna, National Research Saratov State University, Saratov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: o.i.moskalenko@gmail.com

Храмова Марина Викторовна, Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Российская Федерация, кандидат педагогических наук, доцент, e-mail: mhramova@gmail.com

Khramova Marina Viktorovna, National Research Saratov State University, Saratov, Russian Federation, Candidate of Pedagogy, Associate Professor, e-mail: mhramova@gmail.com

Писарчик Александр Николаевич, Центр биомедицинских технологий, Мадридский политехнический университет, г. Мадрид, Испания, кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: apisarch@cio.mx

Pisarchik Aleksander Nikolaevich, Center for Biomedical Technology, Technical University of Madrid, Madrid, Spain, Candidate Physics and Mathematics, Professor, e-mail: apisarch@cio.mx

Джаймс-Райтег Ридер, Гвадалахарский университет, Университетский центр Лос-Лагос, Халиско, Мексика, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: rjaimes@culagos.udg.mx

Jaimes-Reategui Rider, Universidad de Guadalajara, Centro Universitario de los Lagos, Jalisco, Mexico, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: rjaimes@culagos.udg.mx

УДК 620.178.15
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-503-507

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ТРЕЩИН В НАНОСТРУКТУРНОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СПЛАВЕ, ОБРАБАТЫВАЕМОМ СЕРИЕЙ ЛАЗЕРНЫХ ИМПУЛЬСОВ

© И.В. Ушаков, А.Ю. Батомункуев

Обсуждены основные параметры модели заживления трещин в тонких пленках аморфно-нанокристаллических металлических сплавов под действием импульсного лазерного излучения. Предложенная модель адекватно описывает процесс заживления трещин, ориентированных параллельно поверхности образца и имеющих небольшой угол раскрытия. После воздействия 8–12 импульсов заживляется более 90 % трещин, описываемых в модели. Показано, что увеличение количества импульсов более 12–15, не увеличивая эффективность заживления, приводит к плавлению материала и запуску процессов рекристаллизации. Предложенная модель позволяет определять оптимальные параметры селективной лазерной обработки.

Ключевые слова: компьютерное моделирование; заживление трещин; лазерное заживление дефектов; лазерное упрочнение материала.

Воздействие импульсного лазерного излучения на наноструктурные металлические сплавы может сопровождаться их упрочнением. Повышение механической прочности материала связывают с заживлением дефектов и релаксацией высоких механических напряжений. В этом случае при сохранении высокой микротвердости будет возрастать пластичность материала.

Одним из самых опасных дефектов является трещина. Трещина представляет собой зародыш разрушения, а в ее вершине, как правило, присутствуют значительные механические напряжения. В случае, если образец подвергается воздействию значительных механических напряжений, то острые (не состаренные) трещины способны к скачкообразному росту. При росте таких трещин может высвободиться значительная энергия, в результате чего происходит катастрофическое разрушение образца [1].

В случае заживления трещин, расположенных на поверхности и/или в объеме образца, следует ожидать значительное упрочнение материала, в т. ч. повышение его пластических свойств [2–3]. Заживление трещин исследовали во многих материалах. Как правило, рассматривали заживление трещин под действием температуры и давления. В этих условиях возможно полное или частичное заживление трещин в металлах, щелочногалоидных кристаллах и других материалах. Очевидно, что при достаточном давлении и предплавленных температурах происходит размягчение материала, заживление трещин. Но заживление трещин можно стимулировать воздействием электрического тока, лазерных и не лазерных источников электромагнитного излучения (для прозрачных материалов).

Заживление трещин может быть полным и частичным. В реальных физических условиях идеальное заживление трещин невозможно. На месте бывшей трещины всегда остаются какие-то дефекты, например, повышенная плотность дислокаций. Но в любом случае, после «полного» или частичного заживления трещин

наблюдается повышение прочности. Под частичным заживлением понимаем: закругление вершины трещины; снижение высоких механических напряжений в ее вершине; снижение плотности дефектов в окрестности трещины; уменьшение длины трещины; возникновение локальных контактов между поверхностями трещины.

Заживление трещины возможно в прогретом аморфно-нанокристаллическом металлическом сплаве под действием шокового давления [4]. Использование серии лазерных импульсов способствует заживлению. Для оптимизации процесса заживления трещин необходимо выявить основные закономерности процесса заживления. После этого станет возможным формулировать требования к параметрам лазерной обработки. К сожалению, в настоящее время прямое экспериментальное исследование лазерно-стимулированного процесса заживления трещин в наноструктурных материалах невозможно. Возможно исследование процесса лазерно-стимулированного заживления нано- и микро-трещин в наноструктурных металлических сплавах компьютерным моделированием с последующей экспериментальной проверкой, что и является целью данной работы.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Для проведения эксперимента необходима подготовка образцов для лазерного воздействия. Для этого делим тонкую аморфную ленту марки 82K3XCP на отдельные образцы размером 15×25 мм. Далее образцы необходимо отжечь в печи для перевода материала в аморфно-нанокристаллическое состояние. Обработанные образцы помещаем на полимерную подложку с металлическим основанием. После чего можно воздействовать на образцы при помощи оптического квантового генератора (ELS-01, $\nu_{\text{имп}}$ до 50 Гц, $\lambda = 1064$ нм, $E_{\text{имп}}$ 50–100 мДж, $\tau \approx 15$ –20 нс; LS 2137, $E_{\text{имп}} \approx 250$ мДж,

$\lambda = 1064$ нм, $\tau \approx 15\text{--}17$ нс). Подробно методика эксперимента описана в работах [2–4].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Аморфно-нанокристаллический сплав 82К3ХСР имеет сложный химический состав, а многообразие кристаллических решеток нанокристаллов не позволяет их идентифицировать при рентгеноструктурном анализе. Проблемы расшифровки рентгенограмм касаются не только сплава 82К3ХСР, но и других многокомпонентных аморфно-нанокристаллических металлических сплавов [5–8]. В настоящее время неизвестен химический состав межзеренной прослойки и многих кристаллитов. Неизвестна кристаллическая решетка кристаллитов, т. к. рентгеноструктурный анализ только лишь позволяет сделать предположения о структуре сплава.

В работе [9] была сделана попытка анализа метастабильных фаз, формирующихся в сплаве 82К3ХСР при изотермическом отжиге. Идентифицировать метастабильные фазы не удалось, т. к. существует слишком много кристаллических структур, которые могут (в совокупности) давать фиксируемые рентгенограммы. Удалось сделать только качественный анализ фазового состава. Рентгенограммы свидетельствуют о наличии структур, схожих со структурами гексагонального кобальта, кубического кобальта, Co_2Si , BCo_2 , B_7Co_{13} и пр. Таким образом, в настоящее время невозможно строгое решение задачи компьютерного моделирования заживления трещин из-за слишком большого количества неизвестных факторов.

В данной работе развивается компьютерное моделирование заживления трещин в наноструктурном материале. Часть результатов модельного эксперимента может быть прямо или косвенно верифицирована экспериментальными данными. Кроме того, предсказания модели помогают оптимизировать план экспериментальных исследований и скорректировать режим лазерной обработки.

Определим основные положения модели. В аморфно-нанокристаллических металлических сплавах, получаемых контролируемой кристаллизацией из аморфного состояния, возможно появление высоких механических напряжений. О форме трещин в таких материалах возможно судить как по фотографиям, выполненным с использованием оптических и электронных микроскопов, так и по данным компьютерного моделирования.

К настоящему времени установлено, что поверхности таких трещин могут быть неровными, а сама трещина иметь сложную форму. В том случае, если трещина имеет сравнительно простую геометрическую форму и расположена параллельно поверхности, то в случае воздействия на нее ударной волны (особенно в прогревом материале) возможно полное или частичное заживление (рис. 1). В трещинах может находиться газ, в результате чего полное заживление трещин будет невозможно. Однако в этом случае возможно возникновение вместо трещины системы пор. Будем считать, что частичное заживление произошло в том случае, если вместо трещины получаем систему пор (рис. 1), при этом отсутствуют концентраторы механических напряжений. Предложенная модель относится, прежде всего, к тем трещинам, которые параллельны поверхности образца.

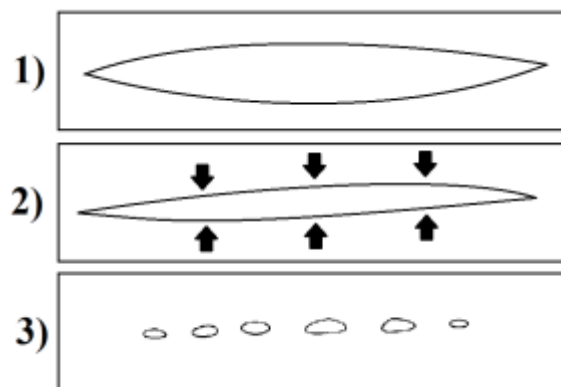


Рис. 1. Схема заживления трещин: 1) перед воздействием лазерного импульса; 2) при воздействии на трещину лазерным импульсом; 3) залеченная трещина с образовавшимися порами (частичное заживление)

Для моделирования заживления трещин разработаны специальные программы [1; 10], модернизированную версию которых использовали в данной работе. Программа основана на следующем алгоритме.

1. Определяются (фиксированные) размеры образца, подвергаемого воздействию лазерной плазмы.
2. Определяется количество импульсов лазерного излучения, воздействующих на образец.
3. Определяются коэффициенты, связанные с пластическими свойствами материала, в т. ч. подвергаемого нагреву.
4. Произвольным образом вводят значение угла (раскрытия) трещины.
5. Подбираются две матрицы различного размера (от 100×100 до 2000×2000) для моделирования трещины (поверхности). Сопоставляя межатомное расстояние (0,2 нм) с матрицей, получаем, что трещина размером $\approx 200 \times 200$ соответствует матрице точек размером 1000×1000 . Значит, данный размер матрицы согласуется с реальными размерами трещины.
6. При помощи генератора случайных (псевдослучайных) чисел заполняются две матрицы N_{max1} и N_{max2} , которые моделируют две поверхности трещины. Генератор случайных чисел задает координаты центров неоднородностей рельефа на обеих сторонах трещины $csx11[i]$, $csy11[i]$, $csx21[i]$, $csy21[i]$.
7. С использованием генератора случайных чисел программа задает площадь каждой неоднородности на поверхности трещины.
8. Для расчета площади неоднородности на поверхности трещины используем формулу:

$$S_{sum} = \sum_{i=1}^{N_{max1}} S_i + \sum_{i=1}^{N_{max2}} S_i, \quad (1)$$

где N_{max1} и N_{max2} – количество неоднородностей рельефа на первой и второй поверхностях трещины; S_i – площадь поверхности i -й неоднородности.

9. В связи с тем, что площадь неоднородностей задается случайным образом, программа контролирует суммарно допустимую площадь неоднородностей, которая не должна превышать площадь поверхности трещины и/или определенный процент от площади поверхности трещины.

$$0,5S_{sum} \leq \sum_{i=1}^{N_{max}} S_i, \quad (2)$$

Если условие, определяемое формулой (2), не выполняется, то уменьшается количество неоднородностей.

10. Затем определяем сумму неоднородностей на поверхностях трещины:

$$N_{но} = \min(N_{max1}, N_{ms1}) + \min(N_{max2}, N_{ms2}), \quad (3)$$

где N_{max1} и N_{max2} – это количество неоднородностей рельефа заданных генератором случайных чисел на поверхностях трещины.

11. С использованием генератора случайных чисел определяем высоту неоднородностей h . Высота неоднородностей не может превышать расстояние между трещинами. В данном случае в качестве максимальной высоты неоднородностей задается половина расстояния между поверхностями трещины. Для этого с использованием генератора случайных чисел задается значение в диапазоне от нуля до биссектрисы угла раскрытия трещины.

12. Определяется объем материала, который вытесняется в процессе залечивания трещины:

$$V_{sum} \leq \sum_{i=1}^n S_i \cdot h_i \cdot k, \quad (4)$$

где S_i – площадь неоднородности; h_i – высота неоднородности; k – коэффициент, связанный с формой неоднородности.

13. При определении объема материала, который вытесняется при залечивании трещины, делаем поправку на температуру нагрева образца. Кроме того, при облучении серией лазерных импульсов поверхность материала может плавиться.

14. Учитываем изменение пластических свойств материала при повышении температуры образца.

15. Получаем безразмерные величины, которые пропорциональны энергии, необходимой для залечивания трещины. Каждый модельный эксперимент включает моделирование залечивания тысячи трещин. С использованием полученных данных строим зависимость вероятности залечивания трещин от количества импульсов в серии.

В ходе разработки программы использовали данные, полученные экспериментально, а также теоретически при расчете специфики прогрева образца, облучаемого серией лазерных импульсов.

На рис. 2 показаны зависимости вероятности залечивания трещин от угла раскрытия и от количества импульсов: 1 – при однократном облучении равна 0,5. Зависимость № 1 построена для одного импульса при изменении угла раскрытия трещины. При данных условиях обработки эффективно залечиваются только трещины с углом 1–3°. Зависимость № 2 построена для 5 импульсов. Эффективность залечивания резко возрастает для трещин с углом раскрытия до 5°. Третья зависимость соответствует 10 импульсам и эффективности залечивания трещин с углом раскрытия до 8–9°. На рис. 3 показаны зависимости вероятности залечивания трещин при увеличении количества импульсов до 12 (зависимость № 1) и 15 (зависимость № 2).

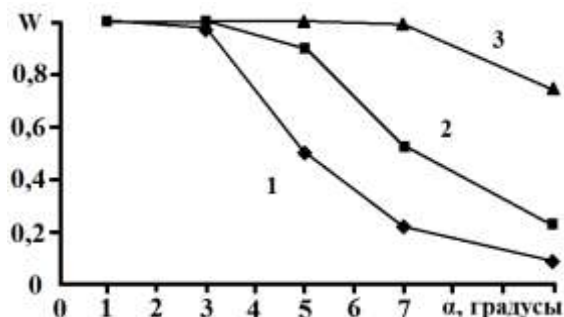


Рис. 2. Зависимости вероятности залечивания трещин от угла раскрытия и от количества импульсов: 1 – при однократном лазерном импульсе; 2 – при 5 импульсах; 3 – при 10 импульсах

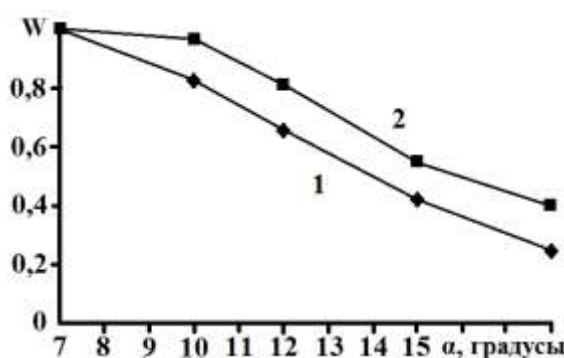


Рис. 3. Зависимости вероятности залечивания трещин от угла раскрытия и от количества импульсов: 1 – при 12 лазерных импульсах; 2 – при 15 импульсах

Из анализа полученных зависимостей следует, что с увеличением количества импульсов вероятность залечивания трещин резко возрастает. Это связано с рядом факторов: облегчается пластическое деформирование при прогреве материала; возрастает вероятность залечивания (повторного залечивания) при повторном сжатии; испаряется поверхностный трещиноватый слой материала; часть материала в поверхностном слое образца плавится (в последнем случае не вполне корректно говорить о залечивании). Для серии из 10 лазерных импульсов вероятность залечивания почти 100 % для трещин с углом раскрытия менее 7°. Для серии из 12 и 15 лазерных импульсов для угла раскрытия 12° залечивается, соответственно, 65 и 82 % трещин.

Можно предположить, что уже при серии из 10–12 импульсов эффективность залечивания трещин фактически перестает расти (если пренебречь исчезновением трещин в расплавленном слое материала). Залечиваются практически все трещины с малым углом раскрытия, ориентированные параллельно поверхности образца, при условии, что в них нет газа. Количество трещин может несколько возрастет после резкого охлаждения материала и возникновения механических напряжений.

Полученные зависимости свидетельствуют о неэффективности проведения селективной лазерной обработки слишком большими сериями импульсов. С одной стороны, при этом достигается «насыщение», и количество залеченных трещин практически перестает воз-

растать. Трещины со слишком большими углами раскрытия, а также ориентированные под значительными углами к поверхности образца, заживать не будут. Кроме того, с увеличением количества трещин в серии значительная часть материала плавится, а в остальной проходят процессы кристаллизации/рекристаллизации, и назвать такое воздействие селективно заживляющим трещины уже нельзя.

Полученные результаты находят косвенное экспериментальное подтверждение. В частности, при обработке серий лазерных импульсов аморфно-нанокристаллического металлического сплава 82K3XCP отмечено резкое (2–3-кратное) возрастание пластических свойств материала при сохранении высокой микротвердости [1–3]. При увеличении серии лазерных импульсов до 12–15 наблюдается формирование оплавленного слоя, а в остальном материале, по данным рентгеноструктурного анализа, начинаются процессы рекристаллизации, что в целом подтверждает результаты компьютерного моделирования.

ВЫВОДЫ

1. Определены зависимости вероятности заживления трещин, ориентированных параллельно поверхности от угла их раскрытия и количества импульсов. Показано, что с увеличением количества импульсов вероятность заживления трещин резко возрастает, и при серии из 12–15 импульсов для углов раскрытия трещины менее 10° заживает почти 100 % трещин.

2. При увеличении количества импульсов в серии сверх 12–15 эффективность заживления трещин с углами раскрытия менее 10° существенно не возрастает, одновременно возрастает доля расплавленного и рекристаллизованного материала. Лазерная обработка теряет свою селективность. Следовательно, для указанного материала и параметров лазерного излучения оптимальная серия импульсов при частоте 20–50 Гц должна состоять из 8–12 импульсов.

3. Предложенный алгоритм для компьютерного моделирования позволяет определять оптимальные

параметры лазерной обработки, при которых заживление трещин происходит селективно, т. е. не меняя структуру и свойства остального материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Финкель В.М.* Физика разрушения, рост трещин в твердых телах. М.: Изд-во «Металлургия», 1970. 376 с.
2. *Сафронов И.С.* Выявление механизмов формирования механических свойств тонкой ленты металлического сплава при импульсной лазерной обработке: дис. ... канд. физ.-мат. наук. В. Новгород, 2013. 190 с.
3. *Ушаков И.В., Сафронов И.С.* Механические характеристики аморфного металлического сплава подвергнутого обработке импульсным лазерным излучением в глубоком вакууме // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 1. С. 133–134.
4. *Ушаков И.В., Сафронов И.С.* Механические характеристики тонкой ленты многокомпонентного аморфно-нанокристаллического металлического сплава, обработанного серийными наносекундными лазерными импульсами // Тяжелое машиностроение. 2012. № 10. С. 6–9.
5. *Абросимова Г.Е.* Эволюция структуры аморфных сплавов // Успехи физических наук. 2011. Т. 181. № 12. С. 1265–1281.
6. *Абросимова Г.Е., Аронин А.С., Зверькова И.И., Гуров А.Ф., Кирьянов Ю.В.* Образование, структура и микротвердость нанокристаллических сплавов Ni-Mo-B // Физика твердого тела. 1998. Т. 40. № 1. С. 10–16.
7. *Suk J. Kim, Kyung-Sook Jeon, Chun I.S., Kim C.K., Yoon C.S.* Magnetic properties and crystallization of $\text{Co}_{68}\text{Mn}_{10}\text{B}_{10}\text{Si}_{12}$ and $\text{Co}_{58}\text{Mn}_{20}\text{B}_{10}\text{Si}_{12}$ amorphous alloys // Elsevier science. Journal of alloys and compounds. 2005. V. 386. P. 276–282.
8. *Gibson M.A., Delamore G.W.* Crystal morphologies in iron- and cobalt-based metallic glasses // Journal of crystal growth. 1989. V. 96. P. 763–768.
9. *Kalabushkin A.E., Ushakov I.V., Polikarpov V.M., Titovets Y.F.* Revealing of qualitative correlation between mechanical properties and structure of amorphous-nanocrystalline metallic alloy 82K3XCP by microindentation on substrates and X-ray powder diffraction // Proc. SPIE. Proceedings of the international society for optical engineering. 2007. V. 6597. P. 65970P1–65970P6.
10. *Ушаков И.В., Сафронов И.С.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014610797 «Компьютерное моделирование неоднородностей рельефа поверхностей трещин в наноструктурном материале «COMP_SIM_RELIEF_SURFACE_CRACKS». Заявка № 2013660756. Зарегистрировано в реестре программ для ЭВМ 17 января 2014 г.

Поступила в редакцию 1 февраля 2016 г.

UDC 620.178.15

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-503-507

MODELING OF HEALING PROCESS OF CRACKS IN NANOSTRUCTURED METAL ALLOY PROCESSED BY A SERIES OF LASER IMPULSES

© I.V. Ushakov, A.Y. Batomunkuev

The main model parameters of cracks healing in thin films of amorphous-nanocrystalline metal alloys under the action of pulsed laser radiation are discussed. The proposed model adequately describes the healing process of little angle cracks oriented parallel to the sample surface. After exposure to 8–12 impulses more than 90 % of the cracks described in the model are healed. It is shown that increasing the number of pulses more than for 12–15 without increasing the effectiveness of the heal leads to melting of the material and starting the process of recrystallization. The proposed model allows determine the optimal parameters of selective laser treatment.

Key words: computer modeling; cracks healing; laser healing of defects; laser strengthening of material.

REFERENCES

1. Finkel' V.M. *Fizika razrusheniya, rost treshchin v tverdykh telakh*. Moscow, Metallurgiya Publ., 1970. 376 p.
2. Safronov I.S. *Vyyavlenie mekhanizmov formirovaniya mekhanicheskikh svoystv tonkoy lenty metallicheskogo splava pri impul'snoy lazernoy obrabotke*. Dissertatsiya ... kandidata fiziko-matematicheskikh nauk, Velikiy Novgorod, 2013. 190 p.
3. Ushakov I.V., Safronov I.S. Mekhanicheskie kharakteristiki amorfno metallicheskogo splava podvergnutogo obrabotke impul'snym lazernym izlucheniem v glubokom vakuume. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2013, vol. 18, no. 1, pp. 133-134.
4. Ushakov I.V., Safronov I.S. Mekhanicheskie kharakteristiki tonkoy lenty mnogokomponentnogo amorfno-nanokristallicheskogo metallicheskogo splava, obrabotannogo seriyey nanosekundnykh lazernykh impul'sov. *Tyazheloe mashinostroenie*, 2012, no. 10, pp. 6-9.
5. Abrosimova G.E. Evolyutsiya struktury amorfnykh splavov. *Uspekhi fizicheskikh nauk*, 2011, vol. 181, no. 12, pp. 1265-1281.
6. Abrosimova G.E., Aronin A.S., Zver'kova I.I., Gurov A.F., Kir'yanov Yu.V. Obrazovanie, struktura i mikrotverdst' nanokristallicheskikh splavov Ni-Mo-B. *Fizika tverdogo tela*, 1998, vol. 40, no. 1, pp. 10-16.
7. Suk J. Kim, Kyung-Sook Jeon, Chun I.S., Kim C.K., Yoon C.S. Magnetic properties and crystallization of Co₆₈Mn₁₀B₁₀Si₁₂ and Co₅₈Mn₂₀B₁₀Si₁₂ amorphous alloys. *Elsevier science. Journal of alloys and compounds*, 2005, vol. 386, pp. 276-282.
8. Gibson M.A., Delamore G.W. Crystal morphologies in iron- and cobalt-based metallic glasses. *Journal of crystal growth*, 1989, vol. 96, pp. 763-768.
9. Kalabushkin A.E., Ushakov I.V., Polikarpov V.M., Titovets Y.F. Revealing of qualitative correlation between mechanical properties and structure of amorphous-nanocrystalline metallic alloy 82K3XCP by microindentation on substrates and X-ray powder diffraction. *Proc. SPIE. Proceedings of the international society for optical engineering*, 2007, vol. 6597, pp. 65970P1-65970P6.
10. Ushakov I.V., Safronov I.S. State registration certificate of program for EVM № 2014610797 «Komp'yuternoe modelirovanie neodnorodnostey rel'efa poverkhnostey treshchin v nanostrukturnom materiale "COMP_SIM_RELIEF_SURFA-CE_CRACKS". Requirement № 2013660756. Registered in register of programs for EVM 17 January 2014.

Received 1 February 2016

Ушаков Иван Владимирович, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры физики; Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, профессор кафедры «Автоматика и компьютерные системы управления», e-mail: ushakoviv@mail.ru

Ushakov Ivan Vladimirovich, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation, Doctor of Technics, Associate Professor, Professor of Physics Department; Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Professor of "Automatics and Computer Systems of Control" Department, e-mail: ushakoviv@mail.ru

Батомункуев Амагалан Юрьевич, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра физики, e-mail: amgalan-ngu-621@yandex.ru

Batomunkuev Amagalan Yurevich, National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation, Post-graduate Student, Physics Department, e-mail: amgalan-ngu-621@yandex.ru

УДК 543.55:661.8

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-508-514

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ РОСТА АНОДНЫХ ОКСИДНЫХ ПЛЕНОК НА НИОБИИ И ТИТАНЕ В НЕВОДНЫХ СРЕДАХ

© А.А. Попова

Работа посвящена исследованию кинетики анодного оксидообразования в неводных перхлоратных средах на титане и ниобии. Определены кинетические законы роста пленок в активной и закритической областях анодных потенциалов, рассчитаны коэффициенты диффузии, величины поляризуемости и дипольные моменты с учетом межмолекулярных взаимодействий в приэлектродном пространстве. Установлено усиление диффузионных ограничений процесса с увеличением абсолютной величины энергии реактивного поля растворителя и уменьшением дипольного момента его молекул, приводящее к смене логарифмического кинетического закона параболическим.

Ключевые слова: титан; ниобий; оксидные пленки; кинетика электрохимических процессов.

ВВЕДЕНИЕ

Технологические свойства конструкционных материалов, в т. ч. титана и ниобия, неразрывно связаны с образующимися на их поверхности оксидными пленками.

Оксиды ниобия и титана используются в качестве активного элемента газовых сенсоров, в системах фотокаталитической очистки воды и воздуха. Нанотрубчатые структуры данных оксидов активно эксплуатируются как материалы перспективных фотоэлементов. На основе диоксида титана и пентаоксида ниобия производятся диэлектрические зеркала, светофильтры, антиотражающие поверхности специального назначения. Применение оксидов титана и ниобия расширяет возможности бифункциональных электродов и аккумуляторных установок в электрохимической энергетике, стимулирует развитие биомедицины благодаря созданию биосовместимых объектов, успешно функционирующих в организме человека. Широко используются Nb_2O_5 и TiO_2 в производстве микросхем в радиоэлектронике и электротехнике, в атомной, ракетной и авиационной промышленности.

По сравнению с осажденными химически или из газовой фазы слоями электрохимические оксиды титана и ниобия отличаются повышенными сенсорной активностью, адгезией, обладают ценными механическими, электрическими, полупроводниковыми, оптическими и защитными свойствами.

В водных средах и на воздухе оксидные пленки на титане и ниобии формируются с большой скоростью, что затрудняет их детальное исследование, в особенности, методами *in situ*, и делает невозможным управление процессом наращивания оксидных слоев с заданными свойствами.

В органических безводных средах, где скорости формирования поверхностных слоев значительно ниже, при анодной поляризации удается получить равномерные оксидные слои заданных толщины, фазового состава, морфологии и стехиометричности. Свойства

анодно сформированных пленок определяются режимом поляризации, составом электролита и зависят от структуры и толщины образованных пленок.

Кинетике формирования оксидных пленок на ниобии и титане посвящено значительное число исследований, что отражено в обзорах и монографиях [1–3], а также в более поздних работах [4–7], где изучались взаимосвязь структуры образующихся при окислении *d*-металлов фаз и состава электролита, механизма роста окислы и предистории образца, влияние на кинетику роста оксида адсорбции компонентов раствора и различных видов массопереноса. Исследованиями [8–16] установлена многослойная структура оксидных пленок на титане, их дефектность и тип проводимости. Но, несмотря на большое число исследований в этой области, остаются не полностью выясненными кинетические законы роста оксидных пленок в безводных органических растворах и механизмы влияния природы органического растворителя на кинетику начальных стадий роста пленок при малой анодной поляризации в сериях заметно различающихся по сольватирующей и поляризующей способностям растворителей, что является достаточно актуальной задачей в связи с востребованностью анодно синтезированных пленок заданного состава. Настоящая работа посвящена изучению кинетики анодного окисления титана и ниобия в неводных растворах насыщенных спиртов, некоторых апротонных растворителей с целью установления характера влияния электронного строения молекул органического растворителя на скорость и механизм формирования анодной оксидной пленки в системах Me, Oх/L на ранних стадиях поляризации.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

В качестве рабочих электродов использовали Ti (99,99 %), Nb (99,99 %) площадью 1 см². Для работы на вращающемся дисковом электроде – цилиндрические электроды, запрессованные в тефлон, с рабочей поверхностью 0,2 см². Образцы перед работой обезжири-

вали, подвергали тщательной механической зачистке в инертной атмосфере. Токи нормировали на единицу истинной поверхности электрода. Электродом сравнения служил насыщенный хлоридсеребряный электрод. Потенциалы пересчитывали относительно стандартного водородного электрода. Измерения проводили в стандартной термостатируемой трехэлектродной электрохимической ячейке с разделенными катодным и анодным пространствами. Для приготовления рабочих сред использовали безводные перхлорат лития (о.с.ч.), метанол (MetOH), этанол (EtOH), н-пропанол (PrOH), н-бутанол (ButOH), ацетонитрил (АН), ацетон (АЦ), пропиленкарбонат (ПК), диметилсульфоксид (ДМСО), диметилформамид (ДМФА). Растворители перегоняли и абсолютировали по методикам [17] непосредственно перед измерениями. Отсутствие воды контролировали хроматографически.

Природу растворителя оценивали с помощью величин диэлектрической проницаемости [18], дипольного момента и поляризуемости [19–20], энергии реактивного поля [21].

Потенциостатические, гальваностатические кривые и цикловольтамперограммы снимали с помощью потенциостата/гальваностата Autolab PGSTAT302N.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Анодные поляризационные кривые, полученные на титане в безводных растворах протонодонорных и апротонных растворителей, содержащих LiClO_4 , имеют вид, характерный для пассивирующихся металлов (рис. 1).

На кривых отчетливо выражены области активного растворения, перехода в устойчивое пассивное состояние по достижении критического потенциала $E_{\text{кр}}$ и выхода из пассивной области при потенциалах выше 0,6 В.

Анализ хроноамперограмм (ХАГ) титана (рис. 2) в безводных растворах электролитов показал, что формирование анодной оксидной пленки в изученных системах определяется двумя кинетическими законами.

При $E < E_{\text{кр}}$ линейные $\lg i, \lg \tau$ -зависимости $\left(\frac{d \lg i}{d \lg \tau} \rightarrow 1\right)$ с коэффициентом корреляции $r = 0,9897$ при линейности i, τ^{-1} -зависимостей и отсутствии линейности в координатах $i, \tau^{-1/2}$ соответствуют логарифмическому закону роста пленки [22–23]:

$$i = a + b\tau^{-1}. \quad (1)$$

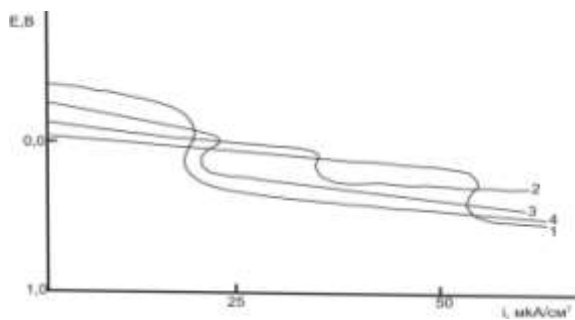


Рис. 1. Зависимость плотности тока от потенциала для Nb в 0,1 М перхлоратных растворах спиртов: 1 – метанола, 2 – этанола, 3 – пропанола, 4 – бутанола

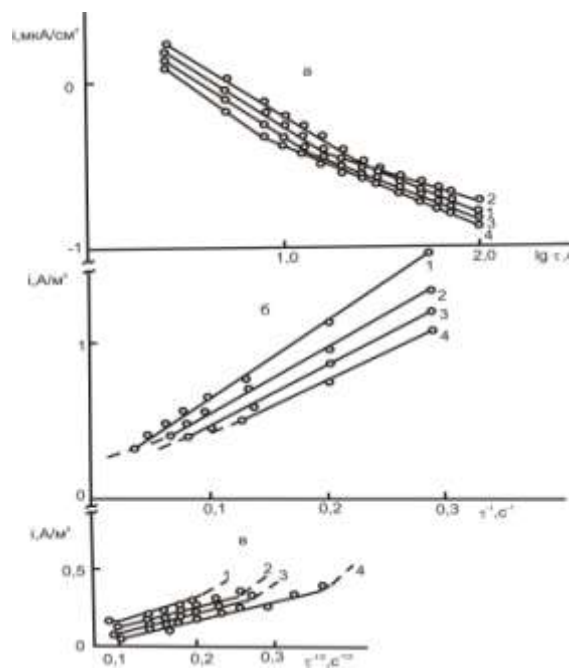


Рис. 2. Хроноамперограммы титана в 0,1 М перхлоратных растворах: 1 – метанола, 2 – этанола, 3 – пропанола, 4 – бутанола ($E = +0,5$ В) в координатах: а – $\lg i, \lg t$; б – i, τ ; в – $i, \tau^{-1/2}$

Уравнение (1) характеризует ведущую роль электронного переноса в пленке на ранних стадиях оксидообразования при активном формировании адсорбционных электрохимических комплексов на поверхности электрода. При $E < E_{\text{кр}}$ имеет место линейная связь между $\lg i$ и обратной диэлектрической проницаемостью $1/\epsilon$ (рис. 3), характеризующая усиление дипольных взаимодействий при интенсивном изменении поляризованности поверхности и приэлектродного пространства.

При $E = E_{\text{кр}}$ на хроноамперограммах появляется излом в области $\tau = \tau_n$, угловые коэффициенты зависимостей $\lg i, \lg \tau$ снижаются до практически постоянной величины $\left(\frac{d \lg i}{d \lg \tau} \rightarrow 0,5\right)$ (табл. 1), τ_n соответствует времени изменения кинетического закона роста пленки.

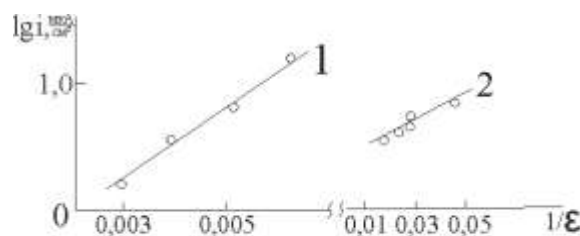


Рис. 3. Зависимость логарифма плотности тока ($E = -0,1$ В) от обратной статической диэлектрической проницаемости для титана в 0,1 М перхлоратных растворах спиртовых (1) и апротонных (2) растворителей

Таблица 1

Значения угловых коэффициентов $\left(\frac{d \lg i}{d \lg \tau}\right)$ для Ti в 0,1 М перхлоратных растворах предельных спиртов и апротонных растворителей в зависимости от потенциала

ROH	$E < E_{кр}$	$E_{кр}$		$E > E_{кр}$		$E \gg E_{кр}$	$D \cdot 10^{-8},$ м ² /с
		$\tau < \tau_n$	$\tau > \tau_n$	$\tau < \tau_n$	$\tau > \tau_n$		
MetOH	1,00	0,80	0,52	0,82	0,55	0,50	4,32
EtOH	0,85	0,75	0,51	0,77	0,54	0,51	2,20
PrOH	0,80	0,73	0,50	0,75	0,52	0,52	1,90
ButOH	0,70	0,70	0,50	0,71	0,50	0,50	1,20
DMCO	0,98	0,83	0,51	0,80	0,51	0,51	15,65
АЦ	0,92	0,75	0,53	0,73	0,52	0,50	18,42
ДМФА	1,00	0,80	0,52	0,78	0,50	0,50	20,14
АН	0,97	0,74	0,52	0,75	0,52	0,50	23,18
ПК	1,00	0,83	0,51	0,81	0,50	0,50	25,01

Линейность хроноамперограмм в координатах i, τ^{-1} нарушается (рис. 2), но проявляется в координатах $i^{-1}, \tau^{1/2}$ в широком диапазоне потенциалов анодной области ($r = 0,9999$) (рис. 4а). При этом фиксируется независимость значений величины $i\tau^{1/2}$ от i (рис. 4в, кривая 2), отсутствовавшая при более низких потенциалах (рис. 4в, кривая 1), и частичная линейность $i\tau, \tau^{1/2}$ -зависимостей (рис. 4б).

Линейные участки $i, \tau^{1/2}$ -зависимостей, соответствующие параболическому закону роста пленки [24]:

$$i = a + b\tau^{-1/2}, \quad (2)$$

экстраполируются в области начала координат (рис. 2), что при отсутствии зависимостей хроноамперограмм от частоты вращения ВДЭ и проявившихся особенностях $i\tau, i$ -зависимостей свидетельствуют о нарастании диффузионных ограничений процесса.

Хронопотенциограммы (ХПГ) титана при различных плотностях тока (рис. 5) в безводных средах обнаруживают выраженные горизонтальные участки кривых в диапазоне 0,5–0,7 В, соответствующие формированию сплошного адсорбционного слоя на поверхности электрода.

Увеличение поляризующей плотности тока приводит к сокращению нестационарного участка кривой и скорейшему выходу потенциала на значение $E = \text{const}$.

Увеличение дипольного момента и поляризуемости молекул органического растворителя также приводит к уменьшению времени выхода на стационарный участок ХПГ.

Так как при $E \gg E_{кр}$ $i\tau^{1/2} \neq f(i)$, то полученные данные можно интерпретировать с помощью уравнения Санда [25]:

$$i\tau^{1/2} = 0,5nFC_M(\pi D)^{1/2}. \quad (3)$$

Уравнение (3) позволяет определить коэффициенты диффузии частиц раствора, участвующих в формировании поверхностного слоя, с учетом определенных ограничений модели полубесконечной линейной диффузии (табл. 1). Полученные данные показывают, что D увеличивается в ряду спиртов с ростом абсолютной

величины энергии реактивного поля растворителя и уменьшением дипольного момента его молекул.

В области τ_n , отвечающего смене кинетического закона, меняется крутизна кривых $i, \lg \frac{1}{\tau_n}$ (рис. 6), что

позволило параметром $\lg \frac{1}{\tau_n}$ характеризовать скорость

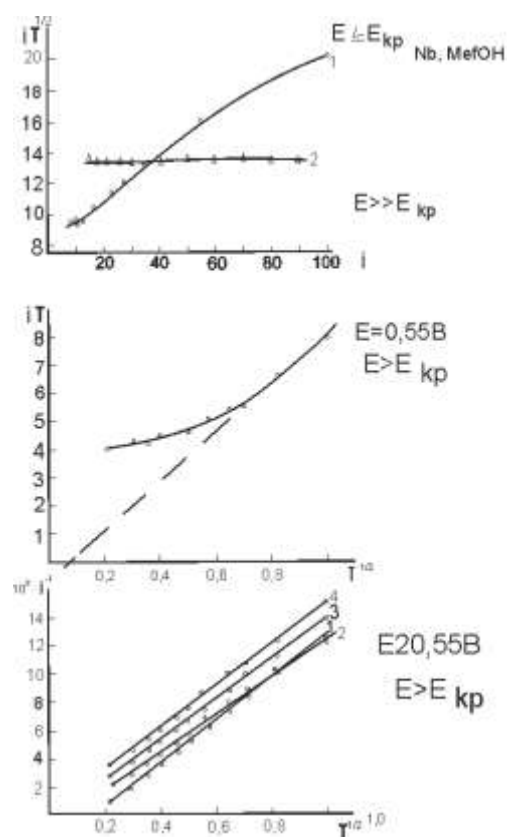


Рис. 4. Хроноамперограммы ниобия в 0,1 М перхлоратных растворах: а – в координатах $i^{-1}, \tau^{-1/2}$ спиртов: 1 – метанола; 2 – этанола; 3 – пропанола; 4 – бутанола; б, в – метанола в координатах: $i\tau, \tau^{1/2}$ (б); $i\tau^{1/2}, i$ (в) при потенциалах, В: а, б – 0,55; в – 0,1 (1), 0,55 (2)

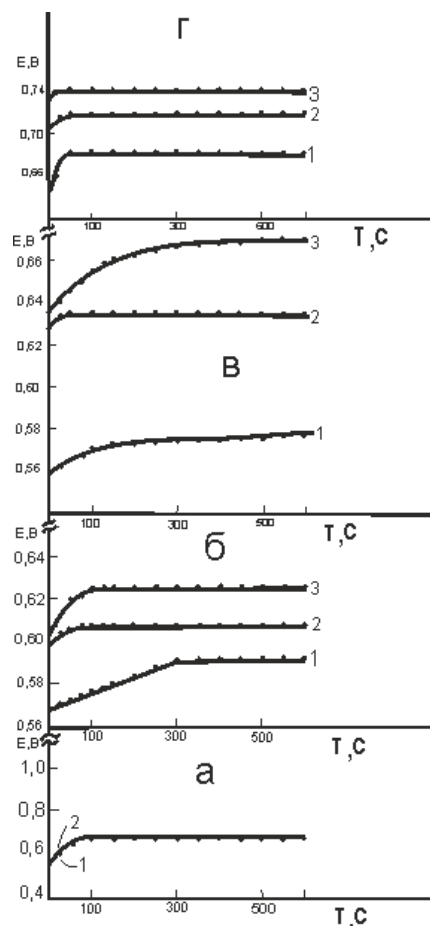


Рис. 5. Хронопотенциграммы Nb в 0,1 М перхлоратных растворах спиртов: а – метанола; б – этанола; в – пропанола; г – бутанола при плотностях тока, мкА/см²: 1 – 50, 2 – 75 (а); 1 – 10, 2 – 25, 3 – 50 (б, в, г)

распространения пленки по поверхности электрода. Величина $\lg \frac{1}{\tau_n}$ увеличивается с переходом от метанола к бутанолу в перхлоратных спиртовых растворах и в ряду ПК-ДМСО-ДМФА-АЦ-АН в перхлоратных растворах на основе апротонных растворителей.

Чувствительность параметра $\lg \frac{1}{\tau_n}$ к величинам диэлектрической проницаемости ϵ и энергии реактивного поля ($-E_R$) (рис. 7) характеризует увеличение скорости формирования поверхностного слоя с уменьшением ассоциированности растворителя и ростом поляризации приэлектродного пространства, определяющей скорость формирования поверхностного адсорбционного комплекса.

Изменение электрических свойств поверхности при формировании поверхностного адсорбционно-электрохимического комплекса с участием ионов металла и диполей органического растворителя анализировали с привлечением данных о поляризуемости и дипольном моменте молекулы растворителя, величина которого линейно коррелировала с $\lg \frac{1}{\tau_n}$ в серии спиртовых растворителей и в серии апротонных растворителей.

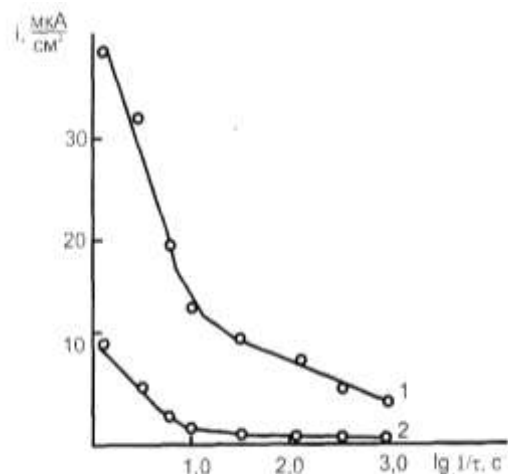


Рис. 6. Зависимость $i, \lg \frac{1}{\tau}$ для Nb в 0,1 М растворах LiClO₄ в: 1 – этаноле, 2 – бутаноле при $E_{кр}$

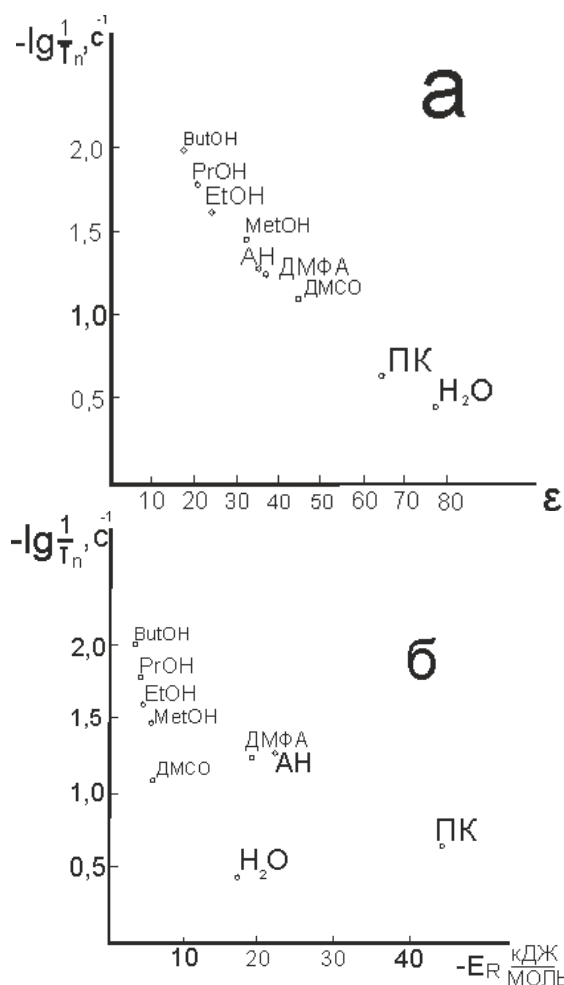


Рис. 7. Зависимость $\lg \frac{1}{\tau_n}$ от: а – диэлектрической проницаемости; б – энергии реактивного поля для некоторых органических растворителей при анодной поляризации Ti в 0,1 М перхлоратных растворах

Таблица 2

Характеристики органических растворителей, участвующих в формировании анодной пленки на Ti

Растворитель	Плотность d , кг/м ³	$\alpha \cdot 10^{-30}$, м ³	ϵ	Дипольный момент μ , D		
				$\mu_{[19]}$	$\mu_{\text{теор}}$	$\mu(\chi_a)$
H ₂ O	998	1,49	78,53	1,85	0,865	0,88
MetOH	792	3,18	32,63	1,65	0,694	0,70
EtOH	789	4,97	24,30	1,66	0,816	0,82
PrOH	804	6,74	20,10	1,67	0,859	0,86
ButOH	809	8,51	17,10	1,68	0,917	0,98
АН	800	5,01	20,90	2,90	0,830	0,85
АЦ	786	6,73	35,60	3,91	0,732	0,76
ДМФА	944	8,18	36,71	3,82	0,82	0,84
ДМСО	1004	6,90	45,00	3,96	1,010	1,00
ПК	1198	8,94	65,00	4,98	0,90	0,95

Поляризуемость α определяли как сумму средних электронных поляризуемостей атомов и функциональных групп [19–20]. Дипольный момент исследованных растворителей $\mu(\chi_a)$ получили из данных квантово-химического расчета модельного кластера [MeL]⁺ симметрии C_{3v}, проведенного методом самосогласованного поля χ_a -рассеянных волн [22].

Согласно уравнению Ланжевена–Дебая, связывающему диэлектрическую проницаемость, дипольный момент и поляризуемость вещества:

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \frac{M}{d} = \frac{4}{3} \pi N_A \left(\alpha + \frac{\mu^2}{3kT} \right), \quad (4)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость; M – молярная масса; d – плотность растворителя; N_A – число Авогадро; α – поляризуемость; μ – дипольный момент; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Выразим из уравнения (4) μ^2 :

$$\mu^2 = \left(\frac{3}{4\pi N_A} \cdot \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} \cdot \frac{M}{d} - \alpha \right) 3kT \quad (5)$$

Предполагая, что молекулы исследуемых растворителей находятся в ассоциированном состоянии, первое слагаемое в скобках, характеризующее собственный дипольный момент взаимодействующих молекул, отнесем к энергии разрыва межмолекулярных связей для 1 моль молекул. Примем величину данной энергии, равной энергии тепловых взаимодействий kT .

В результате с учетом влияния длины диполя l на конфигурацию и симметрию формирующегося комплекса из выражения (5) получим:

$$\mu^2 = \left[\frac{9}{4\pi N_A^2} \frac{M}{d} \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} - 3kT\alpha \right] \cdot a(l), \quad (6)$$

где $a(l)$ – функция длины диполя l .

Значения $\mu(\chi_a)$ и $\mu_{\text{теор}}$, рассчитанных по уравнению (6), представлены в табл. 2 в сравнении со значениями $\mu_{[19]}$, приведенными в [19].

Полученные независимыми методами значения $\mu(\chi_a)$ и $\mu_{\text{теор}}$ имеют хорошую сходимость, отличаются от значений $\mu_{[19]}$, рассчитанных для неполяризованной газовой фазы, и соответствуют координированному состоянию на поверхности поляризованного электрода. Дипольный момент, характеризующий электрохимиче-

ский комплекс на поверхности электрода, увеличивается в ряду АЦ-ДМФА-АН-ПК-ДМСО и в ряду MetOH-EtOH-PrOH-ButOH в связи с увеличением длины диполя и величины положительного заряда в молекуле спирта.

ВЫВОДЫ

1. При анодной поляризации титана и ниобия в органических растворах перхлората лития реализуются два кинетических закона роста поверхностной пленки. В активной области потенциалов анодная пленка формируется по логарифмическому закону с преобладанием электронного переноса, развитием адсорбционных взаимодействий и созданием поверхностного адсорбционно-электрохимического комплекса. Этот процесс характеризуется линейностью i, τ^{-1} , $\lg i, 1/\epsilon$ -зависимостей, положительным значением $\frac{di\tau^{1/2}}{di}$ и $\frac{d\lg i}{d\lg \tau} \rightarrow 1$, протяженными горизонтальными полками на ХПГ для всех исследованных систем.

2. С усилением взаимодействий Me-L и увеличением толщины формирующейся пленки нарастает влияние диффузионных ограничений, приводящее к смене логарифмического кинетического закона на параболический в закритической области анодных потенциалов. При этом фиксируется независимость $(i\tau^{1/2})$ от i , частичная линейность $i, \tau^{-1/2}$ -зависимостей, постоянство $\frac{d\lg i}{d\lg \tau} \sim 0,5$, проявление линейности ХАГ в координатах $i, \tau^{-1/2}$ и $i^{-1}, \tau^{1/2}$ – с высокими коэффициентами корреляции.

3. Коэффициенты диффузии молекул органического растворителя D возрастают с увеличением ϵ и энергии E_R , способствующей структурированию формирующегося слоя, в ряду спиртовых растворителей ButOH-PrOH-EtOH-MetOH и в ряду апротонных растворителей ДМСО-ДМФА-АН-ПК. Диэлектрическая проницаемость изучаемых систем возрастает в ряду спиртов обратно пропорционально длине углеводородного радикала и поляризуемости молекул, в ряду апротонных растворителей ϵ и α изменяются практически симбатно.

4. Значения дипольного момента $\mu_{\text{теор}}$, рассчитанные по преобразованному уравнению Ланжевена–Дебая, имеют хорошую сходимость с величинами дипольного момента, полученными с помощью квантово-

химического моделирования поверхностного адсорбционно-электрохимического кластера в спиртовых и апротонных средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Костад П. Високотемпературное окисление металлов. М.: Мир, 1969. 392 с.
2. Байрачный Б.И., Андрющенко Ф.Г. Электрохимия вентильных металлов. Харьков: Вища школа, 1985. 144 с.
3. Мирзоев Р.А., Давыдов А.Д. Диэлектрические анодные пленки на металлах // Итоги науки и техники. Сер.: Коррозия и защита от коррозии. 1990. Т. 16. С. 89-143.
4. Попова А.А. Анодное поведение переходных металлов в водных и органических средах. Ростов н/Д: СКНЦ ВШ, 2006. 184 с.
5. Вигдорович В.И., Цыганкова Л.Е. Электрохимическое и коррозионное поведение металлов в кислых спиртовых и водно-спиртовых средах. М.: Радиотехника, 2009. 328 с.
6. Encyclopedia of electrochemistry: corrosion and oxide films / Edit. A.J. Bard, M. Stratmann, G.S. Frankel. Weinheim: Wiley-VCH, 2007. 745 p.
7. Носков А.В., Лилин С.А. Особенности ионно-электронного транспорта в поверхностных оксидных пленках с движущимися границами // Теоретические основы химической технологии. 2004. Т. 38. № 1. С. 65-70.
8. Козадов О.А., Введенский А.В. Массоперенос и фазообразование при анодном селективном растворении гомогенных сплавов. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2014. 288 с.
9. Давыдов А.Д., Камкин А.Н. Связь между электронной проводимостью окисной пленки и величиной потенциала анодно-анионной активации пассивного ниобия // Электрохимия. 1981. Т. 17. № 8. С. 1243-1246.
10. Балмасов А.В., Инасаридзе Л.Н., Ильин А.А., Цыбина В.М. Анодное окисление титана в электролитах на основе органических растворителей // Известия вузов. Химия и химическая технология. 2011. Т. 54. № 8. С. 45-48.
11. Nechaeva O.N., Grigor'ev V.P., Popova A.A. Kinetics investigation of anodic film formation on Ti in alcohol perchlorate solutions // Физикохимия поверхности и защита материалов. 1992. Т. 28. № 4. С. 553-558.
12. Попова А.А., Попова Ал.А. К проблеме механизма роста оксидных пленок на переходных металлах в спиртовых средах при анодной поляризации // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2001. № 1. С. 66-68.
13. Попова А.А., Попова Ал.А. О влиянии спиртового растворителя на строение границы раздела металл, оксид/раствор при анодной поляризации титана // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2003. № 2. С. 60-64.
14. Григорьев В.П., Попова А.А., Попова Ал.А. Влияние природы растворителя на механизм формирования поверхностной пленки на переходных металлах в нейтральных органических средах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2004. № 12. С. 33-37.
15. Попова А.А., Паладжянц Л.Ж. Анализ адсорбционных параметров и кривых дифференциальной емкости некоторых переходных металлов в растворах насыщенных спиртов // Коррозия: материалы, защита. 2009. № 2. С. 41-46.
16. Попова А.А. Влияние комплексообразования на анодное поведение переходных металлов. Ч II // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2007. № 6. С. 41-44.
17. Гордон А., Форд Р. Спутник химика. М.: Мир, 1976. 541 с.
18. Краткий справочник физико-химических величин / под ред. А.А. Равделя и А.М. Пономаревой. СПб.: Иван Федоров, 2003. 240 с.
19. Минкин В.И., Осипов О.А., Жданов Ю.А. Дипольные моменты в органической химии. Л.: Химия, 1968. 248 с.
20. Бретинайдер С., Кавецкий В., Лейко Я., Марцинковский Р. Общие основы химической технологии. Л.: Химия, 1977. 502 с.
21. Фиалков Ю.Я. Растворитель как средство управления химическим процессом. Л.: Химия, 1990. 240 с.
22. Попова А.А. Кинетика и механизм анодного поведения титана и циркония в перхлоратных неводных средах // Электрохимическая энергетика. 2009. Т. 9. № 1. С. 30-36.
23. Григорьев В.П., Попова А.А., Попова Ал.А. Кинетические закономерности формирования оксидных пленок на Cr, Mo, W при анодной поляризации в спиртовых растворах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2004. № 1. С. 51-55.
24. Попова А.А. Анодное оксидообразование на металлах IV, V и VI групп Периодической системы в перхлоратных средах на основе неводных протонодонорных и апротонных растворителей: дис. ... д-ра хим. наук. Тамбов, 2011.
25. Захаров М.С., Баканов В.И., Пнев В.В. Хронопотенциометрия. М.: Химия, 1978. 199 с.

Поступила в редакцию 10 февраля 2016 г.

UDC 543.55:661.8

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-508-514

KINETIC PATTERNS OF GROWTH OF ANODIC OXIDE FILM ON NIOBIUM AND TITANIUM IN NON-AQUEOUS SOLUTIONS

© A.A. Popova

The work is devoted to kinetics of anode oxide formation on titanium and niobium in non-aqueous perchlorate media. Kinetic regularities are defined in active and passive areas of potentials. Diffusion coefficients, variables of polarizability and dipole moments are calculated with consideration of intermolecular interactions. The change of the logarithmic kinetic equation by the parabolic equation is result of increasing diffusion restrictions with the growth of the reactive field energy and decreasing solvent dipole moment.

Key words: titanium; niobium; oxide film; kinetics of electrochemical processes.

REFERENCES

1. Kofstad P. Vysokotemperaturnoe okislenie metallov. Moscow, Mir Publ., 1969. 392 p.
2. Bayrachnyy B.I., Andryushchenko F.G. Elektrokhimiya ventil'nykh metallov. Kharkov, Vishcha shkola Publ., 1985. 144 p.
3. Mirzoev R.A., Davydov A.D. Dielektricheskie anodnye plenki na metallakh. Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Korroziya i zashchita ot korrozii, 1990, vol. 16, pp. 89-143.

4. Popova A.A. *Anodnoe povedenie perekhodnykh metallov v vodnykh i organicheskikh sredakh*. Rostov-on-Don, Southern-Caucasian research centre of Higher School Publ., 2006. 184 p.
5. Vigdorovich V.I., Tsygankova L.E. *Elektrokhimicheskoe i korrozionnoe povedenie metallov v kislykh spirtovykh i vodno-spirtovykh sredakh*. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2009. 328 p.
6. Bard A.J., Stratmann M., Frankel G.S. eds. *Encyclopedia of electrochemistry: corrosion and oxide films*. Weinheim, Wiley-VCH, 2007. 745 p.
7. Noskov A.V., Lilin S.A. Osobennosti ionno-elektronnogo transporta v poverkhnostnykh oksidnykh plenках s dvizhushchimisya granitsami. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii*, 2004, vol. 38, no. 1, pp. 65-70.
8. Kozaderov O.A., Vvedenskiy A.V. *Massoperenos i fazoobrazovanie pri anodnom selektivnom rastvorenii gomogennykh splavov*. Voronezh, Publishing-Polygraphic Centre "Nauchnaya kniga", 2014. 288 p.
9. Davydov A.D., Kamkin A.N. Svyaz' mezhdu elektronnoy provodimost'yu okisnoy plenki i velichinoy potentsiala anodno-anionnoy aktivatsii passivnogo niobiya. *Elektrokhimiya*, 1981, vol. 17, no. 8, pp. 1243-1246.
10. Balmasov A.V., Inasaridze L.N., Il'in A.A., Tsybina V.M. Anodnoe okislenie titana v elektrolitakh na osnove organicheskikh rastvoriteley. *Izvestiya vuzov. Khimiya i khimicheskaya tekhnologiya*, 2011, vol. 54, no. 8, pp. 45-48.
11. Nechaeva O.N., Grigor'ev V.P., Popova A.A. Kinetics investigation of anodic film formation on Ti in alcohol perchlorate solutions. *Fizikokhimiya poverkhnosti i zashchita materialov*, 1992, vol. 28, no. 4, pp. 553-558.
12. Popova A.A., Popova A.I. K probleme mekhanizma rosta oksidnykh plenok na perekhodnykh metallakh v spirtovykh sredakh pri anodnoy polarizatsii. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2001, no. 1, pp. 66-68.
13. Popova A.A., Popova A.I. O vliyani spirovogo rastvoritelya na stroenie granitsy razdela metall, oksid/rastvor pri anodnoy polarizatsii titana. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2003, no. 2, pp. 60-64.
14. Grigor'ev V.P., Popova A.A., Popova A.I. Vliyanie prirody rastvoritelya na mekhanizm formirovaniya poverkhnostnoy plenki na perekhodnykh metallakh v neytral'nykh organicheskikh sredakh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2004, no. S12, pp. 33-37.
15. Popova A.A., Palandzhyants L.Zh. Analiz adsorbsionnykh parametrov i krivykh differentsial'noy emkosti nekotorykh perekhodnykh metallov v rastvorakh nasyschennykh spirtov. *Korroziya: materialy, zashchita*, 2009, no. 2, pp. 41-46.
16. Popova A.A. Vliyanie kompleksobrazovaniya na anodnoe povedenie perekhodnykh metallov. Ch II. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2007, no. 6, pp. 41-44.
17. Gordon A., Ford R. *Sputnik khimika*. Moscow, Mir Publ., 1976. 541 p.
18. Ravdel A.A., Ponomareva A.M. *Kratkiy spravochnik fiziko-khimicheskikh velichin*. St. Petersburg, Ivan Fedorov Publ., 2003. 240 p.
19. Minkin V.I., Osipov O.A., Zhdanov Yu.A. *Dipol'nye momenty v organicheskoy khimii*. Leningrad, Khimiya, 1968. 248 p.
20. Bretshnayder S., Kavetskiy V., Leyko Ya., Martsinkovskiy R. *Obshchie osnovy khimicheskoy tekhnologii*. Leningrad, Khimiya, 1977. 502 p.
21. Fialkov Yu.Ya. *Rastvoritel' kak sredstvo upravleniya khimicheskimi protsessami*. Leningrad, Khimiya, 1990. 240 p.
22. Popova A.A. Kinetika i mekhanizm anodnogo povedeniya titana i tsirkoniya v perkloratnykh nevodnykh sredakh. *Elektrokhimicheskaya energetika*, 2009, vol. 9, no. 1, pp. 30-36.
23. Grigor'ev V.P., Popova A.A., Popova A.I. Kineticheskie zakonomernosti formirovaniya oksidnykh plenok na Cr, Mo, W pri anodnoy polarizatsii v spirtovykh rastvorakh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*, 2004, no. 1, pp. 51-55.
24. Popova A.A. Anodnoe oksidoobrazovanie na metallakh IV, V i VI grupp Periodicheskoy sistemy v perkloratnykh sredakh na osnove nevodnykh protonodonornykh i aprotonnykh rastvoriteley: dissertatsiya ... doktora khimicheskikh nauk. Tambov, 2011.
25. Zakharov M.S., Bakanov V.I., Pnev V.V. *Khronopotentsiometriya*. Moscow, Khimiya, 1978. 199 p.

Received 10 February 2016

Попова Ангелина Алексеевна, Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп, Российская Федерация, доктор химических наук, профессор, зав. кафедрой химии, физики и физико-химических методов исследования, e-mail: ang.popova@gmail.com

Popova Angelina Alekseevna, Maykop State Technological University, Maykop, Russian Federation, Doctor of Chemistry, Professor, Head of Chemistry, Physics and Physical-Chemical Methods of Research Department, e-mail: ang.popova@gmail.com

УДК 616-006
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-515-531

БИОХИМИЧЕСКИЕ МАРКЕРЫ НЕЙРОЭНДОКРИННЫХ ОПУХОЛЕЙ

© Н.В. Любимова, Т.К. Чурикова, М.Г. Томс, Н.Е. Кушлинский

В обзоре рассматриваются общие представления о нейроэндокринных опухолях (НЭО), которые в отличие от других новообразований способны вырабатывать биологически активные вещества (гормоны, вазоактивные пептиды, амины), что является основной характеристикой, объединяющей разнородную группу и определяющей клиническое течение болезни. Охарактеризованы наиболее важные циркулирующие биомаркеры НЭО с описанием их биологических эффектов, аналитических аспектов исследования, а также различных эндогенных и экзогенных факторов, влияющих на результаты определения. Дана оценка клинического значения универсальных и специфических маркеров и алгоритм их использования при НЭО разного типа. Представлены данные по диагностической чувствительности ХгА как наиболее значимого маркера НЭО с рекомендациями по его использованию в целях диагностики, мониторинга и прогноза опухолей нейроэндокринной природы.

Ключевые слова: нейроэндокринная опухоль; биохимические маркеры; диагностика; мониторинг; прогноз.

Нейроэндокринные опухоли (НЭО) представляют собой гетерогенную группу новообразований, биологические характеристики которых зависят от их анатомической локализации, клеток-предшественников и секреторной функции. Отличительной характеристикой НЭО является способность продуцировать биологически активные соединения (гормоны, вазоактивные пептиды, амины), проявляющие себя своеобразными клиническими синдромами и симптомами. Источником продукции таких соединений являются, прежде всего, клетки диффузной эндокринной системы.

Нейроэндокринная природа опухолей может быть диагностирована при комплексном морфологическом исследовании с включением иммуногистохимического анализа, позволяющего верифицировать тип экспрессируемого маркера. В постановке диагноза и последующем мониторинге НЭО может оказать определение маркеров при биохимическом исследовании крови и мочи, перечень которых постоянно растет и в настоящее время включает более 30 показателей. Следует отметить, что, несмотря на возможную гетерогенность клеточного состава опухолей и сочетанную секрецию нескольких пептидов, клинически, как правило, проявляется гиперсекреция какого-либо одного биологически активного соединения; остальные продуцируемые опухолью пептиды могут модулировать выраженность отдельных клинических проявлений в пределах одного синдрома.

При наличии клинической картины, характерной для эктопической или эутопической продукции биологически активных пептидов, а также при иммуногистохимическом выявлении экспрессии специфических пептидов рекомендуется исследование соответствующего маркера в сыворотке или плазме крови.

ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О БИОХИМИЧЕСКИХ МАРКЕРАХ НЭО

Представления о НЭО развивались и подвергались переоценке на протяжении более чем вековой истории

развития этого понятия по мере расширения возможностей лабораторных технологий. Впервые секреторные свойства НЭО были подтверждены в 50-е гг. XX в. в результате исследования сыворотки крови и мочи больных с карциноидным синдромом, а также последующего выделения серотонина из карциноидной опухоли подвздошной кишки и энтерохромаффинных клеток животных и человека [1–2]. Ключевая роль этого биогенного амина в проявлении карциноидной симптоматики нашла отражение в использовании термина «карциноид» до настоящего времени: несмотря на пересмотр используемой ранее терминологии и введения четкого понятия НЭО, этот термин остается в современной классификации в контексте карциноидного синдрома, характерного для опухолей, секретирующих серотонин [3–5]. Этот научный факт послужил основанием для использования серотонина в качестве основного маркера НЭО в течение длительного времени.

В настоящее время число биохимических маркеров НЭО постоянно растет по мере развития методической и клинической базы, и их делят на две группы, одна из которых объединяет универсальные, другая – специфические маркеры (табл. 1).

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МАРКЕРЫ НЭО

Хромогранин А (ХгА) – основной маркер этой группы, представляет собой кислый гликопротеин с молекулярной массой 49 кДа, состоящий из 439 аминокислотных остатков. ХгА относится к большому семейству растворимых высокомолекулярных кислых белков хромогранинов/секретогранинов, ассоциированных с секреторным процессом нейроэндокринных клеток [6]. По своей структуре гранины представляют собой одноцепочечную последовательность из 180–720 аминокислотных остатков и демонстрируют ряд общих свойств, наиболее важным из которых является термостабильность. Точная функция данных белков до конца не выяснена и предполагается, что гранины функционируют как прогормоны. Они обладают многочислен-

Таблица 1

Биохимические маркеры нейроэндокринных опухолей

Универсальные маркеры	Специфические маркеры
<i>Сыворотка или плазма крови</i>	
Хромогранин А (ХгА) Панкреатический полипептид (ПП) Нейронспецифическая енолаза (НСЕ) α -субъединица гликопротеиновых гормонов	Серотонин (5-НТ) Гастрин Инсулин С-пептид Проинсулин Глюкагон Вазоактивный интестинальный пептид (ВИП) Гистамин Соматостатин (СС) Кальцитонин (КТ) Паратиреоидный гормон (ПТГ) Гормон роста (ГР) АКТГ Кортизол Катехоламины Нейропептиды
<i>Суточная моча</i>	
	Серотонин 5-оксииндолилуксусная кислота (5-ОИУК, 5-ГИУК) Метанефрин Норметанефрин

ными последовательностями аминокислотных остатков, функционирующими как участки протеолитического процессинга, что способствует образованию множественных пептидных фрагментов с биологической и эндокринной активностью, характеристика которых будет представлена ниже.

Первый член этого семейства ХгА (синоним: паратиреоидный секреторный белок I) был идентифицирован более 30 назад как совместный с катехоламинами продукт экзоцитоза хромоаффинных клеток надпочечников [7–8]. Впоследствии были охарактеризованы ХгВ (секретогранин I), ХгС (секретогранин II), секретогранин III/1B1075 (SgIII), секретогранин IV/HISL-19 антиген (SgIV), секретогранин V, секретогранин VI [9]. При этом ХгА в связи с его биодоступностью остается наиболее изученным и важным в клиническом отношении представителем этого семейства гликопротеинов.

Циркулирующий в крови ХгА представлен разными молекулярными формами, среди которых идентифицировано по крайней мере 10 дополнительных к интактному ХгА пептидов, состоящих от 20 (катестатин) до 113 (вазостатин II) аминокислотных остатков [6; 10–11]. Аналогично ХгА, ХгВ также является молекулой-предшественником, в результате посттрансляционных изменений которой при расщеплении под воздействием специфических эндогенных протеаз возникает целый ряд пептидов, гомологичных разным последовательностям молекулы ХгВ. В целом по своей молекулярной структуре N-концевой и C-концевой области ХгВ является гомологом ХгА с тем различием, что он имеет большую молекулярную массу (70 кДа), состоит из 657 аминокислот, которые формируют 15 потенциальных сайтов для эндогенных протеаз. Поэтому неудивительно, что в кровеносном русле ХгВ циркулирует в виде смеси интактного пептида и его

множественных фрагментов, что существенно затрудняет создание специфической тест-системы для детекции циркулирующего гранаина. Для ХгС, также как и для других гранинов, установлена одна сходная аминокислотная последовательность в зоне С-концевого участка молекулы. Спектр его производных ограничен двумя пептидами, основным из которых является секретонейрин, циркулирующий в крови в виде биологически активной формы с высокой иммунореактивностью [11].

Являясь обязательными структурными белками нейроэндокринных клеток, гранины участвуют в многочисленных внутри- и внеклеточных процессах.

Предполагаемые внеклеточные функции гранинов взаимосвязаны с особенностями их молекулярной структуры и прежде всего это касается их способности образовывать различные биологически активные пептиды, проявляющие ауто-, пара- и/или эндокринное действие. Наиболее изученные производные ХгА и других гранинов, а также характеристика их разнообразной внеклеточной биологической активности представлены в табл. 2.

Помимо внеклеточных функций, гранины также проявляют внутриклеточную активность. Все хромогранины богаты кислыми аминокислотными остатками, вследствие чего при низком pH проявляют способность к агрегации и высокую кальций-связывающую способность. В регуляции синтеза ХгА участвует ряд молекулярных факторов, таких как протеинкиназа А и С, гистамин, никотин, брадикинин, ангиотензин II, простагландин E_2 и др.

Хромогранины регулируют процессинг пептидных гормонов в ходе их транспорта в нейроэндокринные везикулы, функционируя как шапероны, распределяя различные секреторные белки [7–8]. Одной из важней-

Таблица 2

Производные основных гванинов и их предполагаемое действие

Гванины, их фрагменты и последовательности	Биологическая активность фрагментов
<i>Хромогранин А (ХГА)</i>	
ХГА 1-40	Усиливает высвобождение кальцитонина и кальцитонин-подобного пептида в клетках опухолей легкого, ингибирует вазоконстрикцию, ингибирует секрецию паратиреоидного ПТГ клетками парашитовидной железы
Хромофунгин (ХГА 47-66)	Проявляет противогрибковую активность
Вазостатин I (ХГА 1-76)	Ингибирует вазоконстрикцию, активирует адгезию фибробластов, ингибирует секрецию паратиреоидного гормона главными клетками парашитовидной железы, включает опосредованный микроглией апоптоз нервных клеток, проявляет бактериолитические и антигрибковые свойства
Вазостатин II (ХГА 1-113)	Ингибирует вазоконстрикцию и секрецию паратиреоидного гормона
Прохромацин (ХГА 79-431)	Проявляет бактериолитические и антигрибковые свойства
Хромостатин (ХГА 124-143)	Ингибирует высвобождение катехоламинов из мозгового вещества надпочечников.
Хромацин I и II (ХГА 173-194 и ХГА 195-221)	Проявляют бактериолитические и антигрибковые свойства
Панкреастатин (ХГА 240-288)	Ингибирует секрецию инсулина и глюкагона клетками островков Лангенгарса поджелудочной железы, стимулирует гликогенолиз в печени, снижает инсулин-индуцированный синтез гликогена в скелетной мускулатуре, гепатоцитах и адипоцитах, стимулирует высвобождение амилазы из клеток ацинусов поджелудочной железы, снижает синтез соляной кислоты в желудке
Катестатин (ХГА 344-364)	Ингибирует высвобождение катехоламинов из мозгового вещества надпочечников
Парастатин (ХГА 347-419)	Ингибирует секрецию паратиреоидного гормона главными клетками парашитовидной железы
<i>Хромогранин В (ХГВ)</i>	
ХГВ 1-41	Ингибирует секрецию паратиреоидного гормона главными клетками парашитовидной железы
Хромбацин (ХГВ 564-626)	Проявляет бактериолитические свойства
Секретолитин (ХГВ 614-626)	Проявляет бактериолитические свойства
ХГВ (1-657)	Ингибирует биосинтез и высвобождение инсулина
<i>Секретогранин II (ХГС)</i>	
Секретонейрин (SgII 154-186)	Стимулирует высвобождение дофамина из центральных стриарных нейронов и базального ганглия, стимулирует секрецию гонадотропина гипофизом, ингибирует высвобождение серотонина и мелатонина пинеалоцитами, стимулирует миграцию и ингибирует пролиферацию эндотелиальных клеток, стимулирует трансэндотелиальную миграцию моноцитов, активирует адгезию нейтрофилов эндотелиальными клетками
<i>Секретогранин V</i>	
Амино-терминальный пептид (7B2 1-135)	Действует как активатор и шаперон для фермента препрогормон конвертазы 2 типа
Карбокси-терминальный пептид (7B2 155-185)	Ингибирует прогормон конвертазу 2 типа
<i>Секретогранин VI</i>	
SgVI 159-162	Действует как антагонист 5-HT _{1B} серотонинэргических рецепторов

ших функций хромогванинов является связывание моноаминов, в т. ч. катехоламинов, за счет ионных взаимодействий. В целом, наиболее важными внутриклеточными функциями ХГА являются: гранулогенез, или участие в формировании секреторных везикул, стабилизация секреторных везикул, связывание кальция и регуляция его содержания, связывание аминов и

пептидных гормонов, а также регулировка процессов хранения и высвобождения молекул пептидных гормонов и катехоламинов.

С тех пор, когда была подтверждена связь фосфорилирования ХГА с секреторной активностью хромофинных клеток, хромогванины стали рассматриваться в качестве иммуноцитохимических маркеров нейроэн-

докринных тканей, а затем и опухолей нейроэндокринной природы. По мере изучения молекулярных особенностей гастринов, а также их экспрессии в нейроэндокринных клетках стала очевидной возможность использования этих гликопротеинов и, прежде всего, ХгА в качестве циркулирующих маркеров. Первые работы, указывающие на диагностическую значимость ХгА как маркера НЭО, появились в 1983–1989 гг., когда стала доступной первая тест-система для определения ХгА на основе РИА. В 1986 г. представлены первые данные сравнительного определения ХгА в сыворотке крови практически здоровых людей и пациентов с феохромоцитомой, карциномами, островковыми опухолями поджелудочной железы, мелкоклеточным раком легкого (МРЛ), медуллярным раком щитовидной железы (МРЩЖ) [12–13]. При этом у большинства больных (81 %) наряду с гиперсекрецией специфических пептидных гормонов были обнаружены высокие уровни ХгА. Особый интерес представляет опубликованная в 1989 г. работа R.E. Sobol et al., в которой были представлены клинические наблюдения МРЩЖ и островковой опухоли поджелудочной железы, охарактеризованные как гормонально-негативные, но хромогранин-позитивные, что выражалось в многократном увеличении концентрации ХгА в сыворотке крови больных при отсутствии гиперсекреции пептидных гормонов [14]. Это была практически первая работа, свидетельствующая о существовании эндокринных опухолей, для которых не характерна ко-секреция ХгА и пептидных гормонов, считавшаяся обязательной. На основании этого было выделено понятие нефункционирующих НЭО, а также сделано заключение о возможности использования ХгА в диагностике и мониторинге нефункционирующих опухолей, что впоследствии нашло подтверждение в работах других авторов. Таким образом, около 30 лет назад были инициированы отдельные исследования, в которых продемонстрировано клиническое значение ХгА как биохимического маркера НЭО. С тех пор работы, посвященные ХгА, постоянно продолжают [10–11; 15–21].

За последнее десятилетие накоплены убедительные данные о ведущей роли ХгА как биохимического маркера НЭО. Представляет интерес тот факт, что усиление секреции ХгА обнаружено также при злокачественных опухолях других типов, включая рак поджелудочной железы, желудочно-кишечного тракта, простаты, легкого. При этом гиперсекрецию ХгА рассматривают в качестве фактора, подтверждающего наличие в опухоли нейроэндокринного компонента [21–25].

В то же время, несмотря на признанную диагностическую эффективность ХгА при НЭО, необходимо остановиться на причинах, которые могут ограничивать его клиническое использование. Это, прежде всего, состояние функции почек, печени, желудочно-кишечного тракта, сердечно-сосудистой и иммунной систем, нарушения которых могут искажать (как правило, повышать) уровень ХгА в плазме крови [8; 11; 26]. Однако в большинстве случаев отклонения от нормы носят умеренный характер [27]. В частности, при выраженной дисфункции печени с гипербилирубинемией более 80 мкмоль/л ХгА повышается незначительно. При почечной недостаточности ХгА достигает уровней, обнаруживаемых у больных НЭО только при значительной азотемии с увеличением концентрации креатинина сыворотки крови до 400 мкмоль/л и более.

К специфическим факторам, ограничивающим исследование ХгА, относят препараты, снижающие кислотность желудочного сока (ингибиторы протонной помпы, антагонисты рецепторов гистамина 2 типа), которые способствуют усилению секреции ХгА в результате гиперплазии энтерохромаффиноподобных клеток желудка в ответ на возникающую гипергастринемию. В соответствии с мнением большинства исследователей, рекомендуется отменять прием таких препаратов за 1–2 недели до выполнения анализа [8; 27]. На основании сравнительного исследования ХгА у пациентов, получающих антисекреторные препараты, подтверждено достоверное увеличение его концентрации в сыворотке крови больных на фоне длительного приема ингибиторов протонной помпы по отношению к показателям контрольной группы, а также пациентов, получающих антагонисты H₂-рецепторов.

В целях стандартизации определения ХгА взятие крови необходимо проводить до приема пищи, которая может приводить к повышению концентрации маркера на 16–30 %, иногда – до 100 % [11; 28–29]. При серийных исследованиях необходимо также учитывать индивидуальную вариабельность секреции ХгА как в норме, так и у больных НЭО, которая может достигать 25 % [28].

В качестве дополнительного к ХгА маркера среди представителей семейства хромогранинов/секретогранинов рассматривается, прежде всего, ХгВ. Однако уже отмечен тот факт, что в кровеносном русле ХгВ циркулирует в виде смеси интактного пептида и его множественных фрагментов, что существенно затрудняет создание специфической тест-системы для детекции циркулирующего гастрина. В то же время появились данные о том, что для ХгВ характерна менее выраженная физиологическая вариабельность и его уровень в сыворотке крови не зависит от факторов, оказывающих влияние на ХгА (в частности, состояния функции почек, желудка, приема препаратов). Различия в экспрессии и относительная стабильность стимулировали интерес к разработке доступной тест-системы для определения циркулирующего ХгВ как биохимического маркера НЭО, комплементарного ХгА [30].

Панкреатический полипептид (ПП) представляет собой линейный полипептид, состоящий из 36 аминокислотных остатков с молекулярной массой 4200 Да. ПП продуцируется F (ПП)-клетками, локализованными преимущественно в островках Лангергарса задней части головки поджелудочной железы. Биосинтез и физиологическая роль полипептида до конца не выяснены и требуют более детального исследования. Известно, что ПП стимулирует секрецию желудочного сока, однако угнетает его секрецию, стимулированную пентагастрином; являясь антагонистом холецистокинина, подавляет секрецию панкреатических ферментов, стимулированную холецистокинином. Концентрация ПП в крови повышается при приеме смешанной пищи, тогда как внутривенное введение глюкозы или триглицеридов не влияет на его концентрацию в крови. Введение атропина и ваготомия блокируют секрецию ПП в ответ на прием пищи, и наоборот, стимуляция блуждающего нерва, а также введение гастрина, секретина или холецистокинина сопровождаются повышением уровня этого полипептида в крови. У здорового человека базальная концентрация ПП в плазме крови не превышает 200 пг/мл. С возрастом, при злоупотреблении алко-

голем, почечной недостаточности, гипогликемии, диарее, воспалительных заболеваниях она повышается. Гиперплазия клеток, секретирующих ПП, обнаруживается в поджелудочной железе лиц, страдающих инсулинзависимым сахарным диабетом.

Уровни ПП в плазме крови, превышающие 800–1000 пг/мл, регистрируются у большинства больных с глюкагономами, ВИПомами, реже при инсулиномах (20 %) и гастриномах (30 %). Диагностическая чувствительность ПП составила 63 % при НЭО поджелудочной железы, 53 % – при гастроинтестинальных НЭО, 54 % – при функционирующих НЭО [31]. Важно, что ПП часто секретируют также клинически нефункционирующие опухоли поджелудочной железы (57 %), причем диагностическая чувствительность ПП в комбинации с ХгА увеличивалась до 94–96 % при всех указанных типах НЭО [31–32]. Причем, если ПП является единственным гормональным продуктом НЭО, клинический эндокринный синдром не развивается даже при крайне высоких концентрациях полипептида в крови с многократным (до 1000 раз) превышением его нормального уровня. При НЭО поджелудочной железы, как правило, недооценивается диагностическая значимость ПП, гиперсекреция которого характерна для 50–74 % этого типа опухолей [9; 33]. В этом аспекте назначение исследования ПП дополнительно к ХгА может способствовать повышению точности диагностики НЭО, в частности, у пациентов с метастатическим процессом нейроэндокринного характера при отсутствии первичного выявленного очага.

Нейронспецифическая енолаза (НСЕ) – нейронспецифический изофермент цитоплазматического гликолитического фермента енолазы (2-фосфо-Д-глицерат-гидролаза). По молекулярной структуре представляет собой димер из полипептидов γ -типа с молекулярной массой 80 кДа. Идентифицированы также изоформа енолазы из субъединиц α -типа и гибридный изофермент $\alpha\gamma$. Все изоформы обладают сходным сродством к субстрату 2-фосфоглицерату, превращая его в фосфоенолпируват. Изоферменты $\alpha\alpha$ и $\alpha\gamma$ синтезируются глиальными клетками мозга, в большинстве соматических тканей, обнаруживаются в эритроцитах и тромбоцитах крови и отличаются от НСЕ рядом структурных, физико-химических и иммунологических свойств.

Впервые НСЕ была выделена в 1975 г. из экстрактов ткани мозга крысы, а при использовании иммуногистохимического анализа в 1978 г. была обнаружена в нейроэндокринных клетках центральной и периферической нервной системы. В 1981 г. НСЕ впервые охарактеризована как маркер НЭО, что сделало ее, таким образом, родоначальником опухолевых маркеров МРЛ. С тех пор опубликовано множество работ, подтверждающих экспрессию НСЕ в нейронах и нейроэндокринных клетках центральной и периферической нервной системы и клетках опухолей, развивающихся из них. До настоящего времени интерес к этому изоферменту как потенциальному маркеру остается в связи с его избирательной экспрессией в опухолях нейроэндокринного происхождения. При этом наиболее часто НСЕ повышается у больных мелкоклеточным раком легкого, медулярным раком щитовидной железы, феохромоцитомой, а также у 30–60 % больных с другими типами НЭО. Несмотря на высокую чувствительность НСЕ как маркера нейроэндокринной дифференцировки, практическое применение маркера ограничи-

вается его крайне низкой (33 %) специфичностью [15]. Повышение уровня НСЕ не дает специфической картины, чаще всего указывает на наличие низкодифференцированной опухоли. Диагностическая специфичность НСЕ ниже, чем у ХгА [34]. В то же время чувствительность комбинации ХгА и НСЕ выше, чем у каждого из них в отдельности [35].

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ МАРКЕРЫ НЭО

Серотонин (5-гидрокситриптамин, 5-НТ) – промежуточный продукт метаболизма незаменимой аминокислоты триптофан (ТР), происходящего в основном в клетках желудочно-кишечного тракта и головного мозга. Именно серотонин оказался первым биологически активным соединением, идентифицированным в результате исследования сыворотки крови и мочи больных с карциноидным синдромом. Этим клиническим исследованиям предшествовали экспериментальные работы, в результате которых вначале из сыворотки крови животных было выделено биологически активное соединение со свойствами вазоконстриктора, которое затем при его выделении из экстрактов энтерохромаффинных тканей осьминога и лягушки было охарактеризовано как энтерамин, или серотонин [2]. Впоследствии серотонин был выделен из карциноидной опухоли подвздошной кишки, что подтверждало присутствие этого биогенного амина в энтерохромаффинных клетках человека. Установленные факты позволили связать серотонин с эндокринной системой кишечника, а с учетом цитохимических характеристик и таких свойств энтерохромаффинных клеток, как способность захватывать 5-гидрокситриптофан с последующим его декарбоксилированием до серотонина, сформулировать понятие APUD-системы [1]. Открытие такой связи в конечном итоге привело к пониманию того, что серотонин и его метаболиты могут играть ключевую роль в проявлении карциноидной симптоматики, что послужило основанием для последующего изучения этого биогенного амина как маркера карциноида.

Серотонин относится к важнейшим нейромедиаторам и нейротрансмиттерам центральной нервной системы [36]. Он участвует в сокращении гладкой мускулатуры, регуляции кровяного давления и нейротрансмиссии как на периферии, так и в центральной нервной системе, при этом механизм различных эффектов серотонина реализуется через множество сигнальных систем в цитоплазме и мембране клеток, включая и аппарат транскрипции.

Изменение концентрации циркулирующего серотонина выявляется при некоторых патологиях, включая острую кишечную непроходимость, хроническую головную боль напряжения, рассеянный склероз, шизофрению, гипертензию, мышечную дистрофию Дюшенна, демпинг-синдром и др. Определение концентрации серотонина в крови и моче имеет важное клиническое значение при диагностике и мониторинге НЭО. Следует отметить, что, по данным крупного клинического исследования EORTC, подтверждена обратная взаимосвязь между депрессией и высоким уровнем серотонина в сыворотке крови больных НЭО [37]. Особую значимость исследование серотонина в сыворотке крови приобретает при наличии карциноидного синдрома и нормальной экскреции с мочой его метаболита 5-ОИУК, что может наблюдаться при некоторых видах опухолей нейроэндокринной природы.

Серотонин отвечает за симптомы, связанные с карциноидным синдромом, который более чем в 60 % сопутствует опухолям из средней кишки. Так, серотонин увеличивает секрецию жидкости в кишечнике и скорость прохождения пищевых масс, что создает предпосылки к развитию диареи [36–37]. Кроме того, он является составляющим каскада факторов, приводящих к развитию связанного с карциноидными опухолями фиброза.

Исследуется роль серотонина как фактора, участвующего в реализации метастатического потенциала НЭО. На основе модели логистической регрессии было показано, что наличие метастазов в печени коррелирует с уровнем сывроточного и связанного с тромбоцитами серотонина, а также с экскрецией 5-ГИУК [38].

Как уже было указано, повышение уровня серотонина в сыворотке крови или продукта его метаболизма в суточной моче является фактором, позволяющим в первую очередь заподозрить наличие НЭО из производных средней кишки. Опухоли из передней кишки (вилочковая железа, легкое, пищевод, желудок, 12-перстная кишка) также вырабатывают серотонин, но в меньшем объеме, тогда как для НЭО задней кишки (дистальные отделы толстой кишки и прямая кишка) продукция этого биогенного амина не характерна.

Следует отметить, что уровень серотонина в сыворотке крови существенно варьируется в зависимости от времени суток, потребляемых продуктов питания, лекарственных препаратов, стрессорных реакций при взятии крови и др., что существенно снижает его диагностическую специфичность.

5-окси-3-индолилуксусная кислота (5-ГИУК). В норме значительное количество циркулирующего в крови серотонина превращается в 5-ГИУК. Этот конечный продукт метаболизма серотонина выводится с мочой. Суточная экскреция 5-ГИУК – более стабильный и менее подверженный вариальности показатель, чем концентрация серотонина в периферической крови, поскольку на него в меньшей степени влияют индивидуальные особенности больных, их психоэмоциональное состояние в момент взятия крови, суточные биоритмы.

Как правило, при повышенном уровне серотонина в сыворотке крови наблюдается координированное увеличение экскреции 5-ГИУК с суточной мочой (совпадение результатов отмечено примерно в 65 % случаев), однако существуют и исключения из данного правила. Повышение серотонина при нормальной экскреции 5-ГИУК наблюдали значительно чаще (примерно у 30 % больных), чем противоположное соотношение (5–7 %). Расхождения могут быть связаны как с индивидуальными особенностями метаболизма серотонина, так и с особенностями психо-эмоционального статуса больного. Уровень серотонина при нормальной экскреции 5-ГИУК может быть, в частности, повышен у больных с синдромом раздраженной толстой кишки, сопровождающимся диареей [36].

На показатели экскреции 5-ГИУК могут также влиять различные эндогенные и экзогенные факторы [39]. Так, заниженные результаты можно наблюдать у больных с нарушениями функции почек и особенно у пациентов, находящихся на гемодиализе. С другой стороны, этот показатель может быть повышен у пациентов с нарушениями всасывания аминокислот и повышенным выведением метаболитов триптофана, что характерно для таких заболеваний, как целиакия, тропические аф-

ты, болезнь Уиппла, кишечный стаз или хроническая непроходимость [36]. Существенное влияние на показатели 5-ГИУК и серотонина может оказывать употребление в пищу богатых триптофаном продуктов, к которым относятся сливы, ананасы, бананы, баклажаны, помидоры, авокадо, грецкие орехи, шоколад, кофе и др. Пациентам следует воздерживаться от употребления этих продуктов в течение трех суток до начала сбора мочи или взятия крови для определения серотонина [40]. На уровень 5-ГИУК в суточной моче влияют некоторые лекарственные препараты. Повышение его концентрации могут вызвать парацетамол, кофеин, ацетанилид (анальгетик), фенацетин, резерпин, цисплатин, фторурацил, мелфалан, гваяколовый эфир глицерина. В то же время аспирин, леводопа, метилдопа, ингибиторы моноаминоксидазы, фенотиазины, трициклические антидепрессанты, кортикотропин, хлорпромазин, гепарин, имипраимид, октреотид могут привести к занижению результата. При исследовании 5-ГИУК, в особенности в диагностических целях, пациенты должны по возможности воздерживаться от приема этих препаратов [36].

Одним из важнейших преаналитических факторов, влияющих на конечный результат анализа, является точность сбора суточной мочи. Известна цикличность экскреции 5-ГИУК на протяжении суток с ее пиком в утренние и снижением в вечерние часы [41]. Значительная вариальность экскреции 5-ГИУК ассоциирована также с тяжестью наблюдаемой у многих пациентов диареи. В этом аспекте необходимость специальной подготовки и проблемы, связанные со сбором суточной мочи для определения 5-ГИУК, ограничивают практическое использование этого маркера.

Гистамин (β-имидазолэтиламин) – один из важных медиаторов, образующийся при ферментативном декарбосилировании аминокислоты гистидина, а его биологическое действие опосредуется тремя различными рецепторами (H1, H2, H3), локализованными на поверхности клеточной мембраны. В организме гистамин присутствует во всех тканях, при этом его основным депо являются метахроматические гранулы тучных клеток и базофилов, где он находится в неактивном связанном состоянии. В желудке гистамин продуцируется энтерохромаффиноподобными клетками (ECL-клетками), которые составляют 35 % нейроэндокринных клеток слизистой желудка здорового человека. Гистамин ECL-клеток обеспечивает паракринную стимуляцию секреции соляной кислоты париетальными клетками желудка. В меньших количествах он обнаружен в печени, почках, клетках кишечника. Являясь медиатором аллергических реакций быстрого типа, гистамин определяется в высоких концентрациях в основном на начальных стадиях анафилактических кризов. Как и некоторые другие медиаторы, гистамин опосредует не только клинические симптомы анафилаксии, но также индуцирует серию эффектов, направленных на ингибирование анафилактических реакций. Избыток гистамина в крови быстро исчезает в процессе метаболизма. В норме концентрация гистамина в плазме крови составляет 0,2–1,0 нг/мл, а с мочой экскретируется 5–56 мкг/сутки. Гиперэкспрессия гистамина характерна для НЭО преимущественно передней кишки, при этом клинически секреция этого амина проявляется зудом, кожными реакциями, приливами, дуоденальными язвами [42].

Вазоактивный интестинальный полипептид (ВИП) – нейромедиатор и паракринный регулятор клеток ЖКТ, состоящий из 28 аминокислотных остатков. ВИП синтезируется в виде молекулы-предшественника с сигнальной пептидной последовательностью, содержащей 22 аминокислоты, которая процессируется до активной формы, содержащей 28 аминокислот. Выявлено несколько других пептидов – продуктов экспрессии ВИП гена, функция которых до конца не известна, однако один из этих продуктов (пептид гистидин-изолейцин) так же, как и ВИП, стимулирует секрецию жидкости в тонкой кишке. Эффекты ВИП опосредованы двумя специфическими рецепторами, принадлежащими к уникальному классу рецепторов, сопряженных с G-белком [43].

Впервые ВИП был выделен из стенки толстой кишки, при этом его максимальное количество экстрагируется из тонкой и толстой кишок. ВИП обнаружен также в нейронах центральной нервной системы, что указывает на роль этого пептида в нейротрансмиссивных процессах, помимо его основной роли в регуляции деятельности ЖКТ. ВИП обладает наиболее выраженным среди гастроинтестинальных гормонов сосудорасширяющим и гипотензивным действием. В пищеварительной системе ВИП ингибирует секрецию соляной кислоты, регулируемую гастрином и гистамином; ингибирует секрецию пепсина и способствует релаксации гладкой мускулатуры желудка. Он также стимулирует секрецию воды и электролитов в тонкой кишке и образование желчи. Уровень ВИП в плазме крови в норме достаточно низкий (не превышает 200 пг/мл) и не изменяется после приема пищи [44]. В то же время известно об усилении секреции ВИП при некоторых воспалительных заболеваниях кишечника, сопровождающихся осмотической (целиакия, мальабсорбция глюкозы, нарушение толерантности к лактозе) или секреторной (энтериты, вызванные *E. Coli* и *V. Cholerae*, целиакия, гипертиреоз, мальабсорбция желчных солей после резекции подвздошной кишки) диареей, однако это повышение, как правило, незначительное и имеет нестабильный характер.

Определение концентрации ВИП в плазме крови имеет решающее значение для подтверждения синдрома ВИПомы, который впервые описан в 1958 г. Вернером и Моррисоном. Диагностика синдрома Вернера-Моррисона (панкреатическая холера) – тяжелой, иногда смертельной диареи, достигающей до 10 л в день, с гипокалиемией и гипо-ахлоргидрией, обезвоживанием, похуданием, представляет собой сложную проблему. Только в 1973 г. была доказана ассоциация этого синдрома с гиперсекрецией ВИП клетками опухоли [45], которая была подтверждена в последующих клинических работах [46]. ВИП продуцируется ВИПомы – функционирующими НЭО из островковых клеток поджелудочной железы (до 90 %); описаны также опухоли с гиперсекрецией ВИП, локализующиеся вне поджелудочной железы (в тонкой кишке, надпочечниках, средостении, легких, печени, симпатических ганглиях). Панкреатические ВИПомы почти всегда злокачественные (в 80 % метастазируют в печень), тогда как экстрапанкреатические имеют доброкачественный характер. Концентрация полипептида в плазме крови при ВИПоме достигает высоких значений (>800 пг/мл), при выраженной диарее иной этиологии его секреция может превышать нормальную, но не достигает уровней, характерных для ВИПомы. При наличии рефрактерной

секреторной диареи с превышением ежедневного объема стула более 700 мл подозрение на ВИПому подтверждается при стабильном увеличении концентрации ВИПа > 200 пг/мл в результате его серийного определения в плазме крови больного [47]. Измерение концентрации пептида используется для скрининга ВИП-секретирующих опухолей, выявления скрытых метастазов, а также для осуществления мониторинга и оценки эффективности хирургического или лекарственного лечения [43–44; 48–49]. В связи с лабильностью молекулярной структуры ВИПа, время полужизни которого в циркуляторном русле составляет 1 мин. требуется соблюдение ряда преаналитических и аналитических условий при определении этого пептида на основе иммуноферментного анализа.

Инсулин – гормон бета-клеток островков Лангерганса поджелудочной железы, представляет собой белок, состоящий из 51 аминокислоты, образующих две полипептидные цепи, соединенные дисульфидным мостиком – А-цепь (21 аминокислота) и В-цепь (30 аминокислот). Инсулин образуется в процессе протеолиза проинсулина в эквивалентных количествах с С-пептидом. Его действие опосредуется рецепторами поверхностной мембраны клеток-мишеней и проявляется паракринными и эндокринными эффектами. Базальная концентрация инсулина в сыворотке крови не превышает 30 мкМЕ/мл. С-пептид состоит из 31 аминокислоты, биологически неактивен, имеет больший период полужизни, что обеспечивает ему большую стабильность по сравнению с инсулином, поэтому при ряде клинических ситуаций определение С-пептида приобретает решающее значение. Базальный уровень С-пептида в сыворотке крови составляет 1,0–4,5 нг/мл [50].

Инсулинома была первой эндокринной опухолью поджелудочной железы, которая описана в виде отдельных клинических наблюдений почти 100 лет назад. Для инсулиномы типично длительное существование периодических гипогликемических приступов, со временем более частых и тяжелее протекающих. При этом симптомы гипогликемии обычно нарастают в течение нескольких часов, чаще развиваются ночью или рано утром натощак и провоцируются голоданием, физической нагрузкой и быстро купируются внутривенным введением глюкозы или приемом сахара внутрь. Единственным надежным дифференциально-диагностическим критерием служит демонстрация неадекватно (по отношению к уровню гликемии) высокого уровня инсулина в плазме периферической крови, взятой во время гипогликемии.

Обычно для подтверждения диагноза инсулиномы у больного с типичным анамнезом и клиникой достаточно определить базальный уровень инсулина (натощак после ночного голодания) с одновременной регистрацией гликемии. При гликемии менее 2,2 ммоль/л и концентрации инсулина в сыворотке крови от 6–7 мкЕд/мл и более подтверждают диагноз инсулиномы, т. е. секреция неопухолевыми β-клетками при этом полностью подавляется. При отсутствии базальной гиперинсулинемии должна быть проведена проба с голоданием. У 70–80 % больных с инсулиномой гипогликемия развивается в течение первых суток голодания и за 72 часа – практически у всех. Следует также иметь в виду, что инсулин в сыворотке крови при инсулиноме очень редко превышает 200 мкЕд/мл и чаще значительно ниже этой величины; при более высоких уровнях инсулина можно предполагать его экзогенное введение.

Для диагностики инсулиномы необходимо исследование комплекса биохимических маркеров. К таким основным лабораторным критериям относятся: выраженная гипогликемия (глюкоза $< 2,2$ ммоль/л) в сочетании с инсулинемией от 6 мкЕд/мл (36 пмоль/л) и выше, концентрацией С-пептида в сыворотке крови эквивалентной или выше 200 пмоль/л и уровнем проинсулина более 5 пмоль/л [9; 51].

Глюкагон – полипептид из 29 аминокислотных остатков, секретируемый альфа-клетками островков Лангерганса. Панкреатический глюкагон, наряду с несколькими другими пептидами, образуется из более крупного предшественника преглюкагона. В L-клетках тонкой кишки и альфа-клетках панкреатических островков преглюкагон расщепляется тканеспецифичными прогормоноконвертазами на разные пептиды, которым принадлежит важная роль в метаболизме питательных веществ и в регуляции продукции соматостатина (СС), глюкагона и инсулина. Образующиеся биологически активные пептиды осуществляют свои эффекты, связываясь с рецепторами (сопряженными с G-белком), сходными с рецепторами глюкагона. При этом главной мишенью одного из глюкагонподобных пептидов 1 типа (ГПП-1) являются островковые клетки поджелудочной железы, где он стимулирует продукцию и секрецию инсулина и СС и, наоборот, ингибирует секрецию глюкагона, а также препятствует разрушению бета-клеток и стимулирует их пролиферацию.

Глюкагон, являясь антагонистом инсулина, участвует в регуляции гликемии путем усиления секреции в ответ на понижение уровня глюкозы крови; попадая по портальной вене в печень, он стимулирует гликогенолиз, снижает утилизацию глюкозы и синтез гликогена, повышает глюконеогенез и образование кетоновых тел. Суммарным эффектом этих воздействий является увеличение мобилизации глюкозы из печени. В периферических тканях глюкагон оказывает липолитическое действие, снижает липогенез и синтез белка. Метаболизм глюкагона осуществляется печенью и почками. В норме базальный уровень (натошак) глюкагона в плазме крови составляет не более 75 пг/мл и не превышает 200 пг/мл при физиологической гипогликемии.

Как и другие островковые НЭО, глюкагонома помимо гиперсекреции глюкагона и глюкагонподобных пептидов характеризуется множественной секреторной активностью. При глюкагономах может наблюдаться секреция таких пептидных гормонов, как инсулин, гастрин, ВИП, ПП, СС, АКТГ, ПТГ, а также серотонина. Однако биохимическое подтверждение диагноза глюкагономы проводится при выраженной гиперглюкагонемии (уровень гормона в плазме крови более 1000 пг/мл). Необходимо учитывать, что повышение концентрации глюкагона в плазме крови может наблюдаться при диабетическом кетоацидозе, почечной и печеночной недостаточности, сепсисе, длительном голодании, циррозе печени, синдроме Кушинга, однако оно не столь значительное (менее 500 пг/мл) [51]. Следует отметить, что глюкагонома является практически единственной эндокринной опухолью поджелудочной железы, патогномичные признаки которой позволяют устанавливать диагноз по клинической картине [9].

Гастрин – полипептидный гормон ЖКТ, регулирующий секрецию соляной кислоты париетальными клетками дна желудка и пролиферацию клеток слизистой оболочки. Другими функциями гастрина является стимуляция выделения пепсиногена, внутреннего фак-

тора, секретина, а также ферментов поджелудочной железой и желчи в печени. Кроме того, гастрин активирует моторику желудочно-кишечного тракта. Гормон вырабатывается специализированными G-клетками, рассеянными по слизистой оболочке почти всего ЖКТ, которые в наибольшем количестве локализируются в антральном отделе желудка и 12-перстной кишке. Экстраантральные клетки оказывают незначительный вклад в общую секрецию гастрина в норме.

В норме преобладающими формами являются гастрин-17 и гастрин-34, которые циркулируют в сульфатированном и несulfатированном виде, и их уровни в сыворотке крови примерно одинаковы, что обусловлено более медленным метаболическим клиренсом гастрина-34 [52].

Следует отметить, что в клетках гастриномы нарушены механизмы регуляции секреции гормона, что приводит к изменению соотношения форм гастрина в циркулирующей плазме крови. В отличие от нормы, при гастриномах повышен уровень крупных молекулярных форм гастрина – гастрина-34 и гастрина-71. Причем уровень гастрина-34 значительно превышает уровень гастрина-17, который в сыворотке крови при гастриномах находится в низких количествах или практически отсутствует [52]. Такое нарушение секреции различных форм гастрина настоятельно требует разработки диагностических методов, которые выявляют как крупные, так и малые формы гастрина с одинаковой чувствительностью. Тест-системы, которые измеряют только уровень гастрина-17, дают заниженные или неадекватные концентрации гастрина в сыворотке крови больных гастриномами.

Однако проблема гастриномии значительно сложнее. Наиболее частыми причинами гипергастринемии являются гастринома с автономной гиперпродукцией гастрина клетками опухоли и хронический аутоиммунный атрофический гастрит с ахлоргидрией, стимулирующей по принципу обратной связи секрецию гастрина антральными G-клетками. Другие состояния, включая рак желудка, стеноз привратника, обычная язвенная болезнь у части пациентов, а также некоторые лекарственные препараты, направленные на терапию язвенной болезни и гастрита – блокаторы H⁺-помпы (омепразол), H₂-антагонисты, антацидные препараты, повышают уровень гастрина в меньшей степени. Стимулирующий эффект на выработку гастрина могут оказывать также прием инсулина, пероральный прием аминокислот и карбоната кальция, внутривенное введение хлорида кальция, а также кофе и курение.

Определение концентрации гастрина в сыворотке крови играет важную роль в диагностике опухолей, секретирующих гастрин. Гастриномы, являясь гастрин-секретирующими опухолями 12-перстной кишки или поджелудочной железы и реже – желудка, характеризуются развитием синдрома Золлингера–Эллисона, основными клиническими признаками которого являются гиперхлоргидрия, язвенная болезнь агрессивного течения, развитие диареи и других тяжелых нарушений деятельности ЖКТ.

В соответствии с рекомендациями Европейского общества по нейроэндокринным опухолям (ENETS) 2006 и 2012 гг. для диагностики гастриномы приоритетное значение имеют исследование гастрина в сыворотке крови и базальной кислотности желудочного сока. Как правило, общий уровень гастрина после ночного голодания у больных с синдромом Золлингера–

Эллисона значительно превышает верхние референсные пределы (110–115 пг/мл), достигая многократно более высоких значений. При соблюдении важнейших преаналитических факторов исследования гастрина, включая длительное (более 12 часов) ночное голодание и перерыв в приеме антисекреторных препаратов в течение 1–4 недель [53], диагноз гастриномы подтверждается при уровне гастрина более 1000 пг/мл и $pH < 2,0$ [42]. В то же время более половины пациентов с синдромом Золлингера–Эллисона могут иметь умеренно повышенные (от 100 до 1000 пг/мл) уровни гастрин в сыворотке крови. Для таких пациентов целесообразно применение провокационной пробы с внутривенным введением секретина [51]. В случае синдрома Золлингера–Эллисона введение секретина приводит к значительному повышению гастрин по отношению к базальному уровню (дельта более 200 пг/мл). При других состояниях (в частности, при атрофическом гастрите) провокационная проба не дает такого эффекта и даже может сопровождаться снижением сывороточного гастрин.

Соматостатин (СС) – пептидный гормон дельта-клеток островков Лангерганса поджелудочной железы, а также один из гормонов гипоталамуса, идентифицирован в 1973 г. при выделении из экстрактов гипоталамуса как полипептид, проявляющий ингибирующий эффект на секрецию гипоталамического гормона роста. Впоследствии описаны многие центральные эффекты соматостатина, хотя данные литературы носят противоречивый характер. СС существует в двух биологически активных формах, происходящих от одного предшественника – SST-14 (в ЦНС и поджелудочной железе) и SST-28 (преобладает в тонкой кишке).

Основная функция СС заключается в паракринной регуляции активности островковой ткани поджелудочной железы и ЖКТ. В норме СС тормозит выделение, но не синтез гормона роста и ТТГ в гипофизе, в ЖКТ он угнетает секрецию гастрин, энтерогликогена, мотилина, нейротензина, бомбезина, секретина, холецистокинина, VIP, в поджелудочной железе – инсулина, глюкагона, ПП, ИФР-I. Одновременно с этим СС угнетает желудочную секрецию, секрецию панкреатических ферментов и бикарбонатов, снижает скорость кровотока в сосудах ЖКТ, замедляет прохождение содержимого по кишечнику, блокирует всасывание воды, электролитов, нутритивных факторов в кишечнике [19].

В норме концентрация СС в сыворотке крови редко превышает 80–100 пг/мл. У больных соматостатиномой (опухоль островкового аппарата поджелудочной железы, состоящая из дельта-клеток) выявляется повышенное содержание СС в плазме крови (>800–1000 пг/мл), уровень инсулина и глюкагона резко снижен (выявляется умеренный сахарный диабет без значительной гипергликемии и кетоза). У больных инсулинзависимым типом сахарного диабета наблюдается гипертрофия дельта-клеток, что указывает на их повышенную функциональную активность, и, соответственно, может повышаться концентрация СС в плазме крови.

Соматостатиномы – редкие типы НЭО, локализующиеся в поджелудочной железе или тонком кишечнике (чаще в 12-перстной кишке около фатерова соска), и могут быть составляющей синдрома фон Реклингаузена. Панкреатические соматостатиномы обычно больших размеров и в 70–92 % случаев дают метастазы на момент постановки диагноза. Клинические

проявления синдрома соматостатиномы с распространенным ингибирующим эффектом СС включают умеренный сахарный диабет, холелитиаз, диарею и стеаторею, гипохлоргидрию, боли в брюшной полости, потерю массы тела и анемию. Как правило, концентрации циркулирующего СС при соматостатиноме поджелудочной железы достигают высоких значений [9].

Кальцитонин (КТ) – пептидный гормон из 32 аминокислот с молекулярной массой 3500 Да, секретлируемый в основном парафолликулярными или С-клетками щитовидной железы. Его физиологическая роль в регуляции фосфорно-кальциевого обмена хорошо изучена у животных, но роль в поддержании фосфорного гомеостаза в организме человека остается не достаточно изученной. Более того, не наблюдали изменений метаболизма фосфора или костного ремоделирования при отсутствии КТ (после тиреоидэктомии) или при его высоких уровнях у больных МРЩЖ. Рецепторы к КТ обнаруживаются во многих тканях (мозг, легкие, лимфоидные клетки), однако роль этого гормона до сих пор остается неизвестной. Циркулирующие формы КТ очень гетерогенны, при этом помимо биологически активного мономера в крови присутствуют многие предшественники с различными молекулярными характеристиками (прокальцитонин), димеры или агрегаты, также определяющиеся совместно с кальцитонином при проведении ИФА. У лиц без патологии щитовидной железы базальный уровень КТ, как правило, составляет менее 20 пг/мл.

КТ – важный маркер в диагностике и мониторинге МРЩЖ, однако причины повышения уровней КТ могут быть разными. Первые методы определения кальцитонина на основе РИА выявляли повышение уровней КТ при раке легких, простаты и молочной железы, но в дальнейшем эти наблюдения не подтвердились. Помимо МРЩЖ, другие эндокринные опухоли, в частности, НЭО легких и ЖКТ, также могут секретировать предшественники гормона и КТ [54]. Таким образом, КТ можно рассматривать как маркер НЭО переднекишечного происхождения. Среди других причин гиперкальцитонинемии можно назвать гипергастринемию, хроническую почечную недостаточность, псевдогипопаратиреоз, гиперплазию С-клеток. Следует с осторожностью подходить к интерпретации результатов КТ у инфицированных пациентов, т. к. в иммунологическую реакцию соответствующей тест-системы может вступать прокальцитонин (предшественник КТ, состоящий из 166 аминокислот), что приводит к существенному завышению результатов исследования. Секретция прокальцитонина при сепсисе и тяжелых бактериальных и паразитарных инфекциях осуществляется не С-клетками щитовидной железы. Это подтверждают результаты выявления его гиперсекреции даже у больных после тиреоидэктомии. Напротив, при МРЩЖ С-клетки секретируют прокальцитонин.

В то же время важность своевременной диагностики МРЩЖ обуславливает продолжающиеся исследования КТ в качестве диагностического и прогностического критерия. Показано, что базальный уровень КТ, превышающий 100 пг/мл, является практически 100 % диагностическим фактором МРЩЖ. Кроме того, КТ рассматривают не только как маркер диагностики. Выявлена зависимость его уровней от размера опухоли и наличия метастазов, что обеспечивает его прогностическое значение [9; 51].

Таблица 3

Гормонпродуцирующие опухоли желудочно-кишечного тракта и рекомендуемые биохимические маркеры

Тип опухоли (синдром)	Основные клинические признаки соответствующего синдрома	Основные лабораторные исследования
Карциноид (карциноидный синдром)	Сосудистые реакции, диарея, бронхиальная обструкция, гипертонические кризы	ХгА, серотонин, экскреция 5-ГИУК, гистамин, ВИП, ПП
Инсулинома	Частые приступы гипогликемии натощак и в утренние часы, купируемые приемом сахара или введением глюкозы	Инсулин, С-пептид, проинсулин, глюкагон, ПП в плазме крови; уровень гликемии
Гастриннома (синдром Золлингера–Эллисона)	Язвенная болезнь агрессивного течения (характерны высокая кислотность желудочного сока, множественность и «низкое» расположение язв), диарея, стеаторея	ХгА, базальный и стимулированный уровень гастрина, инсулин, глюкагон, ПП в плазме крови; базальная и стимулированная кислотность желудочного сока
ВИПома (синдром Вернера–Моррисона)	Интермиттирующая или постоянная водная диарея с большим объемом каловых масс, гипокалиемия, гипоахлоргидрия, похудание	ХгА, ВИП, глюкагон, соматостатин, ПП в плазме крови; желудочная кислотность; объем стула; электролиты сыворотки крови и стула
Глюкагонома	Некротическая мигрирующая эритема, сахарный диабет или нарушение толерантности к глюкозе, поражения слизистых, похудание, анемия	ХгА, глюкагон, ПП, инсулин в плазме крови; аминокислоты, гематологические исследования
Соматостатинома	Холелитиаз, сахарный диабет или нарушение толерантности к глюкозе, диспепсия, ахлоргидрия, анемия, диарея/стеаторея	ХгА, соматостатин, ПП в плазме крови; желудочная кислотность; гематологические исследования

Таким образом, охарактеризованные выше наиболее важные биохимические маркеры НЭО, а также связанные с гиперпродукцией биологически активных соединений симптомы и синдромы отражают существующее представление о том, что НЭО представляют собой наиболее разнородную группу неоплазий, сложную в диагностическом отношении в соответствии с их клиническими и биологическими особенностями. С учетом гормональной активности опухоли и сопутствующим клиническим проявлениям НЭО делятся на функционирующие и нефункционирующие. Функционирующие опухоли составляют примерно 60 % всех НЭО и включают карциноидный синдром, синдром Золлингера–Эллисона, синдром Вернера–Моррисона, гипогликемию и др. В табл. 3 представлены обобщенные рекомендации по использованию биохимических маркеров с учетом имеющихся клинических признаков, синдромов и типа НЭО [9; 24; 51; 55–57]. При этом диагноз гормонально активной опухоли требует обязательного подтверждения гиперфункционального синдрома на основе исследования панели биохимических маркеров НЭО.

КЛИНИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БИОХИМИЧЕСКИХ МАРКЕРОВ НЕЙРОЭНДОКРИННЫХ ОПУХОЛЕЙ

НЭО характеризуются общими клинко-биологическими признаками, но в то же время имеют уникальный набор биохимических факторов, определяющих их ауто- и паракринные свойства и функциональные особенности.

В соответствии с современными представлениями о молекулярно-биологических особенностях опухолей нейроэндокринной природы Европейским обществом по НЭО (ENETS) разработаны рекомендации по стандартизации обследования больных. Необходимо отметить особое место ХгА в группе общих маркеров, обладающего в отличие от других биологически активных соединений наилучшим сочетанием диагностической чувствительности и специфичности, что делает его основным маркером НЭО [57]. Повышение эффективности биохимической диагностики НЭО достигается при расширении спектра исследуемых маркеров, как общих, так и специфических, в соответствии с типом опухоли и имеющейся у больного клинической картиной:

- 1) карциноидный синдром: ХгА, серотонин, и/или 5-ГИУК;
- 2) гастроэнтеропанкреатические опухоли: ХгА, гастрин, глюкагон, инсулин, проинсулин, С-пептид, панкреатический полипептид, вазоактивный интестинальный пептид, соматостатин, гистамин, АКТГ, СТГ, тахикинины, α и β субъединицы ХГ;
- 3) НЭО легких и средостения: ХгА, кальцитонин, ПТГ, СТГ, нейронспецифическая енолаза, гистамин, проинсулин, АКТГ;
- 4) феохромоцитома: ХгА, основные катехоламины (адреналин, норадреналин), метаболиты катехоламинов (метанефрин, норметанефрин);
- 5) опухоли гипофиза: ХгА, пролактин, ЛГ, ФСГ, эстрадиол, тестостерон, ТТГ, свободные T_3 и T_4 ;
- 6) АКТГ-эктопический синдром: ХгА, АКТГ, кортизол.

В соответствии с рекомендациями ENETS ХгА считается обязательным маркером биохимического обследования больных в целях диагностики, мониторинга и прогноза НЭО.

ХгА характеризуется высокой диагностической чувствительностью при НЭО желудка, при гастринмах (100 %), подвздошной кишки (80 %), бронхолегочной системы (70 %), синдроме множественных эндокринных неоплазий (78 %), феохромоцитоме (98 %), при этом в различных исследованиях выявлена зависимость ХгА от распространенности процесса [11; 16; 51; 58–61]. Особое значение определение маркера приобретает при нефункционирующих опухолях. Появляется все больше работ, в которых отмечается повышение уровней ХгА при отсутствии усиления секреции других пептидов и гормонов, продуцируемых функционирующими НЭО. По данным разных авторов диагностическая чувствительность ХгА у больных с нефункционирующими НЭО поджелудочной железы достигала 50–75 % при специфичности от 68 до 100 % [11; 62]. Кроме того, диагностическая чувствительность комплексного определения ХгА и ПП достигает 90–95 % у больных с неактивными НЭО поджелудочной железы [31].

Наиболее высокие концентрации ХгА в плазме наблюдали у пациентов с НЭО тонкой кишки, которые обычно ассоциированы с карциноидным синдромом [63]. В различных исследованиях показана связь уровня ХгА с распространением заболевания, опухолевой массой и наличием метастазов. Получены убедительные доказательства значительного увеличения уровня маркера у пациентов с прогрессированием заболевания или с наличием метастазов в печени по сравнению с локализованным процессом [37]. О высокой диагностической чувствительности ХгА свидетельствует повышение его уровня в плазме крови до клинической манифестации рецидива у пациентов с НЭО кишки после радикального удаления опухоли. Примечательно, что уровень маркера повышался задолго до обнаружения прогрессии на КТ или МРТ [64]. ХгА считают ранним маркером карциноидных опухолей передней и задней кишки [5; 55]. Если не доказана другая причина, повышение ХгА в плазме крови следует рассматривать как биохимическое проявление НЭО. Концентрацию ХгА можно использовать для оценки проводимого лечения. При этом снижение уровня маркера более чем на 80 % после циторедуктивных операций связано с ослаблением симптомов и улучшением контроля заболевания и прогноза.

Данные разных авторов свидетельствуют о выраженной вариабельности уровней ХгА с наиболее высокими показателями при синдроме Золлингера–Эллисона и рецидивах НЭО [33], а также при распространенных формах опухолевого процесса [61]. Повышенные уровни ХгА описаны также и при впервые выявленных НЭО, в т. ч. при НЭО поджелудочной железы, кишки, желудка, спорадических карциноидах [65].

В работах различных авторов особое внимание уделяется использованию ХгА в мониторинге НЭО [65–66]. Авторы рассчитали количественные критерии для оценки динамики опухолевого процесса с учетом аналитической и межсерийной вариабельности определения ХгА. При этом клинически значимым в мониторинге опухолевого процесса рассматривают изменение уровней ХгА на 44–50 % [28; 32]. Прогрессирование или регрессию НЭО подтверждали с высокой степенью

достоверности соответственно при увеличении или снижении ХгА по отношению к базальному уровню маркера более чем на 44–50 %. По данным других авторов, изменение результатов серийного определения ХгА более чем на 25 % соответствовало опухолевому статусу в 80 % наблюдений [67].

Диагностическая чувствительность ХгА по данным разных авторов для впервые выявленных НЭО составила 55–85 %, при специфичности метода от 56 до 100 % относительно контрольных групп [33; 60–61]. При этом наибольшая чувствительность ХгА была характерна для функционирующих и метастатических НЭО. Особый интерес представляет высокая частота повышения ХгА (до 57–75 %) при нефункционирующих опухолях, диагностика которых осложняется отсутствием симптоматики и продукции биологически-активных соединений [31; 60].

В последнее время активно изучается прогностическое значение ХгА. Ведущие специалисты в области исследования маркеров НЭО отмечают достоверную связь уровней ХгА с показателями выживаемости. В одном из первых исследований, проведенных Е.Т. Janson et al., в группе пациентов со злокачественными карциноидами средней кишки медиана общей выживаемости при высоких значениях ХгА была достоверно ($p < 0,01$) ниже, чем у пациентов с низкими значениями маркера, при этом показатели 5-летней выживаемости также достоверно различались (22 и 63 % соответственно) [63]. Более поздние работы продемонстрировали аналогичные данные. Так, у пациентов с метастатическими ГЭП-НЭО общая выживаемость и медиана общей выживаемости при высоких уровнях ХгА (>200 Ед/л) была достоверно ($p < 0,001$) ниже, чем в группе пациентов со значениями ХгА ниже пороговых [68]. В группе пациентов с тяжелыми формами НЭО, получающих химиотерапию по схеме FCiSt, ХгА выступал как независимый предиктор выживаемости без прогрессирования ($p = 0,017$) и общей выживаемости ($p < 0,001$) [69]. В исследовании RADIANT-1 анализировали связь выживаемости с базальными уровнями ХгА у пациентов с нерезецированными НЭО и прогрессированием заболевания в ходе цитотоксической терапии (эверолимус, октреотид). Медианы выживаемости без прогрессирования и медианы общей выживаемости достоверно различались в группах с высоким и низким базальным уровнем ХгА до начала специфического лечения ($p < 0,01$ – $0,0001$) [56]. В то же время в исследовании RADIANT-3 результаты были менее показательными. К. Oberg et al. сравнили выживаемость в группе пациентов с НЭО поджелудочной железы низкой и средней степени злокачественности при лечении эверолимусом и в группе плацебо с учетом базальных уровней ХгА. Медиана выживаемости без прогрессирования при лечении эверолимусом не показала достоверных различий у пациентов с высокими и низкими значениями ХгА [35; 56].

В лаборатории клинической биохимии Российского онкологического научного центра им. Н.Н. Блохина на протяжении последних лет проводятся сравнительные исследования ХгА и других наиболее часто используемых маркеров у больных НЭО и практически здоровых людей [70–71].

Нами прослежено 316 больных НЭО в возрасте от 16 до 87 лет (средний возраст $55,7 \pm 1,0$). Исследование ХгА в плазме крови проводили у всех пациентов до начала лечения с его последующим серийным опреде-

лением в процессе терапии. Контрольную группу составили 50 практически здоровых людей соответствующего возраста и пола. При анализе базальных (исходных) уровней ХгА у больных НЭО установлено высокодостоверное увеличение его секреции во всех группах пациентов по сравнению с соответствующим показателем в контрольной группе ($p < 0,000001$). Медиана ХгА в общей группе больных НЭО составила 109 Ед/л, тогда как в контроле она была существенно ниже (15,4 Ед/л). При сравнительном анализе уровней ХгА в зависимости от локализации опухолевого процесса наибольшая медиана концентрации ХгА выявлена в группе пациентов с НЭО ПЖЖ, тогда как максимальные значения маркера (>20000 Ед/л) выявлены при НЭО легких и желудка. Уровни ХгА у больных НЭО с метастазами в печени и карциноидным синдромом достоверно ($p < 0,000001$) превышали показатель контроля и групп больных НЭО без соответствующих клинических проявлений. При этом уровни ХгА у больных НЭО без осложнений также достоверно отличались от контроля.

При пороговом значении ХгА 30,0 Ед/л диагностическая специфичность по контрольной группе составила 96,2 %. Диагностическая чувствительность в общей группе больных НЭО достигала 84,5 %, при этом в большинстве наблюдений ХгА проявлял высокую чувствительность (87,8–94,3 %). При НЭО толстой кишки и легкого чувствительность была наименьшей (70,9–73,9 %). Наиболее высокую чувствительность ХгА проявил при НЭО с карциноидным синдромом, метастазами в печени. Важное клиническое значение определения ХгА доказано в группе больных с нефункционирующими НЭО – у 75,5 % больных при отсутствии клинической симптоматики наблюдали повышение секреции ХгА, что свидетельствовало о возможности использования этого гликопротеина в качестве независимого маркера НЭО. Чувствительность ХгА для выявления функционирующих НЭО достигала 96 %.

Несмотря на ведущую роль ХгА в качестве универсального маркера опухолей нейроэндокринной природы, важными маркерами для оценки биологической активности НЭО и карциноидного синдрома до сих пор остаются серотонин, продукция которого является одним из его главных этиологических факторов, а также метаболит серотонина 5-ГИУК. В клинической практике в качестве маркера карциноидных опухолей наиболее оправдано исследование 5-ГИУК, суточная экскреция которого является более стабильным и менее подверженным вариабельности показателем, чем концентрация серотонина в периферической крови, т. к. на него в меньшей степени влияют индивидуальные особенности больных, их психоэмоциональное состояние в момент взятия крови, суточные биоритмы. В то же время необходимость специальной подготовки и проблемы, связанные со сбором суточной мочи для определения его экскреции, ограничивают применение этого маркера.

Нами проанализированы базальные уровни серотонина в сыворотке крови экскреция 5-ГИУК в суточной моче у 278 больных НЭО. Убедительно доказано достоверное повышение уровней серотонина у больных НЭО по сравнению с контрольной группой при поражении печени, карциноидном синдроме и функционирующих опухолях, тогда как в подгруппах пациентов с отсутствием соответствующих клинических признаков различия не достигали статистической

значимости. При анализе результатов исследования суточной экскреция 5-ГИУК было установлено, что уровни метаболита серотонина в моче достоверно отличались от контроля при всех локализациях за исключением НЭО желудка. Результаты сравнения уровней 5-ГИУК в зависимости от распространенности и биологической активности НЭО свидетельствуют о достоверном усилении суточной экскреции метаболита серотонина у больных НЭО всех подгрупп по сравнению с показателем в контроле. В то же время различия экскреции 5-ГИУК в соответствующих подгруппах были высокодостоверны за исключением больных с карциноидным синдромом и без синдрома, что, скорее всего, обусловлено вариабельностью результатов определения 5-ГИУК в результате погрешностей, связанных со сбором суточной мочи.

Необходимо отметить, что выявленные различия для специфических маркеров карциноидного синдрома были выражены в меньшей степени по сравнению с описанными выше изменениями для ХгА. При сравнении диагностической чувствительности исследованных маркеров с учетом соответствующих пороговых уровней ХгА характеризовался высокой чувствительностью как в общей группе больных НЭО, так и соответствующих подгруппах. Серотонин и 5-ГИУК продемонстрировали менее высокую чувствительность, чем ХгА даже при НЭО с карциноидным синдромом и метастазами в печени, и наименьшую чувствительность – у больных с нефункционирующими НЭО.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с данными зарубежных исследователей, а также собственными результатами определение биохимических маркеров НЭО может быть использовано в диагностике, мониторинге и прогнозе этого типа опухолей, а полученные нами закономерности соответствуют основным положениям ENETS [24; 57]:

- ХгА – общий, клинически наиболее значимый маркер функционально активных и нефункционирующих НЭО;

- ХгА – высокочувствительный (87–100 %) и специфичный (100 %) маркер НЭО с метастазами в отдаленных органах;

- ХгА – маркер карциноидного синдрома, более чувствительный по сравнению с экскрецией 5-ГИУК (76 %) при НЭО с метастазами в отдаленных органах.

Следует отметить наиболее важную, до сих пор нерешенную проблему стандартизации иммуноферментного анализа маркеров НЭО. В соответствии с этим в лаборатории клинической биохимии Российского онкологического научного центра им. Н.Н. Блохина обследование больных НЭО проводится с учетом общих рекомендаций ENETS по определению, интерпретации и стандартизации результатов исследования ХгА:

- 1) серийные исследования ХгА должны проводиться с использованием одних и тех же тест-систем;

- 2) референсные интервалы и индивидуальные результаты ХгА значительно различаются при использовании разных тест-систем и не должны сравниваться;

- 3) при переходе на другую тест-систему пациентам должен быть установлен новый базальный уровень маркера;

- 4) с учетом большого числа факторов, влияющих на точность определения ХгА, его исследование следует проводить в специальных референсных лабораториях.

В последние годы существенно расширились возможности определения маркеров НЭО, что связано с разработкой тест-систем на основе высокоспецифичных моноклональных антител. В то же время используемые различными разработчиками антитела обладают разной аналитической чувствительностью. Этот факт необходимо учитывать при обследовании больных в динамике, поскольку использование наборов реактивов, основанных на разных методологических принципах и антителах, может привести к получению неадекватного для конкретного больного результата и, соответственно, ошибочной оценке течения опухолевого процесса [72–73]. Несмотря на важность и актуальность стандартизации ИФА в его различных модификациях, эта проблема до сих пор не решена.

Как отмечалось выше, биохимическое обследование больных с опухолями нейроэндокринной природы требует строгого соблюдения целого ряда преаналитических и аналитических факторов в соответствии с особенностями метаболизма и экскреции определяемых маркеров. Большинство маркеров этой группы нестабильны и требуют особых условий взятия, обработки, транспортировки и хранения биологического материала. В частности, исследование таких пептидов, как ПП, ВИП, соматостатин требует взятия крови с добавлением ингибитора протеаз. В каждом конкретном случае перед взятием крови необходимо проконсультироваться в лаборатории, где будет проводиться анализ. В целом, методики определения маркеров этой группы более трудоемки и сложны, чем стандартные ИФА исследования, поэтому они должны выполняться в специализированных лабораториях онкологических учреждений с высококвалифицированным персоналом в области ИФА, в которых обязательным условием является оценка контроля качества, вариабельности и воспроизводимости анализа с учетом контингента обследуемых больных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barter R., Pearse A.G. Mammalian enterochromaffin cells as the source of serotonin (5-hydroxytryptamin) // *J. Pathol. Bacteriol.* 1955. V. 69 (1-2). P. 25-31.
2. Esparmer V., Avero B. Identification of enteroamine the specific hormone of the enterochromaffine cell system, as 5-hydroxytryptamine // *Nature*. 1952. V. 169 (4306). P. 800-801.
3. Caplin M.E., Buscombe J.R., Hilson A.J., Jones A.L., Watkinson A.F., Burroughs A.K. Carcinoid tumour // *Lancet*. 1998. V. 352 (9130). P. 799-805.
4. Kulke M.H., Mayer R.J. Carcinoid tumors // *N. Engl. J. Med.* 1999. V. 340 (11). P. 858-868.
5. Modlin I.M., Latich I., Zikusoka M., Kidd M., Eick G., Chan A.K. Gastrointestinal carcinoids: the evolution of diagnostic strategies // *J. Clin. Gastroenterol.* 2006. V. 40 (7). P. 572-582.
6. Aunis D., Metz-Boutigue M.H. Chromogranins: current concepts. Structural and functional aspects // *Adv. Exp. Med. Biol.* 2000. V. 482. P. 21-38.
7. Feldman S.A., Eiden L.E. The chromogranins: their roles in secretion from neuroendocrine cells and as markers for neuroendocrine neoplasia // *Endocr. Pathol.* 2003. V. 14 (1). P. 3-23.
8. Louthan O. Chromogranin A in physiology and oncology // *Folia Biol.* 2011. V. 57 (5). P. 173-181.
9. Ardill J.E. Circulating markers for endocrine tumours of the gastroenteropancreatic tract // *Ann. Clin. Biochem.* 2008. V. 45 (6). P. 539-559.
10. Ferrari L., Seregni E., Bajetta E., Martinetti A., Bombardieri E. The biological characteristics of chromogranin A and its role as a circulating marker in neuroendocrine tumours // *Anticancer Res.* 1999. V. 19 (4C). P. 3415-3427.
11. Modlin I.M., Gustafsson B.I., Moss S.F., Pavel M., Tsolakis A.V., Kidd M. Chromogranin A – biological function and clinical utility in neuro endocrine tumor disease // *Ann. Surg. Oncol.* 2010. V. 17 (9). P. 2427-2443.
12. O'Connor D.T., Defos L.J. Secretion of chromogranin A by peptide-producing endocrine neoplasms // *N. Engl. J. Med.* 1986. V. 314 (18). P. 1145-1151.
13. Sobol R.E., O'Connor D.T., Addison J., Suchocki K., Royston I., Defos L.J. Elevated serum chromogranin A concentrations in small-cell lung carcinoma // *Ann. Intern. Med.* 1986. V. 105 (5). P. 698-700.
14. Sobol R.E., Memoli V., Defos L.J. Hormone-negative chromogranin A-positive endocrine tumors // *N. Engl. J. Med.* 1989. V. 320 (7). P. 444-446.
15. Bajetta E., Ferrari L., Martinetti A., Celio L., Procopio G., Artale S., Zilembo N., Di Bartolomeo M., Seregni E., Bombardieri E. Chromogranin A, neuron specific enolase, carcinoembryonic antigen, and hydroxyindole acetic acid evaluation in patients with neuroendocrine tumors // *Cancer*. 1999. V. 86 (5). P. 858-865.
16. Bilek R., Safarik L., Ciprová V., Vlcek P., Lisá L. Chromogranin A, a member of neuroendocrine secretory proteins as a selective marker for laboratory diagnosis of pheochromocytoma // *Physiol. Res.* 2008. V. 57 (Suppl. 1). P. 171-179.
17. Defos L.J., O'Connor D.T., Wilson C.B., Fitzgerald P.A. Human pituitary tumors secrete chromogranin-A // *J. Clin. Endocrinol. Metab.* 1989. V. 68 (5). P. 869-872.
18. Eriksson B., Arnberg H., Oberg K., Hellman U., Lundqvist G., Wernstedt C., Wilander E. Chromogranins – new sensitive markers for neuroendocrine tumors // *Acta Oncol.* 1989. V. 28 (3). P. 325-329.
19. Eriksson B., Oberg K., Stridsberg M. Tumor markers in neuroendocrine tumors // *Digestion*. 2000. V. 62 (Suppl. 1). P. 33-38.
20. Lawrence B., Gustafsson B.I., Kidd M., Pavel M., Svejda B., Modlin I.M. The clinical relevance of chromogranin A as a biomarker for gastroenteropancreatic neuroendocrine tumors. *Endocrinol // Metab. Clin. North. Am.* 2011. V. 40 (1). P. 111-134.
21. Manfè A.Z., Norberto L., Marchesini M., Lumachi F. Usefulness of chromogranin A, neuron-specific enolase and 5-hydroxyindolacetic acid measurements in patients with malignant carcinoids // *In Vivo*. 2011. V. 25 (6). P. 1027-1029.
22. Biondi A., Malaguaners G., Vacane M., Beretta M., D'Agata V., Malaguanera M., Basile F., Drago F., Bertino G. Elevated serum levels of Chromogranin in hepatocellular carcinoma // *BMC Surgery*. 2012. V. 12 (Suppl. 1). P. S7.
23. Malaguanera M., Vacante M., Fichera R., Cappellani A., Cristaldi E., Motta M. Chromogranin A (CgA) serum level as a marker of progression in hepatocellular carcinoma (HCC) of elderly patients // *Arch. Gerontol. Geriatr.* 2010. V. 51. P. 81-85.
24. Ramage J.K., Davies A.H., Ardill J., Bax N., Caplin M., Grossman A., Hawkins R., McNicol A.M., Reed N., Sutton R., Thakker R., Aylwin S., Breen D., Britton K., Buchanan K., Corrie P., Gillams A., Lewington V., McCance D., Meeran K., Watkinson A. UKNETwork for Neuroendocrine Tumours. Guidelines for the management of gastroenteropancreatic neuroendocrine (including carcinoid) tumours // *Gut*. 2005. V. 54 (Suppl. 4). P. 1-16.
25. Ranno S., Motta M., Rampello E., Risino C., Bennati E., Malaguanera M. The chromogranin-A (CgA) in prostate cancer // *Arch. Gerontol. Geriatr.* 2006. V. 43. P. 117-126.
26. Defos L.J. Chromogranin A: its role in endocrine function and as an endocrine and neuroendocrine tumor marker // *Endocr. Rev.* 1991. V. 12 (2). P. 181-187.
27. Nobels F.R., Kwekkeboom D.J., Bouillon R., Lamberts S.W. Chromogranin A: its clinical value as marker of neuroendocrine tumours // *Eur. J. Clin. Invest.* 1998. V. 28 (6). P. 431-440.
28. Braga F., Ferraro S., Mozzi R., Dolci A., Panteghini M. Biological variation of neuroendocrine tumor markers chromogranin A and neuron-specific enolase // *Clin. Biochem.* 2013. V. 46 (1-2). P. 148-151.
29. Jianu C.S., Fossmark R., Syversen U., Hauso Ø., Waldum H.L. A meal test improves the specificity of chromogranin A as a marker of neuroendocrine neoplasia // *Tumour Biol.* 2010. V. 31 (5). P. 373-380.
30. Stridsberg M., Eriksson B., Fellström B., Kristiansson G., Tiensuu Janson E. Measurements of chromogranin B can serve as a complement to chromogranin A // *Regul. Pept.* 2007. V. 139 (1-3). P. 80-83.
31. Panzuto F., Severi C., Cannizzaro R., Falconi M., Angeletti S., Pasquali A., Corleto V.D., Annibale B., Buonadonna A., Pederzoli P., delle Fave G. Utility of combined use of plasma levels of chromogranin A and pancreatic polypeptide in the diagnosis of gastrointestinal and pancreatic endocrine tumors // *J. Endocrinol. Invest.* 2004. V. 27 (1). P. 6-11.
32. Walter T., Chardon L., Chopin-Ialy X., Raverot V., Caffin A.G., Chayvialle J.A., Scoazec J.Y., Lombard-Bohas C. Is the combination of chromogranin A and pancreatic polypeptide serum determinations of interest in the diagnosis and follow-up of gastro-entero-pancreatic neuroendocrine tumours? // *Eur. J. Cancer*. 2012. V. 48 (12). P. 1766-1773.
33. Campana D., Nori F., Piscitelli L., Morselli-Labate A.M., Pezzilli R., Corinaldesi R., Tomassetti P. Chromogranin A: is it a useful marker of neuroendocrine tumors? // *J. Clin. Oncol.* 2007. V. 25 (15). P. 1967-1973.
34. Yao J.C., Pavel M., Phan A.T., Kulke M.H., Hoosen S., St Peter J., Cherfi A., Öberg K.E. Chromogranin A and neuron-specific enolase as

- prognostic markers in patients with advanced pNET treated with everolimus // *J. Clin. Endocrinol. Metab.* 2011. V. 96 (12). P. 3741-3749.
35. Oberg K. Diagnostic Pathways // *Handbook of neuroendocrine tumors. Their current and future management.* Bristol, 2006. P. 103-119.
 36. Lesurtel M., Soll C., Graf R., Clavien P.A. Role of serotonin in the hepato-gastrointestinal tract: an old molecule for new perspectives // *Cell Mol. Life Sci.* 2008. V. 65 (6). P. 940-952.
 37. Vinik E., Silva M.P., Vinik A.I. Measuring the relationship of quality of life and health status, including tumor burden, symptoms, and biochemical measures in patients with neuroendocrine tumors // *Endocrinol. Metab. Clin. North Am.* 2011. V. 40 (1). P. 97-109.
 38. Bhattacharyya S., Davar J., Dreifus J., Caplin C.M. Carcinoid heart disease // *Circulation.* 2007. V. 116 (24). P. 2860-2865.
 39. Kema I.P., de Vries E.G., Muskiet F.A. Measurement of 5-HIAA in urine // *Ann. Clin. Biochem.* 1995. V. 32 (Pt. 1). P. 102-104.
 40. Feldman J.M., Lee E.M. Serotonin content of foods: effect on urinary excretion of 5-hydroxyindoleacetic acid // *Am. J. Clin. Nutr.* 1985. V. 42 (4). P. 639-643.
 41. Zuetenhorst J.M., Korse C.M., Bonfrer J.M., Peter E., Lammers C.B., Taal B.G. Daily cyclic changes in the urinary excretion of 5-hydroxyindoleacetic acid in patients with carcinoid tumors // *Clin. Chem.* 2004. V. 50 (9). P. 1634-1639.
 42. Kaltsas G.A., Besser G.M., Grossman A.B. The diagnosis and medical management of advanced neuroendocrine tumors // *Endocr. Rev.* 2004. V. 25 (3). P. 458-511.
 43. Ghaferi A.A., Chojnacki K.A., Long W.D., Cameron J.L., Yeo C.J. Pancreatic VIPomas: subject review and one institutional experience // *J. Gastrointest. Surg.* 2008. V. 12 (2). P. 382-393.
 44. Remme C.A., Groot G.H., Schrijver G. Diagnosis and treatment of VIPoma in a female patient // *Eur. J. Gastroenterol. Hepatol.* 2006. V. 18 (1). P. 93-99.
 45. Bloom S.R., Polak J.M., Pearse A.G. Vasoactive intestinal peptide and watery-diarrhea syndrome // *Lancet.* 1973. V. 2. P. 14-16.
 46. Ichimura T., Kondo S., Okushiba S., Morikawa T., Katoh H. A calcitonin and vasoactive intestinal peptide-producing pancreatic endocrine tumor associated with the WDHA syndrome // *Int. J. Gastrointest. Cancer.* 2003. V. 33 (2-3). P. 99-102.
 47. Delcore R., Friesen S.R. Gastrointestinal neuroendocrine tumours // *J. Am. Coll. Surg.* 1994. V. 178. P. 187-211.
 48. Masel S.L., Brennan B.A., Turner J.H., Cullingford G.L., Cullen D.J. Pancreatic vasoactive intestinal polypeptide-oma as cause of secretory diarrhea // *J. Gastroenterol. Hepatol.* 2000. V. 15 (4). P. 457-460.
 49. Nikou G.C., Toubanakis C. VIPomas: an update in diagnosis and management in a series of 11 patients // *Hepatogastroenterology.* 2005. V. 52 (64). P. 1259-1265.
 50. Barakat M.T., Meeran K., Bloom S.R. Neuroendocrine tumours // *Endocr. Relat. Cancer.* 2004. V. 11 (1). P. 1-18.
 51. Vinik A.I., Silva M.P., Woltering E.A., Go V.L., Warner R., Caplin M. Biochemical testing for neuroendocrine tumors // *Pancreas.* 2009. V. 38 (8). P. 876-889.
 52. Rehfeld J.F., Ericsson P. Supersensitive gastrin assay using antibodies raised against a cholecystokinin homolog // *Scand. J. Clin. Lab. Invest.* 2012. V. 72 (2). P. 175-179.
 53. Jensen R.T., Niederle B., Mitry E., Ramage J.K., Steinmuller T., Lewington V., Scarpa A., Sundin A., Perren A., Gross D., O'Connor J.M., Pauwels S., Kloppel G. Gastrinoma (duodenal and pancreatic) // *Neuroendocrinology.* 2006. V. 84 (3). P. 173-182.
 54. Fleury A., Fléjou J.F., Sauvanet A., Molas G., Vissuzaine C., Hammel P., Lévy P., Belghiti J., Bernades P., Ruszniewski P. Calcitonin-secreting tumors of the pancreas: about six cases // *Pancreas.* 1998. V. 16 (4). P. 545-550.
 55. Modlin I.M., Oberg K., Chung D.C., Jensen R.T., de Herder W.W., Thakker R.V., Caplin M., DelleFave G., Kaltsas G.A., Krenning E.P., Moss S.F., Nilsson O., Rindi G., Salazar R., Ruszniewski P., Sundin A. Gastroenteropancreatic neuroendocrine tumours // *Lancet Oncol.* 2008. V. 9 (1). P. 61-72.
 56. Oberg K. Circulating biomarkers in gastroenteropancreatic neuroendocrine tumours // *Endocr. Relat. Cancer.* 2011. V. 18 (Suppl. 1). P. 17-25.
 57. O'Toole D., Grossman A., Gross D., delle Fave G., Barkmanova J., O'Connor J., Pape U.F., Plöckinger U. ENETS Consensus Guidelines for the Standards of Care in Neuroendocrine Tumors: biochemical markers // *Neuroendocrinology.* 2009. V. 90 (2). P. 194-202.
 58. Singh S., Law C. Chromogranin A: a sensitive biomarker for the detection and post-treatment monitoring of gastroenteropancreatic neuroendocrine tumors // *Expert. Rev. Gastroenterol. Hepatol.* 2012. V. 6 (3). P. 313-334.
 59. Stivanello M., Berruti A., Torta M., Termine A., Tampellini M., Gorzegno G., Angeli A., Dogliotti L. Circulating chromogranin A in the assessment of patients with neuroendocrine tumours. A single institution experience // *Ann. Oncol.* 2001. V. 12 (Suppl. 2). P. 73-77.
 60. Tomassetti P., Migliori M., Simoni P., Casadei R., De lasio R., Corinaldesi R., Gullò L. Diagnostic value of plasma chromogranin A in neuroendocrine tumours // *Eur. J. Gastroenterol. Hepatol.* 2001. V. 13 (1). P. 55-58.
 61. Zatelli M.C., Torta M., Leon A., Ambrosio M.R., Gion M., Tomassetti P., De Braud F., delle Fave G., Dogliotti L., Degli Uberti E.C. Chromogranin A as a marker of neuroendocrine neoplasia: an Italian Multicenter Study // *Endocr. Relat. Cancer.* 2007. V. 14 (2). P. 473-482.
 62. Nikou G.C., Marinou K., Thomakos P., Papageorgiou D., Sanzani-dis V., Nikolaou P., Kosmidis C., Moulakakis A., Mallas E. Chromogranin A levels in diagnosis, treatment and follow-up of 42 patients with non-functioning pancreatic endocrine tumours // *Pancreatol.* 2008. V. 8 (4-5). P. 510-519.
 63. Janson E.T., Holmberg L., Stridsberg M., Erikson B., Theodorsson E., Wilander E., Oberg K. Carcinoid tumors. Analysis of prognostic factors and survival in 301 patients from a referral center // *Ann. Oncol.* 1997. V. 8 (7). P. 685-690.
 64. Welin S., Stridsberg M., Cunningham J., Granberg D., Skogseid B., Oberg K., Eriksson B., Janson E.T. Elevated plasma chromogranin A is the first indication of recurrence in radically operated midgut carcinoid tumors // *Neuroendocrinology.* 2009. V. 89 (3). P. 302-307.
 65. Pirker R.A., Pont J., Pöhl R., Schütz W., Griesmacher A., Müller M.M. Usefulness of chromogranin A as a marker for detection of relapses of carcinoid tumours // *Clin. Chem. Lab. Med.* 1998. V. 36 (11). P. 837-840.
 66. Massironi S., Conte D., Sciola V., Spampatti M.P., Ciafardini C., Valenti L., Rossi R.E., Peracchi M. Plasma chromogranin A response to octreotide test: prognostic value for clinical outcome in endocrine digestive tumors // *Am. J. Gastroenterol.* 2010. V. 105 (9). P. 2072-2078.
 67. Nehar D., Lombard-Bohas C., Olivieri S., Claustral B., Chayvialle J.A., Penes M.C., Sassolas G., Borson-Chazot F. Interest of Chromogranin A for diagnosis and follow-up of endocrine tumours // *Clin. End.* 2004. V. 60 (5). P. 644-652.
 68. Arnold R., Wilke A., Rinke A., Mayer C., Kann P.H., Klose K.J., Scherag A., Hahmann M., Müller H.H., Barth P. Plasma chromogranin A as marker for survival in patients with metastatic endocrine gastroenteropancreatic tumors // *Clin. Gastroenterol. Hepatol.* 2008. V. 6 (7). P. 820-827.
 69. Turner N.C., Strauss S.J., Sarker D., Gillmore R., Kirkwood A., Hackshaw A., Papadopoulos A., Bell J., Kayani I., Toumpanakis C., Grillo F., Mayer A., Hochhauser D., Begent R.H., Caplin M.E., Meyer T. Chemotherapy with 5-fluorouracil, cisplatin and streptozocin for neuroendocrine tumours // *Br. J. Cancer.* 2010. V. 102 (7). P. 1106-1112.
 70. Кушлинский H.Е., Любимова H.В. Биохимические маркеры в диагностике нейроэндокринных опухолей // *Клиническая лабораторная диагностика.* 2014. Т. 59 (7). С. 4-11.
 71. Любимова H.В., Кушлинский H.Е. Биохимические маркеры нейроэндокринных опухолей // *Вопросы биологической, медицинской и фармацевтической химии.* 2014. Т. 1. С. 1-11.
 72. Malaquarnera M., Cristaldi E., Cammaleri L., Colonna V., Lipari H., Capici A., Cavallaro A., Beretta M., Alessandria I., Luca S., Motta M. Elevated chromogranin A (CgA) serum levels in the patients with advanced pancreatic cancer // *Arch. Gerontol. Geriatr.* 2009. V. 48. P. 213-217.
 73. Kema I.P., de Vries E.G., Slooff M.J., Biesma B., Muskiet F.A. Serotonin, catecholamines, histamine, and their metabolites in urine, platelets, and tumor tissue of patients with carcinoid tumors // *Clin. Chem.* 1994. V. 40 (1). P. 86-95.

Поступила в редакцию 2 марта 2016 г.

UDC 616-006
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-515-531

BIOCHEMICAL MARKERS OF NEUROENDOCRINAL TUMORS

© N.V. Lyubimova, T.K. Churikova, M.G. Toms, N.E. Kushlinskiy

The review considers common concepts of neuroendocrinal tumors (NET). Unlike the other tumors, NET synthesize a variety of biologically active substances (hormones, vasoactive peptides, amines), which is their main feature with multiple consequences which lead to the development of distinct clinical presentations. The most important circulating biomarkers of NET are characterized with a description of their biological effects, analytical aspects and different endogenous and exogenous factors influencing on their determination. The clinical value and algorithm for their use in different types of NET are presented. The diagnostic sensitivity of CgA as the most significant biomarker, and the recommendations about its using in diagnostics, monitoring and prognosis of NETs are characterized.

Key words: neuroendocrinal tumor; biochemical markers; diagnostics; monitoring; prognosis.

REFERENCES

1. Barter R., Pearse A.G. Mammalian enterochromaffin cells as the source of serotonin (5-hydroxytryptamin). *J. Pathol. Bacteriol.*, 1955, no. 69 (1-2), pp. 25-31.
2. Esparger V., Avero B. Identification of enteroamine the specific hormone of the enterochromaffine cell system, as 5-hydroxytryptamine. *Nature*, 1952, no. 169 (4306), pp. 800-801.
3. Caplin M.E., Buscombe J.R., Hilson A.J., Jones A.L., Watkinson A.F., Burroughs A.K. Carcinoid tumour. *Lancet*, 1998, no. 352 (9130), pp. 799-805.
4. Kulke M.H., Mayer R.J. Carcinoid tumors. *N. Engl. J. Med.*, 1999, no. 340 (11), pp. 858-868.
5. Modlin I.M., Latic I., Zikusoka M., Kidd M., Eick G., Chan A.K. Gastrointestinal carcinoids: the evolution of diagnostic strategies. *J. Clin. Gastroenterol.*, 2006, no. 40 (7), pp. 572-582.
6. Aunis D., Metz-Boutigue M.H. Chromogranins: current concepts. Structural and functional aspects. *Adv. Exp. Med. Biol.*, 2000, no. 482, pp. 21-38.
7. Feldman S.A., Eiden L.E. The chromogranins: their roles in secretion from neuroendocrine cells and as markers for neuroendocrine neoplasia. *Endocr. Pathol.*, 2003, no. 14 (1), pp. 3-23.
8. Louthan O. Chromogranin A in physiology and oncology. *Folia Biol.*, 2011, no. 57 (5), pp. 173-181.
9. Ardill J.E. Circulating markers for endocrine tumours of the gastroenteropancreatic tract. *Ann. Clin. Biochem.*, 2008, no. 45 (6), pp. 539-559.
10. Ferrari L., Seregini E., Bajetta E., Martinetti A., Bombardieri E. The biological characteristics of chromogranin A and its role as a circulating marker in neuroendocrine tumours. *Anticancer Res.*, 1999, no. 19 (4C), pp. 3415-3427.
11. Modlin I.M., Gustafsson B.I., Moss S.F., Pavel M., Tsolakis A.V., Kidd M. Chromogranin A – biological function and clinical utility in neuro endocrine tumor disease. *Ann. Surg. Oncol.*, 2010, no. 17 (9), pp. 2427-2443.
12. O'Connor D.T., Deftos L.J. Secretion of chromogranin A by peptide-producing endocrine neoplasms. *N. Engl. J. Med.*, 1986, no. 314 (18), pp. 1145-1151.
13. Sobol R.E., O'Connor D.T., Addison J., Suchocki K., Royston I., Deftos L.J. Elevated serum chromogranin A concentrations in small-cell lung carcinoma. *Ann. Intern. Med.*, 1986, no. 105 (5), pp. 698-700.
14. Sobol R.E., Memoli V., Deftos L.J. Hormone-negative chromogranin A-positive endocrine tumors. *N. Engl. J. Med.*, 1989, no. 320 (7), pp. 444-446.
15. Bajetta E., Ferrari L., Martinetti A., Celio L., Procopio G., Artale S., Zilembo N., Di Bartolomeo M., Seregini E., Bombardieri E. Chromogranin A, neuron specific enolase, carcinoembryonic antigen, and hydroxyindole acetic acid evaluation in patients with neuroendocrine tumors. *Cancer*, 1999, no. 86 (5), pp. 858-865.
16. Bílek R., Safarik L., Ciprová V., Vlcek P., Lisá L. Chromogranin A, a member of neuroendocrine secretory proteins as a selective marker for laboratory diagnosis of pheochromocytoma. *Physiol. Res.*, 2008, no. 57 (Suppl. 1), pp. 171-179.
17. Deftos L.J., O'Connor D.T., Wilson C.B., Fitzgerald P.A. Human pituitary tumors secrete chromogranin-A. *J. Clin. Endocrinol. Metab.*, 1989, no. 68 (5), pp. 869-872.
18. Eriksson B., Arnberg H., Oberg K., Hellman U., Lundqvist G., Wernstedt C., Wilander E. Chromogranins – new sensitive markers for neuroendocrine tumors. *Acta Oncol.*, 1989, no. 28 (3), pp. 325-329.
19. Eriksson B., Oberg K., Stridsberg M. Tumor markers in neuroendocrine tumors. *Digestion*, 2000, no. 62 (Suppl. 1), pp. 33-38.
20. Lawrence B., Gustafsson B.I., Kidd M., Pavel M., Svejda B., Modlin I.M. The clinical relevance of chromogranin A as a biomarker for gastroenteropancreatic neuroendocrine tumors. *Endocrinol. Metab. Clin. North. Am.*, 2011, no. 40 (1), pp. 111-134.
21. Manfè A.Z., Norberto L., Marchesini M., Lumachi F. Usefulness of chromogranin A, neuron-specific enolase and 5-hydroxyindolacetic acid measurements in patients with malignant carcinoids. *In Vivo*, 2011, no. 25 (6), pp. 1027-1029.
22. Biondi A., Malaguaners G., Vacane M., Beretta M., D'Agata V., Malaguanera M., Basile F., Drago F., Bertino G. Elevated serum levels of Chromogranin in hepatocellular carcinoma. *BMC Surgery*. 2012, no. 12 (Suppl. 1). P. S7.
23. Malaguanera M., Vacante M., Fichera R., Cappellani A., Cristaldi E., Motta M. Chromogranin A (CgA) serum level as a marker of progression in hepatocellular carcinoma (HCC) of elderly patients. *Arch. Gerontol. Geriatr.*, 2010, no. 51, pp. 81-85.

24. Ramage J.K., Davies A.H., Ardill J., Bax N., Caplin M., Grossman A., Hawkins R., McNicol A.M., Reed N., Sutton R., Thakker R., Aylwin S., Breen D., Britton K., Buchanan K., Corrie P., Gillams A., Lewington V., McCance D., Meeran K., Watkinson A. UKNETwork for Neuroendocrine Tumours. Guidelines for the management of gastroenteropancreatic neuroendocrine (including carcinoid) tumours. *Gut*, 2005, no. 54 (Suppl. 4), pp. 1-16.
25. Ranno S., Motta M., Rampello E., Risino C., Bennati E., Malaguarnera M. The chromogranin-A (CgA) in prostate cancer. *Arch. Gerontol. Geriatr.*, 2006, no. 43, pp. 117-126.
26. Deftos L.J. Chromogranin A: its role in endocrine function and as an endocrine and neuroendocrine tumor marker. *Endocr. Rev.*, 1991, no. 12 (2), pp. 181-187.
27. Nobels F.R., Kwekkeboom D.J., Bouillon R., Lamberts S.W. Chromogranin A: its clinical value as marker of neuroendocrine tumours. *Eur. J. Clin. Invest.*, 1998, no. 28 (6), pp. 431-440.
28. Braga F., Ferraro S., Mozzi R., Dolci A., Panteghini M. Biological variation of neuroendocrine tumor markers chromogranin A and neuron-specific enolase. *Clin. Biochem.*, 2013, no. 46 (1-2), pp. 148-151.
29. Jianu C.S., Fossmark R., Syversen U., Hauso Ø., Waldum H.L. A meal test improves the specificity of chromogranin A as a marker of neuroendocrine neoplasia. *Tumour Biol.*, 2010, no. 31 (5), pp. 373-380.
30. Stridsberg M., Eriksson B., Fellström B., Kristiansson G., Tiensuu Janson E. Measurements of chromogranin B can serve as a complement to chromogranin A. *Regul. Pept.*, 2007, no. 139 (1-3), pp. 80-83.
31. Panzuto F., Severi C., Cannizzaro R., Falconi M., Angeletti S., Pasquali A., Corleto V.D., Annibale B., Buonadonna A., Pederzoli P., delle Fave G. Utility of combined use of plasma levels of chromogranin A and pancreatic polypeptide in the diagnosis of gastrointestinal and pancreatic endocrine tumors. *J. Endocrinol. Invest.*, 2004, no. 27 (1), pp. 6-11.
32. Walter T., Chardon L., Chopin-laly X., Raverot V., Caffin A.G., Chayvialle J.A., Scoazec J.Y., Lombard-Bohas C. Is the combination of chromogranin A and pancreatic polypeptide serum determinations of interest in the diagnosis and follow-up of gastro-entero-pancreatic neuroendocrine tumours? *Eur. J. Cancer.*, 2012, no. 48 (12), pp. 1766-1773.
33. Campana D., Nori F., Piscitelli L., Morselli-Labate A.M., Pezzilli R., Corinaldesi R., Tomassetti P. Chromogranin A: is it a useful marker of neuroendocrine tumors? *J. Clin. Oncol.*, 2007, no. 25 (15), pp. 1967-1973.
34. Yao J.C., Pavel M., Phan A.T., Kulke M.H., Hoosen S., St Peter J., Cherfi A., Öberg K.E. Chromogranin A and neuron-specific enolase as prognostic markers in patients with advanced pNET treated with everolimus. *J. Clin. Endocrinol. Metab.*, 2011, no. 96 (12), pp. 3741-3749.
35. Oberg K. Diagnostic Pathways. *Handbook of neuroendocrine tumors. Their current and future management*. Bristol, 2006, pp. 103-119.
36. Lesurtel M., Soll C., Graf R., Clavien P.A. Role of serotonin in the hepato-gastrointestinal tract: an old molecule for new perspectives. *Cell. Mol. Life Sci.*, 2008, no. 65 (6), pp. 940-952.
37. Vinik E., Silva M.P., Vinik A.I. Measuring the relationship of quality of life and health status, including tumor burden, symptoms, and biochemical measures in patients with neuroendocrine tumors. *Endocrinol. Metab. Clin. North Am.*, 2011, no. 40 (1), pp. 97-109.
38. Bhattacharyya S., Davar J., Dreifus J., Caplin C.M. Carcinoid heart disease. *Circulation*, 2007, no. 116 (24), pp. 2860-2865.
39. Kema I.P., de Vries E.G., Muskiet F.A. Measurement of 5-HIAA in urine. *Ann. Clin. Biochem.*, 1995, no. 32 (Pt. 1), pp. 102-104.
40. Feldman J.M., Lee E.M. Serotonin content of foods: effect on urinary excretion of 5-hydroxyindoleacetic acid. *Am. J. Clin. Nutr.*, 1985, no. 42 (4), pp. 639-643.
41. Zietenhorst J.M., Korse C.M., Bonfrer J.M., Peter E., Lamers C.B., Taal B.G. Daily cyclic changes in the urinary excretion of 5-hydroxyindoleacetic acid in patients with carcinoid tumors. *Clin. Chem.*, 2004, no. 50 (9), pp. 1634-1639.
42. Kaltsas G.A., Besser G.M., Grossman A.B. The diagnosis and medical management of advanced neuroendocrine tumors. *Endocr. Rev.*, 2004, no. 25 (3), pp. 458-511.
43. Ghaferi A.A., Chojnacki K.A., Long W.D., Cameron J.L., Yeo C.J. Pancreatic VIPomas: subject review and one institutional experience. *J. Gastrointest. Surg.*, 2008, no. 12 (2), pp. 382-393.
44. Remme C.A., Groot G.H., Schrijver G. Diagnosis and treatment of VIPoma in a female patient. *Eur. J. Gastroenterol. Hepatol.*, 2006, no. 18 (1), pp. 93-99.
45. Bloom S.R., Polak J.M., Pearse A.G. Vasoactive intestinal peptide and watery-diarrhea syndrome. *Lancet*, 1973, no. 2, pp. 14-16.
46. Ichimura T., Kondo S., Okushiba S., Morikawa T., Katoh H. A calcitonin and vasoactive intestinal peptide-producing pancreatic endocrine tumor associated with the WDHA syndrome. *Int. J. Gastrointest. Cancer.*, 2003, no. 33 (2-3), pp. 99-102.
47. Delcore R., Friesen S.R. Gastrointestinal neuroendocrine tumours. *J. Am. Coll. Surg.*, 1994, no. 178, pp. 187-211.
48. Masel S.L., Brennan B.A., Turner J.H., Cullingford G.L., Cullen D.J. Pancreatic vasoactive intestinal polypeptide-oma as cause of secretory diarrhea. *J. Gastroenterol. Hepatol.*, 2000, no. 15 (4), pp. 457-460.
49. Nikou G.C., Toubanakis C. VIPomas: an update in diagnosis and management in a series of 11 patients. *Hepatogastroenterology*, 2005, no. 52 (64), pp. 1259-1265.
50. Barakat M.T., Meeran K., Bloom S.R. Neuroendocrine tumours. *Endocr. Relat. Cancer*, 2004, no. 11 (1), pp. 1-18.
51. Vinik A.I., Silva M.P., Woltering E.A., Go V.L., Warner R., Caplin M. Biochemical testing for neuroendocrine tumors. *Pancreas*, 2009, no. 38 (8), pp. 876-889.
52. Rehfeld J.F., Ericsson P. Supersensitive gastrin assay using antibodies raised against a cholecystokinin homolog. *Scand. J. Clin. Lab. Invest.*, 2012, no. 72 (2), pp. 175-179.
53. Jensen R.T., Niederle B., Mitry E., Ramage J.K., Steinmuller T., Lewington V., Scarpa A., Sundin A., Perren A., Gross D., O'Connor J.M., Pauwels S., Kloppel G. Gastrinoma (duodenal and pancreatic). *Neuroendocrinology*, 2006, no. 84 (3), pp. 173-182.
54. Fleury A., Fléjou J.F., Sauvanet A., Molas G., Vissuzaine C., Hammel P., Lévy P., Belghiti J., Bernades P., Ruszniewski P. Calcitonin-secreting tumors of the pancreas: about six cases. *Pancreas*, 1998, no. 16 (4), pp. 545-550.
55. Modlin I.M., Oberg K., Chung D.C., Jensen R.T., de Herder W.W., Thakker R.V., Caplin M., DelleFave G., Kaltsas G.A., Krenning E.P., Moss S.F., Nilsson O., Rindi G., Salazar R., Ruszniewski P., Sundin A. Gastroenteropancreatic neuroendocrine tumours. *Lancet Oncol.*, 2008, no. 9 (1), pp. 61-72.
56. Oberg K. Circulating biomarkers in gastroenteropancreatic neuroendocrine tumours. *Endocr. Relat. Cancer*, 2011, no. 18 (Suppl. 1), pp. 17-25.
57. O'Toole D., Grossman A., Gross D., delle Fave G., Barkmanova J., O'Connor J., Pape U.F., Plöckinger U. ENETS Consensus Guidelines for the Standards of Care in Neuroendocrine Tumors: biochemical markers. *Neuroendocrinology*, 2009, no. 90 (2), pp. 194-202.
58. Singh S., Law C. Chromogranin A: a sensitive biomarker for the detection and post-treatment monitoring of gastroenteropancreatic neuroendocrine tumors. *Expert. Rev. Gastroenterol. Hepatol.*, 2012, no. 6 (3), pp. 313-334.
59. Stivanello M., Berruti A., Torta M., Termine A., Tampellini M., Gorzegno G., Angeli A., Dogliotti L. Circulating chromogranin A in the assessment of patients with neuroendocrine tumours. A single institution experience. *Ann. Oncol.*, 2001, no. 12 (Suppl. 2), pp. 73-77.
60. Tomassetti P., Migliori M., Simoni P., Casadei R., De Iasio R., Corinaldesi R., Gullo L. Diagnostic value of plasma chromogranin A in neuroendocrine tumours. *Eur. J. Gastroenterol. Hepatol.*, 2001, no. 13 (1), pp. 55-58.

61. Zatelli M.C., Torta M., Leon A., Ambrosio M.R., Gion M., Tomassetti P., De Braud F., delle Fave G., Dogliotti L., Degli Uberti E.C. Chromogranin A as a marker of neuroendocrine neoplasia: an Italian Multicenter Study. *Endocr. Relat. Cancer*, 2007, no. 14 (2), pp. 473-482.
62. Nikou G.C., Marinou K., Thomakos P., Papageorgiou D., Sanzanidis V., Nikolaou P., Kosmidis C., Moulakakis A., Mallas E. Chromogranin a levels in diagnosis, treatment and follow-up of 42 patients with non-functioning pancreatic endocrine tumours. *Pancreatol.*, 2008, no. 8 (4-5), pp. 510-519.
63. Janson E.T., Holmberg L., Stridsberg M., Erikson B., Theodorsson E., Wilander E., Oberg K. Carcinoid tumors. Analysis of prognostic factors and survival in 301 patients from a referral center. *Ann. Oncol.*, 1997, no. 8 (7), pp. 685-690.
64. Welin S., Stridsberg M., Cunningham J., Granberg D., Skogseid B., Oberg K., Eriksson B., Janson E.T. Elevated plasma chromogranin A is the first indication of recurrence in radically operated midgut carcinoid tumors. *Neuroendocrinology*, 2009, no. 89 (3), pp. 302-307.
65. Pirker R.A., Pont J., Pöhl R., Schütz W., Griesmacher A., Müller M.M. Usefulness of chromogranin A as a marker for detection of relapses of carcinoid tumours. *Clin. Chem. Lab. Med.*, 1998, no. 36 (11), pp. 837-840.
66. Massironi S., Conte D., Sciola V., Spampatti M.P., Ciafardini C., Valenti L., Rossi R.E., Peracchi M. Plasma chromogranin A response to octreotide test: prognostic value for clinical outcome in endocrine digestive tumors. *Am. J. Gastroenterol.*, 2010, no. 105 (9), pp. 2072-2078.
67. Nehar D., Lombard-Bohas C., Olivieri S., Claustal B., Chayvialle J.A., Penes M.C., Sassolas G., Borson-Chazot F. Interest of Chromogranin A for diagnosis and follow-up of endocrine tumours. *Clin. End.*, 2004, no. 60 (5), pp. 644-652.
68. Arnold R., Wilke A., Rinke A., Mayer C., Kann P.H., Klose K.J., Scherag A., Hahmann M., Müller H.H., Barth P. Plasma chromogranin A as marker for survival in patients with metastatic endocrine gastroenteropancreatic tumors. *Clin. Gastroenterol. Hepatol.*, 2008, no. 6 (7), pp. 820-827.
69. Turner N.C., Strauss S.J., Sarker D., Gillmore R., Kirkwood A., Hackshaw A., Papadopolou A., Bell J., Kayani I., Toumpanakis C., Grillo F., Mayer A., Hochhauser D., Begent R.H., Caplin M.E., Meyer T. Chemotherapy with 5-fluorouracil, cisplatin and streptozocin for neuroendocrine tumours. *Br. J. Cancer*, 2010, no. 102 (7), pp. 1106-1112.
70. Kushlinskiy N.E., Lyubimova N.V. Biokhimicheskie markery v diagnostike neyroendokrinnykh opukholey. *Klinicheskaya laboratornaya diagnostika*, 2014, no. 59 (7), pp. 4-11.
71. Lyubimova N.V., Kushlinskiy N.E. Biokhimicheskie markery neyroendokrinnykh opukholey. *Voprosy biologicheskoy, meditsinskoy i farmatsevticheskoy khimii*, 2014, no. 1, pp. 1-11.
72. Malaguarnera M., Cristaldi E., Cammaleri L., Colonna V., Lipari H., Capici A., Cavallaro A., Beretta M., Alessandria I., Luca S., Motta M. Elevated chromogranin A (CgA) serum levels in the patients with advanced pancreatic cancer. *Arch. Gerontol. Geriatr.*, 2009, no. 48, pp. 213-217.
73. Kema I.P., de Vries E.G., Slooff M.J., Biesma B., Muskiet F.A. Serotonin, catecholamines, histamine, and their metabolites in urine, platelets, and tumor tissue of patients with carcinoid tumors. *Clin. Chem.*, 1994, no. 40 (1), pp. 86-95.

Received 2 March 2016

Любимова Нина Васильевна, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, доктор биологических наук, профессор лаборатории клинической биохимии, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Lyubimova Nina Vasilevna, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Doctor of Biology, Professor of Clinical Biochemistry Laboratory, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Чурикова Татьяна Константиновна, Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова, г. Москва, Российская Федерация, клинический ординатор кафедры клинической биохимии и лабораторной диагностики, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Churikova Tatyana Konstantinovna, Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, Russian Federation, Resident of Clinical Biochemistry and Laboratory Diagnosis Department, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Томс Марина Геннадиевна, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, кандидат биологических наук, старший научный сотрудник лаборатории клинической биохимии, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Toms Marina Gennadievna, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Candidate of Biology, Senior Research Worker of Clinical Biochemistry Department, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Кушлинский Николай Евгеньевич, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, член-корреспондент РАМН, зав. лабораторией клинической биохимии, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

Kushlinskiy Nikolay Evgenevich, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Correspondent-member of Russian Academy of Medical Sciences, Head of Clinical Biochemistry Laboratory, e-mail: biochimia@mtu-net.ru

УДК 616-006

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-532-540

КЛИНИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФАКТОРА РОСТА ЭНДОТЕЛИЯ СОСУДОВ В СЫВОРОТКЕ КРОВИ И АКТИВАТОРА ПЛАЗМИНОГЕНА УРОКИНАЗНОГО ТИПА В ОПУХОЛИ ПРИ ЛОКАЛИЗОВАННОМ РАКЕ МОЛОЧНОЙ ЖЕЛЕЗЫ

© Л.К. Овчинникова, О.И. Костылева, А.А. Тулеуова, М.В. Грицкевич,
В.Д. Ермилова, О.В. Кузнецова, Л.Т. Лякина, Н.А. Огнерубов, И.К. Воротников

Иммуноферментными методами исследовали содержание VEGF в сыворотке крови и uPA в цитозоле опухолей 248 больных местно-распространенным РМЖ и 55 практически здоровых женщин. Не выявлено связи исходного уровня исследуемых показателей с возрастом, репродуктивной функцией и (РЭ)(PII)(HER2-neu)-рецепторным статусом больных. Многофакторный анализ выявил достоверную связь уровней VEGF и uPA со стадией и степенью злокачественности РМЖ. Обнаружена корреляция между содержанием VEGF в сыворотке крови и uPA в ткани опухоли больных раком молочной железы ранних стадий в общей группе ($r = 0,67$; $p = 0,001$), более выраженная в группе пациенток с дольковым инфильтративным раком ($r = 0,92$; $p = 0,001$), тогда как в группе больных с протоковым инфильтративным РМЖ эта зависимость была значительно слабее ($r = 0,49$; $p = 0,01$).

Ключевые слова: VEGF; uPA; рак молочной железы.

ВВЕДЕНИЕ

Большое внимание в онкологии уделяется проблеме неоангиогенеза в РМЖ, поскольку совершенно очевидно, что, начиная с самых ранних стадий, опухоль не может развиваться в отсутствие параллельно образующейся сети микрососудов, обеспечивающей процессы питания и дыхания клеток. Важнейшим активатором неоангиогенеза является фактор роста эндотелия сосудов (VEGF), стимулирующий пролиферацию и миграцию эндотелиоцитов, uPA играет ключевую роль в процессах местного распространения опухолей, способствуя деградации элементов ВКМ и облегчению миграции эндотелиоцитов.

В последние 30 лет в фокусе внимания клиницистов и исследователей находится процесс неоангиогенеза в злокачественных опухолях, в т. ч. при раке молочной железы (РМЖ) это связано с тем, что, начиная с самых ранних стадий, новообразование не может развиваться в отсутствие параллельно образующейся сети микрососудов, обеспечивающей процессы питания и дыхания клеток [1–3].

Активность опухолевого неоангиогенеза до недавнего времени оценивали по микроскопической плотности сосудов в опухолевой ткани. Молекулярно-биологические исследования последних лет выявили целый ряд регуляторных молекул с ангиогенной и антиангиогенной активностью, динамическое равновесие которых обеспечивает формирование микроциркуляторного русла в опухоли.

Важным активатором неоангиогенеза считают фактор роста эндотелия сосудов (VEGF), он же – фактор проницаемости сосудов, оказывающий свои эффекты как путем эндокринного, так и, по последним данным, паракринного механизма. Доказано, что этот уникальный белок, в отличие от других известных факторов

роста, обладает митогенной активностью только в отношении эндотелиоцитов [4]. В реализации эффектов VEGF включается не только общий для большинства рецепторных тирозинкиназ митоген-активируемый протеинкиназный каскад, регулирующий экспрессию генов, связанных с пролиферацией, но и протоонкоген *c-ets-1*, кодирующий транскрипционный фактор Ets-1. Методом гибридизации *in situ* показано, что *c-ets-1* экспрессируется в эндотелиоцитах на ранних стадиях ангиогенеза [5]. Его продукт Ets-1 способствует проявлению ангиогенного фенотипа этих клеток, активируя транскрипцию генов и последующий синтез белков важнейших протеаз, расщепляющих компоненты внеклеточного матрикса (ВКМ), – активатора плазминогена урокиназного типа (uPA), стромелизина, коллагеназы 1, некоторых матриксных металлопротеаз, а также β_2 -интегрина. Активация протеаз имеет три важных для стимуляции ангиогенеза последствия: облегчает дезинтеграцию эндотелиальных клеток и их инвазию в базальный слой сосудов, генерирует продукты деградации ВКМ, способствующие хемотаксису эндотелиоцитов, а также активирует и мобилизует находящиеся в ВКМ факторы роста.

Впервые данные о взаимосвязи между экспрессией VEGF и активностью ангиогенеза на клиническом материале были получены М. Toi et al. в 1994–1996 гг. [6–8]. В 1996 г. было показано [9], что экспрессия VEGF существенно выше в опухолевых клетках по сравнению с нормальными. В соответствии с классической моделью регуляции ангиогенеза в опухолях в РМЖ также работают паракринные механизмы, когда VEGF, продуцируемый опухолевыми клетками, воздействует на рецепторы, находящиеся на эндотелиоцитах. В подтверждение этой гипотезы в литературе имеется большое количество данных о выраженной экспрессии VEGF в клетках РМЖ и повышенной экспрессии ре-

цепторов VEGF, иллюстрирующих паракринные эффекты VEGF при РМЖ [10–15].

А.М. Щербakov и соавт. (2005) [16] продемонстрировали увеличение уровня VEGF и его рецепторов 1-го и 2-го типов в опухолях 39 больных РМЖ по сравнению с окружающими гистологически неизменными тканями. Уже на ранних стадиях заболевания авторы наблюдали повышенную экспрессию VEGF в опухоли и его рецепторов 1-го типа, что, по мнению многих исследователей, является негативным фактором прогноза заболевания и высокого риска метастазирования [4]. Прогностическое значение VEGF при нераспространенном РМЖ исследовано и подтверждено в работе В.К. Linderholm et al. (2008) у 525 больных РМЖ с T₁₋₂N₀M₀ стадиях [17]. По данным авторов, показатели выживаемости больных с цитозольной фракцией VEGF ниже медианного уровня (2,40 мг/мг ДНК) была достоверно выше, чем у больных с более высоким уровнем VEGF. При многофакторном анализе уровень VEGF оказался более значимым независимым фактором прогноза, по сравнению с другими известными показателями.

В исследовании U. Eppenberger et al. (1998) [18] в группе из 495 больных с нематастатическим РМЖ было показано, что VEGF является наиболее важным прогностическим фактором. VEGF учитывается в т. н. Ноттингемском прогностическом индексе, который используется в формировании групп высокого риска среди больных ранними стадиями РМЖ [19].

Параллельно с исследованиями клинического и прогностического значения экспрессии VEGF в опухолевых тканях изучают влияние повышенной тканевой экспрессии VEGF на уровни этого белка в сыворотке/плазме крови. В конце 1990-х гг. опубликованы первые данные о высоком уровне VEGF в крови онкологических больных [4]. J. Adams et al. (2000) [20] показали, что при локализованном РМЖ наблюдали только увеличение уровня VEGF в плазме крови по сравнению с контролем. Так, в исследовании Е.С. Герштейн и соавт. (2005) [11] выявлено парадоксальное достоверное увеличение сывороточного показателя VEGF на первой стадии заболевания. Полученные в последние годы данные демонстрируют, что только уровень свободного сывороточного VEGF отражает его продукцию в опухоли, но даже этот показатель, вероятно, является комплексным и не вполне отражает степень активности неоангиогенеза в ткани РМЖ.

Цель настоящего исследования – изучение сывороточного уровня VEGF и содержания uPA в опухоли при местно распространенном РМЖ, взаимосвязь этих показателей с клинико-морфологическими характеристиками и прогнозом заболевания.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

В исследование включены 248 женщин, больных РМЖ. T₁N₀M₀ стадия была у 76/31 %, а 172/69 % – была T₂N₀M₀ стадия. Клинико-рентгенологический диагноз РМЖ у всех больных установлен впервые и подтвержден данными гистологического исследования согласно Международной гистологической классификации опухолей молочных желез (ВОЗ, 2003).

Средний возраст больных РМЖ составил $57,9 \pm 0,7$ лет (медиана – 57,5 лет). Средний возраст больных в T₁N₀M₀ и в T₂N₀M₀ стадиях опухолевого процесса не различался и составил, соответственно, $58,1 \pm 1,2$ и $57,8 \pm$

$\pm 0,8$ лет. Менструальная функция сохранена у 71 больной, а в менопаузе находились 177 пациенток.

Дольковый инфильтративный РМЖ выявлен у 27 (10,9 %) больных, протоковый инфильтративный рак – у 106 (42,7 %), смешанный – у 106 (42,7 %), слизистый – у 9 (3,6 %) пациенток.

Группу контроля составили 55 практически здоровых женщин соответствующего возраста и репродуктивного статуса.

Всем больным на 1-м этапе было произведено хирургическое лечение в объеме радикальной мастэктомии (87,5 %) или радикальной резекции (12,5 %). В послеоперационном периоде только 39 (15,7 %) больных РМЖ не получали специфического лечения, 142 (57,2 %) больным проведена лучевая терапия, 71 (28,6 %) пациентка получала химиотерапию различными препаратами (схема CMF, антрациклины), 123 (49,6 %) пациентки получали гормонотерапию.

Содержание VEGF в сыворотке крови определяли иммуноферментным методом стандартными наборами “Quantikine human VEGF” (“R&D Systems, Inc.”, США) в соответствии с инструкциями производителей. Уровень uPA определяли в цитозольной фракции наборами реактивов для иммуноферментного анализа, разработанными в лаборатории проф. Т. Benraad’a (Наймерген, Нидерланды) [21]. Измерения производили на автоматическом универсальном ридере для микропланшетов ELX800 фирмы “Bio-Tek Instruments, Inc.” (США). Концентрацию VEGF выражали в пг/мл сыворотки крови, концентрацию uPA – в нг/мг цитозольного белка. Белок определяли методом Лоури.

Уровни экспрессии РЭ и РП в опухолевой ткани определяли общепринятыми иммуногистохимическими методами, путем окрашивания парафиновых срезов ткани первичных опухолей больных РМЖ с использованием моноклональных антител (фирма “Dako”, Дания). По интенсивности экспрессии РЭ и РП в цитоплазме и ядрах опухолевых клеток больные были разделены на 2 группы: 1 группа – отсутствие экспрессии РЭ⁺ и РП⁺; 2 группа – наличие экспрессии РЭ⁺ и РП⁺.

Статистический анализ данных проводили с помощью пакета программ “Statistica 8.0” и SPSS. При выборе статистических процедур учитывали методологические требования Международного конгресса по гармонизации GCP «Статистические принципы для клинических исследований». Для выявления различий средних значений применяли однофакторный и многофакторный дисперсионный анализы. Анализ кривых выживаемости проводили методом Kaplan–Mayer, сравнения кривых выживаемости проводили методом Log–Rank с учетом поправки Бонферрони для множественных сравнений. Рассчитывали таблицы дожития с вычислением функций рисков. Многофакторный анализ влияния признаков на безрецидивную и общую выживаемость проводили с использованием модели Cox hazard proportional regression. Все различия и корреляции считали достоверными при $p < 0,05$.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Результаты анализа содержания VEGF в сыворотке крови и uPA опухолевой ткани больных РМЖ и в группе контроля представлены в табл. 1. Показано, что концентрации VEGF в сыворотке крови и uPA в опухолевой ткани у больных РМЖ были достоверно выше, чем в контрольной группе. Кроме того, выявлено дос-

товерное увеличение концентраций VEGF и uPA у пациентов с T₂N₀M₀ стадией по сравнению с T₁N₀M₀ стадией РМЖ.

Исходные уровни VEGF в сыворотке крови практически здоровых женщин колебались в пределах от 48 до 377 пг/мл. Учитывая тот факт, что только у 3 из 55 (5,5 %) женщин в группе контроля показатель VEGF в сыворотке крови превышал 300 пг/мл, этот показатель использовали как пороговый. При этом следует отметить, что только у 53 из 248 (21,4 %) больных РМЖ показатель VEGF в сыворотке крови превышал пороговый его уровень у практически здоровых женщин группы контроля.

Частота выявления значений VEGF выше порогового у больных РМЖ во T₂N₀M₀ стадии была почти в 2

раза выше, чем у больных в T₁N₀M₀ стадии опухолевого процесса (25,0 и 13,2 % соответственно).

У больных с дольковым инфильтративным РМЖ T₁₋₂N₀M₀ стадий содержание VEGF в сыворотке крови было достоверно выше, чем у больных с протоковым инфильтративным РМЖ ($p = 0,002$). Тенденция к этим различиям становилась уже заметной в группе больных РМЖ, начиная с T₁N₀M₀ стадией ($p = 0,052$). Показатели VEGF в сыворотке крови больных со слизистым строением РМЖ, напротив, были достоверно ниже, чем при дольковом инфильтративном варианте строения опухоли ($p = 0,03$) (табл. 2).

Выявлена связь исходных уровней VEGF в сыворотке крови больных РМЖ со степенью дифференцировки опухоли. Достоверно по этому показателю отли-

Таблица 1

Концентрации VEGF в сыворотке крови и uPA в опухолевой ткани больных РМЖ в контроле

Группы сравнения	Число больных	Частота значений VEGF ≥ 300 пг/мл, %, медиана	uPA, нг/мл белка, %, медиана
Контроль	55	5,5 103,0* (45–377)	0,5* (0–1,5)
T ₁₋₂ N ₀ M ₀ (общая группа)	248	21,4 185,0** (3,8–620)	1,0** (0–8,9)
T ₁ N ₀ M ₀	76	13,2 180,0 (3,8–560)	43,4 0,6*** (0–8,9)
T ₂ N ₀ M ₀	172	25,0 190,0 (28–620)	54,1 1,2**** (0–8,6)

Примечание: *—** $p = 0,001$; pT₁N₀M₀ vs T₂N₀M₀ = 0,048; T₁N₀M₀ vs контроль $p = 0,001$; pT₂N₀M₀ vs контроль = 0,0001. pT₁N₀M₀ vs T₂N₀M₀ = 0,03.

Таблица 2

Содержание VEGF в сыворотке крови больных раком молочной железы ранних стадий с учетом гистологического типа, степени злокачественности опухоли и стадии заболевания

Характеристика	I стадия		II стадия		Всего	
	N	VEGF, пг/мл M $\pm$ m (медиана)	N	VEGF, пг/мл M $\pm$ m (медиана)	N	VEGF, пг/мл M $\pm$ m (медиана)
Гистологический тип опухоли						
Дольковый инфильтративный рак	8	266,3 $\pm$ 44,8 (225,0)*	19	279,6 $\pm$ 41,4 (240,0)*	27	275,6 $\pm$ 31,5 (240,0)
Протоковый инфильтративный рак	34	170,6 $\pm$ 12,4 (182,5)**	72	201,0 $\pm$ 10,8 (182,5)**	106	191,3 $\pm$ 8,4 (182,5)
Смешанный рак	9	213,7 $\pm$ 51,3 (140,0)	21	263,5 $\pm$ 40,6 (180,0)	30	248,5 $\pm$ 32,1 (165,0)
Инвазивная карцинома	23	197,4 $\pm$ 60,0 (160,0)	52	239,3 $\pm$ 20,1 (195,0)	75	226,5 $\pm$ 15,4 (180,0)
Слизистый рак	2	152,5 $\pm$ 37,5 (152,5)	7	175,7 $\pm$ 24,4 (190,0)	9	170,6 $\pm$ 20,0 (190,0)
Степень злокачественности						
1	18	122,2 $\pm$ 13,1 (112,5) ¹	29	138,4 $\pm$ 17,3 (110,0) ³	47	132,2 $\pm$ 11,8 (110,0)
2	49	195,1 $\pm$ 11,4 (185)	102	200,9 $\pm$ 17,3 (182,5)	151	199,0 $\pm$ 7,9 (185)
3	9	326,7 $\pm$ 46,5 (310) ²	41	358 $\pm$ 21,8 (360) ⁴	50	352,4 $\pm$ 19,6 (352,5)

Примечание: *vs** p I стадия = 0,052; *vs** p II стадия = 0,015; 1vs2 p I стадия = 0,001; 3vs4 p II стадия < 0,0001.

чались больные с высокодифференцированным и низкодифференцированным РМЖ (табл. 2). Частота выявления значений VEGF ≥ 300 пг/мл в сыворотке крови 47 больных высокодифференцированным РМЖ составила 4,3 %, в группе из 151 больной с умеренной степенью злокачественности – 13,3 %, и многократно увеличивалась в группе из 50 больных с низкодифференцированной опухолью молочной железы – 62 % (различия статистически достоверны, $p = 0,0001$). Таким образом, концентрация VEGF в сыворотке крови более чем у половины больных РМЖ T₁₋₂N₀M₀ стадий с низкодифференцированной опухолью превышала пороговый уровень маркера в группе контроля. Следует отметить, что с увеличением степени злокачественности опухоли выявлено достоверное повышение уровней VEGF в сыворотке крови больных РМЖ ранних стадий ($p < 0,0001$) (табл. 2). Важно отметить, что стадия заболевания в меньшей степени была связана с уровнями VEGF в сыворотке крови ($p = 0,4$), чем степень злокачественности опухоли ($p = 0,0001$) при двухфакторном анализе.

Не обнаружено достоверных различий в показателях VEGF у больных РМЖ с учетом возраста, состояния

репродуктивной функции и рецепторного статуса опухоли (РЭ и РП), поэтому эти данные мы не приводим.

Нами обнаружена корреляционная зависимость между содержанием VEGF в сыворотке крови и uPA в ткани опухоли больных РМЖ ранних стадий в общей группе ($r = 0,67$; $p = 0,001$). Причем эта зависимость была более выражена в группе пациенток с дольковым инфильтративным строением РМЖ ($r = 0,92$; $p = 0,001$) (рис. 1), тогда как в группе больных с протоковым инфильтративным гистологическим вариантом строения опухоли эта зависимость была значительно слабее ($r = 0,49$; $p = 0,01$).

Существование такой взаимосвязи косвенно подтверждает роль VEGF и uPA в VEGF-зависимом ангиогенезе в ткани молочной железы.

Проведен ретроспективный анализ данных с целью выявления прогностической значимости VEGF в сыворотке крови больных РМЖ T₁₋₂N₀M₀ стадий. В исследование включены 2 группы больных РМЖ: 1 группу составили пациентки с рецидивом заболевания в первые 3 года от начала лечения ($n = 53$); 2 группу – больные, которые прожили 3 года без рецидива заболевания ($n = 58$) (табл. 3).

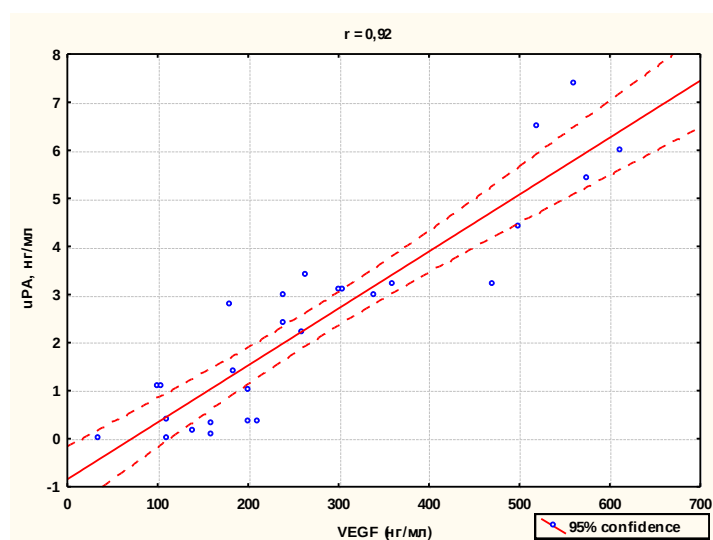


Рис. 1. Корреляционная зависимость между содержанием VEGF в сыворотке крови и uPA в ткани опухоли больных раком молочной железы с дольковым инфильтративным гистологическим вариантом строения новообразования

Таблица 3

Отдаленные результаты лечения больных РМЖ с учетом исходного содержания VEGF в сыворотке крови и стадии болезни

Содержание VEGF (пг/мл) в сыворотке крови	Показатели 3-летней безрецидивной выживаемости			
	Показатели	T ₁ N ₀ M ₀ стадия	T ₂ N ₀ M ₀ стадия	Общая группа
VEGF < 300	Число наблюдений	66	129	195
	3-летняя безрецидивная выживаемость	83,6 ± 5,8 %*	84,8 ± 4,5 %**	86,4 ± 3,1 %
	Медиана	45,8 мес.	53,1 мес.	54,3 мес.
VEGF ≥ 300	Число наблюдений	10	43	53
	3-летняя безрецидивная выживаемость	57,9 ± 2,0 %*	49,6 ± 9,4 %**	55,2 ± 8,2 %
	Медиана	36,8 мес.	36,7 мес.	36,9 мес.

Примечание: p* = 0,3; p** = 0,001.

В общей группе больных РМЖ T₁₋₂N₀M₀ стадий с рецидивом болезни в первые 3 года наблюдения выявлены достоверно более высокие исходные уровни VEGF в сыворотке крови ($335,4 \pm 24,8$ пг/мл, медиана 360) по сравнению с пациентами, у которых рецидив опухоли в эти сроки не был обнаружен ($163,7 \pm 9,7$ пг/мл, медиана 150; $p < 0,0001$). Однако следует отметить, что только при T₂N₀M₀ стадии РМЖ исходные уровни VEGF в сыворотке крови были выше у больных с рецидивом заболевания ($361,5 \pm 29,2$ пг/мл, медиана 400), чем без такового ($164,9 \pm 12,7$ пг/мл, медиана 150). При T₁N₀M₀ стадии РМЖ исходные уровни VEGF в сыворотке крови больных с рецидивом и без рецидива не различались достоверно и равнялись, соответственно, $226,9 \pm 42,1$ и $161,4 \pm 15,0$ пг/мл, медианы 207,5 и 150,0 пг/мл ($p = 0,1$).

Важно отметить, что число больных РМЖ в T₁N₀M₀ стадии с уровнем VEGF в сыворотке крови выше его порогового значения без рецидива заболевания в течение первых 3-х лет наблюдения составило 2 из 20 (10 %), а в группе с рецидивом в эти сроки – 4 из 14 (28, 6 %), различия недостоверны ($p = 0,2$). В группе больных РМЖ во T₂N₀M₀ стадии эти частоты составили: 3 из 38 (7,9 %) в группе больных без рецидива и 25 из 39 (64,1 %) в группе больных с рецидивом болезни, различия достоверны ($p = 0,0001$). Таким образом, прогностическая значимость порогового уровня VEGF в сыворотке крови больных РМЖ относительно раннего (в течение 3 лет наблюдения) рецидива заметна только при T₂N₀M₀ стадии.

Сравнение показателей 3-летней безрецидивной выживаемости провели у больных РМЖ с учетом порогового значения VEGF в сыворотке крови и стадии заболевания. Так, в группе больных РМЖ в T₁N₀M₀

стадии обнаружена лишь тенденция к ухудшению прогноза при исходных значениях VEGF ≥ 300 пг/мл. Для больных РМЖ в T₂N₀M₀ стадии различия в отдаленных результатах лечения были достоверно связаны с пороговым показателем VEGF ($p = 0,001$) (табл. 3). У больных РМЖ в T₁N₀M₀ стадии различия в безрецидивной выживаемости становятся заметны только на 3-м году жизни после проведенного лечения, тогда как у больных РМЖ при T₂N₀M₀ стадии различия достоверны на всем периоде наблюдения. Таким образом, исходное содержание VEGF в сыворотке крови ≥ 300 пг/мл у больных РМЖ с T₂N₀M₀ стадией заболевания достоверно связано со сниженными показателями 3-летней безрецидивной выживаемости на 30 %.

Следует также отметить, что показатели 3-летней безрецидивной выживаемости в группах больных РМЖ в T₁N₀M₀ и T₂N₀M₀ стадиях при значениях VEGF < 300 пг/мл в сыворотке крови практически не различались ($83,6 \pm 5,8$ и $84,8 \pm 4,5$ % соответственно).

По содержанию uPA в цитозолях опухолей больных также разделили на 2 группы: менее и более медианы (1,0 нг/мл). Частота выявления значений uPA ≥ 1 нг/мл белка в опухоли недостоверно ($p = 0,12$) повышалась с 43,4 % в группе больных I стадией РМЖ до 54,1 % – в группе больных с II стадией.

Исследовали изменение содержания uPA в опухоли больных РМЖ с учетом гистологического строения опухоли (табл. 3). При этом выявлено, что у больных РМЖ ранних стадий с дольковым инфильтративным раком содержание uPA в первичной опухоли было выше, чем у больных с протоковым инфильтративным вариантом новообразования ($2,4 \pm 0,4$ и $1,5 \pm 0,2$ нг/мл белка соответственно; $p = 0,01$) как при I, так и при II стадиях заболевания.

Таблица 4

Содержание uPA в опухолях больных РМЖ с учетом гистологического строения, степени злокачественности и стадии заболевания

Характеристика	I стадия		II стадия		Всего	
	N	uPA, нг/мл белка M $\pm$ m (медиана)	N	uPA, нг/мл белка M $\pm$ m (медиана)	N	uPA, нг/мл белка M $\pm$ m (медиана)
Гистологический тип опухоли						
Дольковый инфильтративный рак	8	$2,3 \pm 0,5$ (2,9)	19	$2,5 \pm 0,5$ (2,2)	27	$2,4 \pm 0,4$ (2,4)*
Протоковый инфильтративный рак	34	$1,2 \pm 0,3$ (0,2)	72	$1,6 \pm 0,2$ (1,5)	106	$1,5 \pm 0,2$ (1,0)**
Смешанный рак	9	$1,2 \pm 0,6$ (0,3)	21	$2,2 \pm 0,5$ (1,0)	30	$1,9 \pm 0,4$ (0,85)
Инвазивная карцинома	23	$1,1 \pm 0,2$ (0,7)	52	$1,7 \pm 0,3$ (1,1)	75	$1,5 \pm 0,2$ (0,8)**
Слизистый рак	2	$0,2 \pm 0,2$ (0,2)	7	$0,8 \pm 0,4$ (0,4)	9	$0,7 \pm 0,3$ (0,3)
Степень злокачественности						
1	18	$0,9 \pm 0,3$ (0,2) ¹	29	$0,9 \pm 0,3$ (0,3) ³	19	$1,3 \pm 0,4$ (0,2)
2	49	$1,1 \pm 0,2$ (0,4)	102	$1,7 \pm 0,2$ (1,3) ⁴	132	$1,6 \pm 0,2$ (1,0)
3	9	$2,3 \pm 0,6$ (3,0) ²	41	$2,6 \pm 0,3$ (2,6) ⁵	34	$2,4 \pm 0,3$ (2,7)

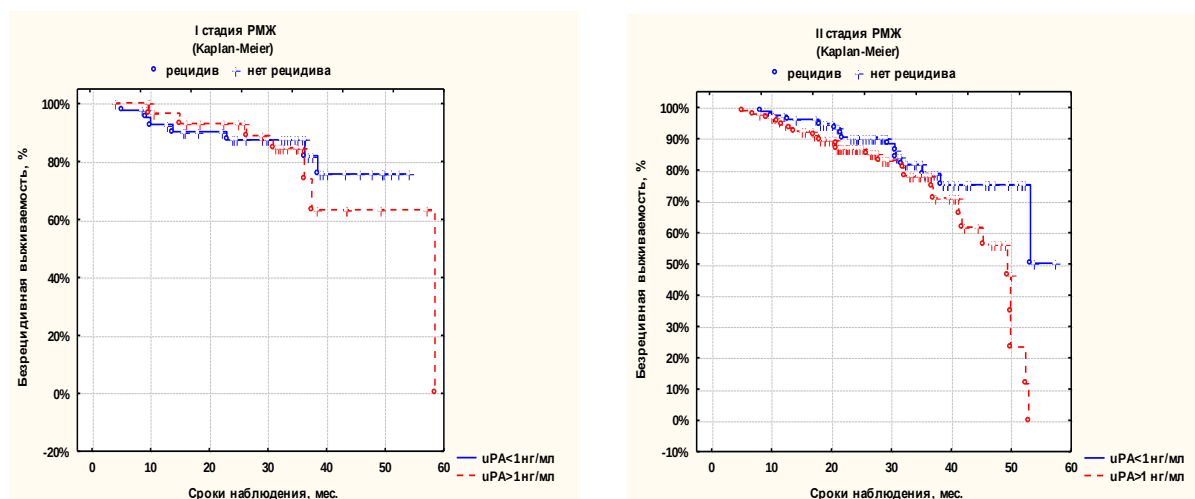
Примечание: *vs** $p = 0,01$; 1vs2 $p = 0,051$; 3vs4 $p = 0,04$; 3vs5 $p = 0,0001$; 4vs5 $p = 0,004$.

Таблица 5

Отдаленные результаты лечения у больных РМЖ с учетом содержания uPA в ткани первичной опухоли

Содержание uPA (нг/мг белка) в ткани опухоли	3-х летняя безрецидивная выживаемость, %					
	n	Общая группа	n	I стадия	n	II стадия
uPA < 1,0	122	80,2 ± 4,5*	43	82,0 ± 7,2	79	76,3 ± 6,5**
uPA ≥ 1,0	126	73, ± 4,8*	33	74,0 ± 11,7	93	73,6 ± 6,2**

Примечание: p *vs* = 0,027; p**vs** = 0,027.

**Рис. 2.** Показатели безрецидивной выживаемости больных раком молочной железы I–II стадий с учетом содержания uPA в ткани опухоли

Уровни uPA в ткани опухоли слизистого типа, напротив, были достоверно ниже, чем при дольковом инфильтративном варианте строения новообразования ($0,7 \pm 0,3$ и $2,4 \pm 0,4$ нг/мг белка соответственно; $p = 0,01$). Однако частота выявления в опухоли значений uPA ≥ 1 нг/мг белка у больных РМЖ различных гистологических типов не отличалась достоверно (табл. 4).

С увеличением степени злокачественности опухоли отмечено повышение уровней uPA в опухоли больных РМЖ ранних стадий ($p = 0,0001$; табл. 3). 2-факторный анализ показал преимущественную связь содержания показателя uPA со степенью злокачественности ($p < 0,0001$) и в меньшей степени со стадией заболевания ($p = 0,11$).

Частота выявления значений uPA ≥ 1 нг/мг белка в ткани опухоли больных РМЖ в группе из 47 пациентов с 1-й (G-1) степенью злокачественности составила 29,8 %, в группе из 151 больного со 2-й (G-2) степенью злокачественности – 51,7 %, и многократно увеличивалась в группе из 50 пациентов с 3-й (G-3) степенью злокачественности – 68 % (различия статистически достоверны, $p = 0,001$).

При этом частота выявления значений uPA ≥ 1 нг/мг белка в ткани опухоли больных РМЖ в группе больных с G-3 степенью злокачественности с I стадией заболевания составила 66,7 %, со II стадией – 68,3 %, т. е. практически не различалась.

Таким образом, высокие показатели uPA в ткани опухоли выявлены у 2/3 пациентов РМЖ ранних стадий с G-3 степенью злокачественности новообразования.

Не обнаружено достоверных различий в содержании uPA в группах больных РМЖ ранних стадий с учетом рецепторного статуса (РЭ и РП) опухоли, в связи с чем эти данные не приведены.

В общей группе из 248 пациентов РМЖ определены показатели 3-летней безрецидивной выживаемости с учетом уровня uPA в ткани первичной опухоли, равного 1,0 нг/мг белка (табл. 5). При этом различия в безрецидивной выживаемости больных РМЖ II стадии были достоверными, однако в обеих группах различия в безрецидивной выживаемости проявились только после 3-х лет наблюдения. Этот факт позволяет считать маркер uPA перспективным для прогноза поздних рецидивов РМЖ (рис. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные нами данные свидетельствуют о том, что РМЖ характеризуется заметной активацией системы эффектов VEGF, включая усиление активации плазминогена по урокиназному типу, играющей ключевую роль в процессах инвазии и местного распространения злокачественных опухолей. Выявленная положительная корреляция между уровнями VEGF в сыворотке и uPA в ткани опухолей может свидетельствовать о взаимосвязи активации протеолиза и процессов неоплазии. Обнаружена выраженная взаимосвязь уровня VEGF в сыворотке крови и uPA в ткани опухоли с такими классическими клинико-морфологическими характеристиками и факторами прогноза РМЖ, как степень злокачественности опухоли и стадия

заболевания: концентрация этих белков возрастает по мере увеличения распространенности процесса и при уменьшении степени дифференцировки.

Нам удалось, таким образом, показать, что при местно-распространенном РМЖ происходят достоверные и взаимосвязанные изменения системы активации плазминогена и VEGF, наиболее выраженные при T₂N₀M₀ стадиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кушлинский Н.Е., Герштейн Е.С. Биологические маркеры опухолей в клинике – достижения, проблемы, перспективы // Молекулярная медицина. 2008. № 3. С. 48-55.
2. Fox S., Generali D., Harris A. Breast tumour angiogenesis // Breast Cancer Res. 2007. V. 9. № 6. P. 216-227.
3. Hatake K., Tokudome N., Ito Y. Next Generation Molecular Targeted Agents for Breast Cancer: Focus on EGFR and VEGFR Pathways // Breast Cancer Res. 2007. V. 14. № 2. P. 132-149.
4. Герштейн Е.С., Кушлинский Н.Е. Фактор роста эндотелия сосудов как основной регулятор ангиогенеза и клинически значимый показатель при различных злокачественных новообразованиях // Технологии живых систем. 2013. Т. 10. № 2. С. 18-33.
5. Vandenbunder B., Wernert N., Stehelin D. Does oncogene c-ets 1 participate in the regulation of tumor angiogenesis? // Bull. Cancer. 1993. V. 80 (1). P. 38-49.
6. Toi M., Hoshina S., Takayanagi T., Tominaga T. Association of vascular endothelial growth factor expression with tumor angiogenesis and with early relapse in primary breast cancer // Jpn. J. Cancer Res. 1994. V. 85 (10). P. 1045-1049.
7. Toi M., Inada K., Suzuki H., Tominaga T. Tumor angiogenesis in breast cancer: its importance as a prognostic indicator and the association with vascular endothelial growth factor expression // Breast Cancer Res. Treat. 1995. V. 36 (2). P. 193-204.
8. Toi M., Kondo S., Suzuki H. et al. Quantitative analysis of vascular endothelial growth factor in primary breast cancer // Cancer. 1996. V. 77 (6). P. 1101-1106.
9. Yoshiji H., Gomez D.E., Shibuya M., Thorgerisson U.P. Expression of vascular endothelial growth factor, its receptor, and other angiogenic factors in human breast cancer // Cancer Res. 1996. V. 56 (9). P. 2013-2016.
10. Герштейн Е.С., Щербаков А.М., Алиева С.К. и др. Фактор роста эндотелия сосудов в опухолях и сыворотке крови больных раком молочной железы // Бюл. эксп. биол. мед. 2003. Т. 135 (1). С. 85-88.
11. Герштейн Е.С., Щербаков А.М., Алиева С.К. и др. Фактор роста эндотелия сосудов в опухолях и сыворотке крови больных раком молочной железы: связь с клинико-морфологическими факторами // Вестник Российского онкологического научного центра им. Н.Н. Блохина РАМН. 2005. Т. 16. № 1-2. С. 26-30.
12. Ким Е.А., Герштейн Е.С., Щербаков А.М. и др. Влияние неоадъювантной терапии на уровни VEGF и VEGFR-2 в опухолях и сыворотке крови больных раком молочной железы // Вопросы онкологии. 2008. Т. 54 (3). С. 287-293.
13. Кушлинский Н.Е., Герштейн Е.С. Роль фактора роста эндотелия сосудов при раке молочной железы // Бюл. эксп. биол. мед. 2002. Т. 133 (6). С. 604-612.
14. Brown L.F., Guidi A.J., Schnitt S.J. et al. Vascular stroma formation in carcinoma in situ, invasive carcinoma, and metastatic carcinoma of the breast // Clin. Cancer Res. 1999. V. 5 (5). P. 1041-1056.
15. Krantz A., Mattfeldt T., Waltenberger J. Molecular mediators of tumor angiogenesis: enhanced expression and activation of vascular endothelial growth factor receptor KDR in primary breast cancer // Int. J. Cancer. 1999. V. 84 (3). P. 293.
16. Щербаков А.М., Герштейн Е.С., Анурова О.А., Кушлинский Н.Е. Фактор роста эндотелия сосудов и его рецепторы первого и второго типа при раке молочной железы // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51 (3). С. 317-321.
17. Linderholm B.K., Gruvberger-Saal S., Ferno M. et al. Vascular endothelial growth factor is a strong predictor of early distant recurrences in a prospective study of premenopausal women with lymph-node negative breast cancer // Breast. 2008. V. 17 (5). P. 484-491.
18. Eppenberger U., Kueng W., Schlaeppli J.M. et al. Markers of tumor angiogenesis and proteolysis independently define high- and low-risk subsets of node-negative breast cancer patients // J. Clin. Oncol. 1998. V. 16 (9). P. 3129-3136.
19. Coradini D., Boracchi P., Daidone M.G. et al. Contribution of vascular endothelial growth factor to the Nottingham prognostic index in node-negative breast cancer // Br. J. Cancer. 2001. V. 85 (6). P. 795-797.
20. Adams J., Carder P.J., Downey S. et al. Vascular endothelial growth factor (VEGF) in breast cancer: comparison of plasma, serum, and tissue VEGF and microvessel density and effects of tamoxifen // Cancer Res. 2000. V. 60 (11). P. 2898-2905.
21. Герштейн Е.С., Талаева Ш.Ж., Сандыбаев М.Н., Кушлинский Н.Е. Клиническая роль системы активации плазминогена в опухолях человека // Молекулярная медицина. 2007. Т. 1. С. 4-8.

Поступила в редакцию 2 марта 2016 г.

UDC 616-006

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-532-540

CLINICAL SIGNIFICANCE OF ENDOTHELIUM OF VESSELS IN BLOOD SERUM AND UROKINASE-TYPE PLASMINOGEN ACTIVATOR IN TUMOUR AT MAMMARY GLAND LOCALIZED CANCER

© L.K. Ovchinnikova, O.I. Kostyleva, A.A. Tuleuova, M.V. Gritskevich, V.D. Ermilova, O.V. Kuznetsova, L.T. Lyakina, N.A. Ognerubov, I.K. Vorotnikov

The contents of VEGF in blood serum and of uPA in tumor cytosols of 248 breast cancer patients and 55 healthy women were evaluated by EIA methods. No links were found between VEGF, uPA and age, reproductive function and also (RE)(RP)(HER2-neu)-status of patients. Reliable correlations were found between VEGF and uPA levels and stage and malignancies degree of breast cancer by multifactor analysis. Also association between serum VEGF and tumor cytosols uPA levels in T1 and T2 stages was shown in general group of patients ($r = 0.67$; $p = 0.001$), this correlation was more expressed in lobular infiltrative breast cancer ($r = 0.92$; $p = 0.001$, and significantly less expressed in ductal infiltrative breast cancer ($r = 0.49$; $p = 0.01$).

Key words: VEGF; uPA; mammary gland cancer.

REFERENCES

1. Kushlinskiy N.E., Gershteyn E.S. Biologicheskie markery opukholey v klinike – dostizheniya, problemy, perspektivy. *Molekulyarnaya meditsina*, 2008, no. 3, pp. 48-55.
2. Fox S., Generali D., Harris A. Breast tumour angiogenesis. *Breast Cancer Res.*, 2007, vol. 9, no. 6, pp. 216-227.
3. Hatake K., Tokudome N., Ito Y. Next Generation Molecular Targeted Agents for Breast Cancer: Focus on EGFR and VEGFR Pathways. *Breast Cancer Res.*, 2007, vol. 14, no. 2, pp. 132-149.
4. Gershteyn E.S., Kushlinskiy N.E. Faktor rosta endoteliya sosudov kak osnovnoy regulyator angiogeneza i klinicheski znachimyy pokazatel' pri razlichnykh zlokachestvennykh novoobrazovaniyakh. *Tekhnologii zhivyykh sistem*, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 18-33.
5. Vandenbunder B., Wernert N., Stehelin D. Does oncogene c-ets 1 participate in the regulation of tumor angiogenesis? *Bull. Cancer*, 1993, vol. 80 (1), pp. 38-49.
6. Toi M., Hoshina S., Takayanagi T., Tominaga T. Association of vascular endothelial growth factor expression with tumor angiogenesis and with early relapse in primary breast cancer. *Jpn. J. Cancer Res.*, 1994, vol. 85 (10), pp. 1045-1049.
7. Toi M., Inada K., Suzuki H., Tominaga T. Tumor angiogenesis in breast cancer: its importance as a prognostic indicator and the association with vascular endothelial growth factor expression. *Breast Cancer Res. Treat.*, 1995, vol. 36 (2), pp. 193-204.
8. Toi M., Kondo S., Suzuki H. et al. Quantitative analysis of vascular endothelial growth factor in primary breast cancer. *Cancer*, 1996, vol. 77 (6), pp. 1101-1106.
9. Yoshiji H., Gomez D.E., Shibuya M., Thorgeirsson U.P. Expression of vascular endothelial growth factor, its receptor, and other angiogenic factors in human breast cancer. *Cancer Res.*, 1996, vol. 56 (9), pp. 2013-2016.
10. Gershteyn E.S., Shcherbakov A.M., Alieva S.K. et al. Faktor rosta endoteliya sosudov v opukholyakh i syvorotke krovi bol'nykh rakom molochnoy zhelezy. *Byulleten' eksperimental'noy biologii i meditsiny*, 2003, vol. 135 (1), pp. 85-88.
11. Gershteyn E.S., Shcherbakov A.M., Alieva S.K. et al. Faktor rosta endoteliya sosudov v opukholyakh i syvorotke krovi bol'nykh rakom molochnoy zhelezy: svyaz' s kliniko-morfologicheskimi faktorami. *Vestnik Rossiyskogo onkologicheskogo nauchnogo tsentra im. N.N. Blokhina RAMN*, 2005, vol. 16, № 1-2, pp. 26-30.
12. Kim E.A., Gershteyn E.S., Shcherbakov A.M. et al. Vliyaniye neoad'yuvantnoy terapii na urovni VEGF i VEGFR-2 v opukholyakh i syvorotke krovi bol'nykh rakom molochnoy zhelezy. *Voprosy onkologii*, 2008, vol. 54 (3), pp. 287-293.
13. Kushlinskiy N.E., Gershteyn E.S. Rol' faktora rosta endoteliya sosudov pri rake molochnoy zhelezy. *Byulleten' eksperimental'noy biologii i meditsiny*, 2002, vol. 133 (6), pp. 604-612.
14. Brown L.F., Guidi A.J., Schnitt S.J. et al. Vascular stroma formation in carcinoma in situ, invasive carcinoma, and metastatic carcinoma of the breast. *Clin. Cancer Res.*, 1999, vol. 5 (5), pp. 1041-1056.
15. Kranz A., Mattfeldt T., Waltenberger J. Molecular mediators of tumor angiogenesis: enhanced expression and activation of vascular endothelial growth factor receptor KDR in primary breast cancer. *Int. J. Cancer*, 1999, vol. 84 (3), pp. 293.
16. Shcherbakov A.M., Gershteyn E.S., Anurova O.A., Kushlinskiy N.E. Faktor rosta endoteliya sosudov i ego retseptory pervogo i vtorogo tipa pri rake molochnoy zhelezy. *Voprosy onkologii*, 2005, vol. 51 (3), pp. 317-321.
17. Linderholm B.K., Gruvberger-Saal S., Ferno M. et al. Vascular endothelial growth factor is a strong predictor of early distant recurrences in a prospective study of premenopausal women with lymph-node negative breast cancer. *Breast*, 2008, vol. 17 (5), pp. 484-491.
18. Eppenberger U., Kueng W., Schlaeppli J.M. et al. Markers of tumor angiogenesis and proteolysis independently define high- and low-risk subsets of node-negative breast cancer patients. *J. Clin. Oncol.*, 1998, vol. 16 (9), pp. 3129-3136.
19. Coradini D., Boracchi P., Daidone M.G. et al. Contribution of vascular endothelial growth factor to the Nottingham prognostic index in node-negative breast cancer. *Br. J. Cancer*, 2001, vol. 85 (6), pp. 795-797.
20. Adams J., Carder P.J., Downey S. et al. Vascular endothelial growth factor (VEGF) in breast cancer: comparison of plasma, serum, and tissue VEGF and microvessel density and effects of tamoxifen. *Cancer Res.*, 2000, vol. 60 (11), pp. 2898-2905.
21. Gershteyn E.S., Talaeva Sh.Zh., Sandybaev M.N., Kushlinskiy N.E. Klinicheskaya rol' sistemy aktivatsii plazminogena v opukholyakh cheloveka. *Molekulyarnaya meditsina*, 2007, vol. 1, pp. 4-8.

Received 2 March 2016

Овчинникова Лариса Константиновна, Московский областной онкологический диспансер, г. Балашиха, Московская область, Российская Федерация, кандидат медицинских наук, зав. отделением опухолей молочных желез, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ovchinnikova Larisa Konstantinovna, Moscow Regional Oncologic Dispensary, Balashikha, Moscow oblast, Russian Federation, Candidate of Medicine, Head of Mammary Gland Tumours Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Костылева Ольга Ивановна, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, кандидат медицинских наук, старший научный сотрудник лаборатории клинической биохимии, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Kostyleva Olga Ivanovna, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Candidate of Medicine, Senior Research Worker of Clinical Biochemistry Laboratory, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Тулеева Алия Асылбековна, Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат медицинских наук, соискатель, кафедра клинической биохимии и лабораторной диагностики, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Tuleuova Aliya Asylbekovna, Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, Russian Federation, Candidate of Medicine, Competitor, Clinical Biochemistry and Laboratory Diagnosis Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Грицкевич Михаил Владимирович, Московский государственный медико-стоматологический университет им. А.И. Евдокимова, г. Москва, Российская Федерация, соискатель, кафедра клинической биохимии и лабораторной диагностики, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Gritskevich Mikhail Vladimirovich, Moscow State University of Medicine and Dentistry, Moscow, Russian Federation, Competitor, Clinical Biochemistry and Laboratory Diagnosis Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ермилова Валерия Дмитриевна, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, кандидат медицинских наук, ведущий научный сотрудник отдела патологической анатомии опухолей человека, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ernilova Valeriya Dmitrievna, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Candidate of Medicine, Leading Research Worker of Pathological Anatomy of Human's Tumours Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Кузнецова Ольга Васильевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат медицинских наук, доцент кафедры биохимии лечебного факультета, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Kuznetsova Olga Vasilevna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation, Candidate of Medicine, Associate Professor of Biochemistry Department of Medical Faculty, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Лякина Любовь Тимофеевна, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, кандидат биологических наук, старший научный сотрудник лаборатории клинической биохимии, e-mail: Koster1985@rambler.ru

Lyakina Lyubov Timofeevna, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Candidate of Biology, Senior Research Worker of Clinical Biochemistry Laboratory, e-mail: Koster1985@rambler.ru

Огнерубов Николай Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, кандидат юридических наук, профессор, зав. кафедрой анатомии, оперативной хирургии и онкологии, заслуженный работник высшей школы РФ, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ognerubov Nikolay Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Candidate of Jurisprudence, Professor, Head of Anatomy, Operative Surgery and Oncology Department, Honored Worker of Higher School of Russian Federation, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Воротников Игорь Константинович, Российский онкологический научный центр им. Н.Н. Блохина, г. Москва, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, зав. отделением опухолей молочных желез, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Vorotnikov Igor Konstantinovich, Russian Cancer Research Center named after N.N. Blokhin, Moscow, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Head of Mammary Gland Tumours Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

УДК 616.41
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-541-550

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ХИРУРГИЧЕСКОЙ АНАТОМИИ ЩИТОВИДНОЙ ЖЕЛЕЗЫ: ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

© Н.А. Огнерубов, А.О. Жуков, Р.С. Сергеев

В обзоре литературы приведены особенности хирургической анатомии щитовидной железы по данным отечественной и зарубежной литературы. В том числе и результаты собственных исследований, проведенных ранее (Н.А. Огнерубов). Показана вариабельность некоторых ее анатомических показателей, таких как линейные размеры, форма, наличие долей, особенности кровоснабжения и иннервации в зависимости от пола и типа телосложения шеи. Имеющиеся варианты индивидуальной изменчивости необходимо учитывать при персонализированном хирургическом лечении пациентов с доброкачественными и злокачественными опухолями щитовидной железы.

Ключевые слова: щитовидная железа; хирургическая анатомия; индивидуальная изменчивость.

Щитовидная железа состоит из двух боковых долей, перешейка и в определенном проценте случаев пирамидальной доли, порой доходящей до подъязычной кости. Боковые доли частично заходят на наружную поверхность щитовидного хряща, прикрывая нижний рог и прилежащий участок хряща, книзу они могут доходить до пятого–шестого кольца трахеи. Задняя поверхность перешейка прилежит ко второму и третьему кольцам трахеи, доходя иногда своим краем до перстневидного хряща. Доли соприкасаются со стенками пищевода и глотки своей задней поверхностью [1–4].

Щитовидная железа имеет снаружи фиброзную капсулу, которая представляет собой тонкую соединительнотканную пластинку. От нее в толщу органа отходят отростки, делящие железу на отдельные дольки.

Фиброзную капсулу покрывает наружная капсула щитовидной железы, представляющая собой висцеральный листок четвертой фасции шеи. Она своими соединительнотканными пучками фиксирует щитовидную железу к трахее, перстневидному хрящу, грудино-щитовидной и грудино-подъязычной мышцам. Наиболее плотные пучки образуют связки, которые идут от железы к близлежащим органам: средняя связка щитовидной железы, фиксирующая капсулу в области перешейка к передней поверхности перстневидного хряща, правая и левая латеральные связки, фиксирующие капсулу в области нижнемедиальных участков обеих боковых долей к латеральным поверхностям перстневидного хряща и ближайших к нему хрящевых колец трахеи [5].

На сегодняшний день интерес к изучению хирургической анатомии щитовидной железы значительно вырос. Это обусловлено неуклонным ростом заболеваний щитовидной железы, особенно доброкачественными и злокачественными опухолями, основным методом лечения которых является хирургический. Для точной диагностики заболеваний щитовидной железы и осуществления безопасной и эффективной хирургии зна-

ния хирургической анатомии, включая ее индивидуальные особенности, являются очень важными.

Среди них морфометрические показатели, такие как форма, размеры, вес, положение, кровоснабжение и иннервация, являются весьма вариабельными и зависят от ряда факторов [6–8; 9, с. 62–72].

На сегодняшний день практически каждый ученый, занимающийся изучением анатомии щитовидной железы, стремится предложить свою классификацию форм щитовидной железы. Исторически самым первым исследователем, который детально изучил вариантную анатомию и выделил различные формы щитовидной железы, был С.Ф. Marshall (1895).

Увидев крайние проявления в грубой анатомии щитовидной железы, С.Ф. Marshall (1895) заявил, что трудно говорить о нормальной щитовидной железе [10]. В основу своей классификации им положен анатомический признак – это наличие пирамидального отростка и перешейка, различные сочетания которых позволили выделить ему 17 форм. Учитывая историческую значимость, мы сочли необходимым привести рисунки в авторской интерпретации (рис. 1).

Имеющиеся на сегодняшний день многочисленные ее варианты базируются на классификации С.Ф. Marshall (1895). Так, Н.А. Огнерубов и соавт. (1998, 2000) выделили 12 форм щитовидной железы:

- 1) пирамидальная доля справа (32 %);
- 2) пирамидальная доля по центру (17,5 %);
- 3) пирамидальная доля слева (31,4 %);
- 4) в виде бабочки (30,6 %);
- 5) без перешейка (доли находятся на расстоянии друг от друга) (21,7 %);
- 6) ассиметричная (11,9 %);
- 7) толстый и широкий перешеек (8 %);
- 8) тонкий и узкий перешеек (8,25 %);
- 9) в виде «трезубца» (10,8 %);
- 10) полулунная (12,8 %);
- 11) в виде буквы «Н» (11,1 %);
- 12) без перешейка (доли тесно соприкасаются друг с другом) (3,3 %).

Гендерный анализ, проведенный ими, показал, что как у мужчин, так и у женщин одинаково часто встречаются формы с участием пирамидальной доли – пирамидальная доля справа (16,3 и 16,4 % соответственно), пирамидальная доля слева (15 и 16,4 %), пирамидальная доля по центру (8,5 и 9 %), в виде «бабочки» (15,7 и 4,9 % соответственно). В то же время у мужчин

чаще наблюдалась в форме «трезубца» и полулунной формы, составляя 7,8 и 9,8 % соответственно, а мужчин по 3 %. У женщин чаще встречалась форма щитовидной железы в виде буквы «Н» – 10,4 и 0,7 % соответственно и без перешейка (доли находятся на расстоянии друг от друга (11,9 и 9,8 % у мужчин).

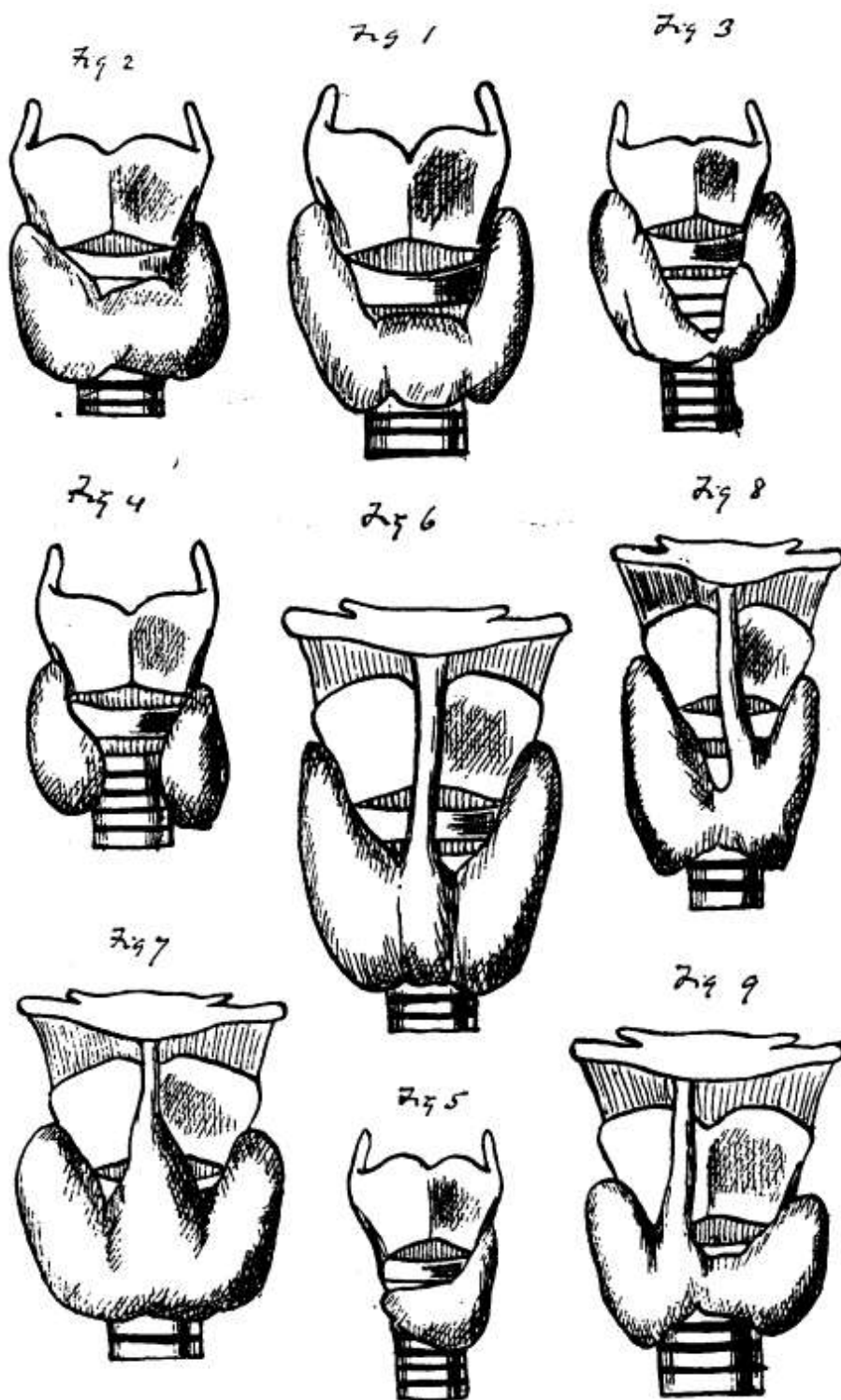


Рис. 1. Формы щитовидной железы [10]

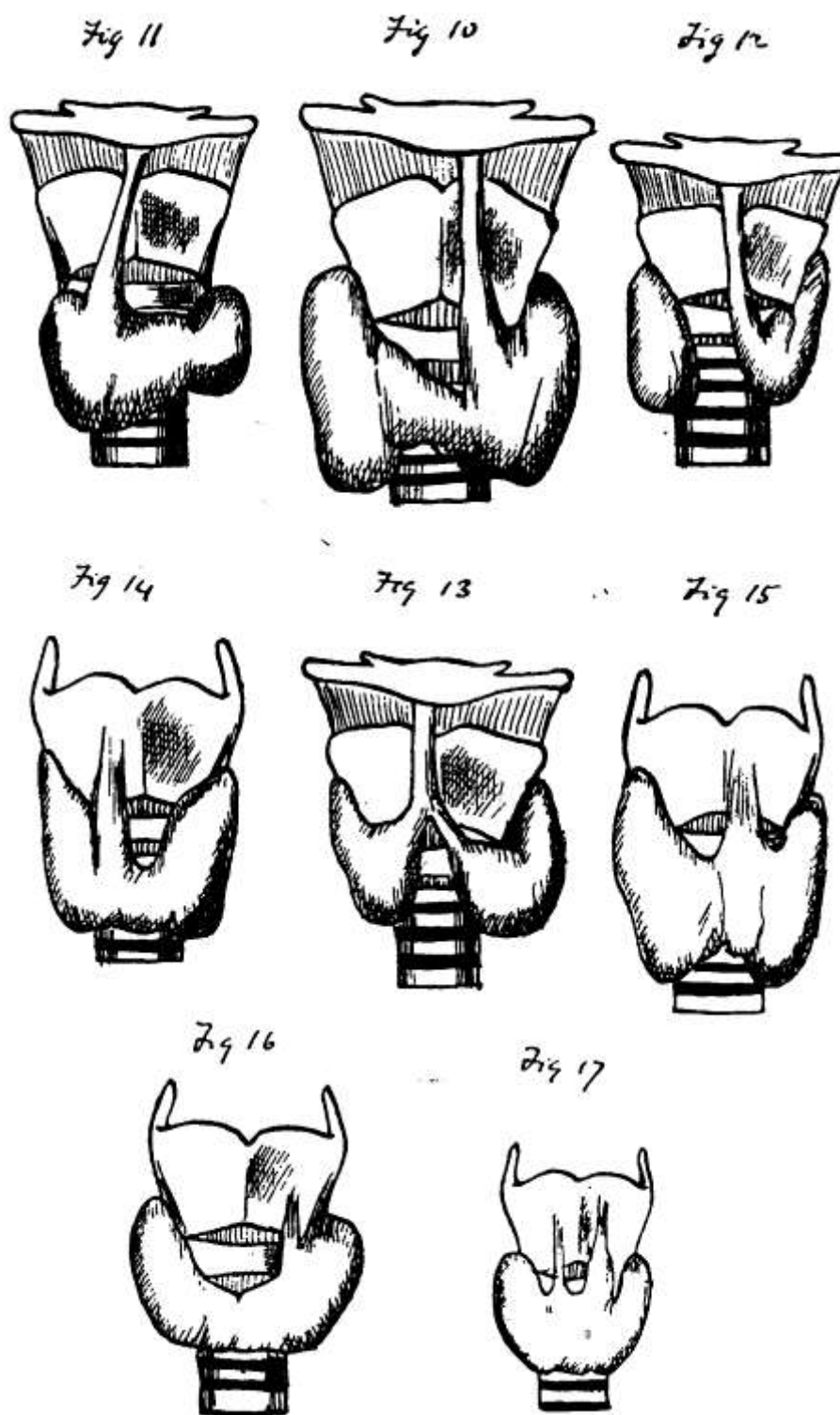


Рис. 1. Продолжение. Формы щитовидной железы [10]

Каких-либо возрастных отличий авторы не выявили. Согласно их данным форма щитовидной железы зависит от типовых особенностей шеи. Так, щитовидная железа в виде «трезубца» в 3,5 раза чаще встречалась при толстой шее, чем при тонкой. В то же время щитовидная железа с толстым и широким перешейком наблюдалась в 66,7 % случаев, как при толстой, так и

при короткой шее, но ни разу не наблюдалась при тонкой и длинной шее. Интересен тот факт, что железа ассиметричной формы была выявлена в 44,4 % случаев при тонкой шее и ни разу при толстой. При этом было показано, что на форму щитовидной железы оказывают влияние показатели, характеризующие ширину шеи [11–12].

В каждой доле щитовидной железы различают верхний и нижний полюс. По данным А.В. Черных и соавт. (2006) верхний полюс щитовидной железы часто располагается на уровне нижнего края щитовидного хряща, причем это не зависит от пола. Середина боковой доли щитовидной железы располагается на уровне нижнего края перстневидного хряща. Нижний полюс органа чаще всего располагается на середине расстояния между нижним краем перстневидного хряща и яремной вырезки грудины [13]. Lattupalli Nema (2014) при исследовании 50 трупов выявил, что в 12,8–15,4 % у мужчин и в 9,1–18,2 % случаев у женщин верхние полюсы боковых долей щитовидной железы располагаются выше середины высоты пластинок щитовидного хряща, а в 48,7–51,2 % и в 36,4–27,3 % наблюдений они находятся ниже середины высоты пластинок щитовидного хряща (у мужчин и женщин соответственно), в 33,3–38,5 % у мужчин и в 27,3–54,5 % у женщин они располагаются на уровне середины высоты пластинок щитовидного хряща [9].

В щитовидной железе различают среднюю непарную часть – перешеек. Он зачастую располагается на уровне III–IV колец трахеи, но может быть опущен до пятого или шестого [1; 14–15]. C.F. Marshall (1895) при исследовании 60 трупов выявил, что в 75 % случаев перешеек располагается по центру, а в 25 % он сливается с одной из боковых долей щитовидной железы [10].

Тем не менее, уровень расположения перешейка весьма вариабелен. Так, Nikumbh D. Roopala et al. (2015) описывают случай расположения его на уровне I кольца трахеи [7]. Y. Nehtar et al. (1995) приводят в литературе случай отсутствия соединения перешейка по средней линии щитовидной железы. Эта часть щитовидной железы может подвергаться различным нарушениям в эмбриогенезе – от недоразвития до полного отсутствия. S.M. Rathod et al. (2015) указывают на недоразвитие перешейка в 13 % случаев при исследовании 76 трупов мужчин и женщин [8]. Иногда перешеек щитовидной железы может совсем отсутствовать [16–20].

По данным обзора литературы Н.А. Огнерубова (2013), который занимался изучением этого вопроса при описании случая агенезии перешейка, и другими исследованиями, частота данной аномалии колеблется от 5 до 33 % [20–34]. Минимальная частота встречаемости этой аномалии – 0,024 % – по данным аутопсии приводит E.D. Williams et al. [35]. Согласно результатам исследований E. Braun et al. (2007) отсутствие перешейка щитовидной железы наблюдалось в 6,9 % случаев [36]. При исследовании 570 трупов в Индии A. Harjeet et al. (2004) обнаружили агенезию перешейка в 7,9 % случаев. По данным F.D. Allan отсутствие перешейка наблюдается в 2–4 % случаев [37].

D. Berker et al. (2010) из Турции обнаружили отсутствие перешейка у 30 % пациентов [38]. Интересные данные приведены А.О. Sagiroglu (1997) из Турции. Он сообщил об отсутствии перешейка у 7 трупов из 25 пациентов психиатрических больниц. Такую частоту аномалии он объяснил применением лекарственных средств, таких как литий, для лечения пациентов [39].

У женщин щитовидная железа имеет большие размеры, чем у мужчин. Кроме того, у мужчин она располагается ниже, доходя до верхнего края грудины. Такой вариант расположения наблюдается у пожилых людей, а также у лиц с короткой и толстой шеей [6].

S.D. Joshi et al. (2010) сообщают о том, что правая и левая доли щитовидной железы чаще являлись ассиметричными. Средняя высота правой доли составляла 4,32 см, а левой – 4,22 см. Толщина правой доли составляла 1,13 см и левой – 1,18 см [40]. Ю.В. Малеев (1999) приводит среднюю высоту правой доли, равной 4,6 см, ширину – 2 см, а толщину – 2,4 см [41]. E.A. Alfatani et al. (2014) по результатам исследования фиксированных в формалине образцов установили, что длина правой доли железы составляла 4,1 см, ширина – 1,7 см, а длина и ширина левой – 4,6 и 2,3 см соответственно [42].

O. Tanriover et al. (2011) провели исследование в Турции по морфометрии щитовидной железы на 90 взрослых трупах, включая размеры долей. Последние изучались в зависимости от пола и различных возрастных периодов. При этом оказалось, что средняя длина, ширина и толщина левой доли составляет 5,21, 2,9 и 2,33 см соответственно. В то время, как средняя длина, ширина и толщина правой доли составили 5,26, 2,97 и 2,39 см соответственно. Каких-либо половых различий от пола и возраста не получено [43].

Вариантную анатомию указанных показателей на 220 трупах исследовали Н.А. Огнерубов и соавт. (1998, 1999). При этом они показали, что линейные размеры боковых долей у женщин были меньше, чем у мужчин, а перешеек у женщин был больше и зависел от некоторых конституциональных особенностей. Они показали, что нижний край щитовидной железы у мужчин, по отношению к яремной вырезке, располагается выше, чем у женщин. Это расстояние составило соответственно 3,2 и 2,1 см ($p < 0,05$). При короткой и толстой шее у лиц обоего пола отмечено более низкое расположение щитовидной железы над яремной вырезкой, по сравнению с длинной и тонкой шеей [11; 12; 41; 44].

В ряде случаев в щитовидной железе наблюдается наличие отходящего сверху от перешейка пирамидального отростка в виде добавочной доли щитовидной железы (lobus pyramidalis). Частота встречаемости пирамидальной доли значительно колеблется.

По данным C.F. Marshall (1895), пирамидальная доля была обнаружена в 43 % случаев. Верхушка ее в 65,4 % наблюдений прикреплялась к подъязычной кости, а в 34,6 % – к фасции, покрывающей щитовидный хрящ. Он также указывает на случаи, когда пирамидальный отросток присоединялся к одной из боковых долей щитовидной железы. В одном наблюдении он был раздвоен, поскольку начинался от обеих долей щитовидной железы, а в другом случае было две самостоятельных пирамидальных доли. По его данным, она начиналась от перешейка либо от боковых долей, причем больше слева [10].

По данным S.D. Joshi et al. (2010), она встречается в 37,7 % случаев и прикрепляется к перешейку или боковым долям, больше слева [40]. A.V. Ranade et al. (2008) исследовали 105 трупов обоих полов, причем пирамидальная доля при этом обнаружена в 58 % случаев [16].

Интересное исследование было проведено группой турецких ученых (2011), которые выявили расовые и этнические различия в морфологии анатомических структур щитовидной железы [43]. По их данным при исследовании 90 трупов пирамидальная доля была выявлена в 57,8 % случаев. При этом она отходила от левой части перешейка в 40,3 % наблюдений, от середины перешейка – в 27,1 % случаев и от правой части

перешейка – в 32,6 %. В 1 случае доля начиналась от средней доли и направлялась в правую сторону [43].

A. Harjeet et al. (2004) [45] обнаружили ее в 28,9 % наблюдений, а N.A. Levy et al. (1982) [46] – в 63 % случаев. S.Z. Sultana et al. (2008) [47] выявили пирамидальную долю в 30 случаях из 60.

E.L. Kaplan (1994) при выполнении оперативных вмешательств на щитовидной железе обнаружил пирамидальную долю в 80 % наблюдений [48].

Многие авторы, в частности N.A. Blumberg (1981) [49], E.M. Braun et al. (2007) [36], J. Sobotta (1915), P.S. Hunt et al. (1968), утверждают, что наиболее частыми позициями (40–60 %) начала пирамидальной доли является левая часть перешейка или левая доля щитовидной железы [9].

А.И. Кубарко и соавт. (1998) указывают, что в ряде случаев встречается вариант увеличенной пирамидальной доли, которая поднимается до подъязычной кости [6].

Длина пирамидальной доли зависит от положения, в котором происходит фрагментация щитовидно-язычного протока [50]. По данным Ю.В. Малеева (1999), средняя длина пирамидальной доли составила 2,2 см, ширина – 0,95 см, а толщина – 0,4 см [41]. O. Tanrıover et al. (2011) указывают, что длина ее колебалась от 0,8 до 4 см, составляя в среднем 2,01 см [43].

Н.А. Огнерубов и соавт. (1998) изучили вариантную анатомию пирамидальной доли щитовидной железы. Они показали, что она значительно чаще отходит от перешейка справа и слева от срединной линии шеи, чем строго по центру. Эта закономерность не зависит от пола. Причем верхушка ее достигает тела подъязычной кости в 10 % наблюдений. В 17,7 % случаев она находится на протяжении щитовидного хряща – чаще на уровне верхней трети его высоты. Промежуточное расположение верхушки – между верхним краем щитовидного хряща и подъязычной костью наблюдалась в 12,7 % [51–52].

По данным А.И. Кубарко и соавт. (1998), в 8 % случаев указывают на наличие добавочной доли, принадлежащей пирамидальной доле или перешейку. В 14–18 % случаев встречается добавочная надподъязычная щитовидная железа, которая определяется впереди тела подъязычной кости или над ней. Она может достигать значительных размеров и замещать недоразвитую или отсутствующую в норме щитовидную железу. Кроме того, по литературным данным, в 33–50 % случаев обнаруживаются различные добавочные щитовидные железы, располагающиеся по ходу эмбриональных остатков щитовидного протока. Это связано с необычайно низкой закладкой в эмбриогенезе зачатков щитовидной железы [6]. Эти анатомические особенности необходимо учитывать при выполнении хирургического вмешательства в объеме тиреоидэктомии.

У мужчин нижний край щитовидной железы располагается по отношению к яремной вырезке грудины выше, чем у женщин. По результатам исследования Ю.В. Малеева (1999) у мужчин данное расстояние колебалось от 0,6 до 6,9 см и в среднем составило $3,2 \pm 0,18$ см, а у женщин от 0,3 до 2,9 см, в среднем – $2,1 \pm 0,2$ см. При короткой толстой шее отмечается более низкое положение железы над яремной вырезкой грудины ($1,3 \pm 0,17$ см у мужчин и $0,6 \pm 0,12$ см у женщин), чем при длинной тонкой ($4,9 \pm 0,17$ и $2,2 \pm 0,3$ см у мужчин и женщин соответственно). При среднем типе шеи по длине и ширине аналогичное расстояние составило у мужчин $2,8 \pm 0,2$ см, а у женщин – $1,4 \pm 0,2$ см. Это

необходимо учитывать при выборе хирургического доступа к щитовидной железе и трахее [41].

Масса и линейные размеры щитовидной железы значительно варьируют. Вес щитовидной железы в возрасте 20–60 лет колеблется от 17 до 40 г. Вертикальный размер долей 50–80 мм, а перешейка – 5–15 мм. В поперечном разрезе железа имеет размер около 50–60 мм, в передне-заднем направлении в области долей толщина составляет 15–20 мм, а на уровне перешейка 6–8 мм. Вес и объем щитовидной железы у женщин относительно больше, чем у мужчин [6; 35].

По данным W.S. Snyder (1974) вес щитовидной железы у мужчин составил 17,5 г, а у женщин – 14,9 г [53]. Имеются половые различия в весе и размерах щитовидной железы. Одни авторы указывают на наличие такой зависимости [54], причем эти показатели у женщин были больше, чем у мужчин, и они увеличивались во время менструации и беременности. Такой же точки зрения придерживаются L. Hegedus et al. (1983) [55], которые при исследовании объема щитовидной железы в зависимости от пола, возраста и массы тела, показали, что вес ее в среднем составляет 25 г, но изменяется в зависимости от ряда факторов. Так, вес ее больше у женщин, чем у мужчин, а также он увеличивается во время беременности и менструации. Кроме того, они установили, что объем щитовидной железы зимой был значительно выше, чем летом [55]. По данным E.D. Williams et al. (1989), вес у мужчин 25 г, и несколько больше у женщин [35]. По данным O. Tanrıover et al. (2011), средний вес щитовидной железы составил 26,1 г, причем у мужчин она весила 26,9 г, а у женщин 21,9 г, однако различия статистически незначимы. Они изучили вес щитовидной железы в зависимости от различного веса, роста у мужчин и женщин. При этом оказалось, что вес щитовидной железы у мужчин в 31–50-летней группе был статистически значительно больше, чем у женщин, составляя 26,97 и 16,5 г соответственно ($p > 0,001$). Они же выявили статистически значимую корреляционную зависимость у лиц мужского пола между массой тела и весом щитовидной железы ($r = 0,282$). Такая закономерность у женщин отсутствует. Какой-либо зависимости от различных возрастных периодов и роста не выявлено [43].

В то же время некоторые исследования отрицают наличия какой-либо связи с указанными выше признаками. Так, D. Ueda (1990) с помощью ультразвука изучал объем щитовидной железы с учетом роста, веса, поверхности тела у детей в возрасте от 6 мес. до 15 лет. Каких-либо существенных различий в этом возрастном диапазоне он не выявил [56].

Некоторые исследователи указывают на наличие этнических различий в морфометрии щитовидной железы [43; 57]. Так, вес щитовидной железы у ямайцев и японцев меньше по сравнению с Южной Америкой и Европой [57]. A. Harjeet et al. (2004) [45] измеряли щитовидную железу у жителей Индии и выяснили, что средний вес ее был меньше, чем у жителей западного Кавказа и Японии. Такие различия они связывают с меньшими размерами тела. У взрослых японцев в возрасте от 20 до 50 лет железа весила около 18 г у мужчин, и на 1–2 г меньше у женщин [58–59].

Щитовидная железа имеет обильное кровоснабжение, обусловленное ее физиологическими особенностями. В ее кровоснабжении принимают участие верхняя и нижняя щитовидные артерии и значительно реже – не-

парная артерия, которая образует между собой многочисленные анастомозы [60–61]. Верхняя щитовидная артерия кровоснабжает преимущественно переднюю поверхность боковой доли. Различают различные варианты ее отхождения от:

- общей и внутренней сонной артерий;
- наружной сонной артерии общим стволом с язычной или лицевой артериями;
- разный уровень отхождения относительно бифуркации общей сонной артерии: на уровне, выше и ниже ее;
- передней, а также медиальной и латеральной поверхностей наружной сонной артерии;
- по ходу может значительно смещаться вниз, проходя впереди трахеи и даже между ножками грудного-ключично-сосцевидной мышцы [6].

Нижняя щитовидная артерия более крупная, чем верхняя. В подавляющем большинстве случаев она отходит от щито-шейного ствола (88,5 % случаев) [5–6]. Различают следующие варианты отхождения нижней щитовидной артерии от:

- дуги аорты, плече-головного ствола, подключичной (4,5 %);
- позвоночной (0,8 %);
- внутренней грудной и внутренней сонной артерий;
- обе нижние щитовидные артерии могут отходить общим стволом от подключичной артерии, могут отсутствовать с обеих сторон (6,2 %);
- большие варианты ветвления [6].

Непарная артерия принимает участие в кровоснабжении щитовидной железы от 5 до 12 % наблюдений. Чаще всего она вступает в щитовидную железу двумя стволами [62–64]. Венозный отток осуществляется через непарное щитовидное сплетение, нижние щитовидные вены которого открываются в плече-головные вены [65]. Она отходит от дуги аорты, а также может брать свое начало от плече-головного ствола, общей сонной, нижней щитовидной и подключичной артерий [6].

Согласно исследованиям Н.А. Огнерубова и соавт. (1998, 1999), в топографии данных артерий выявлены типовые и половые различия. У мужчин при короткой шее верхняя щитовидная артерия может делиться на 3 и более (до 6) ветвей первого порядка, а при длинной шее – на 2–3 ветви. Это свидетельствует о магистральном типе ветвления артерий щитовидной железы при длинной тонкой шее и рассыпном типе при короткой толстой шее [12; 66].

Парасимпатическая иннервация щитовидной железы, по данным А.М. Мкртумяна (2012), осуществляется волокнами блуждающего нерва. Особую значимость при этом имеет возвратный нерв, являющийся ветвью блуждающего нерва. Он перекрещивает верхнюю щитовидную артерию в месте ее деления на переднюю и заднюю ветви. По литературным данным примерно в трети случаев возвратный нерв лежит впереди артерии, в трети случаев между ветвями, а в трети случаев – позади от верхней щитовидной артерии [15]. Лимфатические сосуды следуют по ходу артерий и впадают в средостенные, глубокие шейные и трахеальные лимфатические узлы [15; 31].

При выполнении оперативных вмешательств на щитовидной железе большое значение имеет топография возвратных гортанных нервов. Согласно данным Н.А. Огнерубова и соавт., отношение этих нервов к тра-

хео-пищеводной борозде зависит от стороны, пола и типовых особенностей шеи. Так, у лиц обоего пола нерв достоверно чаще располагается в трахео-пищеводной борозде справа. Выявлены и половые особенности. При этом у мужчин возвратные гортанные нервы чаще, чем у женщин, находились в указанной борозде. При короткой и тонкой шее нерв располагался в трахео-пищеводной борозде справа в 3 раза чаще, чем слева. При всех типах толстой шеи левый возвратный гортанный нерв находился вне трахео-пищеводной борозды. У женщин правый возвратный гортанный нерв располагался в трахео-пищеводной борозде только при средней тонкой и короткой тонкой шее в 41 и 18 % случаев соответственно [66–68].

В механизме интраоперационной травмы возвратного гортанного нерва главная роль принадлежит взаимоотношению с нижней щитовидной артерией. Н.А. Огнерубов и соавт. (1999) выявили билатеральную асимметрию этого взаимоотношения [69]. Причем, у мужчин правый возвратный гортанный нерв находился впереди артерии в 17 раз чаще, чем левый, а между ее ветвями, в 2,5 раза реже, чем левый. Аналогичные взаимоотношения отмечались и у женщин – справа нерв встречался впереди артерии в 6 раз чаще, чем слева, а между ее ветвями в 3,8 раза реже, чем слева. Локализация возвратного гортанного нерва позади нижней щитовидной артерии встречалась у лиц обоего пола одинаково часто (42 и 43 % соответственно). Интересные результаты получены при изучении этих взаимоотношений в связи с типовыми особенностями шеи [70–71]. Вероятность расположения нервов впереди артерии при всех типах короткой и толстой шеи больше. Такой вариант взаимоотношений является наиболее неблагоприятным, поскольку он увеличивает риск интраоперационного повреждения возвратных нервов. У субъектов с длинной и тонкой шеей характерно его нахождение позади или между ветвями нижней щитовидной артерии [72–73].

Таким образом, приведенные данные литературного обзора, посвященные морфометрическому анализу щитовидной железы, свидетельствуют о ее значительной индивидуальной изменчивости. Знания анатомии щитовидной железы и связанные с ней анатомические вариации необходимо учитывать в дифференциальной диагностике заболеваний и выработке оптимальной техники хирургического лечения при доброкачественных и злокачественных новообразованиях щитовидной железы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сапин М.Р., Бочаров В.Я., Никитюк Д.Б., Сатюкова Г.С., Селин Ю.М., Мпирин Б.А. Анатомия человека: в 2 т. 5-е изд. М.: Медицина, 2001. Т. 2. С. 168–172.
2. Сергиенко В.И., Петросян Э.А., Фраучи И.В. Топографическая анатомия и оперативная хирургия: в 2 т. / под общ. ред. акад. РАМН Ю.М. Лопухина. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2001. Т. 1. С. 623–625.
3. Валдина Е.А. Заболевания щитовидной железы: Руководство. 3-е изд. СПб.: Питер, 2006. С. 13–18.
4. Огнерубов Н.А., Зрютина А.В. Аномалии развития щитовидной железы: обзор литературы // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 6. С. 3309–3311.
5. Синельников Р.Д., Синельников Я.Р. Атлас анатомии человека: учеб. пособие: в 4 т. 2-е изд., стереотип. М.: Медицина, 1996. Т. 2. С. 232–234.
6. Кубарко А.И., Yamashita S., Денисов С.Д., Демидчик Ю.Е., Дубовик Б.В., Романовский Д.И., Ashizawa K., Ito M., Takamura N. Ци-

- товидная железа. Фундаментальные аспекты. Минск; Нагасаки: Omura Print, 1998. С. 12-21.
7. *Roopali D. Nikumbh, Dhiraj D. Nikumbh, Megha A. Doshi.* Multiple morphological variations in the thyroid gland: report of two cases // *Int. J. Anat. Res.* 2015. V. 3 (4). P. 1476-1480.
 8. *Rathod S. Mansing, Mahesh S. Taru, Santosh D. Sawai.* Morphological variations of thyroid gland // *International J. of Healthcare and Biomedical Research.* 2015. V. 03. № 02. P. 175-177.
 9. *Lattupalli Hema.* Multiple variations in the morphology of thyroid gland // *International J. of Recent Trends in Science and Technology.* 2014. V. 11 (2). P. 143-147.
 10. *Marshall C.F.* Variations in the form of the thyroid gland in man // *J. Anat. Physiol.* 1895. V. 29. P. 234-239.
 11. *Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Савенок В.У.* Особенности линейных размеров и форм щитовидной железы в связи с типами телосложения // Новое направление в хирургии: сб. науч. тр. Воронеж, 1998. Вып. 1. С. 146-147.
 12. *Огнерубов Н.А., Малеев Ю.В.* Значение индивидуальной анатомической изменчивости в клинической практике. Типовые особенности области щитовидной железы // Специализированная медицинская помощь: сб. науч. тр. Воронеж, 1999. С. 72-75.
 13. *Черных А.В., Малеев Ю.В., Котюх В.А., Шмакова Н.М.* Новые данные по типовой анатомии щитовидной железы // Бюллетень Волгоградского научного центра РАМН. 2006. Т. 2. С. 32.
 14. *Тонков В.Н.* Учебник нормальной анатомии человека / под ред. чл.-корр. АМН СССР профессора Б.А. Долго-Сабурова. 6-е изд. Ленинград: Медгиз, 1962. 764 с.
 15. *Мкртумян А.М., Подачина С.В., Петунина Н.А.* Заболевания щитовидной железы. Руководство для врачей. М.: Медфорум, 2012. 128 с.
 16. *Ranade A.V., Rai R., Pai M.M., Nayak S.R., Prakash, Krisnamurthy A., Narayana S.* Anatomical variations of the thyroid gland: possible surgical implications // *Singapore Med. J.* 2008. V. 49 (10). P. 831-834.
 17. *Snell R.S.* Clinical anatomy by regions. 9th ed. China: Lippincott Williams & Wilkins, a Wolters Kluwer business, 2004, 2008, 2012. 754 p.
 18. *Островецких Г.Е., Лубочкий Д.Н., Бомаш Ю.М.* Курс оперативной хирургии и топографической анатомии. М.: Медицина, 1964. 744 с.
 19. *Сигал З.М.* Топографическая анатомия и оперативная хирургия: учебное пособие. Ижевск: Редакционно-издательский центр ГБОУ ВПО ИГМА, 2013.
 20. *Огнерубов Н.А.* Агенезия перешейка щитовидной железы – редкая аномалия развития: описание случая // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 6. С. 3306-3308.
 21. *Har Simarjit Kaur, Upasna Kumar, Sukhminder Jit Singh Bajwa, Gandeep Singh Kalyan.* Absent thyroid isthmus: Embryological and clinical implications of a rare variation of thyroid gland revisited // *Thyroid Res. Pract.* 2013. V. 10. № 2. P. 80-82.
 22. *Hamburger J.I., Hamburger S.W.* Thyroidal hemiagenesis: Report of a case and comments on clinical ramifications // *Arch Surg.* 1970. V. 100 (3). P. 319-320.
 23. *Erdheim J.* Über Schilddrüsenaplasie // *Beitr. Pathol. Anat. Allg. Pathol.* 1904. V. 35. P. 366.
 24. *Hirschfeld S.* Zur Kenntnis des halbseitigen Schilddrüsenmangels // *Centralbl. Allg. Pathol. Anat.* 1931. V. 52. P. 289.
 25. *Poate H.R.G., Wyndham N.* Hemiaplasia of the thyroid gland // *Med. J. Aust.* 1935. V. 2. P. 514.
 26. *Mirouze J., Jaffiol C., Signalet J., Pastorello R., Baldet L.* Un diagnostic différentiel: adénome toxique ou agénésie thyroïdienne partielle avec maladie de Basedow du lobe restant // *Rev. Fr. Endocrinol. Clin.* 1967. V. 8. P. 161.
 27. *Russotto J.A., Boyar R.M.* Thyroid hemiagenesis // *J. Nucl. Med.* 1970. V. 12. P. 186.
 28. *Maganini R.J., Narendran K.* Hyperthyroidism in a patient with thyroidal hemiagenesis // *Ill. Med. J.* 1977. V. 151. P. 368.
 29. *Letonturier P., Hazard R., Tourneur R., Perlemuter L., Angel R.* Hemiagenesis thyroïdienne: Lobe thyroïdien unique 8 observations // *Nouv. Presse Med.* 1979. V. 8. P. 1227.
 30. *Sankar K.D., Bhanu P.S., Bapuji P.* Agenesis of isthmus of thyroid gland with embryological and clinical basis // *Narayana Medical Journal.* 2012. V. 1. № 1. P. 32-34.
 31. *Schanaider A., de Oliveira P.J.* Thyroid isthmus agenesis associated with solitary nodule: a case report // *Cases Journal.* 2008. V. 1. P. 211.
 32. *Chang J., Gerscovich E.O., Dublin A., McGahan J.P.* Thyroid Hemiagenesis: A Rare Finding // *J. Ultrasound Med.* 2011. V. 30. № 9. P. 1309-1310.
 33. *Lokanadham S., Satheesh Naik K., Subhadra Devi V.* Thyroid gland isthmus agenesis in autopsied fetus: Case study // *Prime Research on Medicine.* 2012. V. 2 (1). P. 69-71.
 34. *Omer Faruk Ozkan, Mehmet Asik, Huseyin Toman, Faruk Ozkul, Oztekin Cakman, Muammer Karaayvaz.* Agenesis of Isthmus of the Thyroid Gland in a Patient with Graves-Basedow Disease and a Solitary Nodule. Case Reports in Surgery. 2013. V. 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/608481>
 35. *Williams E.D., Toyn C.E., Harach H.R.* The ultimobranchial gland and congenital thyroid abnormalities in man // *J. Pathol.* 1989. V. 159. P. 135-141.
 36. *Braun E., Windisch G., Wolf G., Hausleitner L., Anderhuber F.* The pyramidal lobe: clinical anatomy and its importance in thyroid surgery // *Surg. Radiol. Anat.* 2007. V. 29. P. 21-27.
 37. *Allan F.D.* An accessory or superficial inferior thyroid artery in a full term infant // *Anatomy. Rec.* 1952. V. 112 (3). P. 112-153.
 38. *Berker D., Ozuguz U., Isik S., Aydin Y., Ates Tutuncu Y., Akbaba G., Guler S.* A report of ten patients with thyroid hemiagenesis: ultrasound screening in patients with thyroid disease // *Swiss Med. Wkly.* 2010. V. 140. P. 118-121.
 39. *Sagiroglu A.O.* Gross anatomical study on anomalies of the thyroid gland // *Gazi Med. J.* 1997. V. 8. P. 33-39.
 40. *Joshi S.D., Joshi S.S., Daimi S.R., Athavale S.A.* The thyroid gland and its variations: a cadaveric study // *Folia Morphol.* 2010. V. 69 (1). P. 47-50.
 41. *Малеев Ю.В.* Хирургическая анатомия щитовидной железы в связи с типовыми особенностями шеи: автореф. дис. ... канд. мед. наук. Воронеж, 1999.
 42. *Ebtihal Abdulrahim Alfatani, Azza I. Zaki, Amira A. El- Haggagy, Iman H. Abdel Aal.* Anatomical Variations of the Thyroid Gland // *Life Science Journal.* 2014. V. 11 (9). P. 922-926.
 43. *Tanriover O., Comunoglu N., Eren B., Comunoglu C., Turkmen N., Bilgen S., Kaspar E.C., Gundogmus U.N.* Morphometric features of the thyroid gland: a cadaveric study of Turkish people // *Folia Morphol.* 2011. V. 70. № 2. P. 103-108.
 44. *Огнерубов Н.А., Малеев Ю.В., Мещеряков А.С., Голиков Э.В.* Особенности вариантной анатомии щитовидной железы // Актуальные вопросы современной медицины: межрегион. сб. науч. тр. Воронеж, 1997. С. 299-300.
 45. *Harjeet A., Sahni D., Jit I., Aggarwal A.K.* Shape, measurements and weight of the thyroid gland in northwest Indians // *Surg. Radiol. Anat.* 2004. V. 26 (2). P. 91-95.
 46. *Levy H.A., Sziklas J.J., Rosenberg R.J., Spencer R.P.* Incidence of a pyramidal lobe on thyroid scans // *Clin. Nucl. Med.* 1982. V. 7. P. 501-506.
 47. *Sultana S.Z., Mannan S., Ahmed M.S., Rahman M.M., Khan M.K., Khalil M.* An anatomical study on pyramidal lobe of thyroid gland in Bangladeshi people // *Mymensingh Med. J.* 2008. V. 17 (1). P. 8-13.
 48. *Kaplan E.L.* Thyroid and parathyroid // *Principles of surgery* / ed. by S.I. Schwartz. 6th ed. New York: McGraw-Hill Education, 1994. P. 1612.
 49. *Blumberg N.A.* Observation on the pyramidal lobe of the thyroid gland // *S. Afr. Med. J.* 1981. V. 59. P. 949-950.
 50. *Sgalitzer K.E.* Contribution to the study of the morphogenesis of the thyroid gland // *J. Anat.* 1941. V. 75. P. 389-405.
 51. *Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Котюх В.А.* Особенности кровоснабжения щитовидной железы в связи с типом телосложения // Новости клинической цитологии России. 1998. Т. 2. № 2. С. 83-84.
 52. *Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Котюх В.А.* Особенности вариантной анатомии предгортанных мышц в связи с типами телосложения // Новое направление в хирургии: сб. науч. тр. Воронеж, 1998. Вып. 1. С. 145-146.
 53. *Snyder W.S., Cook M.J., Nasset E.S., Karhausen L.R., Howells G.P., Tipton I.H.* International Commission on Radiological Protection N023. Report of the task group on reference man. Oxford: Pergamon Press, 1974. P. 96-202.
 54. *Fakhrul A.H.B., Zakia S., Mansur K., Seheri Z.S., Sheikh M.A.B., Abdul Q., Fashiru R.* Weight and volume of whole thyroid gland in Bangladeshi people: a postmortem study // *Bangladesh J. Anat.* 2010. V. 8. P. 72-75.
 55. *Hegedus L., Perrild H., Poulsen L.R., Andersen J.R., Holm B., Schnohr P., Jensen G., Hansen J.M.* The determination of thyroid volume by ultrasound and its relationship to body weight, age and sex in normal subjects // *J. Clin. Endocrinol. Metab.* 1983. V. 56. P. 260-263.
 56. *Ueda D.* Normal volume of the thyroid gland in children // *J. Clin. Ultrasound.* 1990. V. 18. P. 455-462.
 57. *Harland W.A.* Morphology of the thyroid gland in Jamaica // *J. Clin. Endocrinol.* 1964. V. 24. P. 580-585.
 58. *Aimi S., Yasoshima S., Sugai M., Sato B., Sakai T., Nakajima Y.* Studies on the weight and size of internal organs of normal Japanese // *Acta Pathol. Jpn.* 1952. V. 2. № 4. P. 173-200.
 59. *Tanaka G., Nakahara Y., Nakajima Y.* Japanese reference man 1988. IV. Studies on the weight and size of internal organs of normal Japanese // *Nippon Acta Radiol.* 1989. V. 49. P. 344-364.
 60. *Toy E.C., Ross L.M., Cleary L.J., Papasakelariou C.* Case Files Anatomy. 2nd ed. N. Y.: The McGraw-Hill Education, 2008. 384 p.
 61. Щитовидная железа, описание, гормоны щитовидной железы. URL: <http://anatomus.ru/sistema-zhelez/shchitovidnaya-zheleza.html> (дата обращения: 04.01.2016).

62. Особенности анатомического строения щитовидной железы применительно к проведению операций. URL: <http://www.thyroid-cancer.ru/patients/articles/oper/anatom/index.html> (дата обращения: 04.01.2016).
63. Щитовидная железа. URL: http://www.erudition.ru/referat/printref/id.33798_1.html (дата обращения: 04.01.2016).
64. Синтопия щитовидной железы. Кровоснабжение щитовидной железы. Сосуды щитовидной железы. Иннервация щитовидной железы. Нервы щитовидной железы. URL: <http://meduniver.com/Medical/Topochka/279.html> (дата обращения: 04.01.2016).
65. Siewert J.R. Basiswissen Chirurgie / bearb. von R.B. Brauer. Heidelberg: Springer Medizin Verlag, 2007. P. 223-225.
66. Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Котюх В.А. Варианты расположения пирамидального отростка и мышцы, поднимающей щитовидную железу // Новости клинической цитологии России. 1998. Т. 2. № 2. С. 82-83.
67. Огнерубов Н.А., Малеев Ю.В., Мещеряков А.С. Особенности хирургической анатомии возвратного нерва в связи с типами телосложения // Профилактика, диагностика и лечение онкологических заболеваний: материалы науч.-практ. конф., посвящ. 20-летию кафедры онкологии АГМУ. Барнаул, 1998. С. 189.
68. Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Савенок В.Ю., Савенок Э.В. Определение топографии возвратного гортанного нерва по антропометрическим показателям шеи // Морфогенез и регенерация: сб. науч. тр., посвящ. 80-летию проф. Д.А. Сигалевича. Курск, 1999. С. 67.
69. Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В. Особенности взаимоотношений возвратного гортанного нерва с нижней щитовидной артерией // Новости клинической цитологии России. 1999. Т. 3. № 34. С. 158.
70. Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В., Савенок Э.В. Хирургическая анатомия щитовидной железы в связи с типовыми особенностями шеи // Актуальные вопросы эндокринологии: материалы 3 Рос. науч.-практ. конф. Пермь, 2000. С. 128.
71. Огнерубов Н.А., Черных А.В., Малеев Ю.В. Типовые особенности щитовидной железы // Диагностика и лечение осложненных форм язвенной болезни желудка и двенадцатиперстной кишки: материалы межрегион. науч.-практ. конф. Воронеж, 2000. С. 103-105.
72. Hollinshead W.H. Anatomy for surgeons: in 3 vols. N. Y.: Hoeber-Harper, 1961. V. 2. The head and the neck. 875 p.
73. Joshi S.D., Joshi S.S., Daimi S.R., Athavale S.A. The thyroid gland and its variations: a cadaveric study // Folia Morphol. 2010. V. 69. P. 47-50.

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

UDC 616.41

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-541-550

INDIVIDUAL DIFFERENCES OF SURGERY ANATOMY OF THYROID GLAND: LITERATURE REVIEW

© N.A. Ognerubov, A.O. Zhukov, R.S. Sergeev

The literature review presents the differences in surgery anatomy of thyroid gland according to the data of native and foreign literature including the results of their own researches, carried out before (N.A. Ognerubov). The differences of its some anatomic indices such as linear sizes, form, presence of lobes, differences in blood supply and innervation depending on sex and type of neck build. The existing variants of individual changeability must be taken into consideration while personalized surgery treatment of patients with non-malignant and malignant growth of thyroid gland.

Key words: thyroid gland; surgery anatomy; individual changeability.

REFERENCES

1. Sapin M.R., Bocharov V.Ya., Nikityuk D.B., Satyukova G.S., Selin Yu.M., Mpirin B.A. *Anatomiya cheloveka*: v 2 t. 5th ed, Moscow, Meditsina Publ., 2001, vol. 2, pp. 168-172.
2. Sergienko V.I., Petrovskiy E.A., Frauchi I.V. *Topograficheskaya anatomiya i operativnaya khirurgiya*: v 2 t. Moscow, GEOTAR-Media Publ., 2001, vol. 1, pp. 623-625.
3. Valdina E.A. *Zabolevaniya shchitovidnoy zhelezy: Rukovodstvo*. 3th ed., St. Petersburg, Piter Publ., 2006, pp. 13-18.
4. Ognerubov N.A., Zryutina A.V. Anomalii razvitiya shchitovidnoy zhelezy: obzor literatury. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. Tambov, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 3309-3311.
5. Sinelnikov R.D., Sinelnikov Ya.R. *Atlas anatomii cheloveka: ucheb. posobie*: v 4 t. 2th ed., Moscow, Meditsina Publ., 1996, vol. 2, pp. 232-234.
6. Kubarko A.I., Yamashita S., Denisov S.D., Demidchik Yu.E., Dubovik B.V., Romanovskiy D.I., Ashizava K., Ito M., Takamura N. *Shchitovidnaya zheleza. Fundamentalnye aspekty*. Minsk; Nagasaki, Omura Print, 1998, pp. 12-21.
7. Roopali D., Nikumbh, Dhiraj D., Nikumbh, Megha A., Doshi. Multiple morphological variations in the thyroid gland: report of two cases. *Int. J. Anat. Res.*, 2015, vol. 3, no. 4, pp. 1476-1480.
8. Rathod S., Mansing, Mahesh S., Taru, Santosh D., Sawai. Morphological variations of thyroid gland. *International J. of Healthcare and Biomedical Research*, 2015, vol. 03, no. 02, pp. 175-177.
9. Lattupalli Hema. Multiple variations in the morphology of thyroid gland. *International J. of Recent Trends in Science and Technology*, 2014, vol. 11, no. 2, pp. 143-147.
10. Marshall C.F. Variations in the form of the thyroid gland in man. *J. Anat. Physiol.*, 1895, vol. 29, pp. 234-239.
11. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Savenok V.U. Osobennosti lineynykh razmerov i form shchitovidnoy zhelezy v svyazi s tipami teloslozheniya. *Trudy "Novoe napravlenie v khirurgii"*. Voronezh, 1998, no. 1, pp. 146-147.
12. Ognerubov N.A., Maleev Yu.V. Znachenie individual'noy anatomicheskoy izmenchivosti v klinicheskoy praktike. Tipovye osobennosti oblasti shchitovidnoy zhelezy. *Trudy Spetsializirovannaya meditsinskaya pomoshch'*. Voronezh, 1999, pp. 72-75.

13. Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Kotyukh V.A., Shmakova N.M. Novye dannye po tipovoy anatomii shchitovidnoy zhelezy. *Byulleten' Volgogradskogo nauchnogo tsentra RAMN*, 2006, vol. 2. P. 32.
14. Tonkov V.N. *Uchebnik normal'noy anatomii cheloveka*. 6th ed, Leningrad, Medgiz Publ., 1962, 764 p.
15. Mkrtumyan A.M., Podachina S.V., Petunina N.A. *Zabolevaniya shchitovidnoy zhelezy. Rukovodstvo dlya vrachey*. Moscow, Publishing House "Medforum", 2012. 128 p.
16. Ranade A.V., Rai R., Pai M.M., Nayak S.R., Prakash, Krisnamurthy A., Narayana S. Anatomical variations of the thyroid gland: possible surgical implications. *Singapore Med. J.*, 2008, vol. 49, no. 10, pp. 831-834.
17. Snell R.S.. *Clinical anatomy by regions*. 9th ed., China, Lippincott Williams & Wilkins, a Wolters Kluwer business, 2004, 2008, 2012. 754 p.
18. Ostroverkhov G.E., Lubotskiy D.N., Bomash Yu.M. *Kurs operativnoy khirurgii i topograficheskoy anatomii*. Moscow, Meditsina Publ., 1964. 744 p.
19. Sigal Z.M. *Topograficheskaya anatomiya i operativnaya khirurgiya: uchebnoe posobie*. Izhevsk, Editorial-publishing centre ISMA, 2013.
20. Ognerubov N.A. Agenezia peresheyka shchitovidnoy zhelezy – redkaya anomalija razvitiya: opisanie sluchaya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, vol. 18, no. 6, pp. 3306-3308.
21. Har Simarjit Kaur, Upasna Kumar, Sukhminder Jit Singh Bajwa, Gurdeep Singh Kalyan. Absent thyroid isthmus: Embryological and clinical implications of a rare variation of thyroid gland revisited. *Thyroid Res. Pract.*, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 80-82.
22. Hamburger J.I., Hamburger S.W. Thyroidal hemiagenesis: Report of a case and comments on clinical ramifications. *Arch Surg.*, 1970, vol. 100, no. 3, pp. 319-320.
23. Erdheim J. Über Schilddrüsenaplasie. *Beitr. Pathol. Anat. Allg. Pathol.*, 1904, vol. 35, pp. 366.
24. Hirschfeld S. Zur Kenntnis des halbseitigen Schilddrüsenmangels. *Centralb. Allg. Pathol. Anat. Pathol.*, 1931, vol. 52, pp. 289.
25. Poate H.R.G., Wyndham N. Hemiaplasia of the thyroid gland. *Med. J. Aust.*, 1935, vol. 2, pp. 514.
26. Mirouze J., Jaffiol C., Seignalet J., Pastorello R., Baldet L. Un diagnostic différentiel: adénome toxique ou agénésie thyroïdienne partielle avec maladie de Basedow du lobe restant. *Rev. Fr. Endocrinol Clin.*, 1967, vol. 8, pp. 161.
27. Russotto J.A., Boyar R.M. Thyroid hemiagenesis. *J. Nucl. Med.*, 1970, vol. 12, pp. 186.
28. Maganini R.J., Narendran K. Hyperthyroidism in a patient with thyroidal hemiagenesis. *Ill. Med. J.*, 1977, vol. 151, pp. 368.
29. Letonturier P., Hazard J., Tourneur R., Perlemuter L., Angel R. Hemiagenésie thyroïdienne: Lobe thyroïdien unique 8 observations. *Nouv. Presse Med.*, 1979, vol. 8, pp. 1227.
30. Sankar K.D., Bhanu P.S., Bapuji P. Agensis of isthmus of thyroid gland with embryological and clinical basis. *Narayana Medical Journal*, 2012, vol. 1, no. 1, pp. 32-34.
31. Schanaider A., de Oliveira P.J. Thyroid isthmus agenesis associated with solitary nodule: a case report. *Cases Journal*, 2008, vol. 1, pp.211.
32. Chang J., Gerscovich E.O., Dublin A., McGahan J.P. Thyroid Hemia-genesis: A Rare Finding. *J. Ultrasound Med*, 2011, vol. 30, no. 9, pp. 1309-1310.
33. Lokanadham S., Satheesh Naik K., Subhadra Devi V. Thyroid gland isthmus agenesis in autopsied fetus: Case study. *Prime Research on Medicine*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 69-71.
34. Omer Faruk Ozkan, Mehmet Asik, Huseyin Toman, Faruk Ozkul, Oztekin Cıkman, Muammer Karaayvaz. Agensis of Isthmus of the Thyroid Gland in a Patient with Graves-Basedow Disease and a Solitary Nodule. *Case Reports in Surgery*. 2013, vol. 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/608481>
35. Williams E.D., Toyn C.E., Harach H.R. The ultimobranchial gland and congenital thyroid abnormalities in man. *J. Pathol.*, 1989, vol. 159, pp. 135-141.
36. Braun E., Windisch G., Wolf G., Hausleitner L., Anderhuber F. The pyramidal lobe: clinical anatomy and its importance in thyroid surgery. *Surg. Radiol. Anat.*, 2007, vol. 29, pp. 21-27.
37. Allan F.D. An accessory or superficial inferior thyroid artery in a full term infant. *Anatomy. Rec.*, 1952, vol. 112, no. 3, pp. 112-153.
38. Berker D., Ozuguz U., Isik S., Aydin Y., Ates Tutuncu Y., Akbaba G., Guler S. A report of ten patients with thyroid hemiagenesis: ultrasound screening in patients with thyroid disease. *Swiss Med. Wkly.*, 2010, vol. 140, pp. 118-121.
39. Sagiroglu A.O. Gross anatomical study on anomalies of the thyroid gland. *Gazi Med. J.*, 1997, vol. 8, pp. 33-39.
40. Joshi S.D., Joshi S.S., Daimi S.R., Athavale S.A. The thyroid gland and its variations: a cadaveric study. *Folia Morphol.*, 2010, vol. 69, no. 1, pp. 47-50.
41. Maleev Yu.V. *Khirurgicheskaya anatomiya shchitovidnoy zhelezy v svyazi s tipovymi osobennostyami shei*. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata meditsinskikh nauk. Voronezh, 1999.
42. Ebtiha Abdulrahim Alfatani, Azza I. Zaki, Amira A. El- Haggagy, Iman H. Abdel Aal. Anatomical Variations of the Thyroid Gland. *Life Science Journal*, 2014, vol. 11, no. 9, pp. 922-926.
43. Tanriover O., Comunoglu N., Eren B., Comunoglu C., Turkmen N., Bilgen S., Kaspar E.C., Gundogmus U.N. Morphometric features of the thyroid gland: a cadaveric study of Turkish people. *Folia Morphol.*, vol.70., no. 2, pp. 103-108.
44. Ognerubov N.A., Maleev Yu.V., Meshcheryakov A.S., Golikov E.V. Osobennosti variantnoy anatomii shchitovidnoy zhelezy. *Trudy Aktual'nye voprosy sovremennoy meditsiny*. Voronezh, 1997, pp. 299-300.
45. Harjeet A., Sahni D., Jit I., Aggarwal A.K. Shape, measurements and weight of the thyrod gland in northwest Indians. *Surg. Radiol. Anat.*, 2004, vol. 26, no. 2, pp. 91-95.
46. Levy H.A., Sziklas J.J., Rosenberg R.J., Spencer R.P. Incidence of a pyramidal lobe on thyroid scans. *Clin. Nucl. Med.*, 1982, vol. 7, pp. 501-506.
47. Sultana S.Z., Mannan S., Ahmed M.S., Rahman M.M., Khan M.K., Khalil M. An anatomical study on pyramidal lobe of thyroid gland in Bangladeshi people. *Mymensingh Med. J.*, 2008, vol. 17, no.1, pp. 8-13.
48. Kaplan E.L. *Thyroid and parathyroid. Principles of surgery*. 6th ed., New York, McGraw-Hill Education, 1994, pp. 1612.
49. Blumberg N.A. Observation on the pyramidal lobe of the thyroid gland. *S. Afr. Med. J.*, 1981, vol. 59, pp. 949-950.
50. Sgalitzer K.E. Contribution to the study of the morphogenesis of the thyroid gland. *J. Anat.*, 1941, vol. 75, pp. 389-405.
51. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Kotyukh V.A. Osobennosti krovoznabzheniya shchitovidnoy zhelezy v svyazi s tipom teloslozheniya. *Novosti klinicheskoy tsitologii Rossii*, 1998, vol. 2, no. 2, pp. 83-84.
52. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Kotyukh V.A. Osobennosti variantnoy anatomii predgortannykh myshts v svyazi s tipami teloslozheniya. *Trudy Novoe napravlenie v khirurgii*. Voronezh, 1998, no. 1, pp. 145-146.
53. Snyder W.S., Cook M.J., Nasset E.S., Karhausen L.R., Howells G.P., Tipton I.H. *International Commission on Radiological Protection N023. Report of the task group on reference man*. Oxford, Pergamon Press, 1974, pp. 96-202.

54. Fakhrul A.H.B., Zakia S., Mansur K., Seheli Z.S., Sheikh M.A.B., Abdul Q., Fashiru R. Weight and volume of whole thyroid gland in Bangladeshi people: a postmortem study. *Bangladesh J. Anat.*, 2010, vol. 8, pp. 72-75.
55. Hegedus L., Perrild H., Poulsen L.R., Andersen J.R., Holm B., Schnohr P., Jensen G., Hansen J.M. The determination of thyroid volume by ultrasound and its relationship to body weight, age and sex in normal subjects. *J. Clin. Endocrinol. Metab.*, 1983, vol. 56, pp. 260-263.
56. Ueda D. Normal volume of the thyroid gland in children. *J. Clin. Ultrasound*, 1990, vol. 18, pp. 455-462.
57. Harland W.A. Morphology of the thyroid gland in Jamaica. *J. Clin. Endocrinol.*, 1964, vol. 24, pp. 580-585.
58. Aimi S., Yasoshima S., Sugai M., Sato B., Sakai T., Nakajima Y. Studies on the weight and size of internal organs of normal Japanese. *Acta Pathol. Jpn.*, 1952, vol. 2, no. 4, pp. 173-200.
59. Tanaka G., Nakahara Y., Nakajima Y. Japanese reference man 1988. IV. Studies on the weight and size of internal organs of normal Japanese. *Nippon Acta Radiol.*, 1989, vol. 49, pp. 344-364.
60. Toy E.C., Ross L.M., Cleary L.J., Papasakelariou C. *Case Files Anatomy*. 2nd ed., New York, The McGraw-Hill Education, 2008, 384 p.
61. *Shchitovidnaya zheleza, opisanie, gormony shchitovidnoy zhelezy*. Available at: <http://anatomus.ru/sistema-zhelez/shchitovidnaya-zheleza.html> (accessed 4.01.2016).
62. *Osobennosti anatomicheskogo stroeniya shchitovidnoy zhelezy primenitel'no k provedeniyu operatsiy*. Available at: <http://www.thyroidcancer.ru/patients/articles/oper/anatom/index.html> (accessed 4.01.2016).
63. *Shchitovidnaya zheleza*. Available at: http://www.erudition.ru/referat/printref/id.33798_1.html (accessed 4.01.2016).
64. *Sintopiya shchitovidnoy zhelezy. Krovosnabzhenie shchitovidnoy zhelezy. Sosudy shchitovidnoy zhelezy. Innervatsiya shchitovidnoy zhelezy. Nervy shchitovidnoy zhelezy*. Available at: <http://meduniver.com/Medical/Topochka/279.html> (accessed 4.01.2016).
65. Siewert J.R. *Basiswissen Chirurgie*. Heidelberg, Springer Medizin Verlag, 2007, pp. 223-225.
66. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Kotyukh V.A. Varianty raspolozheniya piramidal'nogo otrostka i myshtsy, podnimayushchey shchitovidnuyu zhelezu. *Novosti klinicheskoy tsitologii Rossii*, 1998, vol. 2, no. 2, pp. 82-83.
67. Ognerubov N.A., Maleev Yu.V., Meshcheryakov A.S. Osobennosti khirurgicheskoy anatomii vozvratnogo nerva v svyazi s tipami teloslozheniya. *Materialy nauchno-prakticheskoy konferentsii, posvyashchennoy 20-letiyu kafedry onkologii AGMU "Profilaktika, diagnostika i lechenie onkologicheskikh zabolevaniy"*. Barnaul, 1998. P. 189.
68. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Savenok V.Yu., Savenok E.V. Opredelenie topografii vozvratnogo gortannogo nerva po antropometricheskim pokazatelyam shei. Morfogenez i regeneratsiya. *Trudy, posvyashchennye 80-letiyu professora D.A. Sigalevicha*. Kursk, 1999, pp. 67.
69. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V. Osobennosti vzaimootnosheniy vozvratnogo gortannogo nerva s nizhney shchitovidnoy arteriy. *Novosti klinicheskoy tsitologii Rossii*, 1999, vol. 3, no. 34, pp. 158.
70. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V., Savenok E.V. Khirurgicheskaya anatomiya shchitovidnoy zhelezy v svyazi s tipovymi osobennostyami shei. *Materialy 3 Rossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Aktual'nye voprosy endokrinologii"*. Perm, 2000. P. 128.
71. Ognerubov N.A., Chernykh A.V., Maleev Yu.V. Tipovye osobennosti shchitovidnoy zhelezy. *Materialy mezhtseleynoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Diagnostika i lechenie oslozhnennykh form yazvennoy bolezni zheludka i dvenadtsatipervoy kishki"*. Voronezh, 2000, pp. 103-105.
72. Hollinshead W.H. *Anatomy for surgeons: in 3 vols. Vol. 2. The head and the neck*. New York, Hoeber-Harper, 1961. 875 p.
73. Joshi S.D., Joshi S.S., Daimi S.R., Athavale S.A. The thyroid gland and its variations: a cadaveric study. *Folia Morphol.*, 2010, vol. 69, pp. 47-50.

Received 1 March 2016

Огнерубов Николай Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, кандидат юридических наук, профессор, зав. кафедрой анатомии, оперативной хирургии и онкологии, заслуженный работник высшей школы РФ, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ognerubov Nikolay Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Candidate of Jurisprudence, Professor, Head of Anatomy, Operative Surgery and Oncology Department, Honored Worker of Higher School of Russian Federation, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Жуков Александр Олегович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студент медицинского института, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Zhukov Aleksander Olegovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Student of Medical Institute, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Сергеев Руслан Сергеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студент медицинского института, e-mail: russlannn777@mail.ru

Sergeev Ruslan Sergeevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Student of Medical Institute, e-mail: russlannn777@mail.ru

УДК 616-006
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-551-556

ГИГАНТСКАЯ ЛИПОМА ГРУДНОЙ СТЕНКИ: ОПИСАНИЕ СЛУЧАЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

© Н.А. Огнерубов, А.А. Иванников, В.Л. Чанг

Приведен подробный анализ литературных данных, посвященный различным вопросам гигантских липом. При этом дана трактовка термина, причины развития, особенности клиники. Основным методом лечения этого заболевания является хирургический. Кроме того, имеются указания на возможность применения липосакции. Авторы приводят описание случая гигантской липомы грудной стенки у пациента 88 лет с успешным хирургическим лечением. Случай интересен тем, что опухоль у него была диагностирована 62 года назад. В доступной литературе такого длительного носительства опухоли в этом возрастном периоде не описано. При осмотре через 14 месяцев пациент жив, признаков возврата заболевания нет.

Ключевые слова: передняя стенка грудной клетки; гигантская липома; доброкачественная опухоль; клиника; хирургическое лечение.

Липомы – наиболее распространенные доброкачественные мезенхимальные опухоли, возникающие из зрелых липоцитов. Макроскопически они хорошо ограничены, окружены фиброзной капсулой, безболезненные на ощупь. На их долю приходится 10 % среди всех опухолей из жировой ткани с разнообразной локализацией, причем 13 % липом локализуются в области головы и шеи [1]. Как правило, они имеют небольшие размеры и вес, протекают бессимптомно и обладают низким индексом малигнизации [2–4]. Однако они могут достигать значительных размеров и сопровождаться различными клиническими проявлениями – это т. н. гигантские липомы. О случаях гигантских липом в литературе появляются периодические сообщения каждые несколько лет, т. е. их появление носит спорадический характер без какой-либо этиологической принадлежности.

Доброкачественные опухоли грудной клетки очень необычны. В литературе сообщения об этих липомах относятся к разряду редких [5–6]. Обычно липомы грудной стенки появляются у людей, страдающих ожирением, и в возрасте 50–70 лет [7–9].

В литературе нет четкой трактовки термина гигантская липома. Тем не менее, большинство авторов считают, что размер и вес опухоли являются основополагающими. M.R. Sanchez et al. в 1993 г. предлагают считать опухоли гигантскими при их размере более 10 см и весе 1000 г [3]. Аналогичной точки зрения придерживаются R. Miguel et al. (1993) [6], Grimaldi et al. (2015) [10]. В детской практике к гигантским липомам относят опухоли более 5 см [5].

Причины возникновения и механизмы развития гигантских липом не изучены. Ряд исследователей считают, что механическая травма является причиной роста опухоли, поскольку она может вызвать разрыв волокнистых перегородок между кожей и глублежащей фасцией, что сопровождается свободным истечением жировых клеток с формирование опухоли [11]. Согласно второй теории, при травме образуются цитокины, которые ускоряют преддифференцировку и созревание

адипоцитов [12–16]. Кроме того, к причинам развития гигантских липом некоторые авторы относят гиперхолестеринемию [17–18]. К факторам риска развития гигантских липом относят также диабет, радиацию, семейные случаи и некоторые хромосомные отклонения [19–21].

Безусловно, основным методом диагностики гигантских липом является клинический. При длительном существовании опухоли, под влиянием веса, отвисает, что приводит к формированию ножки, наличие которой, с нашей точки зрения, является патогномоничной.

Гигантские липомы обладают определенным злокачественным потенциалом. В связи с чем диагностический алгоритм при этом направлен на исключение липосаркомы. Каких-либо особых специальных методов диагностики липом на сегодняшний день не существует. Только компьютерная томография позволяет наиболее точно оценить локализацию, морфологию и структуру опухоли [22]. Определенную роль играет иммуногистохимическое исследование на везентин и белок S-100, однако эта реакция бывает положительной как при липоме, так и при липосаркоме. Fisch-реакция позволяет установить диагноз липосаркомы с помощью амплификации MDM-2 и CDK-4 в хромосоме 12q14-15. Эта реакция бывает положительной при липосаркоме [23].

Исторически самая большая липома была описана Т. Brandler в 1894 г. у 26-летнего мужчины [24]. Липома появилась в левой лопаточной области. Под тяжестью веса больной вынужден был наклоняться и удерживать ее на бедре. Пациенту было выполнено хирургическое лечение, при этом вес гигантской опухоли составил 22,7 кг. Olcay Guler et al. (2015) описали гигантскую липому у 72-летнего мужчины в середине грудной клетки в виде горба, размером 38×22×12 см, которая существовала на протяжении 10 лет. Пациенту было выполнено хирургическое лечение. Вес опухоли при этом составил 3,575 кг. Авторы считают, что это

самая большая опухоль, описанная в англоязычной литературе за последние 10 лет [25].

Col Sandeep Mehrotra et al. (2014) описали гигантскую рецидивирующую (4 рецидив) липому у 82-летнего пациента, которая поражала левую грудь, подмышечную впадину, плечевой сустав, руку и спину [26]. Размер ее составил 106×18 см, а вес удаленной опухоли был 8 кг. Авторы убеждены, что, согласно литературным данным, это самая большая рецидивирующая липома за последние 100 лет. В литературе имеются указания на многократное (4–5) рецидивирование липом [27–28].

Согласно данным периодической печати, имеются разнообразие указания на длительность существования гигантских липом. Так, Джованни (2012) описывает пациента с 30-летней историей заболевания и считает его первым в истории. Махендра Сен и соавт. (2014) приводят случай гигантской липомы, локализуемой в области шеи, которая существовала на протяжении 20 лет. H.S. Martin в 1928 г. описал липому мягких тканей спины с продолжительностью заболевания в течение 58 лет [29]. В доступной литературе максимальная длительность существования липомы спины описана А.Н. Bissel в 1929 г., составляя 70 лет [30]. С тех пор такая длительность заболевания на сегодняшний день больше не описана.

Это касается также и возраста пациентов. В доступной литературе мы встретили описание случая наличия гигантской липомы верхней части спины у 84-летнего пациента, который был удачно прооперирован, при этом вес составил 5,75 кг [10].

В мировой литературе периодически приводятся сообщения о наблюдении гигантских липом, локализуемых в различных областях человеческого тела, в т. ч. грудной клетки (табл. 1).

Предпочтительным методом лечения гигантских липом является хирургический [5; 29; 31]. Помимо этого метода, возможно удаление при помощи липосакции [5; 32–37]. При этом наличие таких осложнений, как гематомы, повреждения нервов, невозможность точно удалить фиброзную капсулу из-за плотности ткани, развитие рецидива ограничивают применение данного метода лечения.

Мы наблюдали пациента 88 лет с гигантской липомой грудной стенки. Из анамнеза известно, что у больного в возрасте 26 лет в области верхней трети грудной стенки на передней поверхности появилась липома. Впервые за медицинской помощью он обратился в возрасте 30 лет. При этом был установлен диагноз липомы и предложено оперативное лечение. Однако больной от предложенного хирургического вмешательства отказался. С тех пор, со слов больного, опухоль постепенно росла, особенно в последние годы. Каких-либо физических неудобств опухоль пациенту не доставляла. Он занимался физической работой на садовом участке. Однако кожа в области опухоли стала отекает, появилась преходящая гиперемия. Это заставило пациента обратиться за медицинской помощью в октябре 2014 г. Объективно: в области верхней трети грудной стенки спереди слева имеется опухоль, размером 20×30 см на длинной четко контурирующей ножке, свисающая до пупка. Кожа в области опухоли слегка гиперемирована, симптом лимонной корки положительный в дистальной ее части (рис. 1). Подмышечные лимфатические узлы с обеих сторон размером до 0,5×1 см эластической консистенции, подвижные, над- и подключичные лимфатические узлы не пальпируются. При ультразвуковом исследовании печени и забрюшинных лимфатических узлов патологии не выявлено.

Таблица 1

Сообщения о наблюдении гигантских липом, локализуемых в различных областях человеческого тела

Авторы, год	Размер, см	Вес, кг	Продолжительность, лет	Локализация
Brandler T.I., 1894 [24]	–	22,700	11	Лопатка
Martin H.S., 1928 [29]	–	12,500	58	Шея и верхняя часть спины
Duger N., 1944 [38]	–	11,0	26	Шея
Bissel A.H., 1929 [30]	–	9,0	70	Верхняя часть спины
Hsu I.T., 1936 [39]	–	9,0	–	Шея
Sanchez et al., 1993 [3]	61×27	2,7	15	Шея и плечо
Hirshowitz B. et al., 1973 [13]	–	2,45	5	Шея и верхняя часть спины
Nichter L.S., Gupta G.R., 1990 [34]	18×17	0,900	–	Шея и верхняя часть спины
Grimaldi L. et al., 2015 [10]	36×40×24	5,75	30	Верхняя часть спины
Olçay Güler et al., 2015 [25]	38×22×21	3,575	10	Середина грудной клетки
Silistreli O.K. et al., 2005 [40]	25×35	6,450	–	Задняя поверхность шеи и межлопаточная область
Aydoğdu E. et al., 2004 [41]	34×31×25	1,950	–	Спина
Terzioğlu A. et al., 2004 [35]	19×9×5	1,135	–	Спина
Col Sandeep Mehrotra et al., 2015 [26]	106×18	8,0	–	Грудная клетка, подмышечная впадина, плечевой сустав, рука и спина
Leuzzi G. et al., 2012 [42]	26×26×21	4,570	30	Грудная клетка
Mahendra Singh et al., 2014 [1]	38×18×15	–	20	Шея и грудная клетка
Giuseppe Andrea Ferraro et al., 2015 [43]	23×11×8	–	5–6	Поясничная область



а)



б)

Рис. 1. Внешний вид опухоли грудной стенки: а) спереди; б) сбоку. 1 – ножка опухоли



Рис. 2. Макропрепарат удаленной опухоли, вес 3,250 кг

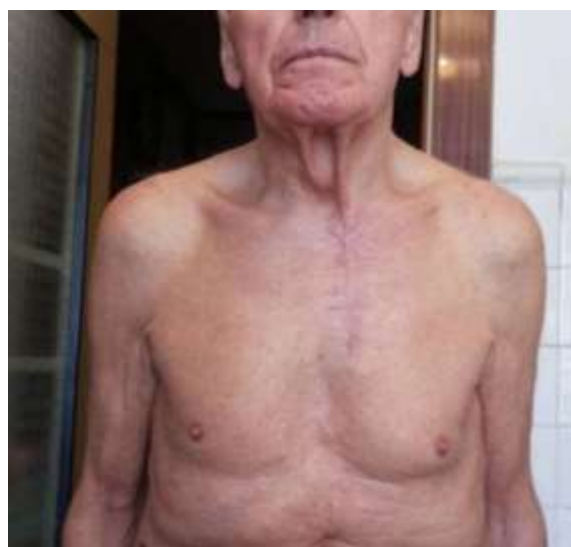


Рис. 3. Внешний вид больного спустя 14 месяцев после операции

Пациенту выполнено оперативное вмешательство в объеме иссечения опухоли под общим обезболиванием. Во время операции использовалась диатермокоагуляция, применение которой позволило уменьшить кровопотерю. Рана послойно ушита отдельными узловатыми швами. Общий вес удаленной опухоли составил 3,250 кг (рис. 2). В послеоперационном периоде осложнений не наблюдалось, рана зажила первичным натяжением.

При гистологическом исследовании опухоль представлена зрелыми адипоцитами с тонкими клеточными мембранами с маленькими ядрами. Признаков злокачественности не выявлено.

Пациент осмотрен через 14 месяцев, данных за рецидив заболевания нет (рис. 3).

ВЫВОДЫ

1. Гигантские липомы грудной стенки являются редкими доброкачественными опухолями.
2. Приведенный случай гигантской липомы грудной стенки с 62-летней историей болезни у 88-летнего пациента является первым в мировой литературе.

3. Основным методом лечения этих опухолей является хирургический.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Mahendra Singh, Ashish Saxena, Lovekesh Kumar, Snehal K. Karande, Yuvraj Kolhe. Giant Lipoma of Posterior Cervical Region // Case Reports in Surgery. 2014. V. 2014. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/289383>.
- Lucas D.R., Nascimento A.G., Sanjay B.K., Rock M.G. Well differentiated liposarcoma: the Mayo Clinic experience with 58 cases // Am. J. Clin. Pathol. 1994. V. 102. P. 677-683.
- Sanchez M.R., Golomb F.M., Moy J.A., Potozkin J.R. Giant lipoma: case report and review of the literature // J. Am. Acad. Dermatol. 1993. V. 28. P. 266-268.
- Munk P.L., Lee M.J., Janzen D.L. Lipoma and liposarcoma: evaluation using CT and MR imaging // AJR Am. J. Roentgenol. 1997. V. 169. P. 589-594.
- Rikki Singal, Manjit Singh Jora, Amit Mittal, Samita Gupta, Bir Singh, Sudha Khurana Kohli, Milan Verma An Unusual Presentation of Giant Extrathoracic Tumor in a Child-Managed Successfully // The Turkish Journal of Pediatrics. 2012. V. 54. P. 191-193.
- Ozpolat B., Ozeren M., Akkaya T., Yucel E. Giant lipoma of chest wall // Eur J. Cardiothorac Surg. 2004. V. 26. P. 437.
- Haas A.F., Fromer E.S., Bricca G.M. Spindle cell lipoma of the scalp: a case report and review // Dermatol. Surg. 1999. V. 25. P. 68-71.
- Van Thienen J., Van Loo S., Van der Stighelen Y. Case report: a gastric lipoma in a morbid obese man // Acta Chir. Belg. 2012. V. 112 (5). P. 393-394.
- Zografos G.C., Kouerinis I., Kalliopi P., Karmen K., Evagelos M., Androulakis G. Giant lipoma of the thigh in a patient with morbid obesity // Plast. Reconstr. Surg. 2002. V. 109 (4). P. 1467-1468.
- Grimaldi L., Cuomo R., Castagna A., Sisti A., Nisi G., Brandi C., D'Aniello C. Giant lipoma of the back Indian // J. Plast. Surg. 2015. V. 48 (2). P. 220-221.
- Simango S., Ramdial P.K., Madaree A. Subpectoral post-traumatic lipoma // Br. J. Plast. Surg. 2000. V. 53. P. 627-629.
- Copcu E., Sivrioglu N.S. Posttraumatic lipoma: analysis of 10 cases and explanation of possible mechanisms // Dermatol. Surg. 2003. V. 29. P. 215-220.
- Hirshowitz B., Golan S. Giant lipoma of the back and neck: case report // Plast. Reconstr. Surg. 1973. V. 52. P. 312-314.
- Signorini M., Campiglio G.L. Posttraumatic lipomas: where do they really come from? // Plastic and Reconstructive Surgery. 1998. V. 101. № 3. P. 699-705.
- Aust M.C., Spies M., Kall S., Jokuszies A., Gohritz A., Vogt P. Post-traumatic lipoma: fact or fiction? // Skinmed. 2007. V. 6 (6). P. 266-270.
- Signorini M., Campiglio G.L. Posttraumatic lipomas: where do they really come from? // Plast. Reconstr. Surg. 1998. V. 103. P. 699.
- Rubinstein A., Goor Y., Gazit E., Cabili S. Non-symmetric subcutaneous lipomatosis associated with familial combined hyperlipidaemia // Br. J. Dermatol. 1989. V. 120 (5). P. 689-694.
- Self T.H., Akins D. Dramatic reduction in lipoma associated with statin therapy // J. Am. Acad. Dermatol. 2008. V. 58 (Suppl. 2). P. S30-S31.
- Kshirsagar A.Y., Nangare N.R., Gupta V., Vekariya M.A., Patankar R., Mahna A., Wader J.V. Multiple giant intra abdominal lipomas: a rare presentation // Int. J. Surg. Case Rep. 2014. V. 5 (7). P. 399-402.
- Ilhan H., Tokar B., Işıksoy S., Koku N., Pasaoglu O. Giant mesenteric lipoma // J. Pediatr. Surg. 1999. V. 34. P. 639-640.
- Weiss S.W., Goldblum J.R. Enzinger and Weiss's Soft Tissue Tumors. 5th ed. St. Louis: Mosby, 2007.
- Tateishi U., Gladish G.W., Kusumoto M., Hasegawa T., Yokoyama R., Tsuchiya R. et al. Chest wall tumours: radiologic findings and pathologic correlation: part 1 // Benign tumours. Radiographics. 2003. V. 23. P. 1477-1490.
- Binh M.B., Sastre-Garau X., Guillo L., de Pinieux G., Terrier P., Lagacé R., Aurias A., Hostein I., Coindre J.M. MDM2 and CDK4 immunostainings are useful adjuncts in diagnosing well-differentiated and dedifferentiated liposarcoma subtypes: a comparative analysis of 559 soft tissue neoplasms with genetic data // Am. J. Surg. Pathol. 2005. V. 29. P. 1340-1347.
- Brandler T.I. Barge fibrolipoma // Br. Med. J. 1894. V. 1. P. 574.
- Olçay Guler, Serhat Mutlu, Mahir Mahirogulları Giant lipoma of the back affecting quality of life // Ann. Med. Surg. (Lond). 2015. V. 4 (3). P. 279-282.
- Sandeep Mehrotra, Bhatia M., Vandana Rana. Giant recurrent lipoma of trunk weighing eight kilograms // Medical Journal Armed Forces India. 2015. V. 71. P. 199-201.
- Огнерубов Н.А., Улитина Е.Д., Огнерубова О.Н. Рецидивирующее течение липомы мягких тканей: клиническое наблюдение // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2860-2862.
- Sultan M.M. Recurrent Fibrolipoma of the left thigh e a case report // Webmed. Central. Gen. Surg. 2012. P. 3.
- Martin H.S. Massive lipoma of subcutaneous tissue of back: case report // JAMA. 1928. V. 90. P. 2013-2015.
- Bissel A.H. Large lipoma of back // Am. J. Surg. 1929. V. 6. P. 366-367.
- Jun Chul Shin, Bum Sik Kang, Woo Hoe Heo, Keum Ha Choi, Eun-A Kim, Jeong Hoon Song A Giant Subpectoral Lipoma // Arch. Plast. Surg. 2014. V. 41 (6). P. 782-784.
- Nakamura Y., Teramoto Y., Sato S., Yamada K., Nakamura Y., Fujisawa Y., Fujimoto M., Otsuka F., Yamamoto A. Axillary giant lipoma: a report of two cases and published work review // J. Dermatol. 2014. V. 41 (9 September). P. 841-844.
- Rubenstein R., Roenigk H.H. Jr., Garden J.M., Goldberg N.S., Pinski J.B. Liposuction for lipomas // J. Dermatol. Surg. Oncol. 1985. V. 11. P. 1070-1074.
- Nichter L.S., Gupta B.R. Liposuction of giant lipoma // Ann. Plast. Surg. 1990. V. 24. P. 362-365.
- Terzioğlu A., Tuncali D., Yuksel A., Bingul F., Aslan G. Giant lipomas: a series of 12 consecutive cases and a giant liposarcoma of the thigh // Dermatol. Surg. 2004. V. 30 (3). P. 463-467.
- Lewis C.M. Treatment of large lipoma of the back // Lipoplasty: the theory and practice of blunt suction lipectomy. Boston: Little, Brown & Co, 1984. P. 128-141.
- Sharma I.K., Janouiger C.K., Schwartz R.A. et al. The treatment of atypical lipoma with liposuction // J. Dermatol. Surg. Oncol. 1991. V. 17. P. 332-334.
- Duger N. Unusually large lipoma // Br. J. Surg. 1944. V. 32. P. 324.
- Hsu I.T. Massive lipoma of neck // Chinese Med. J. 1936. V. 50. P. 1846.
- Silistreli O.K., Durmuş E.U., Uluşal B.G., Özian Y., Görgü M. What should be the treatment modality in giant cutaneous lipomas? Review of the literature and report of 4 cases // Br. J. Plast. Surg. 2005. V. 58 (3). P. 394-398.
- Aydoğdu E., Yıldırım S., Eker G., Aköz T. Giant lipoma of the back // Dermatol. Surg. 2004. V. 30 (1). P. 121-122.
- Leuzzi G., Cesario A., Parisi A.M., Granone P. Chest wall giant lipoma with a thirty-year history // Interact. Cardiovasc. Thorac. Surg. 2012. V. 15 (2). P. 323-324.
- Giuseppe Andrea Ferraro, Rosa Salzillo, Francesco De Francesco, Francesco D'Andrea, Gianfranco Nicoletti Approach and management of a giant lipoma in the left lumbar region // Int. J. Surg. Case Rep. 2015. V. 14. P. 189-193.

Поступила в редакцию 25 марта 2016 г.

UDC 616-006
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-551-556

GIANT LIPOMA OF CHEST WALL: CASE DESCRIPTION AND LITERARY REVIEW

© N.A. Ognerubov, A.A. Ivannikov, V.L. Chang

The analysis of literary data, devoted to different questions of giant lipoma is given. The interpretation of this term, reasons of development, clinical peculiarities are presented. The basic method of this disease treatment of surgery. Besides, there are instructions for lipoplasty use. The authors give a case description of giant chest wall lipoma in patient who was 88 years old with successful surgical treatment. The case is interesting because the tumour was diagnosed 62 years age. Available literature does not give such long-lasting tumour keeping in this age period. During examination through 14 months the patient is alive, the evidence of disease return are not noticed.

Key words: interior chest wall; giant lipoma; innocent tumour; clinics; surgery treatment.

REFERENCES

1. Mahendra Singh, Ashish Saxena, Lovekesh Kumar, Snehal K. Karande, Yuvraj Kolhe. Giant Lipoma of Posterior Cervical Region. *Case Reports in Surgery*, 2014, vol. 2014. doi: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/289383>.
2. Lucas D.R., Nascimento A.G., Sanjay B.K., Rock M.G. Well differentiated liposarcoma: the Mayo Clinic experience with 58 cases. *Am. J. Clin. Pathol.*, 1994, vol. 102, pp. 677-683.
3. Sanchez M.R., Golomb F.M., Moy J.A., Potozkin J.R. Giant lipoma: case report and review of the literature. *J. Am. Acad. Dermatol.*, 1993, vol. 28, pp. 266-268.
4. Munk P.L., Lee M.J., Janzen D.L. Lipoma and liposarcoma: evaluation using CT and MR imaging. *AJR Am. J. Roent-genol.*, 1997, vol. 169, pp. 589-594.
5. Rikki Singal, Manjit Singh Jora, Amit Mittal, Samita Gupta, Bir Singh, Sudha Khurana Kohli, Milan Verma An Unusual Presentation of Giant Extrathoracic Tumor in a Child-Managed Successfully. *The Turkish Journal of Pediatrics*, 2012, vol. 54, pp. 191-193.
6. Ozpolat B., Ozeren M., Akkaya T., Yucel E. Giant lipoma of chest wall. *Eur J. Cardiothorac Surg.*, 2004, vol. 26, p. 437.
7. Haas A.F., Fromer E.S., Bricca G.M. Spindle cell lipoma of the scalp: a case report and review. *Dermatol. Surg.*, 1999, vol. 25, pp. 68-71.
8. Van Thielen J., Van Loo S., Van der Stighelen Y. Case report: a gastric lipoma in a morbid obese man. *Acta Chir. Belg.*, 2012, vol. 112 (5), pp. 393-394.
9. Zografos G.C., Kouerinis I., Kalliopi P., Karmen K., Evangelos M., Androulakis G. Giant lipoma of the thigh in a patient with morbid obesity. *Plast. Reconstr. Surg.*, 2002, vol. 109 (4), pp. 1467-1468.
10. Grimaldi L., Cuomo R., Castagna A., Sisti A., Nisi G., Brandi C., D'Aniello C. Giant lipoma of the back Indian. *J. Plast. Surg.*, 2015, vol. 48 (2), pp. 220-221.
11. Simango S., Ramdial P.K., Madaree A. Subpectoral post-traumatic lipoma. *Br. J. Plast. Surg.*, 2000, vol. 53, pp. 627-629.
12. Copcu E., Sivrioglu N.S. Posttraumatic lipoma: analysis of 10 cases and explanation of possible mechanisms. *Dermatol. Surg.*, 2003, vol. 29, pp. 215-220.
13. Hirshowitz B., Goldan S. Giant lipoma of the back and neck: case report. *Plast. Reconstr. Surg.*, 1973, vol. 52, pp. 312-314.
14. Signorini M., Campiglio G.L. Posttraumatic lipomas: where do they really come from? *Plastic and Reconstructive Surgery*, 1998, vol. 101, no. 3, pp. 699-705.
15. Aust M.C., Spies M., Kall S., Jokuszies A., Gohritz A., Vogt P. Posttraumatic lipoma: fact or fiction? *Skinmed*, 2007, vol. 6 (6), pp. 266-270.
16. Signorini M., Campiglio G.L. Posttraumatic lipomas: where do they really come from? *Plast. Reconstr. Surg.*, 1998, vol. 103, pp. 699.
17. Rubinstein A., Goor Y., Gazit E., Cabili S. Non-symmetric subcutaneous lipomatosis associated with familial combined hyperlipidaemia. *Br. J. Dermatol.*, 1989, vol. 120 (5), pp. 689-694.
18. Self T.H., Akins D. Dramatic reduction in lipoma associated with statin therapy. *J. Am. Acad. Dermatol.*, 2008, vol. 58 (Suppl. 2), pp. S30-S31.
19. Kshirsagar A.Y., Nangare N.R., Gupta V., Vekariya M.A., Patankar R., Mahna A., Wader J.V. Multiple giant intra abdo-minal lipomas: a rare presentation. *Int. J. Surg. Case Rep.*, 2014, vol. 5 (7), pp. 399-402.
20. Ilhan H., Tokar B., Isiksoy S., Koku N., Pasaoglu O. Giant mesenteric lipoma. *J. Pediatr. Surg.*, 1999, vol. 34, pp. 639-640.
21. Weiss S.W., Goldblum J.R. *Enzinger and Weiss's Soft Tissue Tumors*. 5th ed. St. Louis, Mosby Publ., 2007.
22. Tateishi U., Gladish G.W., Kusumoto M., Hasegawa T., Yokoyama R., Tsuchiya R. et al. Chest wall tumours: radiologic findings and pathologic correlation: part 1. *Benign tumours. Radiographics*, 2003, vol. 23, pp. 1477-1490.
23. Binh M.B., Sastre-Garau X., Guillou L., de Pinieux G., Terrier P., Lagacé R., Aurias A., Hostein I., Coindre J.M. MDM2 and CDK4 immunostainings are useful adjuncts in diagnosing well-differentiated and dedifferentiated liposarcoma sub-types: a comparative analysis of 559 soft tissue neoplasms with genetic data. *Am. J. Surg. Pathol.*, 2005, vol. 29, pp. 1340-1347.
24. Brandler T.I. Barge fibrolipoma. *Br. Med. J.*, 1894, vol. 1, p. 574.

25. Olcay Guler, Serhat Mutlu, Mahir Mahirogullari Giant lipoma of the back affecting quality of life. *Ann. Med. Surg.*, 2015. vol. 4 (3), pp. 279-282.
26. Sandeep Mehrotra, Bhatia M., Vandana Rana. Giant recurrent lipoma of trunk weighing eight kilograms. *Medical Journal Armed Forces India*, 2015, vol. 71, pp. 199-201.
27. Ognerubov N.A., Ulitina E.D., Ognerubova O.N. Retsidiviruyushchee techenie lipomy myagkikh tkaney: klinicheskoe nablyudenie. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2860-2862.
28. Sultan M.M. Recurrent Fibrolipoma of the left thigh e a case report. *Webmed. Central. Gen. Surg.*, 2012, p. 3.
29. Martin H.S. Massive lipoma of subcutaneous tissue of back: case report. *JAMA*, 1928, vol. 90, pp. 2013-2015.
30. Bissel A.H. Large lipoma of back. *Am. J. Surg.*, 1929, vol. 6, pp. 366-367.
31. Jun Chul Shin, Bum Sik Kang, Woo Hoe Heo, Keum Ha Choi, Eun-A Kim, Jeong Hoon Song A Giant Subpectoral Lipoma. *Arch. Plast. Surg.*, 2014, vol. 41 (6), pp. 782-784.
32. Nakamura Y., Teramoto Y., Sato S., Yamada K., Nakamura Y., Fujisawa Y., Fujimoto M., Otsuka F., Yamamoto A. Axil-lary giant lipoma: a report of two cases and published work review. *J. Dermatol.*, 2014, vol. 41 (9 September), pp. 841-844.
33. Rubenstein R., Roenigk H.H. Jr., Garden J.M., Goldberg N.S., Pinski J.B. Liposuction for lipomas. *J. Dermatol. Surg. Oncol.*, 1985, vol. 11, pp. 1070-1074.
34. Nichter L.S., Gupta B.R. Liposuction of giant lipoma. *Ann. Plast. Surg.*, 1990, vol. 24, pp. 362-365.
35. Terzioğlu A., Tuncali D., Yuksel A., Bingul F., Aslan G. Giant lipomas: a series of 12 consecutive cases and a giant lipo-sarcoma of the thigh. *Dermatol. Surg.*, 2004, vol. 30 (3), pp. 463-467.
36. Lewis C.M. Treatment of large lipoma of the back. *Lipoplasty: the theory and practice of blunt suction lipectomy*, Boston, Little, Brown & Co Publ., 1984, pp. 128-141.
37. Sharma I.K., Janouiger C.K., Schwartz R.A. et al. The treatment of atypical lipoma with liposuction. *J. Dermatol. Surg. Oncol.*, 1991, vol. 17, pp. 332-334.
38. Duger N. Unusually large lipoma. *Br. J. Surg.*, 1944, vol. 32, pp. 324.
39. Hsu I.T. Massive lipoma of neck. *Chinese Med. J.*, 1936, vol. 50, p. 1846.
40. Silistreli O.K., Durmuş E.U., Ulusal B.G., Oztan Y., Görgü M. What should be the treatment modality in giant cutaneous lipomas? Review of the literature and report of 4 cases. *Br. J. Plast. Surg.*, 2005, vol. 58 (3), pp. 394-398.
41. Aydoğdu E., Yıldırym S., Eker G., Aköz T. Giant lipoma of the back. *Dermatol. Surg.*, 2004, vol. 30 (1), pp. 121-122.
42. Leuzzi G., Cesario A., Parisi A.M., Granone R. Chest wall giant lipoma with a thirty-year history. *Interact. Cardiovasc. Thorac. Surg.*, 2012, vol. 15 (2), pp. 323-324.
43. Giuseppe Andrea Ferraro, Rosa Salzillo, Francesco De Francesco, Francesco D'Andrea, Gianfranco Nicoletti Approach and management of a giant lipoma in the left lumbar region. *Int. J. Surg. Case Rep.*, 2015, vol. 14, pp. 189-193.

Received 25 March 2016

Огнерубов Николай Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, кандидат юридических наук, профессор, зав. кафедрой анатомии, оперативной хирургии и онкологии, заслуженный работник высшей школы РФ, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Ognerubov Nikolay Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Candidate of Jurisprudence, Professor, Head of Anatomy, Operative Surgery and Oncology Department, Honored Worker of Higher School of Russian Federation, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Иванников Андрей Андреевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры анатомии, оперативной хирургии и онкологии; Тамбовский областной онкологический клинический диспансер, г. Тамбов, Российская Федерация, хирург-онколог, зам. главного врача по медицинской части, e-mail: ivannikovaa@yandex.ru

Ivannikov Andrey Andreevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Senior Lecturer of Anatomy, Operative Surgery and Oncology Department; Tambov Regional Clinical Oncologic Dispensary, Tambov, Russian Federation, Surgeon-Oncologist, Deputy Main Doctor for Medical Work, e-mail: ivannikovaa@yandex.ru

Чанг Виктор Луисович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, клинический ординатор кафедры анатомии, оперативной хирургии и онкологии, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

Chang Viktor Luisovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Clinical Ordinator of Anatomy, Operative Surgery and Oncology Department, e-mail: ognerubov_n.a@mail.ru

УДК 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-557-560

МУЛЬТИВОЛНОВОЕ ЛАЗЕРНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ В ЛЕЧЕНИИ АНИЗОМЕТРОПИЧЕСКОЙ АМБЛИОПИИ СРЕДНЕЙ СТЕПЕНИ У ДЕТЕЙ

© Ю.В. Матросова

Анизометропическая амблиопия – сложная форма амблиопии, в развитии которой играют роль несколько этиологических факторов. Повышение зрения при анизометропической амблиопии представляет собой важную задачу. Ранее была изучена аккомодация при дисбинокулярной амблиопии, доказана роль эффективности аккомодотренировок в плеоптическом лечении дисбинокулярной амблиопии. Цель нашего исследования – оценить эффективность комплексного плеоптического лечения анизометропической амблиопии средней степени с применением лазерного излучения. Под наблюдением находится 157 пациентов (157 глаз) в возрасте от 4 до 9 лет с анизометропической амблиопией средней степени, с центральной или неустойчивой центральной фиксацией. Все пациенты получали лазертерапию в комплексе с другими плеоптическими процедурами. Пациенты разделены на три группы. Пациенты первой группы получали лечение с применением «красного» лазера, второй группы – «зеленого» лазера, третьей группы – с чередованием этих процедур (мультиволновая лазертерапия). Оценивалась острота зрения и коэффициенты аккомодографии. У пациентов трех групп наблюдается сходная картина – снижается коэффициент аккомодационного ответа и повышается острота зрения в результате лечения.

Ключевые слова: анизометропическая амблиопия; аккомодография; лазертерапия; плеоптика; аккомодация.

АКТУАЛЬНОСТЬ ПРОБЛЕМЫ

Проблема амблиопии на протяжении многих десятилетий привлекает внимание врачей и исследователей. Определение понятия менялось в зависимости от уровня знаний об этиопатогенезе этого заболевания. Альбрехт фон Грефе охарактеризовал ее как состояние, при котором «исследователь не видит ничего, а пациент очень мало». В настоящее время наиболее полным и точным является следующее определение – это моно- или бинокулярное снижение зрительных функций без видимых органических поражений зрительного анализатора, которое возникло в результате ограничения сенсорного опыта (депривации) в период развития зрительной системы [1].

В связи с растущими визуальными требованиями все более механизированного общества амблиопия представляет собой серьезную социально-экономическую проблему. По данным зарубежных авторов, частота ее распространенности среди населения в целом составляет 2,0–2,5 %, среди детей школьного и дошкольного возраста – 0,5–3,5 % [2]. Отечественные авторы приводят аналогичные показатели [3]. Помимо того, что риск пациента с амблиопией стать слепым намного выше, чем среди населения в целом, заболевание приводит к определенным психосоциальным проблемам. Считается, что они влияют на имидж человека, работу, дружеские отношения и способность к обучению.

Изучение последствий неизлеченной амблиопии представляет большой интерес для психологов. Ю.В. Федоренко [4], изучая эмоциональное развитие детей с амблиопией и косоглазием, пришла к выводу,

что эти дети имеют недостаток целостности осмысления, понимания эмоциональных переживаний людей. В их поведении часто присутствуют неуверенность, тревожность, импульсивность. Это требует проведения дополнительной коррекционной работы.

Анизометропическая амблиопия является сложной формой амблиопии, т. к. в ее возникновении участвуют несколько механизмов: присутствует рефракционный компонент, играет определенную роль анизиакомодация и анизозийкония. Кроме того, у пациентов с анизометропией при детальном обследовании часто выявляется микрострабизм. Как и при других видах амблиопии, при анизометропической амблиопии существует активное ингибирование фoveальной зоны, однако в этом случае цель ингибирования – устранить сенсорные помехи, вызванные наложением друг на друга фокусированного и дефокусированного изображений (при аномальном бинокулярном взаимодействии). В результате этого острота зрения амблиопичного глаза ниже при бинокулярных условиях, чем при монокулярных. В дополнение к редукции центральной остроты зрения существует общая редукция контрастной чувствительности, которая в отличие от редукции при страбической амблиопии так же включает и ретинальную периферию.

Как правило, амблиопия является более распространенной и с более высокой степенью при анизогиперметропии, чем при анизомииопии.

Таким образом, повышение эффективности лечения анизометропической амблиопии представляет собой важную задачу.

Несмотря на то, что одним из основных проявлений амблиопии является снижение коррегированной остроты

ты зрения, выявлены и другие свойственные ему расстройства (центрального и периферического зрения, свето-, цветоощущения и др.).

Одним из этих расстройств является снижение аккомодации, которое впервые выявлено при амблиопии R. Siebek в 1957 г. Так, выявлено снижение резерва аккомодации, понижение ее запаса для близи, отсутствие аккомодации в амблиопичном глазу с нецентральной зрительной фиксацией, сохранение содружественной аккомодации амблиопичного глаза, снижение аккомодационных ответов на слабые и средние диоптрические стимулы, ухудшение эргографических кривых. По мнению исследователей, все указанные нарушения являются следствием нарушения гемодинамики цилиарного тела.

В.С. Стальновым изучена аккомодационная функция глаза при дисбинокулярной амблиопии и выявлено, что сила аккомодации в ведущих глазах у детей с дисбинокулярной амблиопией практически равна таковой у здоровых детей, ее уровень обратно пропорционален степени тяжести амблиопии парного глаза. Объем аккомодации амблиопичных глаз был существенно ниже, чем в ведущих глазах, и уменьшался по мере понижения остроты зрения амблиопичного глаза. Кроме того выявлена зависимость величины аккомодации от остроты зрения, на основании чего автором предложены методические рекомендации для повышения эффективности лечения этой группы пациентов [5].

Анизометропическая амблиопия является сложной формой амблиопии, требующей оптимизации лечебных мероприятий. Наибольшую популярность в современной плеоптике приобрела лазерная стимуляция, которая в настоящее время занимает ведущее место среди других методов плеоптического лечения. Низкоинтенсивное лазерное излучение оказывает высокое стимулирующее воздействие. Улучшая микроциркуляцию в тканях, оно способствует улучшению гемодинамики метаболических процессов, повышению активности ДНК, РНК, каталазы, оптимизирует трофические процессы, повышает энергетические возможности клеток и тканей, следствием чего является повышение зрительных функций.

С целью плеоптического воздействия на амблиопичный глаз применялся метод аргон-лазер-стимуляции в импульсном режиме. В литературе также имеется сообщение о поочередном применении лазера с различной длиной волны: гелий-неонового и аргонного лазера с целью стимуляции различных цветовых рецепторов сенсорного аппарата глаза при АП, также

применялся для стимуляции макулы амблиопичного глаза луч аргонного лазера, который излучает только в сине-зеленой части спектра. Однако большинство авторов считает наиболее эффективным стимулом для макулы красный свет рубинового или гелий-неонового лазера. В настоящее время проводятся многочисленные исследования, в т. ч. сочетанного применения лазеров с разными длинами волн [6–18].

Цель исследования: оценить эффективность комплексного плеоптического лечения анизометропической амблиопии средней степени с применением лазерного излучения.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

Под наблюдением находится 157 пациентов (157 глаз) в возрасте от 4 до 9 лет с анизометропической амблиопией средней степени, с гиперметропической рефракцией, центральной или неустойчивой центральной фиксацией.

Все пациенты получали лазеротерапию – 10 ежедневных процедур продолжительностью от 5 до 10 мин. на фоне оптической коррекции, прямой окклюзии, применения компьютерной программы «Плеоптика 2+» и магнитостимуляции переменным магнитным полем. Все пациенты разделены на группы:

I группа – 53 человека (53 глаза) получали плеоптическое лечение с применением «красного» лазера – приставка «Рубин» к прибору «АМО-Атос»;

II группа – 51 человек (51 глаз) получал лечение с применением «зеленого» лазера – приставка «Изумруд» к прибору «АМО-Атос»;

III группа – 53 человека (53 глаза) – лечение с поочередным применением лазеров красного и зеленого спектра (мультиволновая лазеротерапия).

РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате лечения отмечено повышение остроты зрения во всех группах, однако наибольшая прибавка отмечена в группе, получающей мультиволновое лазерное воздействие.

У пациентов трех групп наблюдается сходная картина – достоверно снижается КАО, остальные показатели статистически значимо не меняются. В перспективе планируется оценить результаты и стабильность эффекта от лечения на фоне сочетания плеоптики и тренировки резервов аккомодации у пациентов с анизометропической амблиопией.

Таблица 1

Исходные значения исследуемых показателей

Показатели	Группы			p
	I (красный диапазон)	II (зеленый диапазон)	III (зеленый + красный)	
Острота зрения	0,27 ± 0,05	0,26 ± 0,05	0,25 ± 0,05	>0,05
КАО	0,480 ± 0,229	0,473 ± 0,234	0,482 ± 0,232	>0,05
σКАО	0,343 ± 0,256	0,346 ± 0,247	0,344 ± 0,244	>0,05
КМФ	57,01 ± 6,27	56,55 ± 5,99	56,89 ± 6,94	>0,05

Примечание: по исследуемым показателям все группы сравнимы.

Таблица 2

Динамика остроты зрения в результате лечения

Группа	Острота зрения ($M \pm SD$)		p
	до лечения	после лечения	
I (красный диапазон)	$0,27 \pm 0,05$	$0,31 \pm 0,10$	$<0,02$
II (зеленый диапазон)	$0,26 \pm 0,05$	$0,32 \pm 0,12$	$<0,01$
III (зеленый + красный)	$0,25 \pm 0,05$	$0,38 \pm 0,14$	$<0,001$

Таблица 3

Динамика показателей аккомодации в результате лечения

Группа	Показатель	До лечения	После лечения	p
I (красный диапазон)	КАО	$0,480 \pm 0,229$	$0,311 \pm 0,219$	$<0,001$
	σ КАО	$0,343 \pm 0,256$	$0,339 \pm 0,241$	$>0,05$
	КМФ	$57,01 \pm 6,27$	$55,01 \pm 6,21$	$>0,05$
	КР	$0,061 \pm 0,019$	$0,060 \pm 0,017$	$>0,05$
II (зеленый диапазон)	КАО	$0,473 \pm 0,234$	$0,311 \pm 0,211$	$<0,001$
	σ КАО	$0,346 \pm 0,247$	$0,330 \pm 0,228$	$>0,05$
	КМФ	$56,55 \pm 5,99$	$54,87 \pm 5,91$	$>0,05$
	КР	$0,057 \pm 0,013$	$0,063 \pm 0,019$	$>0,05$
III (зеленый + красный)	КАО	$0,482 \pm 0,232$	$0,309 \pm 0,201$	$<0,001$
	σ КАО	$0,344 \pm 0,244$	$0,338 \pm 0,237$	$>0,05$
	КМФ	$56,89 \pm 6,94$	$55,22 \pm 6,93$	$>0,05$
	КР	$0,07 \pm 0,017$	$0,061 \pm 0,015$	$>0,05$

ВЫВОДЫ

1. Плеоптическое лечение амблиопии средней степени с использованием лазерного излучения как красного, так и зеленого диапазона позволяет достоверно повысить остроту зрения.

2. Мультиволновая лазеротерапия с комбинированным использованием лазеров красного и зеленого спектров является достоверно более эффективной по сравнению с применением монохроматической лазеротерапии.

3. Плеоптическое лечение с применением монохроматической и мультиволновой лазеротерапии позволяет снизить коэффициент аккомодационного ответа до нормальных значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аветисов Э.С., Кащенко Т.П., Вакурина А.Е. Лечение амблиопии у детей // Актуальные проблемы аметропии у детей: труды междунар. конф. М., 1996. С. 89-95.
2. von Norden G.K., Emilio C.C. Binocular vision and ocular motility. Missouri, 2002.
3. Добромислов А.Н., Маймулов В.Г. Задачи по охране зрения у детей дошкольного возраста // Офтальмол. журн. 1982. № 6. С. 323-326.
4. Федоренко Ю.В. Проблема эмоционального развития детей с амблиопией и косоглазием // Вестн. Ставропол. гос. ун-та. 2010. Вып. 71. С. 208-213.
5. Стальнов В.С. Аккомодация глаз при дисбинокулярной амблиопии у детей и влияние на нее различных вариантов плеоптического лечения: автореф. дис. ... канд. мед. наук. Красноярск, 2006.
6. Гончарова С.А., Петруня А.М., Пантелеев Г.В., Тырловая Е.И. Современная плеоптика // Офтальмол. журн. 2008. № 4. С. 74-79.
7. Шамишинова А.М., Кащенко Т.П., Камф В. Амблиопия: патогенез, дифференциальная диагностика, обоснование принципов лечения // Клиническая физиология зрения. М., 2002. С. 447-458.
8. Шамишинова А.М., Романова Е.В., Ибатуллин В.А., Хватова Н.В. Зрительные функции при амблиопии различного генеза // Клиническая физиология зрения. М., 2002. С. 463-472.
9. Enoch J.M. Receptor amblyopia // Am. J. Ophthalmol. 1959. V. 48. P. 262-272.
10. Bedell H.E. Central and peripheral retinal photoreceptor orientation in amblyopic eyes as assessed by the psychophysical Stiles-Crawford function // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 1980. V. 19. P. 19-23.
11. Аветисов Э.С. Содружественное косоглазие. М., 1977.
12. Тейлор Д., Хойт К. Детская офтальмология: пер с англ. М., 2007.
13. Ковалевский Е.И. Профилактика слабовидения и слепоты у детей. М., 1998.
14. Гончарова С.А., Пантелеев Г.В., Тырловая Е.И. Амблиопия. Луганск, 2006.
15. Азнаурян И.Э. Система восстановления зрительных функций при рефракционной и дисбинокулярной амблиопии у детей и подростков: автореф. дис. ... д-ра мед. наук. М., 2008.
16. Матросова Ю.В. Этиопатогенез, клиника и методы лечения больных с амблиопией // Вестн. Новосибир. гос. ун-та. Сер.: Биология, клиническая медицина. 2012. Т. 10. № 5. С. 193-202.
17. Матросова Ю.В. Сравнительная оценка эффективности различных методов лечения миопии // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 20. Вып. 3. С. 642-644.
18. Матросова Ю.В., Фабрикантов О.Л., Райгородский Ю.М. Применение полихроматической лазерной спектр-стимуляции в плеоптическом лечении амблиопии у детей // Физиотерапия, бальнеология и реабилитация. 2014. № 3. С. 32-34.

Поступила в редакцию 11 марта 2016 г.

UDC 617.7
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-557-560

MULTI-WAVE LASER INFLUENCE IN TREATING ANISOMETROPIC AMBLYOPIA OF AVERAGE DEGREE IN CHILDREN

© Y.V. Matrosova

Anisometropic amblyopia is a complicated form of amblyopia, in the development of which several etiological factors are of importance. Visual acuity improvement is an important task in anisometropic amblyopia. The accommodation in disbinocular amblyopia was previously studied; the role of accommodotrainings efficacy in pleoptic treatment of disbinocular amblyopia is proved. The aim of our study is to assess the efficacy of complex pleoptic treatment of average anisometropic amblyopia using the laser radiation. 157 patients (157 eyes) aged 4 to 9 years old with anisometropic amblyopia of average degree and central or non-steady central fixation were followed up. All patients underwent laser therapy in combination with the other pleoptic treatment. The patients were divided into three groups. The patients of the group 1 were treated with "red" laser, group 2 – "green" laser, group 3 – interchange of these procedures (multi-wave laser therapy). The visual acuity and coefficients accomodography is evaluated. All patients had similar clinical picture – decrease in accommodative response coefficient and visual acuity increase as a result of treatment.

Key words: anisometropic amblyopia; accomodography; laser therapy; pleoptics; accommodation.

REFERENCES

1. Avetisov E.S., Kashchenko T.P., Vakurina A.E. Lechenie ambliopii u detey. *Trudy mezhdunarodnoy konferentsii "Aktual'nye problemy ametropii u detey"*. Moscow, 1996, pp. 89-95.
2. von Norden G.K., Emilio C.C. *Binocular vision and ocular motility*. Missouri USA, 2002.
3. Dobromyslov A.N., Maymulov V.G. Zadachi po okhrane zreniya u detey doshkol'nogo vozrasta. *Oftal'mologicheskiy zhurnal*, 1982, no. 6, pp. 323-326.
4. Fedorenko Yu.V. Problema emotsional'nogo razvitiya detey s ambliopiey i kosoglaziem. *Vestnik Stavropol'skogo gosudarstvennogo universiteta*, 2010, no. 71. pp. 208-213.
5. Stal'nov V.S. *Akkomodatsiya glaz pri disbinokulyarnoy ambliopii u detey i vliyaniye na nee razlichnykh variantov pleopticheskogo lecheniya*. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata meditsinskikh nauk. Krasnoyarsk, 2006.
6. Goncharova S.A., Petrunya A.M., Pantelev G.V., Tyrlovaya E.I. Sovremennaya pleoptika. *Oftal'mologicheskiy zhurnal*, 2008, no. 4, pp. 74-79.
7. Shamshinova A.M., Kashchenko T.P., Kampf U. Ambliopiya: patogenez, differentsial'naya diagnostika, obosnovanie printsipov lecheniya. *Klinicheskaya fiziologiya zreniya*. Moscow, 2002, pp. 447-458.
8. Shamshinova A.M., Romanova E.V., Ibatulin V.A., Khvatova N.V. Zritel'nye funktsii pri ambliopii razlichnogo geneza. *Klinicheskaya fiziologiya zreniya*. Moscow, 2002, pp. 463-472.
9. Enoch J.M. Receptor amblyopia. *Am. J. Ophthalmol.*, 1959, no. 48, pp. 262-272.
10. Bedell H.E. Central and peripheral retinal photoreceptor orientation in amblyopic eyes as assessed by the psychophysical Stiles-Crawford function. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 1980, no. 19, pp. 19-23.
11. Avetisov E.S. *Sodruzhestvennoe kosoglazie*. Moscow, 1977.
12. Taylor D., Hoyt C.S. *Practical Paediatric Ophthalmology*. Hoboken, 1997.
13. Kovalevskiy E.I. *Profilaktika slabovideniya i slepoty u detey*. Moscow, 1998.
14. Goncharova S.A., Pantelev G.V., Tyrlovaya E.I. *Ambliopiya*. Lugansk, 2006.
15. Aznauryan I.E. *Sistema vosstanovleniya zritel'nykh funktsiy pri refraktsionnoy i disbinokulyarnoy ambliopii u detey i podrostkov*. Avtoreferat dissertatsii. ... doktora meditsinskikh nauk. Moscow, 2008.
16. Matrosova Yu.V. Etiopatogenez, klinika i metody lecheniya bol'nykh s ambliopiey. *Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Biologiya, klinicheskaya meditsina*, 2012, vol. 10, no. 5, pp. 193-202.
17. Matrosova Yu.V. Sravnitel'naya otsenka effektivnosti razlichnykh metodov lecheniya miopii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2013, vol. 20, no. 3, pp. 642-644.
18. Matrosova Yu.V., Fabrikantov O.L., Raygorodskiy Yu.M. Primeneniye polikhromaticheskoy lazernoy spekl-stimulyatsii v pleopticheskom lechenii ambliopii u detey. *Fizioterapiya, bal'neologiya i reabilitatsiya*, 2014, no. 3, pp. 32-34.

Received 11 March 2016

Матросова Юлия Владимировна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, зав. детским отделением, e-mail: naukatmb@mail.ru

Matrosova Yuliya Vladimirovna, Academician S.N. Fyodorov FSBI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Head of Children's Department, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-561-565

ОПТИЧЕСКАЯ КОГЕРЕНТНАЯ ТОМОГРАФИЯ-АНГИОГРАФИЯ В ДИАГНОСТИКЕ ХОРИОИДАЛЬНОЙ НЕОВАСКУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ ВОЗРАСТНОЙ МАКУЛЯРНОЙ ДЕГЕНЕРАЦИИ

© Н.В. Попова

Рассматриваются современные методы диагностики хориоидальной неоваскуляризации при возрастной макулярной дегенерации (ВМД), в т. ч. и атипичных форм – полипоидальной хориоидальной васкулопатии (ПХВ) и ретиальной ангиоматозной пролиферации (РАП). Особое внимание следует уделить новому современному диагностическому методу – оптической когерентной томографии – ангиографии (ОКТ-ангиографии), который является неинвазивным, безопасным, позволяющим проводить исследование сосудистых структур в трехмерном режиме. Имеет высокую чувствительность и специфичность в выявлении хориоидальной неоваскуляризации при ВМД. В ряде случаев это достойная альтернатива диагностическим методам исследования с контрастом.

Ключевые слова: возрастная макулярная дегенерация; хориоидальная неоваскуляризация; оптическая когерентная томография – ангиография.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Возрастная макулярная дегенерация (ВМД) – одно из самых наиболее часто встречаемых заболеваний глаз, которые являются причиной слабовидения и инвалидизации у лиц старшей возрастной группы.

По результатам исследований R. Klein, B. Klein et al. [1], заболевание встречается в 40 % случаев среди лиц старше 40 лет, по данным R.A. Williams et al. [2] – в 58–100 % среди лиц старше 60 лет. Около 8,7 % от всех случаев слепоты в мире приходится на ВМД. В России заболеваемость данной патологией составляет 15 человек на 1000 населения [3].

ВМД – это прогрессирующее заболевание с наследственной предрасположенностью, при котором первичная локализация патологического процесса на уровне пигментного эпителия (ПЭ) и хориокапилляров макулярной области, что и объясняет снижение остроты зрения. Обычно в патологический процесс вовлекаются оба глаза. Согласно имеющимся данным, парный глаз поражается не позднее чем через 5 лет после заболевания первого [4]. Отсюда и асимметричность картины глазного дна – один глаз поражен больше, чем другой. Более 90 % случаев слабовидения от ВМД связано с развитием т. н. «влажной», или экссудативной формы заболевания, которая характеризуется аномальным патологическим ростом новообразованных сосудов, берущих свое начало из слоя хориокапилляров сосудистой оболочки, прорастая через дефекты мембраны Бруха под пигментный эпителий сетчатки и/или нейроэпителий (НЭ) формируют субретинальную неоваскулярную мембрану. Отсутствие соответствующей реабилитации пациентов в терминальной стадии ВМД приводит к снижению качества жизни [5].

D. Gass в 1997 г. [6] выделил два типа неоваскуляризации:

– «скрытую» неоваскуляризацию, которая расположена под ПЭ сетчатки (I тип);

– «классическую» неоваскуляризацию, которая формируется над и на уровне ПЭ сетчатки (II тип).

В практической деятельности достаточно часто диагностируют смешанные формы хориоидальной неоваскуляризации (ХНВ), что позволяет трактовать их как «преимущественно классические» либо «преимущественно скрытые». За последние годы диагностика заболеваний глаз заметно расширилась и стала более усовершенствованной, что позволило выделить атипичные формы ВМД: ретиальная ангиоматозная пролиферация (РАП) и полипоидальная хориоидальная васкулопатия (ПХВ). Каждая из этих подтипов имеет свои особенные клинические признаки и разную реакцию на лечение в сравнении с привычной для всех хориоидальной неоваскуляризацией. Поэтому особое внимание следует уделять диагностическим методам при обследовании пациентов с данной патологией.

В диагностике влажной формы ВМД обычно используется спектральная оптическая когерентная томография (ОКТ), которая позволяет получать двухмерное изображение и определяет морфологические изменения в сетчатке и сосудистой оболочке. Однако отсутствует возможность определить форму и размер неоваскулярной мембраны, т. к. комплекс новообразованных сосудов имеет рефлективность, очень похожую с друзоидным материалом, пигментным эпителием сетчатки и хориоидеями [7–8].

Достаточно часто у пациентов с «влажной» формой ВМД применяется флюоресцентная ангиография (ФАГ). Инвазивность контрастных методов исследования является их недостатком, т. к. велика вероятность возникновения нежелательных побочных эффектов. Данный диагностический метод исследования не позволяет определить послойное расположение неоваскулярного комплекса за счет получения двухмерного изображения [9–10].

Эволюция ОКТ в офтальмологии привела к возникновению нового метода исследования – ОКТ-

ангиографии, в основе которого алгоритм декорреляционной амплитудной ангиографии с разделением спектра (split-spectrum amplitude decorrelation angiography-SSADA) [11]. Принцип амплитудной декорреляции основан на анализе разницы амплитуд зондирующего луча, отраженного/рассеянного от выбранной точки в исследуемом объеме сетчатки при повторном сканировании по сравнению с первым сканированием. Амплитуда отраженного/рассеянного света сильнее будет варьировать от скана к скану только в точках, соответствующих внутренностям сосудов, где существует движение эритроцитов, на которых и происходит отражение/рассеяние луча. В остальных зонах сетчатки, где нет движения и незначительные вариации от скана к скану вызываются лишь оптическими шумами различного происхождения. Таким образом, ОКТ-ангиография «использует» собственный кровоток как внутренний контраст, что имеет значительные преимущества по сравнению с традиционно привычными диагностическими методами, т. к. позволяет неинвазивно определять движение крови в сосудах сетчатки и хориоидеи, тем самым дает четкое представление о форме, размерах, структуре и локализации новообразованных сосудов при различной патологии. Неинвазивность метода исключает вероятность развития побочных эффектов и осложнений [12–13]. Важным термином, который используется для анализа изображений ОКТ-ангиографии, является «уровень слоя сканирования» [14] – возможность оценить кровоток в разных слоях сетчатки и сосудистой оболочки, что в свою очередь обеспечивает формирование трехмерного изображения. Получение подробной информации в совокупности с неинвазивностью дает возможность широко применять данный диагностический метод в клинической практике.

Цель: изучить оптические когерентные томографически-ангиографические критерии в диагностике хориоидальной неоваскуляризации при возрастной макулярной дегенерации.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве примеров рассмотрим следующие клинические случаи: всем пациентам проведена спектральная ОКТ на аппарате Copernicus HR («Optopol», Польша) в режимах Line и CrossLine, ОКТ-ангиографию проводили с помощью оптического когерентного томографа RTVue XR Avanti («Optovue» США) с применением алгоритма SSADA в режиме ангиоретина. При анализе сканов ОКТ-ангиографии уровень расположения слоя сканирования (EnFace) выставлялся в четырех режимах (поверхностный сосудистый плексус, глубокий сосудистый плексус, наружные слои сетчатки, слой хориокапилляров). Исследование проводили в макулярной зоне с центральной фиксацией взгляда пациента. Флюоресцентная ангиография выполнена на ретинальной камере TRS-NW7SF Mark II («Topcon», Япония) по стандартной методике с использованием внутривенного введения 5 мл 10 % раствора флюоресцеина («Novartis», Швейцария).

Клинический случай № 1.

Пациентка П., 49 лет, наблюдается с диагнозом влажная форма ВМД правого глаза. Vis OD 0,9–1,0. Обратилась с жалобами на размытое изображение, которое появилось около 6 месяцев назад. При осмотре

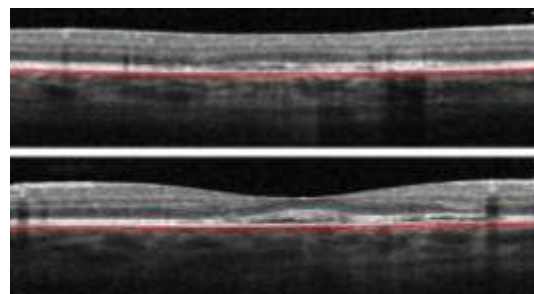
(контактной биомикроскопии) парафовеолярно определяется отслойка нейроэпителия с незначительным перераспределением пигмента. На снимках ФАГ – очаг гиперфлюоресценции с четкими границами на ранней стадии и просачиванием красителя на поздней (рис. 1).

Спектральная ОКТ определила наличие объемного гиперрефлективного веретенообразного участка над уровнем пигментного эпителия.

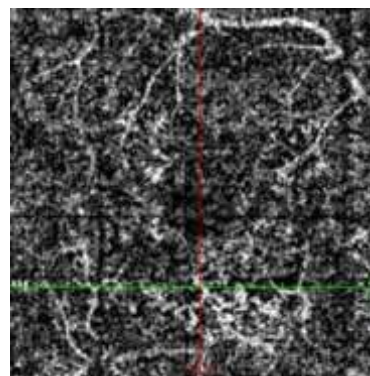
ОКТ-ангиография выявила наличие петлевидной сосудистой сети в зоне, которая соответствует ранней гиперфлюоресценции на снимках ФАГ и веретенообразного участка на спектральной ОКТ. Локализация сосудистой сети над ПЭ (рис. 2а, 2б).



Рис. 1. ФАГ: очаг гиперфлюоресценции с четкими границами на ранней стадии



а)



б)

Рис. 2. а) спектральная ОКТ: гиперрефлективный веретенообразный участок над ПЭ; б) ОКТ-ангиография: петлевидная сосудистая сеть в зоне, которая соответствует ранней гиперфлюоресценции на снимках ФАГ (слой хориокапилляров)

Клинический случай № 2.

Пациентка М., 57 лет, наблюдается с диагнозом влажная форма ВМД левого глаза. Vis OS 0,3 н/к. Обратилась с жалобами на снижение зрения левого глаза в течение 1 года. При осмотре (контактная биомикроскопия) в макулярной зоне определяется экссудативная отслойка нейроэпителия около 1,5 DD. По результатам ФАГ на ранней стадии определяется зона гиперфлюоресценции парафовеолярно с размытыми границами и с накоплением красителя в позднюю фазу (рис. 3).

Спектральная ОКТ показывает наличие отслойки нейроэпителия с неоднородным гиперрефлективным содержимым. ОКТ-ангиография выявила наличие петлевидной сосудистой сети с многочисленными ответвлениями, которые соответствуют проекции гиперфлюоресцентной зоны в раннюю фазу ФАГ и отслойки ПЭ на спектральной ОКТ. Расположение уровня слоя сканирования позволило локализовать сосудистую сеть под ПЭ, в зоне отслойки НЭ (рис. 4а, 4б).

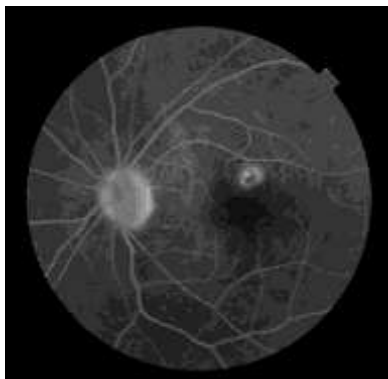
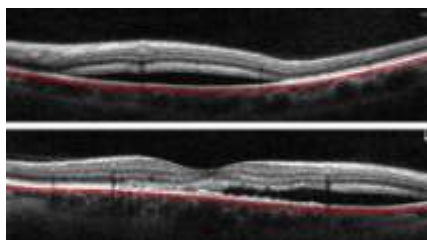
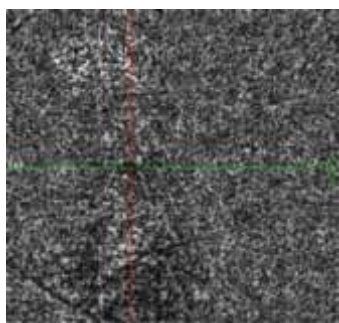


Рис. 3. Зона гиперфлюоресценции парафовеолярно с размытыми границами на ранней стадии



а)

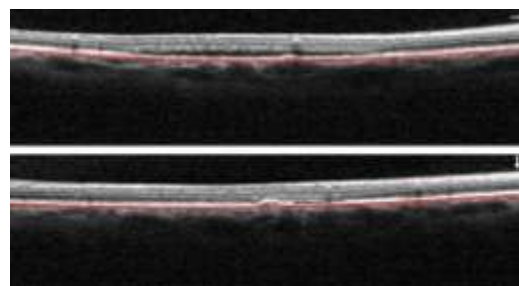


б)

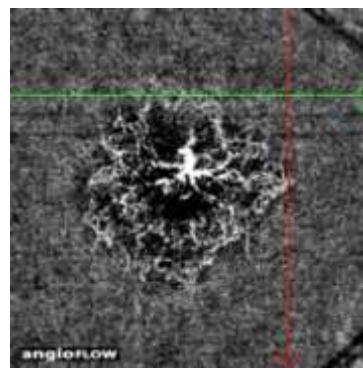
Рис. 4. а) спектральная ОКТ: отслойка НЭ с неоднородным гиперрефлективным содержимым; б) ОКТ-ангиография: петлевидная сосудистая сеть с многочисленными ответвлениями (слой хориокапилляров)



Рис. 5. ФАГ: негетогенная гипер флюоресценция в макулярной зоне



а)



б)

Рис. 6. а) спектральная ОКТ: куполообразная элевация «пигментный эпителий – мембрана Бруха»; б) ОКТ-ангиография: ветвящаяся сосудистая сеть в местах расположения «полипов», кольцевидные участки с четкими границами и различные по форме петлевидные изгибы, расположенные в пределах отслойки ПЭ (слой хориокапилляров)

Клинический случай № 3.

Пациент К., 60 лет, наблюдается с диагнозом полипoidalная хориоидальная васкулопатия правого глаза. Vis OD 0,3 с корр. 0,6. Обратился с жалобами на снижение остроты зрения. При осмотре (контактная биомикроскопия) в макулярной зоне определяется экссудативная отслойка ПЭ, дисперсия пигмента. По данным ФАГ выявляется диффузная негетогенная гиперфлюоресценция в макулярной зоне (рис. 5).

На снимках спектральной ОКТ определяется куполообразная элевация «пигментный эпителий – мембрана Бруха» с крутыми склонами, под которой нет гиперрефлективных структур.

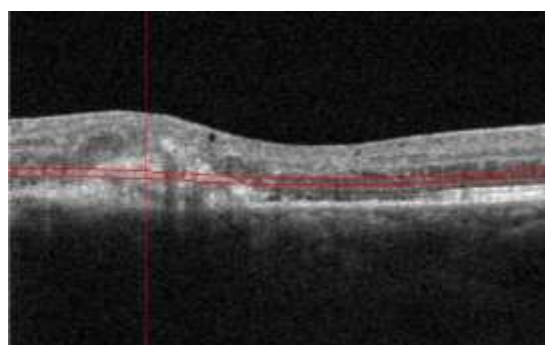
ОКТ-ангиография: отчетливо видна ветвящаяся сосудистая сеть в местах расположения «полипов», кольцевидные участки с четкими границами и различные по форме петлевидные изгибы, расположенные в пределах отслойки ПЭ при совершенно не измененных поверхностного и глубокого сосудистых плексусов (рис. 6а, 6б).

Клинический случай № 4.

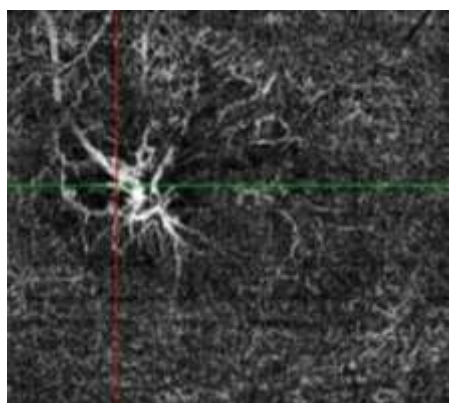
Пациентка К., 56 лет, наблюдается с диагнозом ретинальная ангиоматозная пролиферация правого глаза. Vis OD 0,2 н/к. Обратилась с жалобами на снижение зрения. При осмотре (контактная биомикроскопия) определяется обширный экссудативно-геморрагический очаг с явлениями фиброза. ФАГ выполнить не удалось, т. к. у пациентки в анамнезе анафилактический шок, что является противопоказанием к проведению данного исследования. При этой патологии ФАГ малоинформативна.

Спектральная ОКТ – определяется отслойка пигментного эпителия с гиперрефлективным содержимым, округлые полости минимального диаметра с прозрачным содержимым.

ОКТ-ангиография отчетливо показывает наличие ретинально-хориоидальных анастомозов [15] (рис. 7а, 7б).



а)



б)

Рис. 7. а) спектральная ОКТ: отслойка ПЭ с гиперрефлективным содержимым, округлые полости минимального диаметра; б) ОКТ-ангиография: наличие ретинально-хориоидальных анастомозов (слой хориокапилляров)

ВЫВОДЫ

Представленные клинические примеры с использование нового диагностического метода ОКТ-ангиографии позволяют с уверенностью заявить, что данные, полученные от этого исследования, объективны и сопоставимы с показателями морфофункциональных исследований. ОКТ-ангиография является достоверным методом для выявления типов неоваскуляризации при влажной форме ВМД – скрытой ХНВ, при которой сосуды расположены под ПЭ и классической ХНВ – с локализацией неоваскулярного комплекса над ПЭ, а также диагностировать атипичные формы ВМД (ПХВ, РАП). Активное развитие ОКТ-ангиографии позволит открыть новые горизонты в решении проблемы слабо-видения, инвалидности и слепоты, а также, возможно, даст толчок к пересмотру патогенеза многих заболеваний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein R., Klein B.E.K., Jensen S.C., Meuer S.M. The five-year incidence and progression of age-related maculopathy. The Beaver Dam Eye Study // *Ophthalmology*. 1997. V. 104. P. 7-21.
2. Williams R.A., Brady B.L., Thomas R.J. The psychosocial impact of macular degeneration // *Arch. Ophthalmol.* 1998. V. 116 (4). P. 514-520.
3. Либман Е.С., Шахова Е.В. Состояние и динамика слепоты и инвалидности вследствие патологии органа зрения в России // Материалы 7 съезда офтальмологов России. М., 2000. С. 209-214.
4. Zweng H.C., Little H.L., Vassiliadis A. Argon laser photocoagulation. St. Louis: Mosby, 1977. P. 127-162.
5. Silvester A. Age-related macular degeneration and its effect on quality of life // *JRSM*. 2009. V. 102 (8). P. 310-310.
6. Gass J.D. Stereoscopic atlas of macular diseases.: 4th ed. St. Louis: Mosby, 1997. P. 26-30.
7. Панова И.Е., Прокопьева М.Ю., Авдеева О.Н., Резницкая О.В. Клинико-инструментальный мониторинг в оценке эффективности различных вариантов лечения неоваскулярной возрастной макулодистрофии // *Вестник ОГУ*. 2011. Т. 133 (14). С. 292-294.
8. Giovanni A., Amato G., Mariotti C., Scassellani- Sforzolini B. OCT imaging of choroidal neovascularisation and its role in the determination of patients eligibility for surgery // *British Journal of Ophthalmology*. 1999. V. 83 (4). P. 438-442.
9. Complications from fluorescein angiography: a prospective study // *Clinical & Experimental Ophthalmology*. 2009. V. 37 (8). P. 526-527.
10. Lipson B., Yannuzzi L. Complications of intravenous fluorescein injections // *International Ophthalmology Clinics*. 1989. V. 29 (3). P. 200-205.
11. Lira R., Oliveira C., Marques M., Silva A., Pessoa C. Adverse reactions of fluorescein angiography: a prospective study // *Arquivos Brasileiros de Ophthalmologia*. 2007. V. 70 (4). P. 615-618.
12. Yia Y., Tan O., Tokayer J et al. Split – spectrum amplitude decorrelation angiography with optical coherence tomography // *Opt. Express*. 2012. V. 20 (4). P. 4710.
13. Шаимов Т.Б., Панова И.Е., Шаимов Р.Б., Шаимова В.А., Шаимова Т.А., Фомин А.В. Оптическая когерентная томография-ангиография в диагностике неоваскулярной формы возрастной макулярной дегенерации // *Вестник офтальмологии*. 2015. Т. 131 (5). С. 4-13.
14. Lumbroso B., Huang D., Yia Y., Fujimoto J.A., Rispoli M. Clinical guide to Angio-OCT. New Delhi: Jaypee Brothers Medical Publ., 2015.
15. Politou A. The role of optical coherence tomography (OCT) in the diagnosis and management of retinal angiomatous proliferation (RAP) in patients with age-related macular degeneration // *Ann. Acad. Med. Singapore*. 2006. V. 35. № 6. P. 420-431.

Поступила в редакцию 24 марта 2016 г.

UDC 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-561-565

OPTICAL COHERENCE TOMOGRAPHY ANGIOGRAPHY IN THE DIAGNOSIS OF CHOROIDAL NEOVASCULARIZATION IN AGE-RELATED MACULAR DEGENERATION

© N.V. Popova

The modern methods of diagnosis of choroidal neovascularization in age-related macular degeneration (AMD) including the atypical forms – polypoidal choroidal vasculopathy (PCV) and retinal angiomatous proliferation (RAP) are presented. Special attention should be paid to a new up-to-date diagnostic method – optical coherence tomography angiography (OCT-angiography) which is noninvasive, safe and allows performing the investigation of the vascular structures in three-dimensional space. It has high sensitivity and specificity in the detection of choroidal neovascularization in AMD. In some cases, this is a great alternative to the diagnostic methods of investigation with contrast.

Key words: age-related macular degeneration; choroidal neovascularization; optical coherence tomography – angiography.

REFERENCES

1. Klein R., Klein B.E.K., Jensen S.C., Meuer S.M. The five-year incidence and progression of age-related maculopathy. The Beaver Dam Eye Study. *Ophthalmology*, 1997, vol. 104, pp. 7-21.
2. Williams R.A., Brady B.L., Thomas R.J. The psychosocial impact of macular degeneration. *Arch. Ophthalmol.*, 1998, vol. 116 (4), pp. 514-520.
3. Libman E.S., Shakhova E.V. Sostoyaniye i dinamika slepoty i invalidnosti v sledstvie patologii organa zreniya v Rossii. *Materialy 7 s"ezda oftal'mologov Rossii*, Moscow, 2000. pp. 209-214.
4. Zweng H.C., Little H.L., Vassiliadis A. *Argon laser photocoagulation*. St. Louis: Mosby Inc., 1977, pp. 127-162.
5. Silvester A. Age-related macular degeneration and its effect on quality of life. *JRSM*, 2009, V. 102 (8), P. 310-310.
6. Gass J.D. *Stereoscopic atlas of macular diseases*.: 4th ed. St. Louis, Mosby Inc., 1997, pp. 26-30.
7. Panova I.E., Prokop'eva M.Yu., Avdeeva O.N., Reznitskaya O.V. Kliniko-instrumental'nyy monitoring v otsenke effektivnosti razlichnykh variantov lecheniya neovaskulyarnoy vozrastnoy makulodistrofii. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2011, vol. 133 (14), pp. 292-294.
8. Giovanni A., Amato G., Mariotti C., Scassellani-Sforzolini B. OCT imaging of choroidal neovascularisation and its role in the determination of patients eligibility for surgery. *British Journal of Ophthalmology*, 1999, vol. 83 (4), pp. 438-442.
9. Complications from fluorescein angiography: a prospective study. *Clinical & Experimental Ophthalmology*, 2009, vol. 37 (8), pp. 526-527.
10. Lipson B., Yannuzzi L. Complications of intravenous fluorescein injections. *International Ophthalmology Clinics*, 1989, vol. 29 (3), pp. 200-205.
11. Lira R., Oliveira C., Marques M., Silva A., Pessoa C. Adverse reactions of fluorescein angiography: a prospective study. *Arquivos Brasileiros de Ophthalmologia*, 2007, vol. 70 (4), pp. 615-618.
12. Yia Y., Tan O., Tokayer J et al. Split-spectrum amplitude decorrelation angiography with optical coherence tomography. *Opt. Express*, 2012, vol. 20 (4), pp. 4710.
13. Shaimov T.B., Panova I.E., Shaimov R.B., Shaimova V.A., Shaimova T.A., Fomin A.V. Opticheskaya kogerentnaya tomografiya-angiografiya v diagnostike neovaskulyarnoy formy vozrastnoy makulyarnoy degeneratsii. *Vestnik oftal'mologii*, 2015, vol. 131 (5), pp. 4-13.
14. Lumbroso B., Huang D., Yia Y., Fujimoto J.A., Rispodi M. *Clinical guide to Angio-OCT*. New Delhi, Jaypee Brothers Medical Publ., 2015.
15. Polito A. The role of optical coherence tomography (OCT) in the diagnosis and management of retinal angiomatous proliferation (RAP) in patients with age-related macular degeneration. *Ann. Acad. Med. Singapore*, 2006, vol. 35, no. 6, pp. 420-431.

Received 24 March 2016

Попова Наталия Викторовна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, врач-офтальмолог отделения лазерной хирургии, e-mail: naukatmb@mail.ru

Popova Nataliya Viktorovna, Academician S.N. Fyodorov FSBI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Ophthalmologist of Laser Surgery Department, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-566-569

СИНДРОМ ПАРРИ–РОМБЕРГА. КЛИНИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

© И.В. Иволгина

Описано редкое заболевание – прогрессирующая гемиатрофия лица или синдром Парри–Ромберга у пациентки 21 года. Приведены данные этиологии, обследования, клинического течения данного заболевания. Описана характерная офтальмологическая и клиническая симптоматика, на основании которой возможно поставить диагноз данного редкого заболевания. Приведены факторы, определяющие тяжесть течения заболевания и возможное лечение данного синдрома. Определена этапность консервативного лечения, целесообразность и сроки хирургического лечения, прогноз течения заболевания для жизни пациента и выздоровления.

Ключевые слова: гемиатрофия лица; линейная склеродермия; синдром Парри–Ромберга; энофтальм; лагофтальм; офтальмоплегия.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Болезнь Парри–Ромберга – прогрессирующая гемиатрофия лица, или нейро-стоматологический синдром. Редкое заболевание – 1 больной на 2000 человек. Согласно информации, представленной Национальной организацией редких заболеваний (NORD), около 1000000 людей во всем мире страдает от данной болезни [1–3]. Первое упоминание об этом состоянии встречается в работе английского врача Калеба Хиллиера Парри, опубликованной в 1825 г. [4]. Позже заболевание было подробно описано немецким неврологом Морицем Генрихом Ромбергом [5]. Термин «прогрессирующая гемиатрофия лица» был введен немецким неврологом Альбертом Эйленбургом в 1871 г. [6–8].

До настоящего времени этиология заболевания не выяснена, но существует предположение о полиэтиологичном генезе. Началу заболевания иногда предшествуют травмы лица и черепа, инфекционные заболевания. В ряде случаев болезнь оказывается синдромом склеродермии, синдромом Морица, сифилиса, опухоли мозга, эхинококкоза мозга, повреждений верхнего шейного симпатического узла. Также может иметь значение поражение гипоталамуса, симпатического ствола. Существует предположение, что у больных имеется врожденные функциональные изменения вегетативной нервной системы на уровне сверх – сегментарных стволовых – дизэнцефальных отрезков, а перечисленные факторы играют роль «пускового» механизма [2].

Синдром возникает в детском и юношеском возрасте, чаще до 20 лет и очень редко у лиц старше 30 лет. Распространенность больше у женщин, чем у мужчин в соотношении примерно 3:0,2 [3; 8]. Поражается чаще левая сторона, чем правая. Болезнь начинается с невралгии тройничного нерва, затем появляется атрофия на каком – либо ограниченном участке, чаще на верхней-челюстной и скуловой костях, а вскоре и на других частях той же половины лица, в т. ч. и в области орбиты. Кожа становится тонкой. Исчезает подкожный жировой слой, мышцы уменьшаются в объеме, становится заметной асимметрия лица. Атрофический процесс может переходить на соответствующую половину шеи

и туловища, поражать голосовую связку и половину гортани. При тяжелых формах заболевания отмечается истончение и западение скуловой кости, уменьшение челюсти, выпадение зубов [3].

Офтальмологические симптомы встречаются у 15 % больных. Характерны: выпадение ресниц, бровей, энофтальм, офтальмоплегия (из-за атрофии орбитальной клетчатки и экстраокулярных мышц на пораженной стороне), сужение глазной щели. Также могут развиваться изменения со стороны роговицы: ксероз, нейропаралитический кератит [7].

Из общей симптоматики могут быть парезы конечностей, судороги, отмечаются эпилептические припадки [8–10].

Цель работы: описание клинического случая редкого заболевания прогрессирующей гемиатрофии лица, синдрома Парри–Ромберга.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В данной статье представлен клинический случай прогрессирующей гемиатрофии лица, наблюдаемый в Тамбовском филиале МНТК «Микрохирургия глаза». Среди методов исследования использованы визометрия, биомикроскопия, офтальмоскопия, тонометрия, экзофтальмометрия, ультразвуковое и магнитно-резонансное исследование орбиты, магнитно-резонансное исследование головного мозга.

КЛИНИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Пациентка З., 21 года обратилась в Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» с жалобами на косметический дефект правой стороны лица, прогрессирующие очаговые изменения и истончение кожи лица, изменение и атрофию костей лицевого скелета, покраснение, западение и ограничение подвижности правого глазного яблока в течение года.

Из анамнеза: год назад, после появления жалоб на дефекты зубного ряда справа и обращения к стоматологу, установлены брекет-системы. Через 6 месяцев после установки брекет-систем появились ограничен-

ные участки атрофии в области верхней челюсти и скуловой кости, которые постепенно распространились на всю половину лица. Появилось истончение кожи, уменьшение мышц и подкожного жирового слоя в объеме – это привело к выраженной асимметрии лица. Также беспокоило западение глазного яблока, периодическое его покраснение, которое самопроизвольно проходило и появлялось. Пациентка обратилась к офтальмологу. Брекеты-системы были уже удалены.

При осмотре – асимметрия правой стороны лица: больная сторона меньше здоровой, уменьшен размер костей лицевого скелета. Рот и нос отклонены к пораженной стороне лица. Кожа лица и шеи на стороне поражения истончена, сморщена, испещрена бороздами, с полосовидными очагами депигментации (пергаментная с коричневыми линиями). Истончены мягкие ткани лица: подкожная клетчатка и мышцы значительно уменьшены в объеме, двигательная функция мышц снижена, амимия, расстройств чувствительности не отмечается. Вертикально через midface, разделяя лицо пополам располагается линейная склеродермия по типу «удара сабли», напоминает шрам от раны, сделанной саблей. На пораженной стороне отмечалась деформация и уменьшение уха в размерах.

Общая симптоматика: парезы и судороги конечностей, сильные (мигреноподобные) головные боли.

Офтальмологические симптомы. Энофтальм – западение глазного яблока. Офтальмоплегия – ограничение подвижности глазного яблока вверх, в остальных направлениях в полном объеме. Репозиция глазного яблока не затруднена. Положение верхнего века на уровне верхнего лимба (симметрично верхнему веку левого глаза). Нижнее веко частично вывернуто, отстоит от глазного яблока во внутренней половине на 4 мм. Глазная щель не смыкается, лагофтальм – 2 мм. Конъюнктива гипертрофирована и инъецирована, сосуды склеры гиперемированы и извиты. Роговица прозрачная, передняя камера средней глубины, влага прозрачная, зрачок круглый, 3 мм, реакция на свет вялая, хрусталик прозрачный. Глазное дно: ДЗН бледно-розового цвета, контуры четкие, в макуле и на периферии сетчатки изменений не выявлено.

При объективном обследовании:

Vis OD = 1,0; Vis OS = 0,2 sph – 1,75 = 0,9

Автокератометрия: OD – 43.50; OS – 43.00
44.50 43.75

Рефрактометрия: OD: sph 0 cyl -1,0 ax 160; OS: sph – 1,75 cyl -0,75 ax 35

Пневмотонометрия: OD = 7,6 мм рт. ст.; OS = 11 мм рт. ст.

Экзофтальмометрия: OD – 8,5 мм. L – 90 мм; OS – 11 мм.

Биометрия: OD – 22,39 мм, OS – 23,39 мм.

Электрофизиология: порог (МКА) OD = 80; OS = 80.

Лабильность (Гц) OD = 36; OS = 35

Компьютерная периметрия MD: OD = -10,06; OS = -0,37.

Ультразвуковое исследование. OU изменений не выявлено, незначительные помутнения в стекловидном теле, оболочки глазного яблока прилежат.

Компьютерная томография орбит. Энофтальм справа, обусловлен уменьшением жировой клетчатки в орбите, ретробульбарная клетчатка однородной структуры. Кости орбиты не изменены. Толщина прямых экстраокулярных мышц в пределах нормы:

верхняя прямая мышца – OD 3,32 мм; OS 3,75 мм, внутренняя прямая мышца – OD 2,69 мм; OS 2,77 мм, наружная прямая мышца – OD 2,62 мм; OS 3,05 мм, нижняя прямая мышца – OD 3,37 мм; OS 3,45 мм.

Диаметр и положение зрительного нерва не изменены.

Магниторезонансная томография. Выраженных изменений не выявлено, отмечается T2 гиперинтенсивность белого вещества левого полушария.

Взята биопсия кожи правого уха. Гистологически выявлены изменения, характерные для очаговой склеродермии.

На основании проведенного обследования и клинической картины пациентке был установлен диагноз:

OD: Прогрессирующая лицевая гемиатрофия (синдром Парри–Ромберга). Линейная склеродермия. Энофтальм. Частичная офтальмоплегия. Выворот нижнего века. Лагофтальм;

OS: Миопия слабой степени.

Из данных литературы известно, что склеродермия проявляется фиброзно-склеротическими и сосудистыми изменениями соединительной ткани [9]. Статистических данных о склеродермии мало (синдром Парри–Ромберга как вариант ее течения).

Выделяют факторы, способствующие переходу очагового процесса в системный и определяющие тяжелое и агрессивное течение заболевания:

1) начало манифестации заболевания до 20 лет или после 50 лет;

2) линейная форма болезни или множественная бляшечная;

3) выраженный дефицит клеточного иммунитета, повышение циркуляции иммунных комплексов, антилимфоцитарных антител;

4) в поражение вовлекается кожа лица, над суставами [9].

В нашем случае присутствовали 2 фактора, предполагающие тяжелое, агрессивное течение заболевания. Пациентка была направлена в стационар для проведения комплексного лечения, включающего в себя несколько курсов (обычно 6 курсов при активной форме заболевания) с перерывами в 1–2 месяца.

ЛЕЧЕНИЕ

- Трофополные средства (лидаза);
- сосудистые средства – никотиновая кислота, трентал, милдронат, пирацетам, расширение сосудов и улучшение кровоснабжения;
- стероидные гормоны – ультрафонофорез с гидрокортизоном, противовоспалительное действие;
- препараты калия – стабилизируют общий метаболизм, регулируют осмотический баланс, насыщение тканей кислородом;
- элькарнитин, левокарнитин – природные вещества, родственные витаминам группы В, корректируют метаболические процессы, активируют жировой процесс, стимулируют регенерацию, обладают антиоксидантным действием, замедляют фиброобразование, подавляют биосинтез коллагена;
- вобэнзим – комплекс протеолитических ферментов животного и растительного происхождения, оказывает противовоспалительное и иммуномодулирующее воздействие, применяется внутрь и местно.

Местно:

- гепариновая мазь – антикоагулянт прямого действия, оказывает противовоспалительное действие, антитромботическое действие;
- троксвазиновая мазь – венопротекторное, противовоспалительное действие.

Местно для лечения роговицы рекомендовано использование слезозаменителей и корнеопротекторов.

В дальнейшем, для профилактики возможного прогрессирования, лечение необходимо повторять 2 или 3 раза в год.

Хирургические методы лечения могут быть применены для улучшения косметического вида пациента и с целью профилактики возможных осложнений со стороны роговицы, учитывая наличие лагофталма. Применение хирургических методов лечения возможно только при регрессировании или стабилизации атрофических изменений, не менее 1 года наблюдения [6–7].

ВЫВОД

Такое заболевание, как синдром Парри–Ромберга, хотя очень редко встречается, но о нем следует помнить для более ранней диагностики и лечения.

В отношении жизни пациента, страдающего гемифатрофией лица, прогноз благоприятный, в отношении выздоровления – неблагоприятен, но ранняя диагностика, регулярное комбинированное лечение необходимы для достижения положительного (регрессивного,

или стабилизация процесса) и продолжительного эффекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Исамутдинова Г.А., Корнилова Л.Е., Соков Л.Е., Нестеров А.И., Нурмагомедова М.С. Российский университет дружбы народов. Кафедра нервных болезней и нейрохирургии. Описание клинического случая пациента с гемифатрофией лица справа // Неврология. 2010. С. 18–21.
2. Лобзин С.В., Кула И.И., Разнатовский К.И. Гемифатрофия лица, синдром Парри–Ромберга: клиника, диагностика и лечение // Вестник Дальневосточного государственного медицинского университета. 2012. № 3. С. 108–111.
3. URL: http://ms3.znate.ru/tw_files2/urls_46/17/d-16756/7z-docs/2.pdf (дата обращения: 21.01.2016).
4. Parry C.H. Facial hemiatrophy // Coliections from the Unpublished Medical Writings of the Late Caleb Hillier Parry. Vol. I. L.: Underwood, 1825. P. 478–480.
5. Romberg M.H. von Trophoneurosen // Klinische Ergebnisse. Berlin: Forstner, 1846. P. 75–81.
6. Eulenburg A. Lehrbuch der functionellen Nervenkrankheiten auf Physiologischer Basis. Berlin: A. Hirschwald, 1871. S. 712.
7. URL: <http://www.radiomed.ru/publications/sindrom-parri-romberga-sindrom-sindrom-romberga> (дата обращения: 21.01.2016).
8. URL: <http://www.medeffect.ru/neurology/neurology-0071.shtml> (дата обращения: 21.01.2016).
9. URL: <http://www.eurolab.ua/encyclopedia/Neurology/patient/6968> (дата обращения: 21.01.2016).
10. Parry Romberg Syndrome. URL: <http://www.rarediseases.org/rare-disease-information/rare-diseases/byID/489/printFullReport> (дата обращения: 21.01.2016).

Поступила в редакцию 31 марта 2016 г.

UDC 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-566-569

PARRY–ROMBERG SYNDROME. MEDICAL CASE

© I.V. Ivolgina

A rare disease – progressive hemifacial atrophy or Parry–Romberg syndrome in a female patient aged 21 years old is described. The data of etiology, examination and clinical course of the disease are presented. The typical ophthalmological and clinical symptoms are described, on the basis of which it is possible to make the diagnosis. We listed the factors determining the severity of the disease and possible treatment of this syndrome. The stages of conservative treatment, expediency and surgical treatment terms, the prognosis of the disease for a patient's life and recovery are determined.

Key words: hemifacial atrophy; linear scleroderma; Parry–Romberg syndrome; enophthalmos; lagophthalmos; ophthalmoplegia.

REFERENCES

1. Isamutdinova G.A., Kornilova L.E., Sokov L.E., Nesterov A.I., Nurmagomedova M.S. Rossiyskiy universitet druzhby narodov. Kafedra nervnykh bolezney i neyrokhirurgii. Opisanie klinicheskogo sluchaya patsienta s gemiatrofiyey litsa sprava. *Nevrologiya*, 2010, pp. 18–21.
2. Lobzin S.V., Kula I.I., Raznatovskiy K.I. Gemiatrofiya litsa, sindrom Parri–Romberga: klinika, diagnostika i lechenie. *Vestnik Dal'nevostochnogo gosudarstvennogo meditsinskogo universiteta*, 2012, № 3, pp. 108–111.
3. Available at: http://ms3.znate.ru/tw_files2/urls_46/17/d-16756/7z-docs/2.pdf (accessed 21.01.2016).
4. Parry C.H. Facial hemiatrophy. *Coliections from the Unpublished Medical Writings of the Late Caleb Hillier Parry. Vol. I.*, London, Underwood Publ., 1825, pp. 478–480.
5. Romberg M.H. von Trophoneurosen. *Klinische Ergebnisse*. Berlin, Forstner Publ., 1846, pp. 75–81. (In German).
6. Eulenburg A. *Lehrbuch der functionellen Nervenkrankheiten auf Physiologischer Basis*. Berlin, A. Hirschwald Publ., 1871, p. 712. (In German).

7. Available at: <http://www.radiomed.ru/publications/sindrom-parri-romberga-sindrom-sindrom-romberga> (accessed 21.01.2016).
8. Available at: <http://www.medeffect.ru/neurology/neurology-0071.shtml> (accessed 21.01.2016).
9. Available at: <http://www.eurolab.ua/encyclopedia/Neurology.patient/6968> (accessed 21.01.2016).
10. *Parry Romberg Syndrome*. Available at: <http://www.rarediseases.org/rare-disease-information/rare-diseases/byID/489/printFullReport> (accessed 21.01.2016).

Received 31 March 2016

Иволгина Ирина Валентиновна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, зав. 2 офтальмологическим отделением, e-mail: naukatmb@mail.ru

Ivolgina Irina Valentinovna, Academician S.N. Fyodorov FSAI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Head of 2nd Ophthalmologic Department, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-570-572

ДЕРМОИД РОГОВИЦЫ. СИНДРОМ GOLDENHAR. КЛИНИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

© В.Г. Кутимова, Е.Ю. Кутимова

Дермоид роговицы и конъюнктивы у детей относятся к порокам развития, составляют около 22 % доброкачественных новообразований, проявляются в первые месяцы жизни, обычно сочетаются с другими пороками развития, часто встречаются в симптомокомплексах (например синдром Гольденхара, синдром Тричера–Коллинза, синдром Франческетти). В статье представлен редкий клинический случай пациента К. 1,5 лет с синдромом Гольденхара, поступившего на обследование в детское отделение Тамбовского филиала МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова.

Ключевые слова: дермоид роговицы и конъюнктивы; врожденные аномалии развития глаза; синдром Гольденхара.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Синдром Гольденхара (синоним: окулоаурикуло-вертебральная дисплазия; мандибуло-фасциальный дизостоз с эпibuльбарными дермоидами) – это поражение структур, исходящих из первой и второй жаберных дуг. Встречается, как правило, спорадически. Проявления синдрома вариабельны и проявляются асимметрией лица вследствие односторонней гипоплазии мускулатуры лица, недоразвитием угла нижней челюсти, гипоплазией области молярных зубов верхней и нижней челюсти, которая может быть двусторонней, аномалиями ушных раковин, наружных слуховых проходов, среднего уха, околоушными свищами, врожденной расщелиной губы и неба, наличием преаурикулярных кожных выростов на лице, двусторонней асимметричной тугоухостью [1]. У пациентов могут выявляться врожденные пороки сердца (дефект межжелудочковой перегородки, открытый артериальный проток, тетрада Фалло, коарктация аорты); костные аномалии: сращение первого костного позвонка с затылочной костью. Офтальмологические проявления: эпibuльбарный дермоид или липодермоид, колобомы век, птоз, дефекты глазодвигательных мышц (синдром ретракции Дуэйна), колобома радужки и аниридия, колобома диска зрительного нерва, стафиломы роговицы и склеры, микрокорнея и микрофтальм [2, с. 63-66, 84]. В 25 % случаев отмечается умственная отсталость.

В отечественной литературе случаи заболевания описаны крайне скудно. Впервые этот синдром был опубликован американским врачом М. Goldenhar в 1952 г. Позднее R.J. Gorlin et al. (1963) дополнили синдром своими наблюдениями под общим названием «окуло-аурикуло-вертебральная дисплазия».

Этиология синдрома Гольденхара до настоящего времени изучена недостаточно. Возможен аутосомно-доминантный тип наследования. Все теории, предполагающие развитие синдрома, связаны с генетическими ошибками во время формирования структур глаза. Немаловажную роль играетотягощенный акушерско-

гинекологический анамнез матери. Известны случаи возникновения дермоида роговицы, связанные с приемом матерью тератогенных веществ в первый триместр беременности [3]. Часто заболевания матери вирусными инфекциями в первом триместре беременности, особенно до 2–7 недель, приводят к эмбриопатиям [4, с. 207].

Заболевание встречается крайне редко. По данным зарубежных авторов, заболеваемость варьирует от 1 до 3 случаев на 10 тыс. населения. В исследовании Armed Forces Institute of Pathology 52 % эпibuльбарных хориستم располагаются в бульбарной конъюнктиве, 29 % – у лимба, 6 % на роговице, 4 % – затрагивает слезное мяско, 2,5 % – в конъюнктивальном своде или в пальпебральной конъюнктиве. Зачастую дермоиды роговицы выявляются при рождении. Эпibuльбарные дермоиды обнаруживаются в 75 % случаев синдрома Гольденхара [5].

Дермоид роговицы – это доброкачественное врожденное новообразование, содержащее хориستم (опухолевидные образования, источником которых является отделившаяся в эмбриональном периоде и расположенная в необычном месте группа клеток или участок ткани). Оно чаще появляется в нижне-височном квадранте у лимба. Тем не менее, иногда может локализовываться полностью в пределах роговицы или ограничиваться наружными слоями роговицы и конъюнктивой. Дермоид роговицы состоит из фиброжировой ткани, покрытой кератинизированным эпителием. Он иногда содержит волосные фолликулы, сальные и потовые железы. Обычно дермоид выглядит как округлая или овальная серая или розовато-желтая масса с сухой поверхностью, из которой могут выступать короткие волосы [3]. Они варьируют от 8 до 10 мм в длину и обычно двойные у лимба. Дермоид распространяется в роговичную строму и прилежащую склеру, но редко занимает всю толщину роговицы или склеры. Малигнизация крайне редка, но возможна [1].

Лечение дермоида включает в себя симптоматическую терапию (при наличии жалоб на ощущение «ино-

родного тела»); удаление ресниц с поверхности дермоида; хирургическое лечение, которое проводится, если ожидание улучшения остроты зрения и устранение косметического дефекта превалирует над риском последующего формирования рубца или развития хирургических осложнений [1].

Хирургическое иссечение дермоида может привести к истончению роговицы и склеры и, как следствие, – к перфорации. И потому его непременно следует производить в сочетании с послойной пластикой корнеосклеральным трансплантатом; в некоторых случаях используется сквозной трансплантат.

Цель работы: предоставить наше наблюдение дермоида роговицы и сопутствующих пороков развития у ребенка 1,5 лет с синдромом Гольденхара.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

В основу данной работы положены результаты комплексного обследования ребенка 1,5 лет, поступившего в детское отделение Тамбовского филиала ФГАУ «МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова» МЗ России. Из анамнеза: мать, 33 г., без вредных привычек. Со слов здорова. Ребенок от 6-й беременности (1–3 – срочные роды, 2 – медицинский аборт, 5 – самопроизвольный аборт). В женской консультации наблюдалась с 7 недели беременности. Настоящая беременность протекала с угрозой прерывания, хронической внутриутробной гипоксией плода на фоне гестоза. Стационарное лечение в 7–8 недель, в 36–37 недель. Роды в 39 недель, родоразрешение путем кесарева сечения (хроническая внутриутробная гипоксия плода), безводный промежуток – 5 часов, воды меконияльные. Реанимационные мероприятия в родзале: санация ВДП, оценка по Апгар – 7–8 баллов. Масса – 2900 г, рост – 51 см, окружность головы – 34 см, окружность груди – 33 см. Состояние с рождения расценено как средне тяжелое за счет симптомов угнетения, малые пороки развития – признаки асимметрии и гипоплазии мягких тканей и костей лицевого скелета, недоразвитие и деформация обеих ушных раковин, околоушные кожные выросты, дермоиды роговицы, конъюнктивы и склеры, деформация рта (рис. 1).

Состояние ребенка при поступлении: умеренное угнетение ЦНС, множественные стигмы дисэмбриогенеза (антимонголоидный разрез глаз, макростомия, гипоплазия скуловой кости справа, деформированные ушные раковины, ушные придатки, клинодактилия 5-х пальцев, сандалевидная щель). Тремор подбородка. Мышечный тонус дистоничный, с преобладанием гипотонуса. Видимые слизистые чистые. Кожные покровы субиктеричные, чистые. Носогубный цианоз, акроцианоз кистей и стоп. Дыхание пуэрильное, проводится равномерно во все отделы. Хрипы не выслушиваются. Частота дыхательных движений (ЧДД) до 44 в минуту. Область сердца визуально не изменена. Частота сердечных сокращений (ЧСС) – до 138 в минуту. Тоны сердца ритмичные, приглушены, выслушивается систолический шум над областью сердца. Симптомов нарушения кровообращения нет. Живот – мягкий, безболезненный. Печень, селезенка – не увеличены. Мочепускание свободное.

При поступлении в отделение ребенку было проведено стандартное офтальмологическое обследование. При объективном осмотре определялся дермоид конъюнктивы и склеры правого глаза размерами 0,6×0,8 см с прорастанием на роговицу на 5 мм в меридиане с 7 до 9 ч. Дермоид имел белесоватую окраску, овальную форму и плотную консистенцию, гладкую и блестящую слабоваскуляризованную поверхность. Ортоположение и движение глаз – в полном объеме. Оптическая зона роговицы и глубже лежащие преломляющие среды – прозрачны. Остроту зрения определить не удалось. За игрушками следил обоими глазами с расстояния 3 м. ВГД – в пределах нормы. При офтальмоскопии ОУ: ДЗН выглядят слабодекolorированными, с четкими границами, артериолы и вены – среднего калибра. Периферия сетчатки – без видимых особенностей.

Установлен диагноз: ОД – дермоидная киста конъюнктивы, роговицы и склеры. Сопутствующий диагноз: синдром Гольденхара. Церебральная ишемия 2 ст. Постгипоксическая кардиопатия.

Пациенту планируется проведение хирургического лечения – эксцизия дермоидной кисты в пределах здоровых тканей, вторым этапом, после отопластических операций.



Рис. 1. Клинические проявления синдрома Гольденхара

ВЫВОДЫ

1. Синдром Гольденхара – редкое генетически детерминированное заболевание, связанное с развитием асимметричной деформации костей лицевого скелета в сочетании с поражением слухового анализатора, придаточного аппарата и переднего отрезка глаза.

2. Данный клинический случай отражает необходимость полного обследования детей с хористоматами с целью выявления сопутствующих патологических изменений, характерных для синдрома Гольденхара.

3. Представленный клинический случай отображает необходимость привлечения врачей смежных специальностей для проведения диагностики, лечебных

и реабилитационных мероприятий у детей с синдромом Гольденхара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яворская М., Дудкевич З. Синдром Гольденхара – типичная и атипичная формы// *Acta chirurgiae plasticae*. 1974. № 2. С. 77-83.
2. Кански Дж. Клиническая офтальмология. Систематизированный подход. М.: Логосфера, 2014. 944 с.
3. Sherman M.D. Limbal dermoid. URL: eMedicine.com (accessed: 21.02.2016).
4. Бровкина А.Ф. Офтальмоонкология. Руководство для врачей. М., 2002. 424 с.
5. Козлова С.И., Демикова Н.С. Наследственные синдромы и медико-генетическое консультирование. Атлас-справочник. М., 2007.

Поступила в редакцию 25 марта 2016 г.

UDC 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-570-572

CORNEAL DERMOID. GOLDENHAR SYNDROME. A CASE REPORT

© V.G. Kutimova, E.Y. Kutimova

Corneal and conjunctival dermoid in children is related to the congenital malformations, accounts for about 22 % of benign tumors, occurs in the first months of life, is usually combined with the other malformations, occurs frequently in symptom complexes (e.g. Goldenhar syndrome, Treacher Collins syndrome, Franceschetti syndrome). The article presents a rare clinical case of the patient K. aged 1.5 years old with Goldenhar syndrome, submitted for examination to the children's department of Tambov branch.

Key words: corneal and conjunctival dermoid; congenital ocular malformations; Goldenhar syndrome.

REFERENCES

1. Yavorskaya M., Dudkevich Z. Sindrom Gol'denkhar – tipichnaya i atipichnaya formy. *Acta chirurgiae plasticae*, 1974, no. 2, pp. 77-83.
2. Kanski Dzh. *Klinicheskaya oftal'mologiya. Sistematizirovanny podkhod*. Moscow, Logosfera Publ., 2014. 944 p.
3. Sherman M.D. Limbal dermoid. Available at: eMedicine.com (accessed 21.02.2016).
4. Brovkina A.F. *Oftal'moonkologiya*. Moscow, 2002. 424 p.
5. Kozlova S.I., Demikova N.S. *Nasledstvennye sindromy i mediko-geneticheskoe konsul'tirovanie*. Moscow, 2007.

Received 25 March 2016

Кутимова Вера Гавриловна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, врач-офтальмолог, e-mail: naukatmb@mail.ru

Kutimova Vera Gavrilovna, Academician S.N. Fyodorov FSBI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Ophthalmologist, e-mail: naukatmb@mail.ru

Кутимова Елена Юрьевна, Городская клиническая больница имени Архиепископа Луки, г. Тамбов, Российская Федерация, врач-офтальмолог городской поликлиники № 1, e-mail: naukatmb@mail.ru

Kutimova Elena Yurevna, City Clinical Hospital named after Archbishop Luke, Tambov, Russian Federation, Ophthalmologist of City Polyclinics № 1, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 617.7
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-573-577

ДИАБЕТИЧЕСКАЯ РЕТИНОПАТИЯ. РОЛЬ АМБУЛАТОРНО-ПОЛИКЛИНИЧЕСКОГО ЗВЕНА В РАННЕЙ ДИАГНОСТИКЕ. ЛЕЧЕНИЕ. ПРОГНОЗЫ

© Е.Ю. Кутимова, В.Г. Кутимова

Сахарный диабет (СД) на протяжении многих лет остается социально значимым заболеванием, приводящим к инвалидизации и смертности больных вследствие споровожающих его микро- и макрососудистых осложнений. Диабетическая ретинопатия – одно из наиболее опасных осложнений СД, приводящее к прогрессирующему снижению зрения, вплоть до его потери. У больных СД и его осложнение – ретинопатия – зачастую обнаруживается в момент установления основного диагноза на уровне амбулаторно-поликлинического звена, являющегося первичным и ключевым в ранней диагностике заболевания и выявлении офтальмологической патологии на начальной стадии. Своевременное выявление и лечение диабетической ретинопатии у пациентов способны обеспечить достижение длительного нормального функционирования органа зрения.

Ключевые слова: сахарный диабет; диабетическая ретинопатия; непролиферативная форма; препролиферативная форма; пролиферативная форма; амбулаторно-поликлиническое звено; принципы ведения пациентов с диабетической ретинопатией.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Сахарный диабет – самое распространенное эндокринное заболевание, его осложнения представляют собой одну из серьезнейших медико-социальных и экономических проблем современного здравоохранения. Международная федерация диабета (IDF) опубликовала данные, показавшие, что во всем мире диабетом больны уже 382 млн человек. По данным государственного регистра, в настоящее время в России зарегистрировано более 3,7 млн больных сахарным диабетом.

Поражение органа зрения при сахарном диабете занимает особое место, поскольку снижение зрения существенно влияет на качество жизни больных. Среди всех клинических проявлений диабетического поражения глаз наибольшую опасность представляет ретинопатия, являющаяся основной причиной прогрессирующего и безвозвратного снижения зрения, и, как следствие, – инвалидизации.

Слепота у больных сахарным диабетом наступает в 25 раз чаще, чем в общей популяции. Риск развития диабетической ретинопатии зависит в основном от типа, длительности и компенсации сахарного диабета [1].

При сахарном диабете 1-го типа (инсулинозависимом) ретинопатия крайне редко выявляется в момент постановки диагноза. Однако через 20 лет после начала заболевания практически все больные этим типом диа-

бета будут страдать ретинопатией, причем примерно две трети – в пролиферативной стадии. У каждого третьего пациента, страдающего сахарным диабетом 2-го типа (инсулинонезависимым), ретинопатия выявляется при установлении диагноза. Примерно две трети больных диабетом этого типа имеют ретинопатию через 20 лет после начала заболевания, при этом пятая часть – в пролиферативной стадии [1–3].

К факторам риска, влияющим на частоту ретинопатии, также относятся артериальная гипертензия, нефропатия и гиперлипидемия.

Цель: проанализировать работу амбулаторно-поликлинического звена по выявляемости, периодичности наблюдения и своевременности направления на лечение пациентов с диабетической ретинопатией на разных стадиях заболевания.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

Всего на учете у эндокринолога поликлиники по данным на 2015 г. состоит 1659 пациентов с сахарным диабетом. Из них – 70 пациентов с СД I типа (50 мужчин и 20 женщин) и 1589 человек с СД II типа (383 мужчин и 1206 женщин). Также выявлено 286 человек с нарушением толерантности к глюкозе. Диабетическая ретинопатия (ДР) имеется у 517 человек (31,2 %) (табл. 1).

Таблица 1

Распределение пациентов с диабетической ретинопатией по типу СД

Тип СД	Пациенты с СД	Пациенты с ДР	%	Пациенты на инсулине	
				человек	%
I тип	70	55	78,6	55	100
II тип	1589	462	29,0	66	14,2

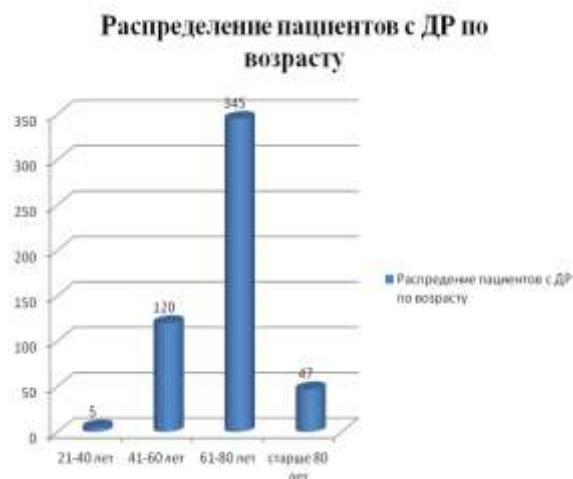


Рис. 1. Распределение пациентов с диабетической ретинопатией по возрасту

Таблица 2

Сопутствующая соматическая патология
при диабетической ретинопатии

Заболевание	Количество, человек	Количество, %
Артериальная гипертензия	409	79,1
Диабетическая нефропатия	37	7,2
Ожирение	310	60
Инфаркт миокарда	36	6,97
ОНМК	40	7,7
Синдром диабетической стопы	24	4,65

В исследуемую группу вошли пациенты в возрасте старше 20 лет (рис. 1).

Сопутствующие заболевания, отягощающие течение процесса, представлены в табл. 2.

Количество больных СД, которые состоят на учете с диабетической ретинопатией, составило 517 человек (рис. 2). Из них: 468 человек с неproлиферативной диабетической ретинопатией, с вовлечением макулы – 8 человек (6 %), 34 пациента – с проproлиферативной стадией, с вовлечением макулы – 2 человека, 4 %, 5 человек – с пролиферативной диабетической ретинопатией, с вовлечением макулы – 4 человека, 80 %; 10 человек с впервые выявленной диабетической ретинопатией, которые были поставлены на учет и направлены в ТФ «МНТК «Микрохирургия глаза» на дообследование и дальнейшее лечение.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

При осмотре пациентов с ДР была использована рабочая классификация и согласованная с ней схема лечения:

- неproлиферативная ретинопатия (НПДР);
- проproлиферативная ретинопатия (ППДР);
- пролиферативная ретинопатия (ПДР).

При неproлиферативной ретинопатии оценивались следующие офтальмоскопические проявления:

- микроаневризмы – локальные расширения ретинальных сосудов;
- геморрагии (штрихообразные или точечные кровоизлияния в слоях сетчатки);
- «твердые» экссудаты – липидные отложения желтоватого цвета;
- «мягкие» экссудаты – зона фокальной ишемии сетчатки;
- отек центральной зоны сетчатки (макулярный отек).

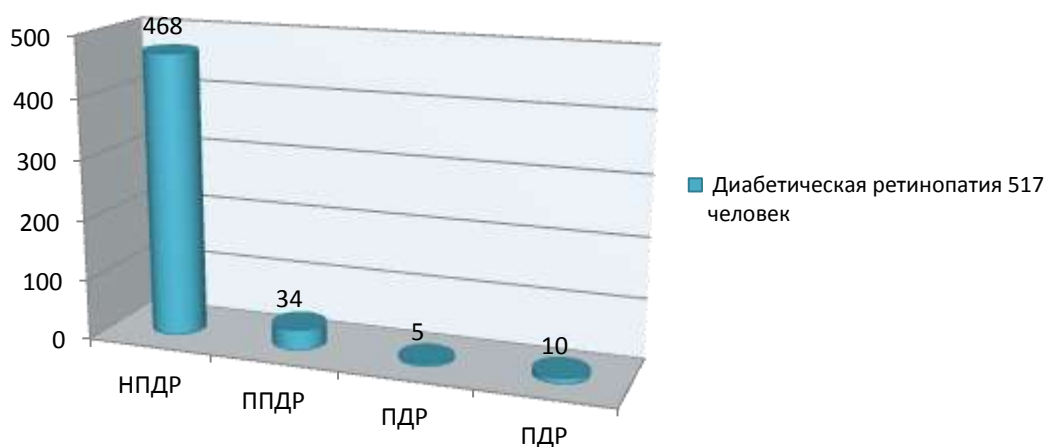


Рис. 2. Количество больных СД, которые состоят на учете с диабетической ретинопатией

На стадии препролиферативной ретинопатии дополнительно выявляются интравитреальные микрососудистые аномалии (шунты) и венозные аномалии.

Пропролиферативная ретинопатия характеризуется двумя основными компонентами – сосудистой (неоваскуляризация) и соединительнотканной пролиферацией (фиброз) [4].

Основной метод диагностики в условиях амбулаторного приема – прямая офтальмоскопия. Данный метод выявления диабетической ретинопатии в сочетании с биомикроскопией сетчатки при помощи асферических линз является оптимальным по своей простоте и доступности. У больных сахарным диабетом офтальмоскопию следует проводить только в условиях миопии.

Очень важно помнить, что даже выраженные диабетические изменения со стороны глазного дна могут наблюдаться при сохраняющейся высокой остроте зрения. Больной не подозревает о них, пока у него не происходит ухудшения зрения или пока его не осмотрит офтальмолог. Поэтому пациенты, страдающие сахарным диабетом, должны находиться под систематическим наблюдением врача-офтальмолога.

Однако недостаточное техническое оснащение рабочего места врача-офтальмолога, а также часто не регулируемый поток пациентов амбулаторного приема иногда не позволяют провести качественное диагностическое обследование пациентов.

Не всегда при обычной офтальмоскопии возможно выявить патологические изменения сетчатки, поэтому большинство пациентов направляется в ТФ МНТК «Микрохирургия глаза» на дальнейшее дообследование с использованием дополнительных методов диагностики – оптической когерентной томографии, которая позволяет оценить толщину и топографию различных слоев сетчатки, и флюоресцентной ангиографии.

Основные принципы лечения диабетической ретинопатии – максимально стабильная компенсация сахарного диабета и лечение пораженной сетчатки. По данным ВОЗ, не существует лекарственных препаратов, способных предупредить развитие и прогрессирование диабетической ретинопатии у человека, поэтому при разработке и внедрении скрининговых стратегий не следует рассматривать какие-либо другие лечебные воздействия, кроме лазеркоагуляции сетчатки. В то же время современные представления о патофизиологии диабетического поражения сетчатки позволяют выделить ряд направлений в терапии диабетической ретинопатии, основным из которых являются блокаторы ангиогенеза. Однако они обладают временным действием и малоэффективны при изолированном применении [5–7].

Исследование FIELD (Fenofibrate intervention and event lowering in diabetes, 2005) доказало достоверное влияние фенофибрат на снижение потребности в лечении методом лазерной коагуляции сетчатки у пациентов с диабетической ретинопатией. Нашим пациентам фенофибрат также активно назначается, отмечается положительное влияние на снижение прогрессирования микрососудистых осложнений, ассоциированных с сахарным диабетом типа 2.

Несмотря на видимые преимущества лазеркоагуляции сетчатки, наибольший эффект наблюдается при сочетании с интравитреальным введением ингибиторов сосудистого эндотелиального фактора роста, особенно при далекозашедших стадиях заболевания. [1; 8–9].

При выраженных, грубых изменениях структуры сетчатки единственным способом предотвращения слепоты может быть витрэктомия.

В 2015 г. в Тамбовский филиал направлено 68 человек с НПДР и ППДР, 5 – с далекозашедшей стадией ПДР. Остальные пациенты с ДР находились под постоянным наблюдением офтальмолога и получали консервативное лечение (фенофибрат перорально).

Количество пациентов, которым была проведена периферическая лазеркоагуляция сетчатки за 2015 г., составило 62 человека. В 76 % случаев отмечалась положительная динамика по остроте зрения, уменьшению площади и высоты макулярного отека. Шести пациентам было проведено комбинированное лечение – лазерная коагуляция сетчатки + интравитреальное введение Луцентиса. Динамика по улучшению зрительных функций также была выявлена. Пациенты с пролиферативной ретинопатией, которым проведено хирургическое лечение – витрэктомия в 2015 г., составили 5 человек. Все пациенты этой группы имели далекозашедшую стадию ПДР, поэтому эффект от лечения был слабо выраженный [10; 11–12].

В течение 2015 г. количество больных, получивших впервые инвалидность, составило 2 человека (в сравнении с 2014 г. – 9 человек) [10].

Основные принципы ведения пациентов с сахарным диабетом:

1) пациент должен быть осмотрен офтальмологом сразу же или как можно раньше после установления диагноза «сахарный диабет»;

2) если при первичном осмотре не выявлено диабетических изменений глаз, дальнейшие осмотры проводятся не реже одного раза в год; при наличии высокого уровня HbA1c – более 9 %, артериальной гипертензии более 160/95 мм рт. ст., индекса массы тела (ИМТ) более 30, желателен осмотр пациентов 1 раз в 6 месяцев;

3) при непролиферативной ретинопатии осмотры проводятся один раз в 6–8 месяцев; при наличии высокого уровня гликированного гемоглобина (HbA1c) – более 9 %, артериальной гипертензии более 160/95 мм рт. ст., ИМТ более 30, желателен осмотр пациентов 1 раз в 4 месяца;

4) при наличии пре- и пролиферативной ретинопатии пациента осматривают один раз в 3–4 месяца;

5) при неожиданном снижении остроты зрения или появлении у больных сахарным диабетом каких-либо жалоб со стороны органа зрения обследование должно быть проведено немедленно [3; 9–10].

ВЫВОДЫ

1. Амбулаторно-поликлиническое звено является ключевым в ранней диагностике сахарного диабета и диабетической ретинопатии.

2. Учитывая то, что сахарный диабет является мультифакториальным заболеванием, лучшие результаты в диагностике и лечении пациентов могут быть достигнуты при четком взаимодействии врачей различных специальностей.

3. Все пациенты с сахарным диабетом должны осматриваться врачом-офтальмологом не реже 1 раза в год, даже при отсутствии диабетической ретинопатии. При наличии пре- и пролиферативной стадии ДР, высокого уровня HbA1c, артериальной гипертензии, высокого ИМТ обследование должно проводиться чаще.

4. В арсенале современной офтальмологии имеется достаточно эффективный метод лечения диабетической ретинопатии и макулярного отека – лазерная коагуляция сетчатки и витрэктомия, позволяющие сохранить зрение пациенту. Однако эти методики эффективны при ранних стадиях пре- и пролиферативной ретинопатии, неосложненном течении и своевременном выполнении. Поэтому необходимо расширять сотрудничество амбулаторного звена с эндокринологическим диспансером для более раннего выявления диабетических осложнений органа зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zimmet P. The burden of type 2 diabetes: are we doing enough? // *Diabetes Metab.* 2003. № 29. P. 9-18.
2. Шадрин Ф.Е. Диабетическая ретинопатия. Диагностика и лечение // *Современная оптометрия.* 2008. № 4. С. 36-42.
3. Астахов Ю.С., Лисочкина А.Б., Шадрин Ф.Е. Современные направления медикаментозного лечения неproлиферативной диабетической ретинопатии // *Клиническая офтальмология.* 2003. Т. 4. № 3. С. 96-101.
4. Балашевич Л.И. и др. Современные методы диагностики и лечения диабетических макулярных отеков // *Сахарный диабет и глаз: материалы науч.-практ. конф. М., 2006.* С. 31-38.
5. Астахов Ю.С., Лисочкина А.Б., Шадрин Ф.Е. Лазеркоагуляция сетчатки при лечении диабетической ретинопатии // *Клиническая офтальмология.* 2000. Т. 1. № 1. С. 15-18.
6. Величко П.Б., Османов Э.М. Влияние продолжительности сахарного диабета на распространенность диабетической ретинопатии у

- больных сахарным диабетом 2 типа // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 3. С. 532-534.
7. Влазнева И.Н., Пилягина А.А. Гемодинамика глаза при диабетической ретинопатии по данным цветового доплеровского картирования // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 3. С. 535-538.
8. Гурко Т.С., Языкова Е.Ю. Лечение диабетической микроангиопатии сетчатки и диабетической ретинопатии с помощью переменного магнитного поля // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 1656-1658.
9. Величко П.Б., Фабрикантов О.Л., Османов Э.М. Особенности гидродинамических и морфометрических показателей глаза у больных диабетической ретинопатией после витрэктомии // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 1. С. 101-103.
10. Величко П.Б., Фабрикантов О.Л., Османов Э.М. Социально-гигиеническая характеристика больных пролиферативной диабетической ретинопатией // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 2. С. 741-743.
11. Величко П.Б., Османов Э.М. Актуальные методы лазерного лечения диабетической ретинопатии // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* 2014. Т. 19. Вып. 4. С. 1102-1104.
12. Гойдин А.П., Фабрикантов О.Л., Сухорукова А.В. Эффективность применения классической и паттерн-лазеркоагуляции при диабетической ретинопатии // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки.* Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 4. С. 1105-1107.

Поступила в редакцию 25 марта 2016 г.

UDC 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-573-577

DIABETIC RETINOPATHY. THE ROLE OF OUTPATIENT CARE IN EARLY DIAGNOSIS. TREATMENT. PROGNOSIS

© E.Y. Kutimova, V.G. Kutimova

For many years, diabetes mellitus (DM) remains a socially significant disease leading to disability and mortality due to the accompanying micro- and macrovascular complications. Diabetic retinopathy is one of the most dangerous complications of DM, leading to the progressive visual acuity reduction up to its lost. In patients with DM and its complication – retinopathy is often detected at the time of making the primary diagnosis at the level of outpatient care, which is primary and key in the early diagnosis and detection of eye diseases at an early stage. Timely detection and treatment of diabetic retinopathy can provide with the achieving a long period of normal functioning of the eye.

Key words: diabetes mellitus; diabetic retinopathy; non-proliferative, preproliferative form, proliferative forms; outpatient care; principles of managing the patients with diabetic retinopathy.

REFERENCES

1. Zimmet P. The burden of type 2 diabetes: are we doing enough? *Diabetes Metab.*, 2003, no. 29, pp. 9-18.
2. Shadrachev F.E. Diabeticheskaya retinopatiya. Diagnostika i lechenie. *Sovremennaya optometriya*, 2008, no. 4, pp. 36-42.
3. Astakhov Yu.S., Lisochkina A.B., Shadrachev F.E. Sovremennye napravleniya medikamentoznogo lecheniya neproliferativnoy diabeticheskoy retinopatii. *Klinicheskaya oftal'mologiya*, 2003, vol. 4, no. 3, pp. 96-101.
4. Balashevich L.I. i dr. Sovremennye metody diagnostiki i lecheniya diabeticheskikh makulyarnykh otekov. *Materialy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Sakharnyy diabet i glaz"*. Moscow, 2006, pp. 31-38.
5. Astakhov Yu.S., Lisochkina A.B., Shadrachev F.E. Lazerkoagulyatsiya setchatki pri lechenii diabeticheskoy retinopatii. *Klinicheskaya oftal'mologiya*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 15-18.
6. Velichko P.B., Osmanov E.M. Vliyaniye prodolzhitel'nosti sakhamogo diabeta na rasprostranennost' diabeticheskoy retinopatii u bol'nykh sakhamym diabetom 2 tipa. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 532-534.

7. Vlazneva I.N., Pilyagina A.A. Gemodinamika glaza pri diabeticheskoy retinopatii po dannym tsvetovogo doplerovskogo kartirovaniya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 535-538.
8. Gurko T.S., Yazykova E.Yu. Lechenie diabeticheskoy mikroangiopatii setchatki i diabeticheskoy retinopatii s pomoshch'yu peremennogo magnitnogo polya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 1656-1658.
9. Velichko P.B., Fabrikantov O.L., Osmanov E.M. Osobennosti gidrodinamicheskikh i morfometricheskikh pokazateley glaza u bol'nykh diabeticheskoy retinopatiey posle vitrektomii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 101-103.
10. Velichko P.B., Fabrikantov O.L., Osmanov E.M. Sotsial'no-gigienicheskaya kharakteristika bol'nykh proliferativnoy diabeticheskoy retinopatiey. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 741-743.
11. Velichko P.B., Osmanov E.M. Aktual'nye metody lazernogo lecheniya diabeticheskoy retinopatii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 1102-1104.
12. Goydin A.P., Fabrikantov O.L., Sukhorukova A.V. Effektivnost' primeneniya klassicheskoy i pattern-lazerokoagulyatsii pri diabeticheskoy retinopatii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014, vol. 19, no. 4, pp. 1105-1107.

Received 25 March 2016

Кутимова Елена Юрьевна, Городская клиническая больница имени Архиепископа Луки, г. Тамбов, Российская Федерация, врач-офтальмолог городской поликлиники № 1, e-mail: naukatmb@mail.ru

Kutimova Elena Yurevna, City Clinical Hospital named after Archbishop Luke, Tambov, Russian Federation, Ophthalmologist of City Polyclinics № 1, e-mail: naukatmb@mail.ru

Кутимова Вера Гавриловна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, врач-офтальмолог, e-mail: naukatmb@mail.ru

Kutimova Vera Gavrilovna, Academician S.N. Fyodorov FSBI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Ophthalmologist, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-578-581

ЦВЕТНОЕ ДОППЛЕРОВСКОЕ КАРТИРОВАНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИКЕ УВЕАЛЬНОЙ МЕЛАНОМЫ

© И.Н. Влазнева

Учитывая актуальность проблемы, а именно диагностики и дифференциальной диагностики увеальной меланомы (УМ) с применением метода цветного доплеровского картирования (ЦДК), можно в режиме реального времени судить о состоянии кровообращения в опухолях УМ и магистральных сосудах глаза, а также можно использовать данный метод, как один из дифференциально диагностических при диагностике УМ.

Ключевые слова: увеальная меланома; цветное доплеровское картирование; гемодинамика.

Увеальная меланома (УМ) относится к первичным злокачественным опухолям, занимающим лидирующую позицию среди всех внутриглазных новообразований. В последние годы отмечается очевидная тенденция роста больных, страдающих этим заболеванием. По данным ВОЗ, частота УМ в мире варьирует от 1 до 23 человек на 1 млн взрослого населения в год по обращаемости.

Диагностика УМ представляет собой сложную клиническую задачу, требующую дифференциации с рядом схожих по клиническим проявлениям внутриглазных заболеваний и в первую очередь с отграниченной гемангиомой хориоидеи, метастатическими опухолями, псевдотуморозными процессами. Диагностика УМ значительно усложняется при непрозрачных оптических средах глаза, когда оценка состояния внутриглазного очага базируется исключительно на данных инструментальных методов исследования.

Из всех инструментальных методов исследования внутриглазных новообразований ультразвуковые методы по-прежнему занимают ведущие позиции. Развитие и внедрение в клиническую практику высокочастотного дуплексного сканирования, сочетающего в себе элементы двумерной серошкальной эхографии и цветового доплеровского кодирования (ЦДК) со спектральным доплеровским анализом потоков, утвердили значимость означенной методики в диагностике внутриглазных новообразований. Высокочастотное дуплексное сканирование позволяет в режиме реального времени одновременно с эхографической визуализацией внутриглазного очага судить о состоянии ее кровообращения, что значительно увеличивает объем неинвазивно получаемой информации и позволяет существенно расширить представления об увеальной меланоме.

Цель исследования: диагностика и дифференциальная диагностика внутриглазных новообразований; оценка состояния кровообращения в магистральных сосудах глаза (центральной артерии (ЦАС)), задних цилиарных артериях (ЗЦА) при увеальной меланоме.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Обследовано 28 человек. Возраст пациентов составил от 51 до 74 лет, мужчин 10, женщин 18. Помимо общепринятого офтальмологического обследования у всех пациентов проводилось исследование кровотока на аппарате Logiq E (США) датчиком 10 МГц методом триплексного сканирования с ЦДК (рис. 1).

В режиме двумерной серошкальной эхографии (В-режиме) визуализируют внутриглазную опухоль, определяют ее размеры (проминенцию, диаметр основания), эхогенность опухолевой ткани, локализацию, рельеф поверхности и отношение ее к структурам глаза (дису зрительного нерва (ДЗН), макулярной зоне), наличие или отсутствие экскавации хориоидеи, наличие или отсутствие вторичной отслойки сетчатки.

При исследовании в спектральном доплеровском режиме оцениваются количественные параметры кровотока в новообразованных сосудах опухоли и сосудах глаза, таких как ЦАС, ЗЦА. С учетом факта, что хориоидея формируется из коротких ЗЦА, при УМ доплеровские характеристики кровотока оцениваются только в них.



Рис. 1. Аппарат Logiq E

Для всех артерий оцениваются следующие доплеровские характеристики потоков: пиковая систолическая скорость кровотока (V_{ps}), максимальная конечная диастолическая скорость кровотока (V_{ed}), индекс пульсации (Gosling, PI).

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

При обследовании пациентов с использованием ЦДК кровотоков в опухоли определяется примерно в 96 % случаев. Эхографически аваскулярными являются опухоли, имеющие небольшую проминенцию, – 1,5–2,0 мм. Минимальная проминенция УМ, при которой удается получить убедительные признаки внутритканевого потока, составляет 2,2 мм. Отсутствие собственной неоваскулярной сети у пациентов с малыми размерами опухолевого очага могут быть обусловлены либо отсутствием собственных сосудов в опухоли, либо малым их диаметром (менее 100–150 мкм) и (или) низкими скоростями кровотока в них (менее 1 см/с), определение которых лежит за пределами разрешения метода.

В режиме двумерной серошкальной эхографии (В-метод) можно выделить 3 основные формы УМ: «чечевицеобразная» (или округлая) (рис. 2) у 75 % больных, «грибовидная» (рис. 3) у 20 % больных и неправильная, с наличием двух или более «горбов» у 5 % больных.

Экскавация хориоидеи как один из эхографических признаков УМ выявляется примерно в 72 % случаев. Частота выявления данного признака зависит от размеров опухоли, класса используемой ультразвуковой аппаратуры, что позволяет визуально дифференцировать различные по акустической плотности ткани – опухолевую и хориоидею. Как правило, при опухолях больших размеров частота детекции данного признака значительно выше, чем при малых (84 % против 46 %), что обусловлено различной экоструктурой малых и больших УМ.

По степени васкуляризации (плотности распределения цветовых картограмм потоков в опухоли) УМ условно могут быть разделены на гиповаскулярные и гипervasкулярные. В большинстве случаев (60 %) УМ

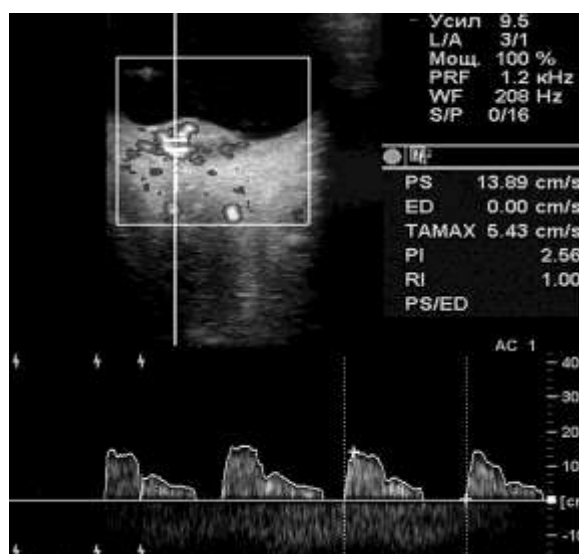


Рис. 2. Увеальная меланома «чечевицеобразная», или округлая

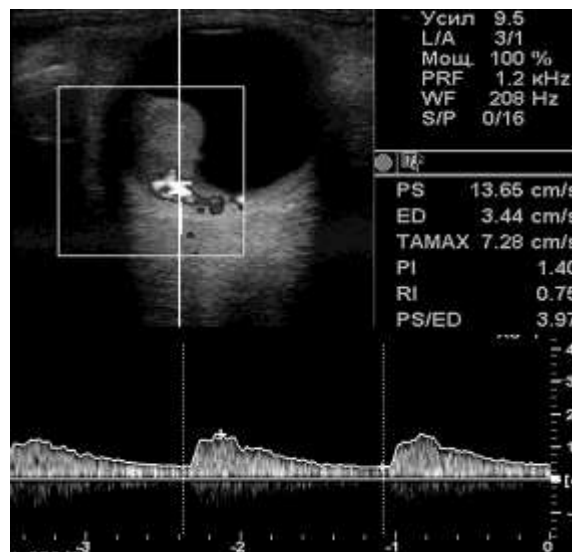


Рис. 3. Увеальная меланома «грибовидная»

представляются гипervasкулярным типом и отличаются от гиповаскулярных более высокими линейными скоростями кровотока и сниженными индексами периферического сопротивления. Высокие линейные скоростные показатели кровотока свидетельствуют о более активном опухолевом процессе, а низкие индексы сопротивления – о несостоятельности стенки опухолевых сосудов. То есть выделение УМ на гипо- и гипervasкулярные позволяет косвенно судить об активности опухолевого роста, а следовательно, дает возможность прогнозировать течение опухолевого процесса.

Кровоснабжение УМ осуществляется из системы ЗЦА либо одновременно из системы ЗЦА и ЦАС («двойное» кровоснабжение опухоли). В последнем случае формируются ретино-туморальные анастомозы – сообщения между собственными сосудами опухоли и прилежащими ретинальными сосудами. Офтальмоскопически ретино-туморальные анастомозы выявляются редко и при достижении уровня проминенции УМ 6,0 мм и более. При обследовании с использованием ЦДК частота детекции данного признака достаточно высока и составляет примерно 35–38 %. Кроме того, ретино-туморальные анастомозы в режиме ЦДК выявляются не только при больших УМ (более 5,1 мм), но и при малых (до 3-х мм) и средних размерах (3,1–5,0 мм) опухоли.

Особого внимания заслуживают УМ, имеющие юкстапипиллярную локализацию, кровоснабжение которых также осуществляется из двух систем кровообращения глаза – увеальной и ретинальной. Такие опухоли, будучи расположенными вблизи ДЗН, дополнительное питание получают непосредственно из ЦАС.

По мере роста УМ отмечается изменение доплеровских характеристик кровотока в собственных сосудах опухоли. С увеличением проминенции УМ имеет место возрастание систолической скорости кровотока в новообразованных сосудах опухоли. Однако отмеченная зависимость не постоянная и особо заметна при достижении уровня проминенции до 5,0 мм. В то же время с увеличением размеров опухоли отмечается очевидная тенденция к снижению уровня перифериче-

ского сопротивления (особенно заметному по динамике PI) в собственных сосудах опухоли, что может рассматриваться как один из критериев, свидетельствующих за увеличение несостоятельности сосудистой стенки неоваскулярной сети УМ по мере ее роста, появление более дефектных и неполноценных сосудистых структур. Таким образом, с увеличением размеров опухоли регистрируется обратимое повышение скоростей кровотока с неуклонным снижением уровня периферического сопротивления.

Из представленных 3-х эхографических форм УМ только «грибовидные» опухоли отличаются особенностями гемодинамики, что заключается в более низких индексах периферического сопротивления (RI, PI, S/D) в собственных сосудах опухоли в отличие от других форм – «чечевицеобразных» и опухолей, имеющих неправильную форму.

В режиме ЦДК удается выделить два типа эхографической васкуляризации «грибовидных» УМ.

Тип I. Основная масса (количество) сосудов расположена у основания опухоли и в зоне перешейка «гриба», в то время как «шапочка» эхографически аваскулярна или имеются единичные мелкие сосуды;

Тип II. Определяется равномерное распределение опухолевых сосудов (цветовых картограмм потоков) в толще опухоли.

Ряд доплеровских показателей кровотока в опухолевых сосудах значительно различаются в зависимости от клеточного типа УМ. Имеет место снижение скоростных показателей кровотока (Vps, Ved, TAMX) в случаях с веретенноклеточными УМ по сравнению с эпителиоидноклеточными и смешанноклеточными формами. В то же время доплеровские показатели кровотока в новообразованных сосудах эпителиоидноклеточных и смешанноклеточных УМ не различаются.

ВЫВОДЫ

1. Анализ результатов обследования более 28 больных с УМ показал, что высокочастотное дуплексное сканирование с цветовым доплеровским кодированием и спектральным доплеровским анализом по-

токов является высокоэффективным методом обследования в комплексной диагностике означенных опухолей и позволяет неинвазивным путем в режиме реального времени одновременно с серошкальной визуализацией очага судить о состоянии кровообращения в опухолевой ткани и в магистральных сосудах глаза.

2. Наличие потока в исследуемой проминированной ткани с использованием ЦДК свидетельствует за опухолевый процесс очага, что следует рассматривать как один из важных дифференциально-диагностических критериев УМ и псевдотуморозных поражений глаза (киста, субретинальное кровоизлияние, псевдотуморозная форма центральной хориоретинальной дистрофии и др.).

3. Оценка состояния гемодинамики УМ позволяет косвенно судить о течении опухолевого процесса, следовательно, может рассматриваться как один из прогностических критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guthoff R.F., Berger R.W., Helmke H., Winchler B. Doppler sonographic findings in intraocular tumors // Fortschr. Ophthalmol. 1989. V. 86. № 3. P. 239-241.
2. Guthoff R.F., Berger R.W., Winder P. et al. Doppler ultrasonography of malignant melanomas of the uvea // Arch. Ophthalmol. 1991. V. 109. P. 537-541.
3. Guthoff R.F., Winder P., Helmke K., Berger R. Diagnosis and treatment control of choroidal uveal melanomas – the role of B-scan and Doppler-technique // Acta ophthalmol. Suppl. 204. 1992. V. 70. P. 59-61.
4. Lieb W.E., Shields J.A., Cohem S.M. et al. Color Doppler imaging in the management of intraocular tumors // Ophthalmology. 1990. V. 97. № 1. P. 1660-1664.
5. Lieb W.E. Color Doppler imaging of the eye and orbit // Radiol. Clin. North. Am. 1998. V. 36. № 6. P. 1059-1071.
6. Regan S., Egan K.M., Hart L., Gradoudas E.S. Color Doppler imaging of untreated and irradiated choroidal melanoma // Eur. J. Ophthalmol. 2001. V. 11. № 4. P. 150-155.
7. Wolff-Kormann P.G., Kormann B.A., Riedel K.G. et al. Quantitative color Doppler imaging in untreated and irradiated choroidal melanoma // Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. 1992. V. 33. № 6. P. 1928-1933.
8. Wolff-Kormann P.G., Kormann B.A., Hasenfrats G.C., Spengel F.A. Duplex and color Doppler ultrasound in the differential diagnosis of choroidal tumors // Acta ophthalmol. Scand. Suppl. 1992. V. 204. P. 66-70.

Поступила в редакцию 25 марта 2016 г.

UDC 617.7

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-578-581

COLORED DOPPLER MAPPING IN DIFFERENTIAL DIAGNOSIS OF UVEAL MELANOMA

© I.N. Vlazneva

Taking into consideration the topical problem namely the diagnosis and differential diagnosis of uveal melanoma (UM) using the method of coloured Doppler mapping (CDM) allowed judging about the blood flow status in the UM tumors and magistral ocular vessels in real time, as well as using this method as one of the differential diagnostic methods in UM diagnosis.

Key words: uveal melanoma; coloured Doppler mapping; hemodynamics.

REFERENCES

1. Guthoff R.F., Berger R.W., Helmke N., Winchler V. Doppler sonographic findings in intraocular tumors. *Fortschr. Ophthalmol.*, 1989, vol. 86, no. 3, pp. 239-241.
2. Guthoff R.F., Berger R.W., Winder P. et al. Doppler ultrasonography of malignant melanomas of the uvea. *Arch. Ophthalmol.*, 1991, vol. 109, pp. 537-541.
3. Guthoff R.F., Winder P., Helmke K., Berger R. Diagnosis and treatment control of choroidal uveal melanomas – the role of B-scan and Doppler-technique. *Acta ophthalmol.*, suppl. 204, 1992, vol. 70, pp. 59-61.
4. Lieb W.E., Shields J.A., Cohem S.M. et al. Color Doppler imaging in the management of intraocular tumors. *Ophthalmology*, 1990, vol. 97, no. 1, pp. 1660-1664.
5. Lieb W.E. Color Doppler imaging of the eye and orbit. *Radiol. Clin. North. Am.*, 1998, vol. 36, no. 6, pp. 1059-1071.
6. Regan S., Egan K.M., Hart L., Gradoudas E.S. Color Doppler imaging of untreated and irradiated choroidal melanoma. *Eur. J. Ophthalmol.*, 2001, vol. 11, no. 4, pp. 150-155.
7. Wolff-Kormann P.G., Kormann B.A., Riedel K.G. et al. Quantitative color Doppler imaging in untreated and irradiated choroidal melanoma. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 1992, vol. 33, no. 6, pp. 1928-1933.
8. Wolff-Kormann P.G., Kormann B.A., Hasenfrats G.C., Spengel F.A. Duplex and color Doppler ultrasound in the differential diagnosis of choroidal tumors. *Acta ophthalmol. Scand.*, suppl., 1992, vol. 204, pp. 66-70.

Received 25 March 2016

Влазнева Ирина Николаевна, Тамбовский филиал МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С.Н. Федорова, г. Тамбов, Российская Федерация, зав. диагностическо-реабилитационным центром, e-mail: naukatmb@mail.ru
 Vlazneva Irina Nikolaevna, Academician S.N. Fyodorov FSBI IRTC "Eye Microsurgery", Tambov branch, Tambov, Russian Federation, Head of Diagnostic-Rehabilitation Centre, e-mail: naukatmb@mail.ru

УДК 57.017.3

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-582-587

АНАЛИЗ ГЕТЕРОГЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ МОРФОЛОГО-АНАТОМИЧЕСКИХ И БИОХИМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРИ АТЕРОСКЛЕРОЗЕ У БОЛЬНЫХ ОСТРЫМ ИНФАРКТОМ МИОКАРДА И НЕСТАБИЛЬНОЙ СТЕНОКАРДИЕЙ В ТАМБОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© Ю.В. Зеленева, Н.Г. Манаенков

На основании исследования частоты встречаемости острого коронарного синдрома установлено, что мужчины более подвержены ишемической болезни сердца и острому нарушению мозгового кровообращения по сравнению с женщинами. Изучение биохимического анализа крови позволяет проследить обратную корреляцию между частотой курения пациента и уровнем липопротеинов высокой плотности, а также прямую корреляцию между частотой курения и показателями липопротеинов низкой плотности и индекса атерогенности.

Ключевые слова: сердечно-сосудистые заболевания; ишемическая болезнь; острый коронарный синдром; гипертоническая болезнь сердца.

ВВЕДЕНИЕ

Сердечно-сосудистые заболевания стоят на первом месте по смертности как всего населения, так и его трудоспособной части. Ишемическая болезнь сердца и церебрально-сосудистые болезни являются самыми распространенными заболеваниями сердечно-сосудистой системы. Они являлись причиной смерти в 57 % случаев за 2014 г. [1]. Уменьшение факторов риска и профилактика сердечно-сосудистых заболеваний является одной из главных задач современного здравоохранения.

Цель проведенных исследований: изучение факторов развития острого коронарного синдрома (ОКС) у жителей Тамбовской области на момент первичного или вторичного поступления в региональный сосудистый центр (РССЦ).

Исследования проводились на базе отделения рентгенохирургических методов диагностики и лечения (ОРХМДиЛ) отделения неотложной кардиологии, реанимации и интенсивной терапии для кардиологических больных государственного бюджетного учреждения здравоохранения «Тамбовская областная клиническая больница имени В.Д. Бабенко» (ГБУЗ «ТОКБ им. В.Д. Бабенко»).

Объектом исследования являлись больные, поступившие в ОРХМДиЛ ГБУЗ «ТОКБ им. В.Д. Бабенко» в период с 8 по 14 июня 2015 г. с диагнозом острый инфаркт миокарда и нестабильная стенокардия.

Атеросклероз – это варибельная комбинация изменений внутренней оболочки артерий, включающая накопление липидов, сложных углеводов, фиброзной ткани, компонентов крови, кальцификацию и сопутствующие изменения меди [2].

Основные события атерогенеза развиваются в протеогликановом слое интимы, где клеточный тип выражен звездчатыми клетками. Ассоциаты липопротеинов низкой плотности (ЛПНП) с гликооаминогликанами, протеогликанами, фибронектином, коллагеном и дру-

гими компонентами соединительнотканного матрикса сосудистой стенки, а также агреганты ЛПНП проникают в клетки путем фагоцитоза. Обход регулируемого рецепторного пути приводит к нерегулируемому отложению липидов и перенасыщению ими клетки. Перегруженные липидами клетки разобщаются с собой, и это приводит к росту синтетической и полиреферативной активности клеток. Секретируемый коллаген создает полную изоляцию клетки и запускает атерогенные процессы: липоидоза, пролиферации и фиброза [3].

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

На каждого пациента, включенного в выборку, заводилась карточка, куда вписывались данные из его истории болезни (общий и биохимический анализ крови, основное, сопутствующие и фоновые заболевания, антропометрические показатели), полученная с его слов общая информация о вредных привычках, профессиональной деятельности, возрасте. Во время поступления больной проходил замер гемодинамических показателей (пульс, давление, насыщение крови кислородом), проводилась коронарография с целью изучения поражения коронарного кровообращения.

Все гемодинамические данные и данные по поражению были получены с помощью ангиографического комплекса Siemens Artis Zee на базе РССЦ, под научным руководством Г.В. Манаенкова.

Больничная летальность (на 100 больных, %): $\text{число умерших больных} \times 100 / \text{число выживших больных (выписанные + умершие)}$. Этот показатель является одним из наиболее важных и часто используемых для оценки качества и эффективности лечения. Он вычисляется как в целом по стационару, так и отдельно по отделениям и нозологическим формам.

Оценка показателя больничной летальности представляет значительные трудности, т. к. на его величину влияет множество факторов, не зависящих непосредственно от качества лечения (случаи, запущенные на

догоспитальном этапе, необратимые процессы и пр.). Уровень этого показателя в большой степени зависит также от возраста, полового состава больных, тяжести заболевания, срока госпитализации, уровня стационарного лечения.

Эти сведения, необходимые для более детального анализа средней длительности лечения больного в стационаре, в годовом отчете не содержатся. Их можно получить из первичных медицинских документов: «Медицинской карты стационарного больного» и «Статистической карты выбывшего из стационара».

Изучено влияние антропометрических, общих и биохимических показателей крови, анамнеза жизни на развитие и появление ОКС.

В исследование были включены 73 пациента обоего пола с ишемической болезнью сердца (ИБС) в возрасте 20–85 лет, поступившие в РСЦ с 8 по 14 июня 2015 г. с диагнозом острый инфаркт миокарда и нестабильная стенокардия. Из исследования были исключены пациенты с хроническими заболеваниями в стадии декомпенсации, психическими расстройствами, наркотической или алкогольной зависимостью на момент включения. Критерием исключения также являлся отказ пациента от исследования.

Сбор анамнеза происходил по таким факторам риска, как вредное производство, курение, алкоголь, наследственность, сопутствующие и фоновые патологии, длительность заболевания, боли, жалобы. Весь опрос происходил по специальной анкете, данные в которую вносились со слов пациента и с его истории болезни.

Антропометрические показатели были замерены на момент поступления в лечебное заведение. Был вычислен индекс массы тела (ИМТ) по формуле:

$$\frac{\text{Вес (кг)}}{\text{Рост (м)}^2}.$$

Затем полученные результаты были сопоставлены с полученными данными по методике А. Кетеле.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из сведений, представленных на рис. 1, можно проследить статистику больничной летальности разных возрастных групп населения г. Тамбова за период 2012–2014 гг. по преобладающим классам болезней. У детей наиболее частая летальность случалась от следующих заболеваний: врожденные аномалии, болезни перинатального периода, болезни системы кровообращения, травмы и отравления, болезни крови и кроветворных органов, болезни нервной системы. У взрослых и подростков больничная летальность была наиболее распространена от следующих болезней: болезни системы кровообращения, инфекционные болезни, травмы и отравления, врожденные аномалии, болезни нервной системы.

Таким образом, у детей больничная летальность по причине болезней системы кровообращения находится на третьем месте, уступая смертности от врожденных аномалий и болезней перинатального периода; у взрослых и подростков больничная летальность наиболее распространена из-за болезней системы кровообращения.

Заболеваемость острым коронарным синдромом с подъемом сегмента ST (ОКС п. ST) достаточно велика и ежегодно возрастает. По данным регистра острого коронарного синдрома, в Тамбовской области за 8 месяцев 2011 г. зарегистрировано 719 больных с ОКС п. ST, летальность от названной патологии составила 20,9 %. В ГБУЗ «ТОКБ им. В.Д. Бабенко» с прикрепленной территории за этот же период госпитализировано 166 больных, из них умерло 26, летальность – 15,6 %.

В РФ смертность в 2006–2010 гг. при остром коронарном синдроме с подъемом сегмента ST составила 40 %.

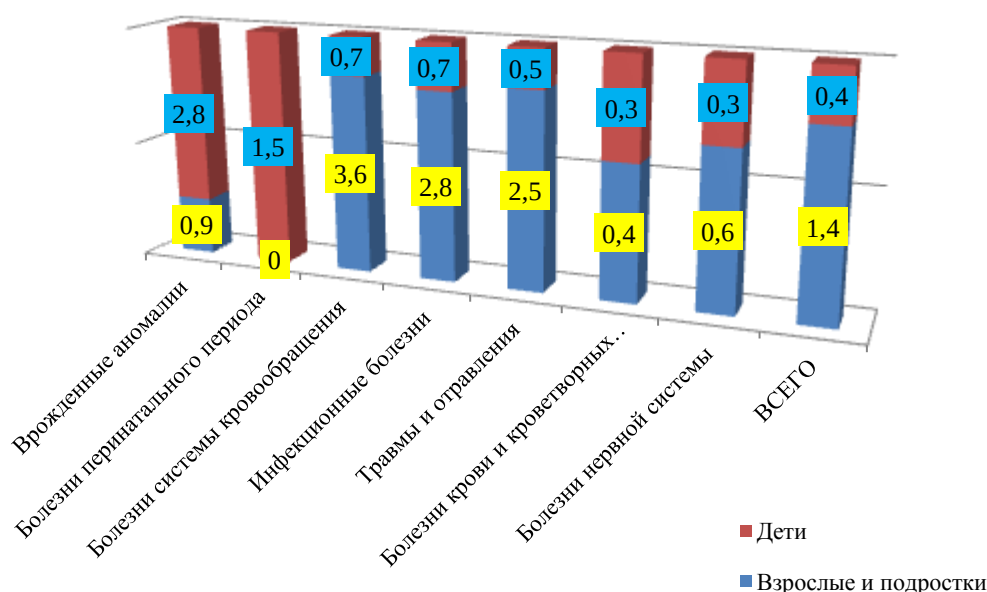


Рис. 1. Больничная летальность в Тамбовской области, % (по преобладающим классам болезней) (архивные данные городской больницы им. Архиепископа Луки)

При этом в первые 1,5–2 часа погибает 50 % больных, причем 80 % случаев – это смерть до прибытия медицинских работников.

Очевидно, что снизить смертность при ОКС п. ST возможно за счет трех основных составляющих:

- информационная работа с населением, позволяющая увеличить количество своевременно обратившихся больных;
- максимально быстрое прибытие бригады скорой помощи и лечение согласно действующим стандартам;
- выполнение международных рекомендаций по лечению ОКС п. ST в стационаре.

Как считают заведующий отделением интенсивной терапии для кардиологических больных А.Ф. Попов и врач-кардиолог круглосуточной помощи по больнице Т.А. Истомина: «Целенаправленная работа по реализации всех названных мероприятий позволяет снизить смертность от сердечно-сосудистых заболеваний на 10 %, что на фоне ежегодной смертности от болезней органов кровообращения, составляющей 11–12 тыс. человек в регионе, немало» [4].

Полученные результаты по анамнезу, приведенные в табл. 1, показывают, что мужчин с диагнозом ОКС на 162 % больше, чем женщин, т. е. мужчины более подвержены ИБС и острому нарушению мозгового кровообращения (ОНМК).

Средний возраст пациентов составил 62 года, с разбросом от 29 до 86. При этом у женщин средний возраст – 66 лет и разброс от 52 до 86, а у мужчин средний возраст – 59 лет с разбросом от 29 до 82. Иными словами, средние показатели и разброс по возрасту у мужчин намного меньше, чем у женщин, следовательно, осложнения атеросклероза проявляются у мужчин в более раннем возрасте.

Коронарография проводилась в отделении рентгеноэндоваскулярной хирургии и диагностики врачами данного профиля. После этого проводились анализы

коронарограмм правой и левой коронарной артерии и их ответвлений, каждой в трех проекциях, с целью установить масштаб поражения и количество затронутых сосудов, после чего вносились корректировки по протоколу данного исследования [5].

По объему поражений преобладают двух- и многососудистые поражения коронарного кровообращения, они составляют 47,95 %, однососудистые – 34,25 %, без поражений поступили 17,81 % больных.

Среди всей выборки 48 % курили, среди мужчин – 71 %, среди женщин – 11 %. Средние показатели по числу лет курения у мужчин больше на 24 года. При этом среднее число пачек выкуриваемых сигарет в неделю более 8. Все эти показатели – выше средних данных по Российской Федерации в этих возрастных группах, следовательно, мы можем сказать, что курение в таком объеме в несколько раз увеличивает шанс развития и последующее осложнение атеросклероза. Можно проследить зависимость уровня липопротеинов высокой плотности (ЛПВП) и индекса атерогенности (ИА) от курения и числа сигарет, которые выкуривает больной в течение недели: между этими показателями обнаруживается обратная корреляция с коэффициентом –0,7.

Число больных, злоупотребляющих алкоголем, среди мужчин – 73 %, женщин – 18 %. Эти показатели значительно выше среднего показателя по России, поэтому можно сказать, что алкоголь – тоже один из ключевых факторов развития атеросклероза (табл. 2).

Был проанализирован образ жизни и подвижность людей. Среди женщин неактивный образ жизни ведут 43 % процента, среди мужчин этот показатель значительно ниже – 31 %.

ИМТ – один из ключевых антропометрических показателей, который, в отличие от массы тела и роста, может дать объективную оценку. ИМТ в среднем составил 29–73, что значительно выше нормы, дефицит

Таблица 1

Общая характеристика больных с ОКС

Всего пациентов	Частота встречаемости мужского пола среди пациентов, %	Частота встречаемости женского пола среди пациентов, %	Средний возраст пациентов	ОИМ с п. ST, %	ОИМ без п. ST, %	НС, %	Время, в часах	Длительность заболевания (годы)	Пациенты без поражений, от общего количества, %	1 сосуд. ¹ , %	2 сосуд. ² , %	Многососуд. ³ , %	Кальцинирование, %	Ат. в маг. Арт. ⁴ , %	ОНМК и ТИА в ан. ⁵ , %
73	61,8	38,2	61,8±10,5	27,5	35,8	31,7	1544,2 ± ± 1568	61,5 ± ± 101	24,4	32,0	11,3	37,0	11,3	3,4	5,1
Мужской пол			59,2±11,0	37,8	26,7	28,9	1518,4 ± ± 1584	39,3±68	8,9	46,7	15,6	28,9	15,6	6,7	6,7
Женский пол			65,7±8,3	17,2	44,8	34,5	1675,7 ± ± 1617	94,1 ± ± 131	31,0	17,2	6,9	44,8	6,9	0	3,4

Примечание: ¹ – однососудистое поражение коронарного кровотока; ² – двухсосудистое поражение коронарного кровотока; ³ – многососудистое поражение коронарного кровотока; ⁴ – наличие атеросклероза в магистральных артериях, ⁵ – ОНМК и транзиторная ишемическая атака (ТИА) в анамнезе.

Таблица 2

Распределение пациентов в выборке по образу жизни (ОЖ)

Всего пациентов	Частота встречаемости мужского пола среди пациентов, %	Частота встречаемости женского пола среди пациентов, %	Частота встречаемости курящих пациентов, %	Курит пачек в неделю	Время курения (годы)	Злоупотребление алкоголем, %	Частота встречаемости сильно пьющих пациентов, %	Частота встречаемости пациентов, умеренно употребляющих алкоголь, %	Частота встречаемости пациентов, редко употребляющих алкоголь, %	Время злоупотребления алкоголем, годы	Неактивный ОЖ, %	Средне активный ОЖ, %	Активный ОЖ, %
73	61,8	38,2	47,9	8,2	32,7 ± ± 12,0	26,1	4,6	8,0	13,5	33,7 ± ± 11,6	38,6	37,6	23,8
Мужской пол			71,1	10,1	165,0 ± ± 76,6	48,5	8,8	15,5	24,2	31,9 ± ± 10,5	31,1	35,6	33,3
Женский пол			10,7	8,1	33,3 ± ± 25,2	3,6	0,4	0,5	2,7	45,0 ± ± 15,0	46,4	39,3	14,3

Таблица 3

Антропометрические данные (средние показатели)

Показатели	Рост, см	Вес, кг	ИМТ	Дефицит массы	Норма	Повышенная масса тела	Ожирение 1 ст., %	Ожирение 2 ст., %	Ожирение 3 ст., %
Мужчины	171,6	85,1	28,9	0	22,2	37,8	26,6	11,1	2,2
Женщины	159,1	78,2	31,0	0	10,7	50	25	3,6	10,7
ИТОГ	166,8	82,5	30,0	0	17,8	42,5	26,0	8,2	5,8

Таблица 4

Сопутствующие патологии, имеющиеся у обследованных пациентов

Пациенты	СД, %	ТИП I, %	ТИП II, %	Длительность, лет	Степень проявления СД, %		
					легкая	средняя	тяжелая
ИТОГО от общего числа обследованных	17,9	15,38	84,62	7,5 ± 4,6	38,5	53,8	7,7

Таблица 5

Распределение больных по показателям анализов крови

Показатели	Hb	WBC ¹	RBC ²	ОБ ³	ХС ⁴	ЛПВП	ЛПНП	ТГ ⁵	ИА	Креатинин	Клиренс креатинина
Мужчины	144	8,6	4,6	16,3	5,2	1,3	3,0	1,5	3,0	95,6	64,2
Женщины	133	7,0	4,7	12,8	5,3	1,3	2,9	1,3	2,8	91,3	54,9
Среднее	140	7,9	4,7	15,0	5,2	1,3	3,0	1,4	2,9	94,0	60,6
Ниже нормы, м.	4,5	9,1	10,2	0	0	7,9	29,0	0	0	0	0
Выше нормы, м.	11,4	0	0	10,5	21,8	7,9	6,4	15,4	50,0	0	6,6
Ниже нормы, ж.	14,3	18,5	7,4	0	0	16,6	9,1	0	0	0	0
Выше нормы, ж.	3,6	40,4	14,8	0	21,8	5,6	0	0	60,0	0	17,5
Среднее ниже	8,5	12,7	9,1	0	0	10,4	25,0	1,9	0	0	0
Среднее выше	8,4	15,5	6,1	6,3	21,8	6,3	4,5	11,5	52,2	0	13,6

Примечание: ¹ – количество лейкоцитов; ² – количество эритроцитов; ³ – общий билирубин; ⁴ – холестерин; ⁵ – триглицериды.

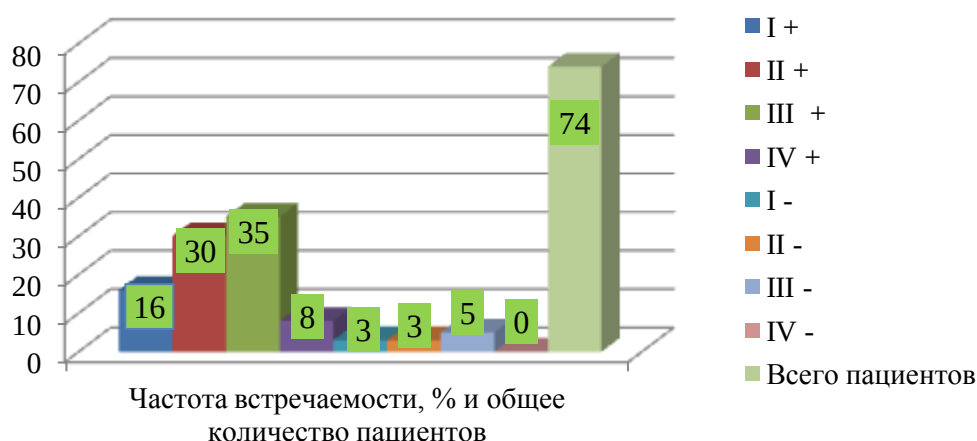


Рис. 2. Распределение пациентов по частоте встречаемости группы крови

массы не был обнаружен, а повышенная масса тела наблюдалась у половины женщин и 38 % мужчин; ожирение 1 степени было у 25 % женщин и 26 % мужчин, 2 и 3 степени – у 14 % женщин и у 13 % мужчин, что свидетельствует о роли лишнего веса в нарушении метаболических процессов и как следствие развития ИБС (табл. 3).

Гипертоническая болезнь сердца – один из показателей, который проявился в выборке. Систолическое давление от 102 до 198 мм рт. ст. встречалось у мужчин с дисперсией 591. У женщин – от 120 до 208 мм рт. ст. с дисперсией 571 (табл. 4).

На наличие сахарного диабета (СД) указали анализы 17,89 % пациентов, средняя длительность заболевания составила 82,17 мес., $m = 13,25$.

Сахарный диабет при исследовании его на прямую корреляцию с кальцификацией сосудов дал коэффициент корреляции 0,8; 17,8 % больных имели СД первого или второго типа; второго – в 4 раза больше частота встречаемости, число случаев СД в выборке говорит о его зависимости с развитием атеросклероза. Также сильные статистические значимые отклонения имелись в количестве лейкоцитов в крови в 43 % случаях, их количество было в не диапазоне нормы (в 85 % больше 9,4 и в 15 % меньше 3,6).

ИА – один из лучших показателей шанса развития атеросклероза превышения. Он имел в 42 % от всех случаев со средним показателем с учетом нормальных результатов: 2,9 у мужчин и 2,7 у женщин.

Тем самым отмечено, что случаи встречаемости у больного одного фактора очень редки. В выборке чаще всего происходит комбинация нескольких факторов, что делает атеросклероз одним из самых распространенных заболеваний по смертности и по количеству затронутого им населения.

Показатели общего анализа крови и биохимического анализа крови были взяты из истории больного на момент поступления и проанализированы с учетом норм этих показателей (табл. 5, рис. 2).

Особый интерес представляют такие показатели, как гемоглобин (Hb); среднее значение у женщин – 133, у мужчин – 144, выше нормы у 11,4 % мужчин и 3,6 % женщин, ниже нормы – у 4,5 % мужчин и 14,3 % женщин.

Также показатели лейкоцитов имеют сильные отклонения: 40,6 % женщин имеют сильное превышение количества лейкоцитов в крови, что послужило поводом для дальнейшего продолжения исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывают литературные данные, смертность от ОКС стоит на первом месте в нашей стране среди общей смертности; данное заболевание имеет множественные причины и факторы возникновения и развития среди населения. Тамбовская область не является исключением. Заболеваемость острым коронарным синдромом достаточно велика и ежегодно возрастает.

На основании проведенных исследований по изучению частоты встречаемости острого коронарного синдрома было установлено, что мужчины более подвержены ишемической болезни сердца и острому нарушению мозгового кровообращения по сравнению с женщинами.

По объему поражений коронарных сосудов преобладают двух- и многососудистые поражения, что составило 47,95 % от больных с проведенной коронарографией.

Среди испытуемых злоупотребляли курением 48 %, при этом среди мужчин – 71 %, среди женщин – 11 %.

Изучение биохимического анализа крови (ЛПВП, ЛПНП и ИА) позволяет проследить обратную корреляцию между частотой курения пациента и количеством употребленных пачек табачных изделий в неделю с уровнем липопротеинов высокой плотности, а также прямую корреляцию между частотой курения и количеством пачек с показателями липопротеинов низкой и очень низкой плотности и индекса атерогенности.

Повышенный индекс массы тела в выборке испытуемых является первичным фактором в развитии сахарного диабета и гипертонической болезни сердца: индекс массы тела в среднем составил 29,73, что превышает допустимое значение на 17 % (повышенная масса тела наблюдалась у 50 % женщин и 38 % мужчин, ожирение 1 степени – у 25 % женщин и 26 % мужчин, 2 и 3 степени – у 14 % женщин и 13 % мужчин).

Гипертоническая болезнь сердца – это патология, увеличивающая риск острого коронарного синдрома,

среди обследованных пациентов-мужчин систолическое давление изменялось от 102 до 198 мм рт. ст. с дисперсией 591 и от 120 до 208 мм рт. ст. у женщин с дисперсией 571.

У женщин в 40,6 % случаев были повышенные показатели лейкоцитов в крови, что говорит о зависимости этого показателя в отношении ОКС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асеева Д.С., Курбалиева Г.М. Заболеваемость населения г. Тамбова (по архивным данным городской больницы им. Архиепископа Луки) // Медико-биологические и психологические аспекты здо-

ровья человека: материалы Междунар. науч.-практ. конф. Тамбов, 2015. С. 24-30.

2. Клиническая ангиология / под ред. А.В. Покровского: в 2 т. М.: ОАО Изд-во «Медицина», 2004. Т. 1. 808 с.
3. Аронов Д.М., Лупанов В.П. Атеросклероз и коронарная болезнь сердца. М.: Триада-Х, 2009. 248 с.
4. Составляющие успеха при лечении острого коронарного синдрома с подъемом сегмента ST. URL: <http://tob.tmbreg.ru/info/terapia/196.html> (дата обращения: 22.02.2016).
5. Руководство по рентгеноэндоваскулярной хирургии сердца и сосудов / под ред. Л.А. Бокерии, Б.Г. Алеяна: в 3 т. М.: НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН, 2008. Т. 3.

Поступила в редакцию 31 марта 2016 г.

UDC 57.017.3

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-582-587

ANALYSIS OF HETEROGENEITY OF SOME MORPHOLOGICAL, ANATOMICAL AND BIOCHEMICAL CHARACTERS AT ATHEROSCLEROSIS IN PATIENTS WITH ACUTE MYOCARDIAL INFARCTION AND UNSTABLE STENOCARDIA IN THE TAMBOV PROVINCE

© Y.V. Zeleneva, N.G. Manaenkov

It was established on the basis of research of frequency of acute coronary syndrome that men are more subjected to ischemic heart-diseases and to acute disturbance of cerebral circulation in comparison with women. Study of the biochemical blood analysis permit to trace an inverse correlation between the frequency of the patient's smoking and the level of high density lipoproteins, as well as the direct correlation between the frequency of smoking and the indices of lipoproteins of low density and atherogenic index.

Key words: cardiovascular diseases; ischemic disease; acute coronary syndrome; hypertensive heart disease.

REFERENCES

1. Aseeva D.S., Kurbaliev G.M. Zabolevaemost' naseleniya g. Tambova (po arkhivnym dannym gorodskoy bol'nitsy im. Arkhiepiskopa Luki). *Mediko-biologicheskie i psikhologicheskie aspekty zdorov'ya cheloveka: materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, Tambov, 2015, pp. 24-30.
2. A.V. Pokrovskiy ed. *Klinicheskaya angiologiya*: v 2 t. Moscow, Meditsina Publ, 2004, vol. 1. 808 p.
3. Aronov D.M., Lupanov V.P. *Ateroskleroz i koronarnaya bolezni' serdtsa*. Moscow, Triada-X, 2009. 248 p.
4. *Sostavlyayushchie uspekha pri lechenii ostrogo koronarnogo sindroma s pod'emom segmenta ST*. Available at: <http://tob.tmbreg.ru/info/terapia/196.html> (accessed 22.02.2016).
5. L.A. Bokeriya, B.G. Alekhan eds. *Rukovodstvo po rentgenoendovaskulyarnoy khirurgii serdtsa i sosudov*: v 3 t. Moscow, Bakulev Scientific Center for Cardiovascular Surgery Publ., 2008, vol. 3.

Received 31 March 2016

Зеленева Юлия Витальевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры медицинской биологии с курсом инфекционных болезней, e-mail: zelenewa@mail.ru

Zeleneva Yuliya Vitalevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Associate Professor of Medical Biology with a Course of Infectious Diseases Department, e-mail: zelenewa@mail.ru

Манаенков Никита Геннадьевич, Лицей № 28 им. Н.А. Рябова, г. Тамбов, Российская Федерация, учащийся, e-mail: nikita.manaenckow@yandex.ru

Manaenkov Nikita Gennadevich, Lyceum № 28 named after N.A. Ryabov, Tambov, Russian Federation, Student, e-mail: nikita.manaenckow@yandex.ru

УДК 616.315-002; 616.28; 616.315-007.254
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-588-591

ВОСПАЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАБОЛЕВАНИЯ СРЕДНЕГО УХА ПРИ ВРОЖДЕННОМ НЕСРАЩЕНИИ НЁБА

© А.Х. Шаймонов, Г.М. Ходжамуратов, А.В. Гулин, И.И. Хукуматшоев

Представлены результаты исследования частоты возникновения и особенностей течения среднего отита у 168 больных с врожденной расщелиной нёба. Воспалительные заболевания выявлены у 72 (44,4 %) больных. Установлено, что устранение воспалительных заболеваний среднего уха зависит от возраста больного на момент проведения операции, восстановления мышц мягкого нёба и от наличия рецидивов в анамнезе больного.

Ключевые слова: врожденное несращение нёба; евстахииты; тугоухость.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Врожденное несращение нёба является одной из наиболее распространенных врожденных аномалий развития [1–2]. Согласно данным ВОЗ, распространенность данной патологии составляет 1:500–1000 новорожденных, при тенденции к увеличению [3–4]. Наличие дефекта при данной патологии приводит к развитию нарушений множества функций и систем, связанных с ротовой полостью, в т. ч. к нарушению вентиляционных и эвакуационных процессов среднего уха [5–7]. Несмотря на то, что экссудативный средний отит является самой распространенной отиатрической патологией в детском возрасте, та его разновидность, этиологическим фактором которой является врожденная расщелина нёба, остается наименее изученной [8–9]. Предполагается, что высокая распространенность хронических воспалительных заболеваний среднего уха у детей с ВРГН связана с патологическим прикреплением мышц, натягивающих нёбную занавеску (*m. tensor velopalatini*), к слуховой трубе, что нарушает её открытие [10–12].

Цель исследования. Изучение влияния различных факторов на тяжесть и частоту развития воспалительных заболеваний среднего уха у больных с врожденным несращением нёба.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Нами было проведено исследование частоты и тяжести воспалительного процесса среднего уха у 168 больных с врожденным несращением нёба, поступивших за хирургической помощью в отделение восстановительной хирургии Республиканского научного центра сердечно-сосудистой хирургии в период с 2009 по 2013 г. Возраст больных колебался в пределах от полугода до 32 лет. Средний возраст больных составил 7,4 года.

У 83 больных расщелина имела левостороннее расположение, у 47 – правостороннее, у 38 больных наблюдались двусторонние расщелины нёба. 29 больных имели расщелину мягкого нёба, 2 твердого, 137 – сочетанный вариант.

За первичной хирургической помощью обратилось 128 пациентов, 30 пациентов были оперированы повторно, 10 пациентов перенесли более 2-х операций.

Всем больным до проведения оперативного вмешательства выполнялась отоскопия, отомикроскопия, тональная пороговая аудиометрия и, по показаниям, темпанометрия и измерение акустического рефлекса.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Нами было проведено сравнение влияния различных факторов на выраженность нарушения функции слуха и воспалительного процесса среднего уха у больных с врожденным несращением нёба. В табл. 1 представлена частота нарушения слуха в исследованной нами популяции. Как видно из табл. 1, наибольшее количество случаев нарушения слуха определялось у больных с двусторонней расщелиной.

В дооперационном периоде среди 168 пациентов снижение слуховой функции было выявлено нами у 72 (44,4 %) больных. При этом тугоухость II ст. отмечалась у 24 (14,8 %) больных, I ст. – у 48 (29,6 %) (табл. 2). Воспалительные явления наблюдались у 65 (40,1 %), из них у 26 (16,04 %) они были выражены, у 39 (24,07 %) – легкой степени выраженности.

В ходе исследования сравнивалось влияние различных факторов на степень восстановления слуха в послеоперационном периоде, в т. ч. таких, как возраст на момент проведения оперативного вмешательства, вид операции, наличие предыдущих неудачных оперативных вмешательств и т. д.

Было установлено, что степень восстановления слуховой функции зависела от трех факторов:

- 1) возраста на момент проведения оперативного вмешательства;
- 2) числа предыдущих неудавшихся оперативных вмешательств;
- 3) применения восстановления анатомической и физиологической структуры мышц мягкого нёба.

Как видно из табл. 2, у группы больных, подвергшихся восстановлению мышц мягкого нёба отмечено значительное уменьшение частоты тугоухости и воспалительных процессов по сравнению с дооперационным

периодом и с группой больных, у которых мышцы мягкого неба после операции остались не восстановленными.

Из числа вышеуказанных 40 случаев рецидивов расщелин неба восстановительный период проходил более тяжело, который сопровождался многократными рецидивами тугоухости и выраженными воспалительными явлениями. К сожалению, среди больных с рецидивами лишь в 26 случаях (65 %) имелись местные условия для восстановления мышц мягкого неба. В остальных 14 случаях мышцы были либо сильно атрофированы, либо окружающая рубцовая ткань не позволила выделить их для восстановления. В табл. 3 представлена частота встречаемости тугоухости и воспалительных процессов уха в группе рецидивов.

Как видно из данных, приведенных в табл. 1–3, результаты лечения больных с восстановлением мышц мягкого неба значительно лучше таковых, у которых небные мышцы остались не восстановленными. Однако у больных с рецидивами дефектов мягкого неба

акустическая система восстанавливалась хуже по сравнению с первичными больными.

При сравнении отдаленных функциональных результатов в разных возрастных группах наиболее благоприятные показатели отмечались у детей, восстановление мышц которым производилось в возрасте 4–8 лет. В группе до 4 лет показатели восстановления слуха и устранения воспалительных заболеваний уха были сравнимы с группой 4–8 лет, однако у данной категории лиц чаще возникали другие неблагоприятные осложнения в дальнейшем, как деформации лицевого черепа, а также натяжения мягких тканей лица за счет натяжения их рубцом.

Полученные данные подтвердили необходимость четкого планирования оперативного вмешательства у больных с врожденной расщелиной неба, с учетом возраста больного, наличия предыдущих неудачных операций. Наши данные совпадают с мнениями авторов [5; 9] о том, что достижение функционального восстановления органов и систем при данной аномалии (в т. ч. и

Таблица 1

Состояние слуховой функции у больных с врожденным несращением неба в зависимости от нозологической формы

Нозологическая форма	Число больных со слуховой функцией		Всего больных
	нормальной	нарушенной	
Двусторонняя полная расщелина неба	16	22	38
Односторонняя полная расщелина неба	70	29	99
Врожденная изолированная расщелина неба	10	21	31
Итого	96	72	168

Таблица 2

Оценка слуха и степени нарушения ВЗУ у больных с ВРН до и после проведения оперативного вмешательства ($n = 162^*$)

Группа		Без восстановления мышц мягкого неба ($n = 91$)		Восстановление мышц мягкого неба ($n = 71$)	
		до	после	до	после
Тугоухость	Выражена	12 (13,2 %)	3 (3,3 %)	12 (16,9 %)	–
	Легкая степень	25 (27,5 %)	18 (19,8 %)	23 (32,4 %)	5 (7,04 %)
	Отсутствует	54 (59,3 %)	70 (76,9 %)	36 (50,7 %)	66 (93 %)
Воспаление	Выражено	12 (13,2 %)	2 (2,2 %)	14 (19,7 %)	–
	Легкая степень	19 (20,9 %)	8 (8,8 %)	20 (28,2 %)	3 (4,2 %)
	Отсутствует	70 (76,9 %)	81 (89,01 %)	37 (52,1 %)	68 (95,8 %)

Примечание: *у 4 больных наблюдалось расхождение швов в первые сутки после проведения оперативного вмешательства, ввиду чего у данных больных оценка слуха и воспалительных процессов не проводилась.

Таблица 3

Нарушения слуха и воспалительные явления среднего уха в группе рецидивов

Группа	Тугоухость				Воспаление			
	Мышцы не восстановлены		Мышцы восстановлены		Мышцы не восстановлены		Мышцы восстановлены	
	до	после	до	после	до	после	до	после
Один рецидив	10	8	15	–	15	4	25	2
Несколько рецидивов	9	7	1	–	9	4	1	–
Итого	19	15	16	–	24	8	26	2

слуховой), зависит от восстановления мышц мягкого неба.

ВЫВОДЫ

Таким образом, полученные нами данные свидетельствуют о том, что на развитие отитов и тугоухости у детей с несращением неба влияют возраст больного на момент проведения операции, наличие предыдущих неудачных хирургических вмешательств на небе, а также степень восстановления мышц мягкого неба. Вышеуказанные факторы должны быть учтены при планировании оперативного вмешательства, для достижения оптимальных функциональных результатов и нормального психического развития ребенка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артюшкевич А.С. и др. Ранняя уранопластика // Хирургия. Восточная Европа: тез. докл. Минск, 2013. С. 411-413.
2. Давлетшин Н.И. Реабилитация детей с врожденной расщелиной верхней губы и неба в Республике Башкортостан: автореф. дис. ... д-ра мед. наук. М., 2009. 25 с.
3. Ешиев А.М., Давыдова А.К. Обзор эффективности оперативного лечения больных с врожденными расщелинами верхней губы, твердого и мягкого неба, получивших лечение в челюстно-лицевом отделении Ошской межобластной объединенной клини-

ческой больницы за период с 2010 по 2012 г. // Фундаментальные исследования. 2013. № 5. С. 276-278.

4. Завьялов Ф.Н. и др. Особенности строения полости носа у детей с экссудативным средним отитом и врожденной несквозной расщелиной неба // Российская ринология. 2009. № 2. С. 107.
5. Сутиев Т.К., Мамедов А.А., Негаметзянов Н.Г. Врожденная расщелина верхней губы и неба. Алматы, 2013. 122 с.
6. Freeman A.K., Mercer N.S., Roberts L.M. Nasal asymmetry in unilateral cleft lip and palate // J. Plast. Reconstr. Aesthet. Surg. 2013. № 4 (66). P. 506-512.
7. Lam D.J. et al. Impact of Cleft Width in Clefts of Secondary Palate on the Risk of Velopharyngeal Insufficiency // Arch. Facial. Plast. Surg. 2012. P. 34.
8. Adenekan A.D. et al. Perioperative adverse airway events in cleft lip and palate repair // South Africa Journal Anaesthesia Analog. 2011. № 6 (17). P. 370-373.
9. Sheahan P. et al. Incidence and outcome of middle ear disease in cleft lip and/or cleft palate // International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology. 2003. № 7 (67). P. 785-793.
10. Moreira N.C. et al. Visualization of the Fetal Lip and Palate: Is Brain-Targeted MRI Reliable? // Cleft palate – craniofacial Journal. 2013. № 2. P. 133-144.
11. Ходжамуратов Г.М., Шаймонов А.Х., Тухтаев Ф.М. Восстановление нормальной анатомии мышц мягкого неба при его врожденной расщелине // Вестник Авиценны. 2015. № 3 (64). С. 28-31.
12. Шаймонов А.Х., Ходжамуратов Г.М., Кадыров М.Х. Применение фаренгиального лоскута для укрытия врожденных расщелин неба // Вестник Авиценны. 2015. № 4 (65). С. 28-32.

Поступила в редакцию 29 января 2016 г.

УДК 616.315-002; 616.28; 616.315-007.254
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-588-591

MIDDLE EAR INFLAMMATORY DISEASES IN CONGENITAL CLEFT PALATE NONUNION

© A.K. Shaymonov, G.M. Khodzhamuradov, A.V. Gulin, I.I. Khukumatshoev

The article presents the results of the study of the incidence and characteristics of the course of otitis media in 168 patients with congenital cleft palate. Inflammatory diseases were detected in 72 (44.4 %) patients. It was found that the removal of inflammatory diseases of the middle ear depends on the patient's age at the time of surgery, recovery of muscles of the soft palate and the availability of relapse history of the patient.

Key words: congenital nonunion palate; eustachitis, deafness.

REFERENCES

1. Artyushkevich A.S. et al. Rannaya uranoplastika. *Tezisy dokladov "Khirurgiya. Vostochnaya Evropa"*. Minsk, 2013. pp. 411-413.
2. Davletshin N.I. *Reabilitatsiya detey s vrozhdennoy rasshchelinoy verkhney guby i neba v Respublike Bashkortostan*. Avtoreferat dissertatsii ... doktora meditsinskikh nauk. Moscow, 2009. 25 p.
3. Eshiev A.M., Davydova A.K. Obzor effektivnosti operativnogo lecheniya bol'nykh s vrozhdennymi rasshchelinami verkhney guby, tverdogo i myagkogo neba, poluchivshikh lechenie v chelyustno-litsevom otdelenii Oshskoy mezhoblastnoy ob"edinennoy klinicheskoy bol'nitsy za period s 2010 po 2012 g. *Fundamental'nye issledovaniya*, 2013, no. 5, pp. 276-278.
4. Zav'yalov F.N. et al. Osobennosti stroeniya polosti nosa u detey s ekssudativnym srednim otitom i vrozhdennoy neskvoznoy rasshchelinoy neba. *Rossiyskaya rinologiya*, 2009, no. 2, p. 107.
5. Supiev T.K., Mamedov A.A., Negametzyanov N.G. *Vrozhdennaya rasshchelina verkhney guby i neba*. Almaty, 2013. 122 p.
6. Freeman A.K., Mercer N.S., Roberts L.M. Nasal asymmetry in unilateral cleft lip and palate. *J. Plast. Reconstr. Aesthet. Surg.*, 2013, no. 4 (66), pp. 506-512.
7. Lam D.J. et al. Impact of Cleft Width in Clefts of Secondary Palate on the Risk of Velopharyngeal Insufficiency. *Arch. Facial. Plast. Surg.*, 2012, p. 34.
8. Adenekan A.D. et al. Perioperative adverse airway events in cleft lip and palate repair. *South Africa Journal Anaesthesia Analog*, 2011, no. 6 (17), pp. 370-373.
9. Sheahan P. et al. Incidence and outcome of middle ear disease in cleft lip and/or cleft palate. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*, 2003, no. 7 (67), pp. 785-793.

10. Moreira N.C. et al. Visualization of the Fetal Lip and Palate: Is Brain-Targeted MRI Reliable? *Cleft palate – craniofacial Journal*, 2013, no. 2, pp. 133-144.
11. Khodzhamuradov G.M., Shaymonov A.Kh., Tukhtaev F.M. Vosstanovlenie normal'noy anatomii myshts myagkogo neba pri ego vrozhdennoy rasshcheline. *Vestnik Avitsenny*, 2015, no. 3 (64), pp. 28-31.
12. Shaymonov A.Kh., Khodzhamuradov G.M., Kadyrov M.Kh. Primenenie farengial'nogo loskuta dlya ukrytiya vrozhdenn-nykh rasshchelin neba. *Vestnik Avitsenny*, 2015, no. 4 (65), pp. 28-32.

Received 29 January 2016

Шаймонов Азиз Хусенович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: scorpio-as@list.ru

Shaymonov Aziz Khusenovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Research Worker of Reconstructive Surgery Department, e-mail: scorpio-as@list.ru

Ходжамурадов Гафур Мухаммадмухсинович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, доктор медицинских наук, старший научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: gafur@tojikiston.com

Khodzhamuradov Gafur Mukhammadmukhsinovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Doctor of Medicine, Senior Research Worker of Reconstructive Surgery Department, e-mail: gafur@tojikiston.com

Гулин Александр Владимирович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, зав. кафедрой биохимии и фармакологии, почетный работник науки и техники РФ, e-mail: gulin49@yandex.ru

Gulin Aleksander Vladimirovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Head of Biochemistry and Pharmacology Department, Honored Worker of Science and Technics of Russian Federation, e-mail: gulin49@yandex.ru

Хукуматшоев Ильхомуддин Исламович, Республиканский лечебный центр г. Душанбе, г. Душанбе, Республика Таджикистан, врач высшей категории отделения хирургии лор-органов № 2, e-mail: scorpio-as@list.ru

Khukumatshoev Ilkhomuddin Islamovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, High Level Certificate Physician of Ear Nose Throat Surgery Department no. 2, e-mail: scorpio-as@list.ru

УДК 617-089.844; 618.12; 618.312
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-592-594

ХИРУРГИЧЕСКОЕ ЛЕЧЕНИЕ БОЛЬНЫХ С ПОВТОРНОЙ ТРУБНОЙ БЕРЕМЕННОСТЬЮ В РАНЕЕ ОПЕРИРОВАННОЙ ТРУБЕ

© Г.Н. Шарипов, Г.М. Ходжамурадов, Дж.А. Ходжамуродова,
А.В. Гулин, М.С. Саидов

Были изучены результаты повторного микрохирургического восстановления проходимости единственной фаллопиевой трубы у 22 больных, ранее имевших трубную беременность с соответствующей локализацией. Было установлено, что у 13,6 % (3) больных, после повторного восстановления маточной трубы, наблюдались срочные роды, причем в двух случаях – более двух раз. Кроме того, у 6 больных в исследуемой группе наблюдалось наступление маточной беременности, с дальнейшим прерыванием беременности по различным причинам, что, однако, свидетельствует о восстановлении физиологической проходимости трубы.

Ключевые слова: трубная беременность; повторная трубная беременность; маточная беременность.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Внематочная беременность – наиболее часто встречающаяся острая гинекологическая патология [1]. Согласно статистическим данным, за последние тридцать лет частота внематочной беременности увеличилась с 0,5 до 1–2 % от общего числа беременностей, с наблюдением тенденции к дальнейшему увеличению [2]. До настоящего времени не решены многие проблемы ведения больных с внематочной беременностью, в т. ч. и проблема восстановления пораженной трубы, ранее оперированной по поводу эктопической беременности. Большинство авторов считают развитие повторного патологического процесса в ранее оперированной трубе прямым показанием к проведению тубэктомии [3–5]. Авторы считают, что данная труба, несмотря на восстановление анатомической проходимости, не состоятельна в дальнейшем и не способна выполнять транспортную функцию для плодного яйца, т. е. физиологическая проходимость трубы не достигается. Й. Возняк [5] и вовсе считает, что восстановление анатомической проходимости фаллопиевой трубы никогда не приводит к физиологической проходимости, являясь ярым сторонником тубэктомии. Однако при наличии единственной маточной трубы подобное решение означает безвозвратную утерю репродуктивной функции [6–7]. Все вышеперечисленное диктует необходимость изучения целесообразности либо нецелесообразности сохранения трубы, в которой трубная беременность развилась более одного раза [8].

Цель исследования: изучить паритет больных с трубной формой внематочной беременности в ранее оперированной маточной трубе в отдаленные сроки после повторной операции.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Нами были обследованы 22 больные, обратившиеся в отделение восстановительной хирургии Республиканского научного центра сердечно-сосудистой хирур-

гии в период с 2004 по 2014 г. за медицинской помощью после повторного развития трубной беременности, в ранее оперированной по поводу эктопической беременности в единственной маточной трубе.

Всем больным производилось ультразвуковое исследование органов малого таза, брюшной полости, определение β -ХГЧ в крови и врачебный осмотр.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

УЗ-картина у 20 больных включала наличие выпота в малом таза. В 17 случаях трубная беременность располагалась в ампулярной части, в 5 – в фимбриальной. Истмического расположения не наблюдалось. Всем больным с ампулярным расположением плодного яйца было произведено стандартное хирургическое лечение, с проведением проводника в виде нейлоновой нити 0 в полость пораженной трубы. При фимбриальном расположении патологического процесса, больным производилась неофимбриопластика, с промыванием трубы раствором и проверкой проходимости.

У всех 22 больных исследуемой группы интраоперационно наблюдался спаечный процесс органов малого таза и брюшной полости различной степени. Трём больным, ввиду сильных спаечных разрастаний и отсутствия дифференциации между различными частями трубы, ввиду разрастания соединительной ткани, пришлось выполнить тубэктомию.

Из 22 больных, вошедших в группу исследования, маточная беременность наблюдалась у 9 (31,8 %) больных, что свидетельствует о восстановлении функции фаллопиевой трубы. Из данного числа больных срочные роды наблюдались у 3 (13,6 %) женщин, в двух случаях – более одного раза. Повторная трубная беременность развилась у 6 (27,3 %) больных. Всем 6 больным была произведена тубэктомию.

Примечателен случай, приведен ниже, когда больной было рекомендовано удалить единственную маточную трубу ввиду проведенного ранее микрохирургического восстановления и развития повторной труб-

ной беременности. Однако, по настоянию больной, неоднократно была восстановлена единственная маточная труба. Подробности приведены ниже.

Больная Р.Р., в возрасте 22 лет, поступила в отделение восстановительной хирургии для проведения восстановительной операции, по поводу трубной формы внематочной беременности, по направлению гинеколога. При сборе анамнеза выяснилось, что больная в течение 4 лет находится в браке и живет активной половой жизнью. За два года до обращения больной в условиях гинекологического отделения районной больницы была выполнена тубэктомия левой маточной трубы по поводу трубной беременности. На момент появления жалоб детей не имела, аборт не выкидышей в анамнезе не указала. Жалобы появились за две недели до обращения на боли в нижней части живота, кровянистые мажущие выделения из влагалища. После обращения к гинекологу, проведения ультразвукового исследования был выставлен диагноз: трубная форма внематочной беременности левой единственной маточной трубы. Больной было предложено проведение экстренного удаления пораженной трубы, однако больная отказалась от радикальной операции. После получения направления гинеколога больная обратилась в отделение восстановительной хирургии Республиканского научного центра сердечно-сосудистой хирургии. Общее состояние больной на момент поступления относительно удовлетворительное. Артериальное давление – 100/60 мм рт. ст. Тест на беременность положительный.

В ходе оперативного вмешательства было обнаружено образование в ампулярной части правой маточной трубы, размером 8×4 см. Труба восстановлена, проводник проведен через просвет трубы. Больная выписана на третьи сутки после проведения операции, проводник удален на 25 сутки.

Однако спустя год больной снова был выставлен диагноз трубной беременности. Несмотря на рекомендации гинеколога по проведению тубэктомии, больная снова обратилась в отделение восстановительной хирургии для проведения восстановительной операции. Несмотря на показания к удалению, учитывая желание женщины сохранить репродуктивную функцию, несмотря на ознакомление с рисками и осложнениями, было принято решение провести микрохирургическое восстановление трубы. В ходе проведения операции были устранены спайки между трубой и яичником,

восстановлена проходимость единственной трубы. В послеоперационном периоде была проведена противовоспалительная терапия.

Спустя год у женщины была установлена маточная беременность, спустя девять месяцев – срочные роды. В последующие годы пациентка родила еще двух детей.

Приведенные выше данные свидетельствуют о том, что порой, при повторной трубной беременности, восстановительные операции не только возможны, но и более показаны для больных, не имеющих детей.

ВЫВОДЫ

Таким образом, несмотря на наступление повторной маточной беременности, после ранее проведенной микрохирургической реконструкции возможно успешное восстановление фертильной функции. Интраоперационные данные позволяют утверждать, что основной причиной развития повторной трубной беременности служит спаечный процесс, обнаруженный у всех 22 больных. Необходима разработка эффективной противовоспалительной терапии для оптимального восстановления репродуктивной функции и улучшения эффективности микрохирургической реконструкции маточной трубы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Охалкин М.Б., Хитров М.В. Внематочная беременность // АГ-инфо. 2008. № 3. С. 7-14.
2. Коротковских Л.И. Внематочная беременность как проблема современной гинекологии // Вестник Уральской академической науки. 2011. № 3. С. 107-111.
3. Рязанцев Е.Л., Рязанцев М.Е. Реконструктивно-пластическая хирургия в гинекологии: учеб. пособие для врачей акушеров-гинекологов и хирургов. Рязань, 2004. 93 с.
4. Кулаков В.И., Савельева Г.М., Манухина И.Б. Гинекология. Национальное руководство. М.: Геотар-Медиа, 2009. 179 с.
5. Возняк И. Влияние лапароскопической сальпингэктомии и сальпинготомии на последующую частоту возникновения эктопической беременности // Акушерство и гинекология. 2004. № 3. С. 61.
6. De Benetot M. et al. Risk factors for recurrence of ectopic pregnancy // Journal de gynecologie, obstetrique et biologie de la reproduction. 2012. V. 41. № 1. P. 55-61.
7. Varma R., Gupta J. Tubal ectopic pregnancy // Clinical evidence. 2009. № 4. P. 1406.
8. Ходжамурадов Г.М. и др. Внематочная беременность, локализованная в культе не до конца удаленной маточной трубы // Вестник Авиценны. 2015. № 1 (62). С. 50-54.

Поступила в редакцию 29 января 2016 г.

UDC 617-089.844; 618.12; 618.312
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-592-594

SURGICAL TREATMENT OF PATIENTS WITH REPEATED TUBAL PREGNANCY IN A PREVIOUSLY OPERATED TUBE

© G.N. Sharipov, G.M. Khodzhamuradov, D.A. Khodzhamurodova,
A.V. Gulin, M.S. Saidov

Results of repeated microsurgical restoration of patency only fallopian tube in 22 patients who had had tubal pregnancy with the appropriate localization are studied. It was found that 13.6 % (3) patients after repeated

restoration of the fallopian tube, term delivery were observed, with two cases – two more times. In addition, 6 patients in the study group were observed onset of uterine pregnancy, abortion with further for various reasons, which, however, shows the restoration of physiological cross tube.

Key words: tubal pregnancy; repeated tubal pregnancy; uterine pregnancy.

REFERENCES

1. Okhapkin M.B., Khitrov M.V. Vnematochnaya beremennost'. *AG-info*, 2008, no. 3, pp. 7-14.
2. Korotovskikh L.I. Vnematochnaya beremennost' kak problema sovremennoy ginekologii. *Vestnik Ural'skoy akademicheskoy nauki*, 2011, no. 3, pp. 107-111.
3. Ryazantsev E.L., Ryazantsev M.E. *Rekonstruktivno-plasticheskaya khirurgiya v ginekologii*. Ryazan, 2004. 93 p.
4. Kulakov V.I., Savel'eva G.M., Manukhina I.B. *Ginekologiya. Natsional'noe rukovodstvo*. Moscow, Geotar-Media Publ., 2009. 179 p.
5. Voznyak Y. Vliyaniye laparoskopicheskoy sal'pingektomii i sal'pingotomii na posleduyushchuyu chastotu vozniknoveniya ektopicheskoy beremennosti. *Akusherstvo i ginekologiya*, 2004, no. 3, p. 61.
6. De Bennetot M. et al. Risk factors for recurrence of ectopic pregnancy. *Journal de gynecologie, obstetrique et biologie de la reproduction*, 2012, vol. 41, no. 1, pp. 55-61.
7. Varma R., Gupta J. Tubal ectopic pregnancy. *Clinical evidence*, 2009, no. 4, p. 1406.
8. Khodzhamuradov G.M. et al. Vnematochnaya beremennost', lokalizovannaya v kul'te ne do kontsa udalennoy matochnoy trubki. *Vestnik Avitsenny*, 2015, no. 1 (62), pp. 50-54.

Received 29 January 2016

Шарилов Гайратшох Нусратуллоевич, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: gairat1604@mail.ru
Sharipov Gayratshokh Nusratulloevich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Research Worker of Reconstructive Surgery Department, e-mail: gairat1604@mail.ru

Ходжамуратов Гафур Мухаммадмухсинович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, доктор медицинских наук, старший научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: gafur@tojikiston.com

Khodzhamuradov Gafur Mukhammadmukhsinovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Doctor of Medicine, Senior Research Worker of Reconstructive Surgery Department, e-mail: gafur@tojikiston.com

Ходжамуродова Джамила Амоновна, Таджикский научно-исследовательский институт акушерства, гинекологии и перинатологии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, доктор медицинских наук, зав. отделением гинекологической эндокринологии, e-mail: innjamilya@hotmail.com

Khodzhamurodova Dzhamila Amonovna, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Doctor of Medicine, Head of Gynaecological Endocrinology Department, e-mail: innjamilya@hotmail.com

Гулин Александр Владимирович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, зав. кафедрой биохимии и фармакологии, почетный работник науки и техники РФ, e-mail: gulin49@yandex.ru

Gulin Aleksander Vladimirovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Head of Biochemistry and Pharmacology Department, Honored Worker of Science and Technics of Russian Federation, e-mail: gulin49@yandex.ru

Саидов Махмадулло Сайфуллоевич, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: mahmad_jon1974@mail.ru

Saidov Makhmadullo Sayfulloevich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, The Republic of Tajikistan, Research Worker of Reconstructive Surgery Department, e-mail: mahmad_jon1974@mail.ru

УДК 616-089.843; 616.155.112; 611.69; 612.843.51
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-595-597

ЭФФЕКТИВНОСТЬ АУГМЕНТАЦИОННОЙ МАММОПЛАСТИКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОРМЫ И ОБЪЕМА ИМПЛАНТАТА

© М.С. Саидов, Дж.А. Ходжамуродова, Г.М. Ходжамуродов,
М.М. Исмоилов, А.В. Гулин, А.Х. Шаймонов

Проведено исследование влияния формы и вида поверхности силиконовых имплантатов на развитие послеоперационных осложнений и отдаленного эстетического эффекта. Выявлено, что в группе пациенток, у которых были использованы каплевидные имплантаты с шероховатой поверхностью, достигнуты оптимальные ближайшие и отдаленные эстетические результаты. В группе больных, которым были использованы круглые имплантаты с гладкой поверхностью, отмечены такие недостатки, как более длительный срок сохранения дренажной трубки, размер послеоперационного рубца и технические сложности во время операции.

Ключевые слова: аугментационная маммопластика; округлые имплантаты; шероховатая поверхность; каплевидные имплантаты.

АКТУАЛЬНОСТЬ

Число пластических операций на молочных железах увеличивается по всему миру с каждым годом [1]. Согласно данным авторов, занимающихся проблемами аугментационной маммопластики, в настоящее время эти операции занимают второе место по частоте в нозологической структуре эстетической хирургии после липосакции [2–3]. И.Ю. Слюсарев (2014) приводит данные о том, что количество эстетических хирургических вмешательств на молочной железе в настоящее время превосходит таковые, проводимые с лечебной целью [4]. Кроме того, автор приводит данные о том, что наряду с увеличением количества проводимых оперативных вмешательств растет и число больных, неудовлетворенных результатами операции. В последнее время появляются статьи, в которых описывается влияние формы и вида поверхности имплантата (шероховатый, гладкий) в развитии контрактуры молочной железы [5–6]. Однако большинство авторов с иронией относятся к данным работам [5; 7–8]. В то же время высокая частота осложнений после проведения данного вида эстетических операций заставляет учитывать все факторы, которые могут в той или иной мере влиять на достижение положительных послеоперационных результатов [9–10].

Целью нашего исследования стало изучение влияния силиконовых имплантатов различной формы и поверхности на послеоперационные эстетические результаты при аугментационной маммопластике.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Был изучен опыт проведения аугментационной маммопластики среди 84 больных, обратившихся за хирургической помощью в отделение восстановительной хирургии Республиканского научного центра сердечно-сосудистой хирургии (РНЦССХ) за период с 2005 по 2015 гг. У 82 из них наблюдалась врожденная

двусторонняя гипотрофия молочных желез. В одном случае имел место синдром Поланда (односторонняя гипоплазия молочной железы и грудной мышцы). Одна больная обратилась после ранее неудачно проведенной аугментационной маммопластики с целью замены имплантата. Возраст пациенток варьировал от 18 до 40 лет. Пациенты были разделены на две группы, в зависимости от формы применявшихся у них имплантатов: имплантаты округлой ($n = 6$) и каплевидной (овальной) форм ($n = 78$). Кроме того, нами учитывалось наличие либо отсутствие шероховатости на поверхности имплантатов как фактор развития осложнений.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Имплантаты округлой формы с гладкой поверхностью были использованы нами в шести случаях, в основном на начальных этапах нашего исследования. В остальных 78 случаях нами использовались каплевидные имплантаты с шероховатой поверхностью.

Во время проведения операций для внедрения имплантатов округлой формы требовались более длинные разрезы. Их гладкая поверхность не позволяла достаточно умело манипулировать и представляла технические трудности для их правильного расположения в соответствующем ложе молочной железы.

Напротив, применение имплантатов с шероховатой поверхностью уже на интраоперационном этапе показало себя более удобным, чем аналоги с гладкой поверхностью. Для внедрения имплантатов требовались небольшие разрезы, через которые достаточно удобно провести шероховатые имплантаты. По мере накопления опыта минимальный разрез, создание ложа, внедрение имплантатов требовали значительно меньшего времени, чем при применении имплантатов округлой формы.

Исследование проводилось в ближайшие сроки после операции, а также в отдаленные сроки – через год и более – после оперативного вмешательства.

В группе округлых имплантатов период заживления и выделения жидкости из дренажных трубок был значительно длительнее, в сравнении с группой каплевидных шероховатых имплантатов (4,5 и 2,4 суток соответственно). В одном случае у пациентки после внедрения округлой формы имплантата по поводу послеоперационной гематомы потребовалось экстренное вмешательство. В другом случае среди этой же группы больных через 4 года потребовалась замена имплантата на каплевидную форму в связи с нежелательным эстетическим эффектом.

Эстетические результаты после применения имплантатов каплевидной формы значительно отличались и придавали груди более естественную форму. Больные этой группы были во всех случаях удовлетворены эстетическим эффектом, который был предсказуемым. Ни в одном случае среди этих больных не было повторных операций.

Результаты нашего исследования согласуются с мнением некоторых авторов [5–6] и подтверждают мнение о том, что даже такие факторы, как вид поверхности имплантата и его форма, имеют значение перед проведением аугментационной маммопластики.

ВЫВОДЫ

Таким образом, результаты нашего исследования показывают, что применение каплевидных имплантатов более целесообразно как с точки зрения предотвращения развития послеоперационных осложнений, так и с точки зрения получения эстетического эффекта. Шероховатые имплантаты более удобны в использовании, имеют большую степень приживляемости и требуют разрезы меньшего размера относительно своих

аналогов с гладкой поверхностью. Таким образом, форма и характер поверхности имплантата непосредственно способны влиять как на ближайшие, так и отдаленные результаты при аугментационной маммопластике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей В.В. Капсулярная контрактура после увеличивающей маммопластики силиконовыми имплантатами // Вопросы реконструктивной и пластической хирургии. 2013. № 4 (47). С. 58–62.
2. Капсулярная контрактура молочных желез / Г.Э. Карапетян [и др.] // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 5. С. 29–35.
3. Обыденков С.И. Аугментационная маммопластика // Вестник современной клинической медицины. 2010. № 3. С. 63–68.
4. Слюсарев И.Ю. Значение особенностей морфологического строения молочных желез для эстетической маммопластики // Эстетическая и практическая хирургия. 2014. № 4. С. 109–111.
5. Canady J., Schwiers M., Wixtrom R.N. Shaped Versus Round Silicone Breast Implants: Are There Real Differences in Patient Outcomes? // Plastic & Reconstructive Surgery. 2015. V. 136. Issue 4S. P. 118.
6. Janowsky E.C., Lawrence L.K., Barbara S.H. Meta-Analyses of the Relation between Silicone Breast Implants and the Risk of Connective-Tissue Diseases // N. Engl. J. Med. 2000. № 342. P. 781–790.
7. Long-Term Clinical Performance of MemoryShape™ Silicone Breast Implants in Breast Augmentation: Prospective Data through 9 Years / D.A. Caplin [et al.] // Plastic & Reconstructive Surgery. 2014. № 134. P. 92–93.
8. Lee H.K., Jin U.S., Lee Y.H. Subpectoral and precapsular implant repositioning technique: correction of capsular contracture and implant malposition // Aesthetic Plast. Surg. 2011. V. 35. № 6. P. 1126–1132.
9. Курбанов У.А., Давлатов А.А., Джаноилова С.М. Увеличивающая маммопластика // Вестник Авиценны. 2012. № 4. С. 14–22.
10. Bastos E.M., SabinoNeto M., Garcia E.B. Effect of zafirlukast on capsular contracture around silicone implants in rats // Acta Cir. Bras. 2012. V. 27. № 1. P. 1–6.

Поступила в редакцию 29 января 2016 г.

UDC 616-089.843; 616.155.112; 611.69; 612.843.51
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-595-597

EFFICIENCY OF AUGMENTATION MAMMAPLASTY DEPENDING ON THE SHAPE AND VOLUME OF IMPLANT

© M.S. Saidov, D.A. Khodzhamurodova, G.M. Khodzhamurodov,
M.M. Ismoilov, A.V. Gulin, A.Kh. Shaymonov

The influence of the shape and form of the surface of silicone implants on the development of postoperative complications and long-term aesthetic effect are assessed. It was found out that the best esthetic results were achieved in the group of patients who teardrop-shaped implants with a rough surface. In the group of patients who received round implants with a smooth surface some complications were registered as some technical difficulties during performing operation, longer preservation of drainage tubes, long postoperative scars.

Key words: augmentation mammoplasty; round implants; rough surface; teardrop-shaped implants.

REFERENCES

1. Kochubey V.V. Kapsulyarnaya kontraktura posle uvelichivayushchey mammoplastiki silikonovymi implantatami. *Voprosy rekonstruktivnoy i plasticheskoy khirurgii*, 2013, no. 4 (47), pp. 58–62.
2. Karapetyan G.E. et al. Kapsulyarnaya kontraktura molochnykh zhelez. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2015, no. 5, pp. 29–35.
3. Obydenov S.I. Augmentatsionnaya mammoplastika. *Vestnik sovremennoy klinicheskoy meditsiny*, 2010, no. 3, pp. 63–68.

4. Slyusarev I.Yu. Znachenie osobennostey morfologicheskogo stroeniya molochnykh zhelez dlya esteticheskoy mammoplastiki. *Esteticheskaya i prakticheskaya khirurgiya*, 2014, no. 4, pp. 109-111.
5. Canady J., Schwiens M., Wixtrom R.N. Shaped Versus Round Silicone Breast Implants: Are There Real Differences in Patient Outcomes? *Plastic & Reconstructive Surgery*, 2015, vol. 136, issue 4S, p. 118.
6. Janowsky E.C., Lawrence L.K., Barbara S.H. Meta-Analyses of the Relation between Silicone Breast Implants and the Risk of Connective-Tissue Diseases. *N. Engl. J. Med.*, 2000, no. 342, pp. 781-790.
7. Caplin D.A. et al. Long-Term Clinical Performance of MemoryShape™ Silicone Breast Implants in Breast Augmentation: Prospective Data through 9 Years. *Plastic & Reconstructive Surgery*, 2014, no. 134, pp. 92-93.
8. Lee H.K., Jin U.S., Lee Y.H. Subpectoral and prepectoral implant repositioning technique: correction of capsular contracture and implant malposition. *Aesthetic Plast. Surg.*, 2011, vol. 35, no. 6, pp. 1126-1132.
9. Kurbanov U.A., Davlatov A.A., Dzhannobilova S.M. Uvelichivayushchaya mammoplastika. *Vestnik Avitsenny*, 2012, no. 4, pp. 14-22.
10. Bastos E.M., SabinoNeto M., Garcia E.B. Effect of zafirlukast on capsular contracture around silicone implants in rats. *Acta Cir. Bras.*, 2012, vol. 27, no. 1, pp. 1-6.

Received 29 January 2016

Саидов Махмадулло Сайфуллоевич, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: mahmad_jon1974@mail.ru

Saidov Makhmadullo Sayfulloevich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, Republic of Tajikistan, Research Worker of Plastic Surgery Department, e-mail: mahmad_jon1974@mail.ru

Ходжамуродова Джамила Амоновна, Таджикский научно-исследовательский институт акушерства, гинекологии и перинатологии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, доктор медицинских наук, зав. отделением гинекологической эндокринологии, e-mail: innjamilya@hotmail.com

Khodzhamurodova Dzhamila Amonovna, Tajik Scientific Research Institute of Obstetrics, Gynecology and Perinatology, Dushanbe, Republic of Tajikistan, Doctor of Medicine, Head of Gynaecological Endocrinology Departemnt, e-mail: innjamilya@hotmail.com

Ходжамурадов Гафур Мухаммадмухсинович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, доктор медицинских наук, старший научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: gafur@tojikiston.com

Khodzhamuradov Gafur Mukhammadmukhsinovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, Republic of Tajikistan, Doctor of Medicine, Senior Research Worker of Plastic Surgery Department, e-mail: gafur@tojikiston.com

Исмоилов Мухторджон Маруфович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, зав. отделением восстановительной хирургии, e-mail: m.ismoilov@mail.ru

Ismoilov Mukhtordzhon Marufovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, Republic of Tajikistan, Head of Plastic Surgery Department, e-mail: m.ismoilov@mail.ru

Гулин Александр Владимирович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, зав. кафедрой биохимии и фармакологии, почетный работник науки и техники РФ, e-mail: gulin49@yandex.ru

Gulin Aleksander Vladimirovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Head of Biochemistry and Pharmacology Department, Honored Worker of Science and Technics of Russian Federation, e-mail: gulin49@yandex.ru

Шаймонов Азиз Хусенович, Республиканский научный центр сердечно-сосудистой хирургии, г. Душанбе, Республика Таджикистан, научный сотрудник отделения восстановительной хирургии, e-mail: scorpio-as@list.ru

Shaymonov Aziz Khusenovich, Republican Scientific Center for Cardiovascular Surgery, Dushanbe, Republic of Tajikistan, Research Worker of Plastic Surgery Department, e-mail: scorpio-as@list.ru

УДК 614.23

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-598-602

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В МЕДИЦИНСКОМ ВУЗЕ

© Г.А. Захаров, Б.А. Какеев, Е.Г. Филипченко

Рассмотрены пути оптимизации процесса преподавания и контроля теоретических дисциплин в медицинских вузах с помощью лекционного процесса, выполнения самостоятельных контрольных работ и тестирования.

Ключевые слова: медицинский вуз; теоретические дисциплины; оптимизация преподавания.

Оптимизация учебного процесса во многом базируется на интенсификации познавательной активности. Понятие познавательной активности многоаспектно и многогранно. Традиционным методом получения теоретических знаний остаются практические занятия, на которых заслушиваются презентации по теме в виде мультимедийных докладов, проводится опрос и тестирование с оценкой полученных результатов. Наряду с этим, в жизни современной высшей школы **лекцию** часто называют «горячей точкой». Ее цель – формирование ориентировочной основы для последующего усвоения студентами учебного материала.

Термин «лекция» пришел к нам из средних веков. В то время лекция была единственным способом получения знаний студентами. Чтение лекций – это не пересказ материалов учебной литературы, а умение преподавателя и студента совместно думать, искать, рассуждать. В настоящее время трудности лектора связаны с тем, что при подготовке к лекции ему необходимо использовать многие источники информации: учебники, монографии, телевидение, Интернет [1].

Однако все чаще звучат мнения, что чтение лекций студентам-медикам неэффективно и их надо отменить. Профессора Стэнфордской медицинской школы Ч. Пробер и его соавтор, профессор организационного поведения в Стэнфордской бизнес-школе Ч. Хэт, считают, что, несмотря на существенный прогресс в медицине, произошедший за последние 100 лет, сама методика преподавания студентам-медикам осталась на достаточно низком уровне. По их мнению, существующая система преподавания не способна подготовить грамотных, хорошо обученных специалистов. В своей работе «Лекционные залы без лекций» они предлагают новый подход к обучению, который должен помочь лучшим образом использовать отведенное для подготовки врачей время. «Вот чего мы хотим: выжать максимум пользы из имеющегося времени. Кому надо тратить время на лекции?» – говорят ученые. Они предлагают использовать методику, при которой содержание лекций будет «упаковано» в видеофайлы продолжительностью в 10–15 минут. Предполагается, что студенты будут просматривать их в свободное от учебы время столько, сколько потребуется, чтобы запомнить материал. Освободившиеся часы предполагается использовать для интерактивного обучения, с вы-

сокой вовлеченностью студентов в учебный процесс. «Преподаватели, наконец, смогут учить, а не просто произносить речи», – считают авторы идеи [2].

Тем не менее, опыт показывает, что отказ от лекций снижает уровень подготовки студентов, нарушает системность и равномерность работы в течение семестра. Авторы настоящей работы полагают, что лекция должна оставаться ведущей формой организации учебного процесса на теоретических кафедрах медицинского вуза, поскольку в учебном процессе складывается ряд ситуаций, когда лекционная форма обучения не может быть заменена никакой другой, при отсутствии сведений по новым проблемам медицины. Лекции должны являться основным источником информации, особенно в тех случаях, когда материал по конкретной теме не нашел еще отражения в существующих учебниках или некоторые его разделы устарели, или когда отдельные темы программы обучения особенно трудны для самостоятельного изучения и требуют методической переработки. Иногда по некоторым проблемам существуют противоречивые концепции, в которых студенту трудно разобраться. Остановимся на некоторых преимуществах лекций: 1) это творческое общение лектора с аудиторией; 2) сотворчество, эмоциональное взаимодействие; 3) лекция – весьма экономный способ получения в общем виде основ и направления получения знаний; 4) лекция активизирует мысленную деятельность, если хорошо понята и внимательно прослушана. Поэтому задача лектора – развивать активное внимание студентов, вызывать движение их мысли вслед за мыслью лектора [3]. Поэтому лекции должны быть наглядными, с демонстрацией схем, таблиц, с примерами применения теории в клинической практике.

Лекции по теоретическим дисциплинам дают систематизированные основы научных знаний, раскрывают состояние и перспективы развития науки, концентрируют внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируют их активную познавательную деятельность и способствуют формированию творческого мышления [4]. Они являются основным источником теоретической подготовки студентов на медицинских факультетах вузов, читаются на 1, 2 и 3 курсах. Эти лекции должны быть рассчитаны на массовую аудиторию, разработаны с учетом научной методологии современной клинической и профилактиче-

ской медицины, принципов медицинского образования, соблюдения научной объективности [5].

На современном этапе в лекции ведущим методом по-прежнему выступает устное изложение материала, часто сопровождаемое демонстрацией видео-, кинофильмов, слайдов, т. е. с помощью средств мультимедиа и других технических средств обучения (ТСО). Очевидно, методика подготовки и изложения таких лекций должна быть особой. Для этого созрела необходимость разработать методические рекомендации по подготовке и проведению лекций на современном уровне.

Однако какой бы ни была по рангу лекция (вводная, обзорная, тематическая, проблемная или комплексная), с использованием средств ТСО или без них, можно выделить основные этапы при ее подготовке:

1) уяснение цели и задач лекции, с использованием учебной программы и тематического плана по учебной дисциплине;

2) составление плана лекции;

3) подбор и изучение литературы, теоретического и фактического материала, соответствующего учебной программе, применительно к преподаваемой дисциплине и теме лекции;

4) выбор образовательных технологий и методик для чтения данной лекции;

5) разработка (оформление) текста лекции и наглядно-иллюстративных материалов (качественный видеоряд, фоновое звуковое сопровождение, компьютерная графика, 3D и пр.);

6) получение рецензии;

7) представление лекции и ее обсуждение на кафедральном заседании.

В лекции, рассчитанной на 2 учебных часа, излагается, как правило, одна тема, содержащая не более 2–4 учебных вопросов, общим объемом 10–15 страниц текста. В излагаемой теме по изучаемой дисциплине должны быть представлены материалы, которые должны быть в наличии в виде учебников или учебных пособий на кафедре или библиотеке вуза. По теме лекции необходимы ссылки на дополнительные источники, используемые в ней. Если в лекции используются видеоматериалы и другие ТСО, по тексту лекции указываются их номера и курсивом – основное содержание и методические указания по их применению. В конце лекции делаются выводы. Обращается внимание обучающихся на изучение основной и дополнительной литературы по теме лекции.

Затем лектор ориентирует студентов на тему следующей лекции, т. к. он вправе рассчитывать на подготовленную аудиторию. Сообразно с этим, слайды для мультимедийного сопровождения должны храниться в электронном варианте в учебной части кафедры, прилагаться в виде бумажных носителей как приложение к тексту лекций и быть доступными обучающимся для подготовки к семинарским или практическим занятиям.

Демонстрация информации через мультимедийный проектор в виде презентаций Power Point открывает лектору обширные перспективы. Это расширяет дидактические возможности лекции, способствует более эффективному усвоению теоретических основ изучаемой дисциплины, акценту на чувства и эмоции студентов, развитию приемов мышления (анализ, синтез, сравнение, обобщение). Наряду с этим лекция развивает умение обрабатывать информацию и воспроизво-

дить ее в сжатой форме, формирует информационную культуру и дает возможность в приобретении опыта информационных технологий в индивидуальной и коллективной познавательной деятельности. Отрицательными сторонами презентаций могут являться несколько параллельных потоков информации, слишком быстрый темп чтения и смены слайдов, неудачное композиционное построение лекций. Несмотря на жесткие рамки рабочих программ, применение мультимедиа и других ТСО не должно быть слабым и зачастую формальным «украшением» лекции. К презентациям должны предъявляться определенные требования:

– подготовка в программе «Microsoft Power Point» (в формате ppt.) либо «Демонстрация Power Point» (в формате pps.);

– видеоролики должны быть сохранены в формате AVI;

– использовать цвета фона и текста, сильно различающиеся по контрасту: белый фон – черный текст; синий фон – желтый текст;

– для основного текста использовать «рубленые» шрифты Arial или Tahoma не менее 30 пт, а для заголовков 35–40 пт; не применять *курсив* – это ухудшает восприятие текста. Такой совет подходит для аудиторий без амфитеатров с экранной диагональю 2–3 м;

– не перегружать слайды текстом, иллюстрациями (анимацию применять для выделения главных моментов (например, для демонстрации динамичных процессов); умеренно добавлять схемы, графики, фото и рисунки, таблицы и пр. Не использовать музыкальное сопровождение, если оно не несет смысловой нагрузки;

– слайдов не должно быть много, иначе темп лекции не позволит их законспектировать: минимум 30–40, максимум 50–60. Интересную информацию лучше расположить в конце лекции;

– слайды должны быть синхронизированы с текстом лекции [6].

Между тем существуют, как минимум, две проблемы:

1) со стороны лектора – неэффективная подача информации;

2) со стороны студента – неумение записать главное; вместе с тем студенты часто делают видео-, фото- и аудиозаписи текущей лекции, не вникая в смысл сказанного.

Для успешного чтения лекции должна быть подготовлена и технически оснащена учебная аудитория (наличие ТСО и их готовность к проведению занятий). В начале лекции, во введении, лектор должен убедить слушателей в важности темы для дальнейшего изучения предмета или использования в практической деятельности. Важно привлечь их внимание, используя педагогические приемы: новейшие образовательные технологии и методики обучения; интересную, яркую и выразительную подачу материала, заставляющую творчески воспринимать лекцию. Лектор должен уметь сочетать изложение сложного с интересными примерами; изменять темп речи, чередовать высоту интонаций; использовать убеждения, доказательства, вопросы, диалоги с аудиторией, игровые ситуации; использовать качественный и интересный иллюстративный материал.

Излагаться учебный материал должен свободно, убедительно, с минимальным обращением к тексту и слайдам (только лишь для воспроизведения цифр, таблиц, схем, фотографий, доказательств, выводов и пр.). Речь лектора должна быть ясной, четкой, логичной,

понятной. Темп изложения материала должен быть дифференцированным в зависимости от его сложности. Необходимо разумное сочетание быстрого и медленного изложения, иногда даже под запись отдельных фрагментов лекции. Ориентировочно темп чтения лекции не должен превышать: 120–130 слов в минуту при быстром изложении и 60–65 слов при медленном. Лектор должен следить за расходом времени согласно плану лекции.

Критериями продуктивности лекций являются: научность, информативность, доказательность и аргументированность содержания; наличие ярких убедительных примеров и фактов; четкая структура содержания и логика его раскрытия. Методическая грамотность лектора должна заключаться в: 1) актуализации цели и задачи лекции; 2) выделении главного и второстепенного; 3) подведении к выводам; 4) использовании обратной связи; 4) разъяснении; 5) записи новых терминов; 6) использовании средств наглядности [7]. Тексты лекций, написанные на весь лекционный курс, и их качество должны обсуждаться и утверждаться на учебно-методических совещаниях кафедры. Поэтому обязательным является взаимопосещение лекций лекторами и присутствие на них преподавательского состава. Качество прочитанных лекций должно обсуждаться на кафедральных заседаниях, а критерием их эффективности является уровень знаний студентов и на занятиях, и на экзаменах, а также наличие у них конспектов, которые преподаватель проверяет на практических занятиях и семинарах.

Если лекция будет удовлетворять перечисленным требованиям, то отпадет сомнение выбора – посещать ее или нет.

Итак, лекция является итогом кропотливого труда преподавателя, позволяет обобщить и закрепить тему, наметить перспективу дальнейшего изучения студентами профессиональных дисциплин.

Наряду с этим, самостоятельной работе студентов всегда уделялось пристальное внимание [8]. Самостоятельная работа студентов является обязательным и важным компонентом учебного процесса. Она, во-первых, способствует совершенствованию теоретической и практической подготовки и развитию творческих способностей; во-вторых, воспитывает качества, необходимые для организации самообразования, развитию способностей к анализу и критическому разбору. Разнообразие форм самостоятельной работы обеспечивает возможность индивидуального подхода к обучаемому.

Активное внедрение в учебный процесс самостоятельной работы требует от преподавателя большой подготовительной работы по разработке контрольных вопросов, тестов, ситуационных задач, методических рекомендаций, сбору наглядных материалов (например, электрокардиограмм, микропрепаратов), проверки выполненных работ. На это необходимо дополнительное время, которое, к сожалению, не предусмотрено в учебном плане. Учитывая, что на самостоятельную работу выделяется бюджетное время, вопрос о поиске эффективных путей и форм организации этой работы в высшем медицинском образовании остается актуальным [9].

В настоящее время самостоятельные работы включены в учебный процесс и выполняются на специально отведенных для этого занятиях.

С этой целью на теоретических кафедрах медицинского института Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина разработаны и заполняются «Рабочие тетради» с заданиями по всем темам, изучаемым в течение семестра. В них представлены: цель темы, контрольные вопросы, ориентировочная карточка для самостоятельной подготовки, теоретические вопросы, тесты и ситуационные задачи, на которые студенты должны письменно ответить, используя учебники, другую литературу, Интернет и другие источники. Для работы над «рабочими тетрадями» проводятся трехчасовые занятия с 4–5 группами студентов одновременно. В случае затруднения с ответом на вопросы, решением ситуационных задач или тестов они обращаются к преподавателю этих занятий, который помогает им справиться с затруднениями. Пока мы имеем первый опыт проведения этих занятий. Их эффективность покажет будущее.

Важной составной частью учебного процесса является контроль знаний. Важно видеть результаты профессиональной подготовки студентов, возможность предупредить отставание. Проверяя знания студентов, преподаватель определяет уровень мышления, степень понимания материала, что дает возможность вносить коррективы в лекции и практические занятия. Правильная постановка контроля способствует улучшению качества специалиста. Часто применяемым методом контроля является тестирование. Его суть заключается в постановке перед учащимися вопросов, отвечая на которые они проявляют уровень учебных знаний и умений, социального опыта. Тест является универсальным инструментом педагогического мониторинга и способом повышения эффективности учебного процесса. Тестирование позволяет проверять одновременно всех учащихся, экономит время преподавателя, дает возможность включать материал по всей теме и контролировать его усвоение. Вместе с тем тестовый контроль знаний отличается объективностью, позволяет выявить структуру знаний каждого студента. Наряду с другими формами контроля знаний, тесты находят широкое применение в изучении теоретических медико-биологических дисциплин. Систематическое тестирование стимулирует активность и внимание учащихся, формирует у них мотивацию для подготовки к каждому занятию, дисциплинирует их [10].

Таким образом, правильная методика и рациональное построение лекционного материала с использованием современных ТСО позволят лекции стать исключительно творческим, уникально новаторским и потому крайне интересным процессом для обеих сторон. В медицине вопросы качества и его оценки имеют особое значение. В связи с этим тестовый контроль служит одним из инструментов овладения учебным материалом, а также указывает на его готовность к изучению последующих разделов программы. И тот уровень теоретических компетенций, который сегодня будет заложен в студентов медицинского вуза на лекциях, практических занятиях и при выполнении самостоятельных работ, завтра будет применен при изучении клинических дисциплин, а в дальнейшем и в их практической деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Имичев В.Н., Семенов С.Н., Петров А.В. Значение лекционного курса в образовательной деятельности // Организационные и ме-

- тодические основы учебно-воспитательной работы в медицинском вузе: сб. науч. статей. Воронеж: Научная книга, 2009. С. 326-327.
2. ФОКУС. Профессоры Стэнфорда предложили отменить практику чтения лекций студентам-медикам. URL: <http://focus.ua/tech/231414/> (дата обращения: 30.10.2015).
 3. Приходько Е.А., Зуков Р.А. Лекция, как одно из главных звеньев обучения // Актуальные проблемы и перспективы развития российского и международного медицинского образования. Вузовская педагогика: материалы конф. Красноярск: Версо, 2012. С. 116-118.
 4. Дергунов А.В. Методические рекомендации для преподавателей по подготовке и чтению лекций по патологической физиологии // Медицина Кыргызстана. 2011. № 1. С. 310-313.
 5. Сергеева Е.Ю., Рукша Т.Г., Фефелова Ю.А. и др. Некоторые аспекты оптимизации учебного процесса на кафедре патологической физиологии с курсом клинической патофизиологии им. проф. В.В. Иванова // Актуальные проблемы и перспективы развития российского и международного медицинского образования. Вузовская педагогика: материалы конф. Красноярск: Версо, 2012. С. 97-100.
 6. Кобзарь В.Н. Использование мультимедиа при обучении биологии // Информационные средства как важный инструмент интерактивных способов обучения студентов-медиков. Бишкек: КРСУ, 2010. С. 53-60.
 7. Зарифьян А.Г. Обзор инновационных технологий обучения // Информационные средства как важный инструмент интерактивных способов обучения студентов-медиков. Бишкек: КРСУ, 2010. С. 3-12.
 8. Северьянов Л.А., Бобынцев И.И. Самостоятельная работа студентов по патофизиологии. Курск: Изд-во КГМУ, 2009. 200 с.
 9. Малыш Е.Ю., Ромашов Б.Б. Некоторые вопросы организации самостоятельной работы студентов // Организационные и методические основы учебно-воспитательной работы в медицинском вузе: сб. науч. статей. Воронеж: Научная книга, 2009. С. 349-352.
 10. Парфенова Н.В. Тестирование как метод контроля и оценки результатов обучения // Организационные и методические основы учебно-воспитательной работы в медицинском вузе: сб. науч. статей. Воронеж: Научная книга, 2009. С. 91-92.

Поступила в редакцию 2 декабря 2015 г.

UDC 614.23

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-598-602

SOME ASPECTS OF THEORETICAL DISCIPLINES TEACHING OPTIMIZATION AT HIGHER MEDICAL INSTITUTIONS

© G.A. Zakharov, B.A. Kakeev, E.G. Filipchenko

Ways of teaching processes optimization and control of theoretical disciplines in higher medical institutions with the help of lecture process, fulfillment of self-control works and tests are reviewed.

Key words: higher medical institutions; theoretical disciplines; teaching process optimization.

REFERENCES

1. Imichev V.N., Semenov S.N., Petrov A.V. Znachenie lektzionnogo kursa v obrazovatelnoy deyatel'nosti. *Organi-zatsionnye i metodicheskie osnovy uchebno-vospitatel'noy raboty v meditsinskom vuze: sbornik nauchnykh statey*. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2009, pp. 326-327.
2. FOKUS. Professory Stenforda predlozhili otmenit praktiku chteniya lektsiy studentam-medikam. Available at: <http://focus.ua/tech/231414/> (accessed 30.10.2015).
3. Prihodko E.A., Zukov R.A. Lektsiya, kak odno iz glavnykh zveney obucheniya. *Materialy konferentsii "Aktualnye problemy i perspektivy razvitiya rossiyskogo i mezhdunarodnogo meditsinskogo obrazovaniya. Vuzovskaya pedagogika"*. Krasnoyarsk, Verso Publ., 2012, pp. 116-118.
4. Dergunov A.V. Metodicheskie rekomendatsii dlya prepodavateley po podgotovke i chteniyu lektsiy po patologicheskoy fiziologii. *Meditsina Kyrgyzstana*, 2011, no. 1, pp. 310-313.
5. Sergeeva E.Y., Ruksha T.G., Fefelova Y.A. et al. Nekotorye aspekty optimizatsii uchebnogo protsessa na kafedre patologicheskoy fiziologii s kursom klinicheskoy patofiziologii imeni professora V.V. Ivanova. *Materialy konferentsii "Aktualnye problemy i perspektivy razvitiya rossiyskogo i mezhdunarodnogo meditsinskogo obrazovaniya. Vuzovskaya pedagogika"*. Krasnoyarsk, Verso Publ., 2012, pp. 97-100.
6. Kobzar V.N. Ispolzovanie multimedia pri obuchenii biologii. *Informatsionnye sredstva kak vazhnyy instrument interaktivnykh sposobov obucheniya studentov-medikov*. Bishkek, Kyrgyz-Russian Slavic University Publ., 2010, pp. 53-60.
7. Zarifyan A.G. Obzor innovatsionnykh tekhnologiy obucheniya. *Informatsionnye sredstva kak vazhnyy instrument interaktivnykh sposobov obucheniya studentov-medikov*. Bishkek, Kyrgyz-Russian Slavic University Publ., 2010, pp. 3-12.
8. Severyanov L.A., Bobyntsev I.I. *Samostoyatel'naya rabota studentov po patofiziologii*. Kursk, Kursk State Medical University Publ., 2009. 200 p.
9. Malyshev E.Y., Romashov B.B. Nekotorye voprosy organizatsii samostoyatel'noy raboty studentov. *Organizatsionnye i metodicheskie osnovy uchebno-vospitatel'noy raboty v meditsinskom vuze: sbornik nauchnykh statey*. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2009, pp. 349-352.
10. Parfenova N.V. Testirovanie kak metod kontrolya i otsenki rezultatov obucheniya. *Organizatsionnye i metodicheskie osnovy uchebno-vospitatel'noy raboty v meditsinskom vuze: sbornik nauchnykh statey*. Voronezh, Nauchnaya kniga Publ., 2009, pp. 91-92.

Received 2 December 2015

Захаров Геннадий Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор кафедры патологии, e-mail: gaz41@mail.ru

Zakharov Gennadiy Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor of Pathology Department, e-mail: gaz41@mail.ru

Какеев Бакир Аскарлович, Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Киргизская Республика, доктор медицинских наук, профессор кафедры нормальной и патологической физиологии, e-mail: rik.ab@mail.ru

Kakeev Bakir Askarovich, Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyz Republic, Doctor of Medicine, Professor of Normal and Pathological Physiology Department, e-mail: rik.ab@mail.ru

Филипченко Елена Григорьевна, Кыргызско-Российский Славянский университет, г. Бишкек, Киргизская Республика, кандидат медицинских наук, доцент кафедры нормальной и патологической физиологии, e-mail: elenafil66@mail.ru

Filipchenko Elena Grigoryevna, Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyz Republic, Candidate of Medicine, Associate Professor of Normal and Pathological Physiology Department, e-mail: elenafil66@mail.ru

УДК 614.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-603-612

ДЕФЕКТЫ ОКАЗАНИЯ МЕДИЦИНСКОЙ ПОМОЩИ: СКВОЗЬ ПРИЗМУ СЕСТРИНСКИХ ОШИБОК

© П.П. Щербинин

В статье специально и системно изучены актуальные проблемы причин возникновения сестринских ошибок и возможностей их предотвращения. На основе анкетирования медицинских сестер собран актуальный и системный материал, позволяющий репрезентативно исследовать заявленную научную проблему. Обобщен отечественный и мировой опыт анализа причин сестринских ошибок, дана их структура и выявлены основные причины и факторы их возникновения. Уточнены самооценки медицинских сестер возникновения сестринских ошибок, а также роль врачей в проявлениях дефектов медицинской деятельности. Сделаны выводы о влиянии синдрома эмоционального выгорания, перегрузок в работе, невнимательности на причины сестринских ошибок. Обращено внимание на важность правовой подготовки медицинских работников и их взаимодействия со структурами по защите прав как медицинских работников, так и пациентов. Доказано, что лишь привлечение к исследованию заявленной научной проблемы заинтересованных сторон – старших и главных медицинских сестер, врачей и пациентов – способно дать объективную картину по причинам сестринских ошибок. Уточнено влияние качества образования и опыта практической деятельности в предотвращении сестринских ошибок в лечебных учреждениях Российской Федерации.

Ключевые слова: сестринские ошибки; анкетирование; медицинские работники; юридическая ответственность; медицинское право; врач; пациент; сестринский процесс.

В современном обществе особое значение приобретает качество оказания медицинских услуг. Одним из самых важных факторов, влияющих на этот показатель, является медицинская ошибка. Большинство исследователей этого феномена указывают на врачебную ошибку, на ответственность врачей перед пациентами, но очень редко упоминается роль в «дефекте оказания медицинской помощи» медицинских сестер [1]. Да и собственно понятие «медсестринская ошибка» практически не употребляется. Между тем, в лечебном процессе медсестра участвует вместе с врачом, и она не может не нести ответственность за непрофессиональное оказание сестринской помощи, осложнения и неблагоприятные исходы, нарушение прав больных. Неслучайно одной из причин жалоб населения на качество медицинской помощи являются сестринские ошибки.

По оценкам Т.В. Матвейчик, в целом материалы исследований, осуществленных в разных странах и посвященных изучению причин сестринских ошибок, указывают на их многофакторный и комплексный характер, с чем связана сложность поиска их источника. Почти в 50 % случаев причины ошибки обнаружить не удается.

Большинство авторов сестринские ошибки анализируют с точек зрения:

- их причины;
- времени и места совершения;
- прогноза для здоровья и жизни;
- своевременности и правильности медицинских действий [2].

Одним из перспективных направлений работы по предотвращению сестринских ошибок является изучение этико-правовых особенностей восприятия данной проблемы [3]. Специально изучаются и собственно

проблемы безопасности пациента при сестринском процессе [4], а также правовые аспекты ответственности медицинских сестер [5].

В статье дается анализ причин совершения сестринских ошибок, а также указываются возможности их преодоления в практике работы медицинских учреждений в Российской Федерации.

Среди постановочных вопросов можно выделить следующие.

1. Что такое «сестринская ошибка»?
2. Каковы основные причины и возможности их возникновения?
3. Сопоставимы ли основные виды сестринских ошибок в отечественных и зарубежных медицинских учреждениях?
4. Насколько репрезентативны результаты анкетирования медицинских сестер в контексте сестринских ошибок?
5. Возможно ли преодолеть типичные сестринские ошибки в медицинских учреждениях Тамбовской области и Российской Федерации в целом?

Для изучения оценки масштабов, причин и последствий сестринских ошибок было собраны сведения от самих медицинских работников – медицинских сестер. В период прохождения курсов повышения квалификации на базе Тамбовского областного медицинского колледжа в 2013–2015 гг. было анонимно опрошено более 200 слушателей – медицинских сестер. Кроме того, выборочное анкетирование охватило большинство лечебных учреждений г. Тамбова. Также были опрошены и более десятка медицинских работников из г. Краснодара, Пензы, Воронежа, Ростова, Пятигорска, Анапы и Ставрополя.

Большинство опрошенных медицинских сестер (71 %) проживали и работали в поликлиниках и стационарах в городах Тамбовской области, 19 % респондентов работали в сельских медицинских учреждениях, а каждая десятая медсестра не желала указывать свое место работы. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что боязнь возможности идентификации при анкетировании оставалась серьезным препятствием для некоторых медицинских сестер. Это обстоятельство серьезно осложняло проведение опросов и анкетирования медицинских сестер.

Примечательно, что не все медицинские работники с энтузиазмом воспринимали идею анкетирования и опроса о сестринских ошибках в своей работе. Они откровенно говорили, что опасаются «репрессий» (наказания) со стороны руководства, а также не желают «выносить сор из избы». Лишь убедившись, что анкета анонимная и не позволяет идентифицировать респондента, медицинские работники отвечали на поставленные вопросы. Уже данная позиция к заявленной проблеме показывает, что отношение в сестринском сообществе и самих лечебных учреждениях к попытке объективного изучения причин сестринских ошибок неоднозначное. Во главе угла стоит не стремление получить опыт профилактики сестринской ошибки конкретного работника, а желание «сохранить лицо» и доброе имя медицинского учреждения.

Таким образом, одним из важных результатов проведенного исследования является тезис о важности анализа возможных сестринских ошибок и ознакомление медицинского сообщества с профилактическими мероприятиями по их недопущению [6].

Как видно из рис. 1, стажевые группы медицинских сестер представлены достаточно равномерно.

Подобное анкетирование позволило проследить за эволюцией отношения к совершенной ошибке вследствие занятий на эту тему; понять, какие действия руководителя могут снизить риск совершения ошибки; оценить этичность разбора сестринских ошибок; узнать

мнение самих медицинских работников о способах предупреждения ошибок.

Кроме того, в период проведения занятий по медицинскому праву и правовым аспектам деятельности медицинских сестер вопросы о сестринских ошибках возникали неоднократно, что свидетельствует об актуальности проблемы.

Для проведения исследования была разработана специальная анкета с целью анализа отношения респондентов к ситуации с сестринскими ошибками. Анкета содержала следующие вопросы.

1. Что такое сестринская ошибка?
2. Какие сестринские ошибки Вы допускали в своей практике? И когда: в начале работы, вечером, во время дежурства и пр.)?
3. Назовите причины сестринских ошибок.
4. Стали ли известны кому-либо Ваши ошибки (если да или нет, то почему?). Если да, то как Вас наказывали (выговор, устное замечание и пр.)?
5. Как избежать сестринских ошибок?
6. Были ли сестринские ошибки у Ваших коллег? Перечислите примеры этих ошибок.
7. Виноваты ли врачи в сестринских ошибках? Если да, то почему?
8. Как часто совершаются сестринские ошибки у Вас и коллег на работе?
9. Ваш стаж работы.
10. Ваше место работы (указать только город, село без названия).
11. Обучали ли Вас как избежать сестринских ошибок, кто и когда?

Уже первый вопрос анкеты «Что такое сестринская ошибка?» сразу выявил значительный разброс мнений и понимания данного термина. Абсолютное большинство респондентов назвало «невнимательность» – 17 %, затем идут «ошибки при выполнении работы» – 11 %, «ошибки при выполнении врачебных назначений» – 12 %, близкие позиции занимают положения: «халатность», «ошибка введения лекарственных средств», «состояние пациента ухудшилось».

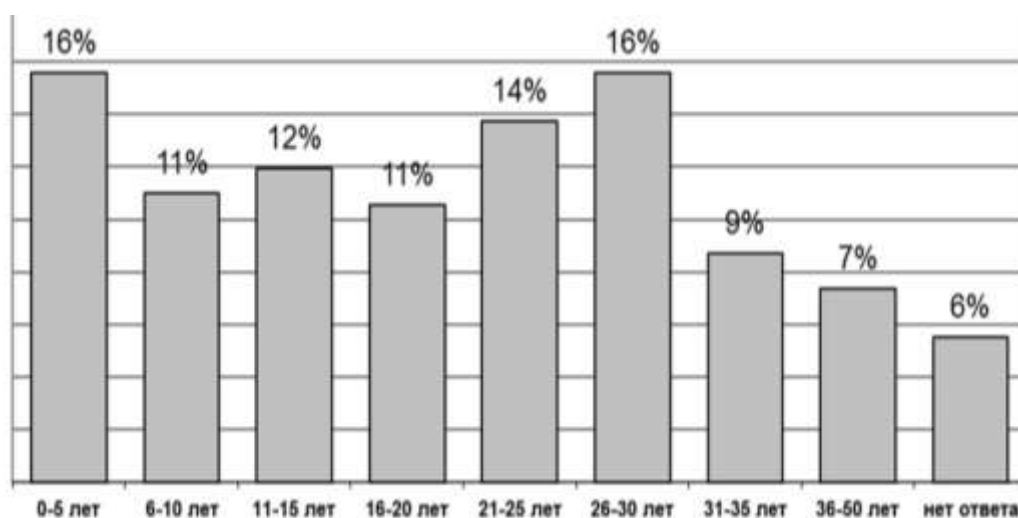


Рис. 1. Результаты опроса: «Стаж испытуемых»

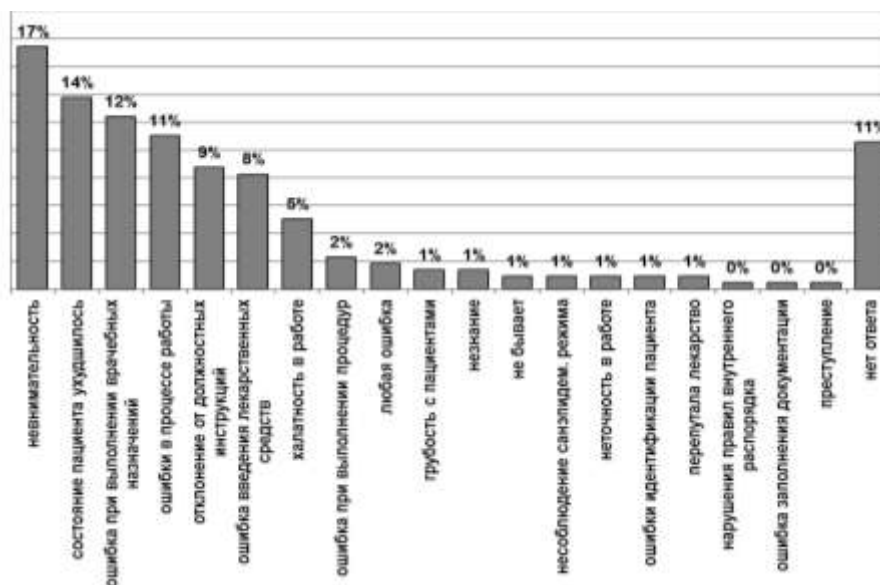


Рис. 2. Результаты опроса: «Что такое сестринская ошибка?»

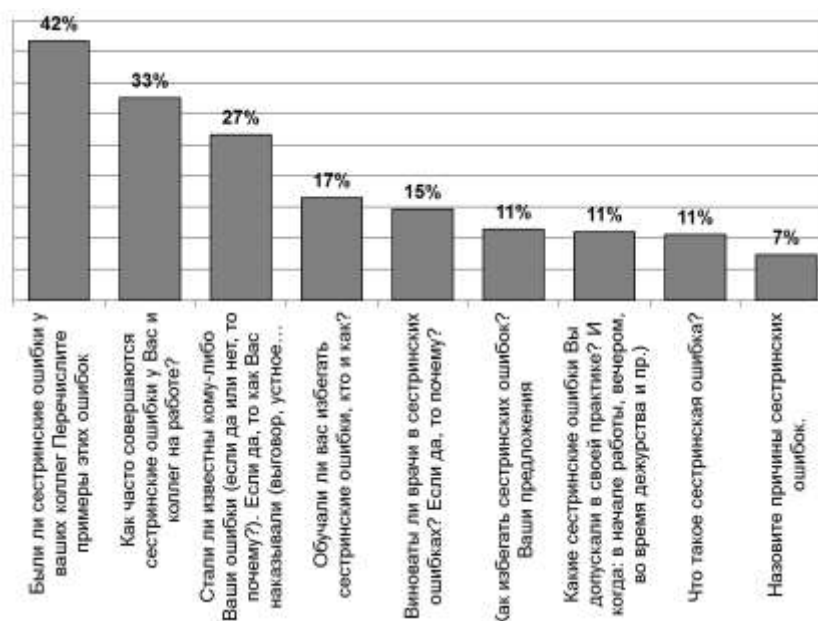


Рис. 3. Результаты опроса: «Процент отсутствующих ответов на вопросы анкеты»

Выводом по данному разделу анкеты (рис. 2) является понимание того, что у самих медицинских сестер нет четкого представления о том, что же такое «сестринская ошибка». Это свидетельствует и о недостаточном внимании руководителей медучреждений к проблеме сестринских ошибок и важности их предотвращения. Важно заметить, что данные ответы весьма разнятся по месту жительства и месту работы анкетирруемых.

Очень симптоматичными были вопросы, на которые медицинские сестры предпочитали не отвечать (рис. 3). Так, 42 % медицинских сестер не пожелали отвечать, были ли ошибки у их коллег. Вероятно, что они боялись признать, что в их медицинском учреж-

дении бывают сестринские ошибки. Одна треть опрошенных не стала отвечать на вопрос, как часто совершаются ошибки на работе. Самое важное в этом анализе анкет, что каждая пятая медицинская сестра призналась, что никто не обучал ее, как избегать сестринских ошибок.

Так, о том, что они совершенно не допускали сестринских ошибок, заявили почти 40 % городских медсестер и только 4 % медицинских работников из сельской местности. Примечательно, что каждая пятая городская медсестра не стала отвечать на поставленный вопрос, но медицинские работники из сельских лечебных учреждений были более откровенны и только 3 % из них воздержались от ответа (рис. 4).

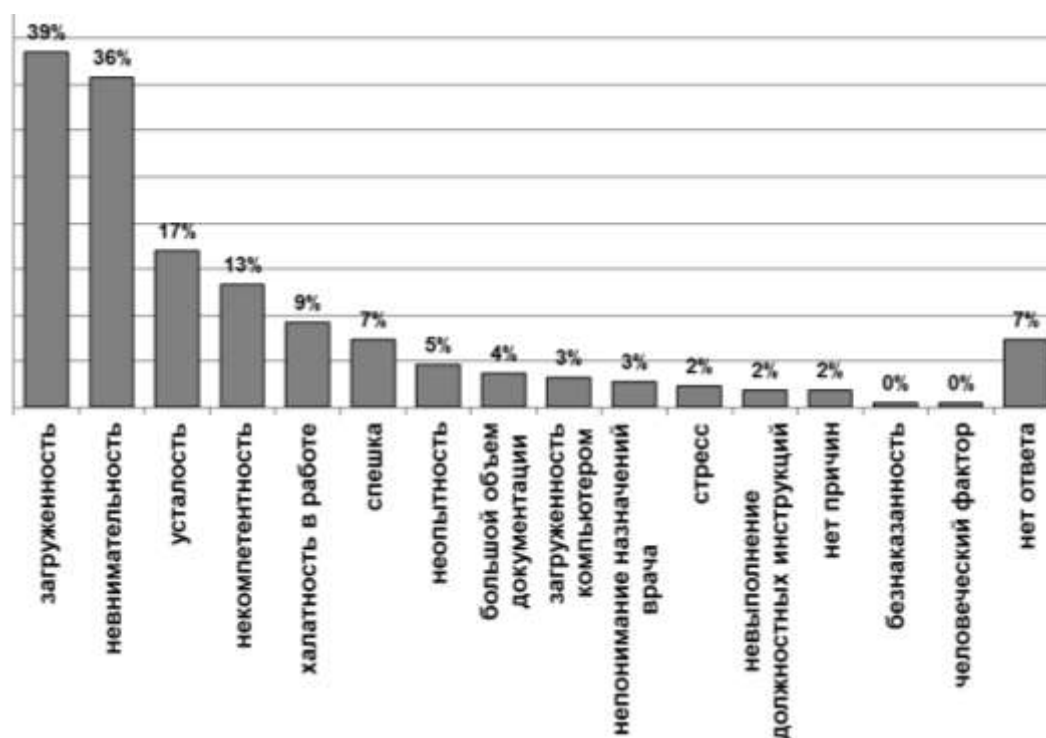


Рис. 4. Результаты опроса: «Причины сестринских ошибок»

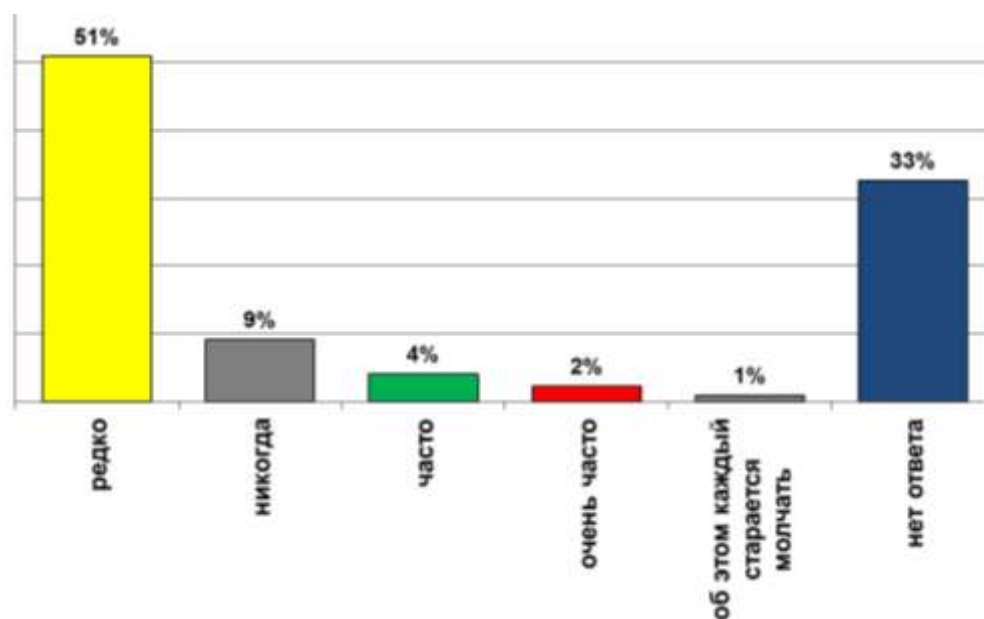


Рис. 5. Результаты опроса: «Как часто совершаются сестринские ошибки у Вас и коллег на работе?»

Причинами сестринских ошибок 39 % опрошенных называют загруженность, почти столько же упоминают невнимательность – 36 %, еще 17 % упоминают усталость, 13 % говорят о некомпетентности и 9 % написали о халатности в работе. Эти показатели очень симптоматичны и заслуживают внимательного анализа научной и медицинской общественностью.

5 % медицинских сестер написали о своей неопытности, а также загруженности компьютером и большим объемом документации. Данный сигнал исходит от

медицинских сестер с очень большим стажем работы и работающих в сельской местности. Для них необходимы курсы повышения квалификации по использованию современных информационных технологий.

Большинство медицинских сестер признались, что сестринские ошибки у них самих и их коллег допускаются редко (51 % опрошенных), однако одна треть не дала ответов на данный вопрос, что свидетельствует о нежелании признавать наличие таких сестринских ошибок у себя на работе (рис. 5). Наконец, лишь 9 % медицинских сестер

написали, что никогда сестринских ошибок не допускают. С учетом вышеназванных факторов можно сделать вывод о том, что сестринские ошибки имеют место в двух третях лечебных учреждений, что вполне сопоставимо с общероссийскими показателями и европейским опытом сестринского дела. Вполне очевидно, что необходимо усилить внимание к проблеме сестринских ошибок при обучении студентов медицинского колледжа, а также на курсах повышений квалификации в отделении повышения квалификации медицинских работников.

Весьма информационно насыщенными оказались данные о том, какие ошибки допускались в практике работы медицинских сестер (рис. 6). Так, практически поровну (по 37 и 30 %) оказались указаны ошибки в оформлении документации и неправильный ввод инъекций. Это очень серьезный сигнал, который свиде-

тельствует, что на эти направления подготовки специалистов и контроль качества работы медицинского персонала необходимо обратить особое внимание.

Почти каждая десятая медсестра (9 % опрошенных медицинских работников) признались, что нарушали стандарты асептики и антисептики.

Примерно 15 % других медицинских ошибок вполне вписываются в общие показатели ошибок медицинских работников.

Очень показательны мнения о собственных сестринских ошибках (рис. 7). Так, три четверти медицинских работников в этом разделе анкеты заявили, что не допускали сестринских ошибок. Но из тех, кто признался в таких ошибках, наибольшее число (7 %) указали на время дежурства, а также вечернее время или начальный период работы медицинской сестрой.

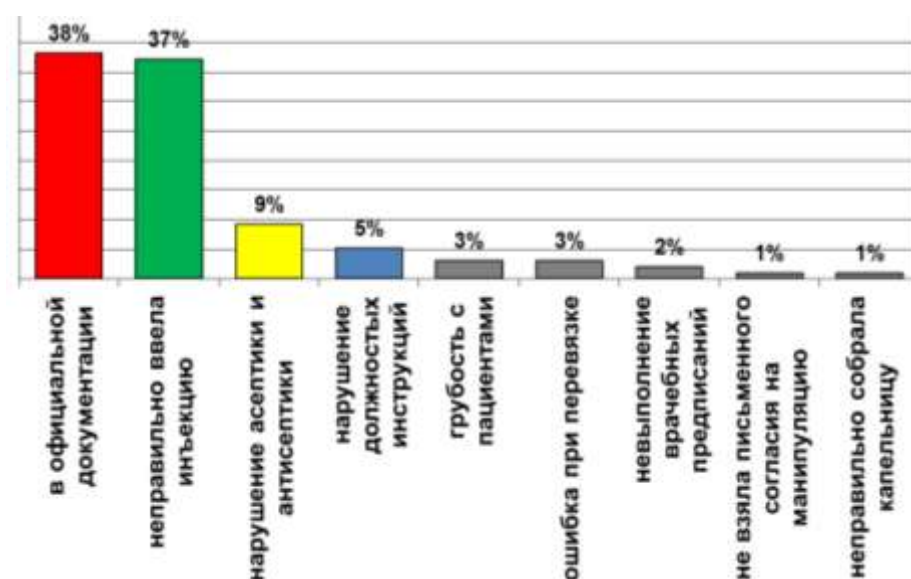


Рис. 6. Результаты опроса: «Какие сестринские ошибки Вы допускали в своей практике?»

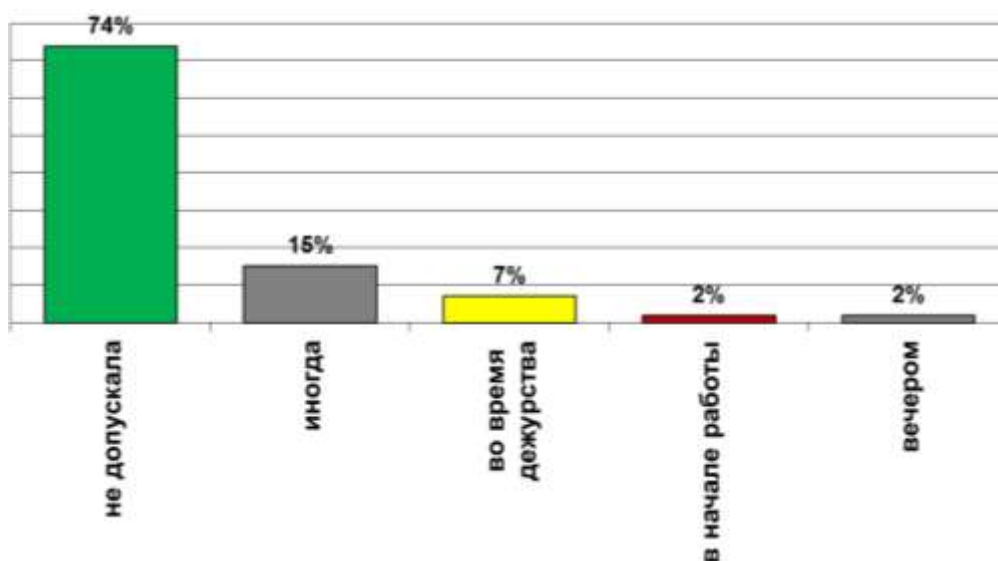


Рис. 7. Результаты опроса: «Когда Вы допускали в своей практике сестринские ошибки?»

С другой стороны, каждая шестая медицинская сестра (15 % опрошенных) сообщила, что иногда совершала сестринские ошибки.

На вопрос анкеты о наличии ошибок у Ваших коллег медицинские работники отвечали очень своеобразно (рис. 8). О полном отсутствии ошибок заявили только 15 % медицинских сестер. То есть только каждая шестая медицинская сестра признает «безошибочные технологии». Но 18 % медицинских работников отметили, что ошибки у коллег имели место и, если сюда же отнести тех, кто не дал никакого ответа (а это еще 42 %), то две трети медицинских сестер фактически признали наличие сестринских ошибок в практике работы медицинских учреждений.

На вопрос «Стали ли известны кому-либо Ваши ошибки? Если да, то как Вас наказывали» примерно по трети опрошенных медицинских сестер заявили, что «никто не узнал», столько же не ответили на вопрос и 27 % указали на устное замечание (рис. 9). Все это свидетельствует о латентном (скрытом) характере сестринских ошибок и трудности профилактирования этого проявления сестринской деятельности.

Примечательно, что наказание за сестринскую ошибку, судя по ответам на анкеты, бывает минимальным, и лишь несколько медицинских сестер извинились перед пациентами.

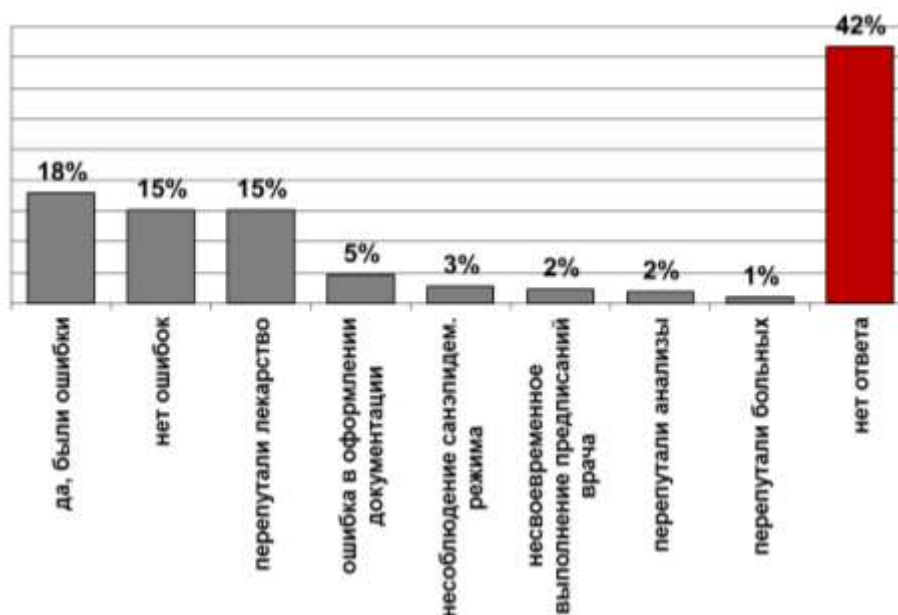


Рис. 8. Результаты опроса: «Были ли сестринские ошибки у ваших коллег?»

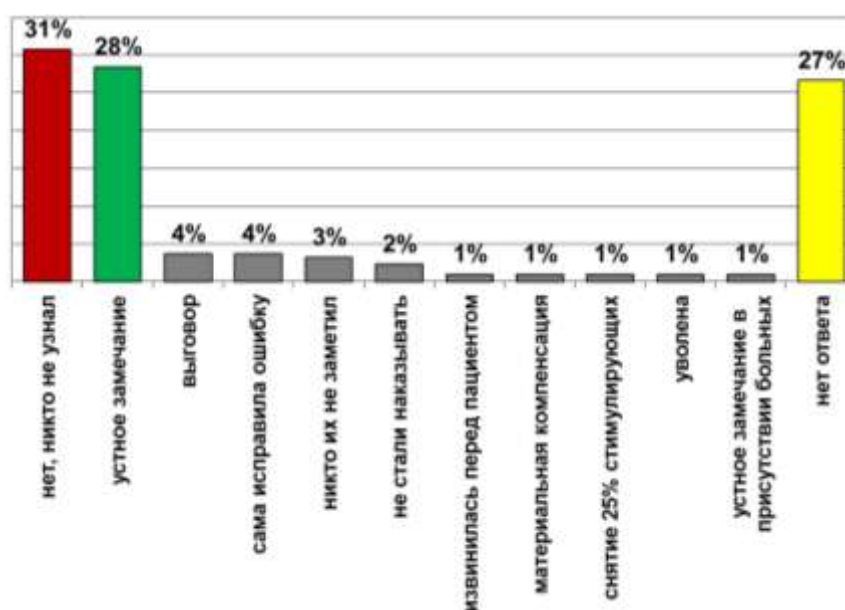


Рис. 9. Результаты опроса: «Стали ли известны кому-либо Ваши ошибки? Если да, то как Вас наказывали?»

Самый большой резонанс среди опрашиваемых вызвал весьма провокационный вопрос «Виноваты ли врачи в сестринских ошибках? Если да, то почему?» (рис. 10). Вопрос был некорректен уже в самой постановке, т. к. сестринская ошибка и врачебная ошибка имеют совершенно разное звучание, причину и последствия. Да и правовая оценка этих ошибок отличается и невозможна для сравнения. Однако в нашем опросе важно было учесть мнение медицинских сестер о работе связки «врач – медицинская сестра» в контексте безопасности пациента. Удивительно, но почти две трети опрошенных уверенно заявили, что врачи виноваты в сестринских ошибках, и лишь 30 % медицинских сестер признали, что вины врачей нет и виноваты в ошибках сами медицинские сестры. Данные ответы отражают развитие биоэтических отношений в лечеб-

ных учреждениях и важность взаимодействия врачей и медицинских сестер в процессе лечения и профилактики заболеваний.

Принципиально важным является вопрос о том, кто и как обучал медицинских сестер профилактике сестринских ошибок (рис. 11). Только 16 % указали на период обучения в колледже. Еще 8 % – на время прохождения курсов повышения квалификации на базе Тамбовского областного медицинского колледжа. В целом, это только четверть медицинских сестер.

Тревожным является заявление каждой пятой медицинской сестры (21 % опрошенных), что никто и никогда их этому не обучал. Но 30 % отметили «заботу и внимание» по данному вопросу старших медицинских сестер.

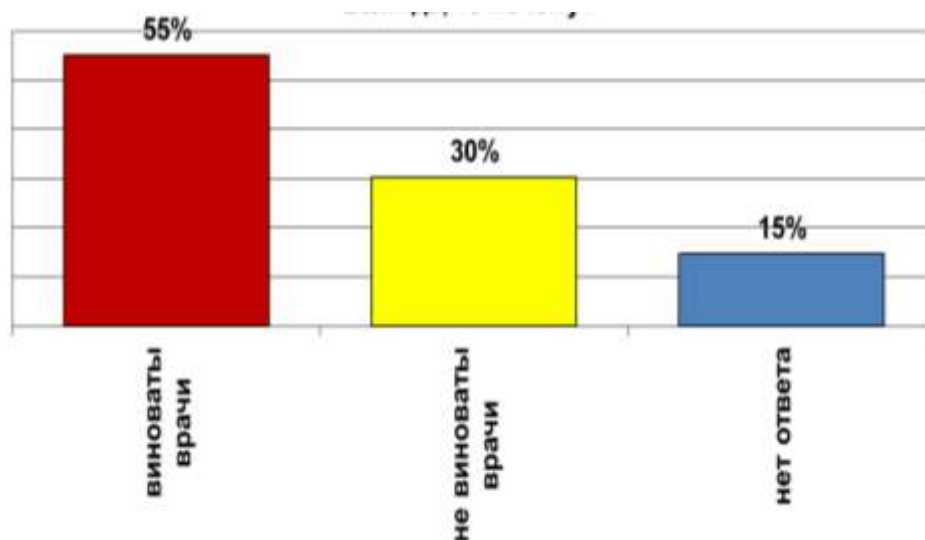


Рис. 10. Результаты опроса: «Виноваты ли врачи в сестринских ошибках? Если да, то почему?»

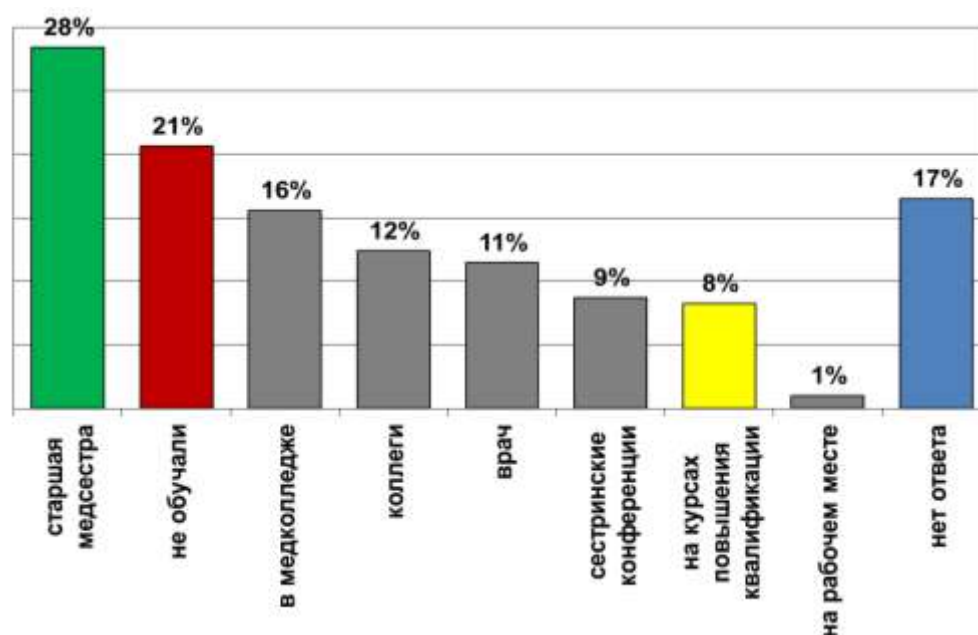


Рис. 11. Результаты опроса: «Обучали ли Вас избегать сестринских ошибок, кто и как?»

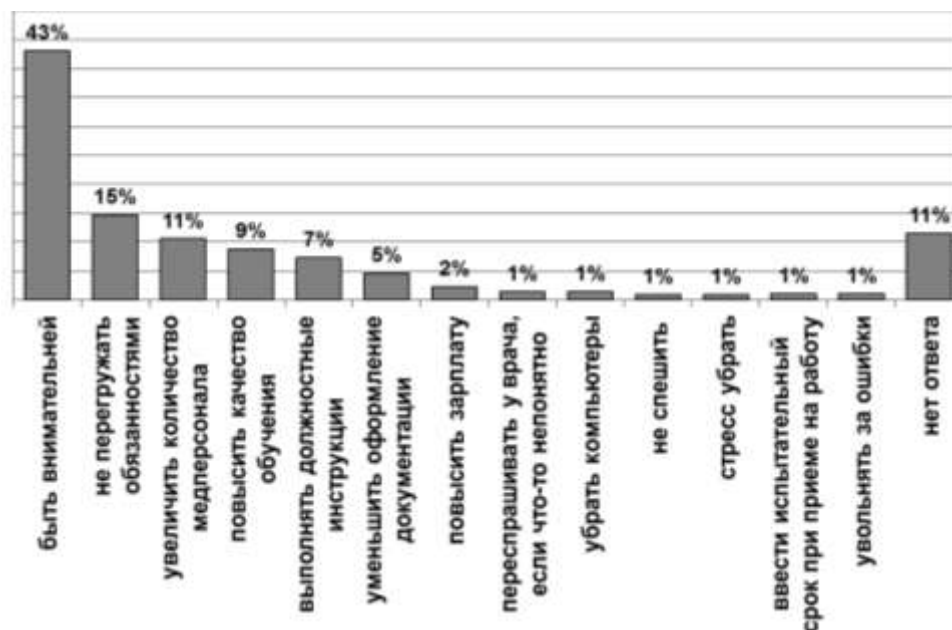


Рис. 12. Результаты опроса: «Как избегать сестринских ошибок?»

Вопрос «Как избегать сестринских ошибок» вызвал достаточно широкий разброс мнений. 43 % опрошенных заявили, что необходимо быть внимательной, что отражает самокритичное, но справедливое суждение о природе сестринских ошибок. 15 % медицинских сестер указали на необходимость не перегружать обязанностями, 11 % считают важным увеличить количество медицинского персонала, 9 % считают своевременным повысить качество обучения (рис. 12).

Таким образом, даже общий анализ заявленной медико-правовой проблемы свидетельствует о важности учета сестринских ошибок в обучении и контроле за деятельностью медицинского персонала в лечебных учреждениях.

Проведенное изучение саморепрезентации сестринских ошибок свидетельствует о важности изучения данной проблемы. Однако такой анализ не может быть полным без опроса «других» заинтересованных сторон: старших и главных медицинских сестер, врачей и пациентов. Только привлечение оценок и мнения этих субъектов лечебного процесса способно дать более полную и объективную картину по причинам сестринских ошибок.

Важно также учитывать и мировой опыт преодоления сестринских ошибок». Так, немало сестринских ошибок бывает в США. По мнению американских аналитиков, в отличие от других профессий, деятельность медработников напрямую связана с жизнью и здоровьем пациентов, поэтому сестринское дело особенно остро нуждается в развитии механизмов, предупреждающих и предотвращающих ошибки в работе.

Смерть в результате медицинской ошибки — одна из важнейших проблем современной медицины и является третьей по важности причиной смертей в США. Кроме этических проблем такие случаи влекут за собой еще финансовые потери и подрыв репутации. Медикаментозные ошибки, внутрибольничные инфекции и падения пациентов считаются основными неблагоприятными явлениями, возникновение которых медсестра в состоянии предотвратить.

Так, в процессе раздачи лекарств очень часто медсестры вынуждены были отвечать на многочисленные вопросы коллег и врачей, что отвлекало и рассеивало их внимание. Для предотвращения ошибок была разработана программа, включающая в себя стандарт процесса раздачи лекарств. В этот стандарт включены такие пункты, как подготовка лекарств в специальном тихом месте и ношение пояса, сигнализирующего коллегам, чтобы те не задавали вопросов и не отвлекали. В результате применения данного стандарта количество медикаментозных ошибок упало более чем наполовину.

Дополнительные меры предосторожности необходимы также при работе с лекарствами в похожих упаковках, со схожей маркировкой и т. д. В конечном итоге изменение этикеток фармацевтическими компаниями может устранить проблему, в то же время штрих-кодирование, подтверждение правильности дозы, курса, времени, а также подтверждение того, что лекарство дано тому пациенту, которому оно было назначено, в значительной степени может предотвратить такого рода ошибки. Таким образом, зная о наиболее вероятных ошибках в своей деятельности, можно находить способы их предотвращения [7].

Необходимо учитывать, что одним из ключевых факторов, влияющих на частоту сестринских ошибок, является синдром эмоционального выгорания (СЭВ). По оценкам Л.П. Великановой, профессиональные риски — это угроза безопасности специалиста, т. к. они возникают и действуют преимущественно при исполнении основных обязанностей медицинского работника, способны приводить к развитию самых различных расстройств — от невротических до психосоматических. Не случайно, последние могут осложняться различными «соматическими катастрофами» (инсульты, инфаркты и т. д.). Видимо, иллюзия простоты и очевидности до сих пор является одним из препятствий к поиску эффективных средств и стратегий профилактики и коррекции профессиональных стрессовых расстройств медицинских работников современного здравоохранения [8].

Вполне очевидно, что профессиональная деятельность медицинских работников связана с неизбежными эмоциональными и нравственными перегрузками [9]. Это является одним из источников профессионального стресса и основой возникновения профессиональных личностных деформаций, таких как синдром эмоционального выгорания специалиста.

Синдром эмоционального выгорания – это процесс постепенной утраты эмоциональной, когнитивной и физической энергии, проявляющийся в симптомах эмоционального, умственного истощения, физического утомления, личной отстраненности и снижения удовлетворения исполнения работы. СЭВ является скрытой проблемой, т. к., развиваясь практически незаметно, может приводить к серьезным социальным (снижение качества работы, уход из профессии, рост профессиональных ошибок и др.) и медицинским последствиям (развитие депрессии, зависимостей от психоактивных веществ, суицида и др.) [10]. Таким образом, латентный (скрытый) характер этого явления способен оказывать резко негативное воздействие на медицинском работнике и способствовать совершению профессиональных, в т. ч. сестринских, ошибок.

Вполне очевидно, что повышение качества образования и профессиональной переподготовки, а также наличие хорошей практики в процессе обучения способны снизить, а во многих случаях и предотвратить возникновение сестринских ошибок в лечебных учреждениях Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бершадская М.Б. Типичные ошибки в работе медицинской сестры. М.: Медицинский проект, 2013. 79 с.
2. Матвейчик Т.В. Сестринские ошибки как угроза безопасности пациентов // Мед. сестра. 2014. № 8. С. 45-50.
3. Яковлев В.В. Этико-правовые основы деятельности медицинского персонала. Вып. 4. М.: Медицинский проект, 2012.
4. Крюков А.Е. и др. Проблемы безопасности пациентов: ошибки медсестер и дефицит ухода // Мед. сестра. 2015. № 2. С. 9-13.
5. Шишов М.А. Административная ответственность средних медицинских работников за нарушения отдельных положений законодательства в сфере охраны здоровья граждан: анализ нововведений // Гл. медсестра. 2014. № 3. С. 39-44.
6. Красильников А.В. Анкетирование пациентов как критерий оценки качества медицинской услуги // Проблемы управления здравоохранением. 2005. № 1. С. 34-39.
7. Как избежать самых распространенных ошибок в уходе за пациентом. URL: <http://www.sisterflo.ru/news/errors.php> (дата обращения: 13.03.2016).
8. Великанова Л.П. Динамические характеристики синдрома эмоционального выгорания у среднего медицинского персонала // Мед. сестра. 2014. № 6. С. 22-25.
9. Щербинин П.П., Лихачева В.С. Медико-правовые аспекты сестринских ошибок: постановочные вопросы // Актуальные вопросы социальных и гуманитарных наук: сб. науч. тр. по материалам 5 Междунар. науч.-практ. конф. 15 марта 2015 г. Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2015. С. 45-47.
10. Волков С.Р. Формирование толерантного взаимодействия медицинских сестер как задача руководителя сестринской службы // Гл. медсестра. 2014. № 7. С. 33-51.

Поступила в редакцию 2 апреля 2016 г.

UDC 614.2
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-603-612

DEFECTS OF MEDICAL CARE PROVISION: BASING ON THE NURSES' ERRORS

© P.P. Shcherbinin

The article specifically and systematically studied the actual problems of the causes of nursing errors and their prevention. On the basis of a survey of nurses collected relevant material and system that allows a representative to investigate the stated research problem. This article summarizes the domestic and world experience analysis of the causes of nursing errors, their structure and the main causes and factors of their occurrence are given. Self-assessment of nurses of occurrence of nursing errors as well as the role of doctors in manifestations of the defects of medical practice are updated. The conclusions about the influence of syndrome of emotional burnout, overload in work, inattention to the causes of nursing errors. Attention is drawn to the importance of legal training for health workers and their interaction with structures for the protection of the rights of both health workers and patients. It is proved that only the attraction to study the stated research problem stakeholders: senior and chief nurses, doctors and patients are able to provide an objective picture of the causes of nursing errors. The impact of the quality of education and practical experience in the prevention of nursing errors in hospitals of the Russian Federation is clarified.

Key words: nursing errors; questionnaire; health workers; legal liability; medical law; physician; patient; nursing process.

REFERENCES

1. Bershadskaya M.B. *Tipichnye oshibki v rabote meditsinskoy sestry*. Moscow, Meditsinskiy projekt Publ., 2013. 79 p.
2. Matveychik T.V. *Sestrinskie oshibki kak ugroza bezopasnosti patsientov*. *Meditsinskaya sestra*, 2014, no. 8, pp. 45-50.
3. Yakovlev V.V. *Etiko-pravovye osnovy deyatel'nosti meditsinskogo personala*. Vyp. 4. Moscow, Meditsinskiy projekt Publ., 2012.
4. Kryukov A.E. et al. *Problemy bezopasnosti patsientov: oshibki medsester i defitsit ukhoda*. *Meditsinskaya sestra*, 2015, № 2, pp. 9-13.

5. Shishov M.A. Administrativnaya otvetstvennost' srednikh meditsinskikh rabotnikov za narusheniya otchel'nykh polozheniy zakonodatel'stva v sfere okhrany zdorov'ya grazhdan: analiz novovvedeniy. *Glavnaya medsestra*, 2014, no. 3, pp. 39-44.
6. Krasil'nikov A.V. Anketirovanie patsientov kak kriteriy otsenki kachestva meditsinskoy uslugi. *Problemy upravleniya zdravookhraneniem*, 2005, no. 1, pp. 34-39.
7. *Kak izbezhat' samykh rasprostranennykh oshibok v ukhode za patsientom*. URL: <http://www.sisterflo.ru/news/errors.php> (accessed 13.03.2016).
8. Velikanova L.P. Dinamicheskie kharakteristiki sindroma emotsional'nogo vygoraniya u srednego meditsinskogo personala. *Meditsinskaya sestra*, 2014, no. 6, pp. 22-25.
9. Shcherbinin P.P., Likhacheva V.S. Mediko-pravovye aspekty sestrinskikh oshibok: postanovochnye voprosy. *Sbornik nauchnykh trudov po materialam 5 Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii 15 marta 2015 g. "Aktual'nye voprosy sotsial'nykh i gumanitarnykh nauk"*. Tambov, Biznes-Nauka-Obshchestvo Publ., 2015. pp. 45-47.
10. Volkov S.R. Formirovanie tolerantnogo vzaimodeystviya meditsinskikh sester kak zadacha rukovoditelya sestrinskoy sluzhby. *Glavnaya medsestra*, 2014, no. 7, pp. 33-51.

Received 2 April 2016

Щербинин Павел Петрович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор исторических наук, профессор, профессор кафедры общественного здоровья и здравоохранения, зав. кафедрой ЮНЕСКО по правам человека и демократии, e-mail: shcherbinin2010@gmail.com

Shcherbinin Pavel Petrovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of History, Professor of Public Health and Health Keeping Department, Head of UNESCO for Human's Rights and Democracy Department, e-mail: shcherbinin2010@gmail.com

УДК: 633.854.78:632.25
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-613-618

МЕТОДЫ ИСКУССТВЕННОГО ЗАРАЖЕНИЯ ПОДСОЛНЕЧНИКА ГРИБАМИ РОДА *FUSARIUM* LINK ET FR. В УСЛОВИЯХ ТАМБОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© А.А. Кузнецов, А.А. Выприцкая, Ю.В. Зеленева

В результате многолетних (1992–2015 гг.) наблюдений в Тамбовской области на подсолнечнике зарегистрировано как минимум 14 видов грибов рода *Fusarium* Lk. et Fr., пять из которых (*F. oxysporum* (включая *F. oxysporum* var. *orthoceras*), *F. verticillioides*, *F. tricinctum*, *F. sporotrichioides*) высоко вредоносны. В работе приведены результаты исследований по использованию нескольких методов создания искусственного инфекционного фона *F. oxysporum*, *F. verticillioides* и *F. sporotrichioides*, многие из которых были признаны неприемлемыми для использования в условиях Тамбовской области. Обоснована необходимость создания нового, адаптированного к условиям Тамбовской области метода для изучения устойчивости подсолнечника к фузариозной корневой гнили. Результаты исследований показали возможность отбора устойчивых к фузариозной корневой гнили растений методом посева зараженными семенами.

Ключевые слова: подсолнечник; фузариоз; корневая гниль; метод; возбудитель; патогенность; вредоносность; инокуляция; инфекционный фон; устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

На урожайность и технологические качества семян подсолнечника – основной масличной культуры России – большое влияние оказывают грибные болезни. В числе патогенов, наносящих значительный экономический ущерб современным сортам и гибридам культуры, – грибы рода *Fusarium* Lk. et Fr. [1–2], токсиногенные грибы, факультативные паразиты с различной степенью паразитизма [3–4]. Термофилы, полифаги, поражающие более 200 видов растений многих семейств, в т. ч. *Helianthus annuus*. На подсолнечнике грибы рода *Fusarium* проявляются во все фазы развития растений, вызывая гниль корней, прикорневой части стебля, трахеомикозное увядание стеблей, розовую гниль корзинок, загнивание семян, всходов, поражение листьев, общее угнетение и преждевременное увядание [2–4]. Наиболее вредоносны гниль корзинок, корней и увядание [2]. Вредоносность фузариоза зависит от вида патогена, климатических условий года, времени появления и количества пораженных растений [5–6]. Раннее проявление болезни (от всходов до фазы 4–5 пары настоящих листьев и бутонизации) вызывает гибель растений или значительное снижение всех составляющих урожайности [2; 5; 7], после цветения и формирования семян потери урожая составляют 30–40 % [5].

В Тамбовской области фузариоз подсолнечника проявляется ежегодно, нанося в отдельные годы достаточно ощутимый вред культуре. Распространенность его составляет от единичных растений в посевах до очагов диаметром 6–7 метров и более [8]. Тем не менее долгое время в области оставались неизученными видовой состав грибов этого рода, их распространенность, патогенность и вредоносность. На эти вопросы мы попытались ответить в наших предыдущих публикациях [8–9]. На основании многолетних (1992–2015 гг.) наблюдений нами определен видовой состав грибов этого рода на вегетирующих растениях и семенах куль-

туры, представленный 14 видами: *Fusarium acuminatum* Ellis et Everh., *F. avenaceum* (Fr.) Sacc., *F. culmorum* (W.G. Sm.) Sacc., *F. equiseti* (Corda) Sacc., *F. graminearum* Schwabe, *F. heterosporum* Nees ex Fr., *F. javanicum* Koord. var. *radicicola* Wr., *F. oxysporum* Schltdl., *F. oxysporum* var. *orthoceras* Schlecht. Emend. Snyd. et Hans. var. *orthoceras* (Appl. et Wr.) Bilal., *F. sambucinum* Fuckel, *F. solani* (Mart.) Sacc., *F. sporotrichioides* Sherb., *F. tricinctum* (Corda) Sacc., *F. verticillioides* (Sacc.) Nirenberg [8]. По нашим наблюдениям, наиболее вредоносны из них *F. oxysporum* (включая *F. oxysporum* var. *orthoceras*), *F. verticillioides*, *F. tricinctum*, *F. sambucinum*, при этом первые два поражают корневую систему взрослых растений, вторые – растения в фазу от 2 до 4 пар настоящих листьев; кроме того, *F. verticillioides* и *F. sambucinum* вызывали гниль (гибель) центрального корня; у взрослых растений, пораженных *F. oxysporum*, корни были надломлены у основания [8]. Исходя из изложенного, нами изучены патогенные свойства этих и некоторых других видов рода. Установлена высокая патогенность пяти видов: *F. verticillioides* (интенсивность поражения 4,9 балла), *F. oxysporum* (4,8 балла), *F. sporotrichioides* (4,2 балла), *F. oxysporum* var. *orthoceras* (3,7 балла), *F. tricinctum* (3,4 балла) [9]. Накопленные знания определили цель наших дальнейших исследований – изучение устойчивости подсолнечника к высоко патогенным видам – *F. sporotrichioides* и *F. oxysporum*, *F. verticillioides*, *F. tricinctum*, поражающим корневую систему и корзинки подсолнечника.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В литературе описаны методы иммунологической оценки подсолнечника к высоко патогенным видам грибов рода *Fusarium*. Мы отобрали три из них [2; 7; 10] для использования в наших условиях.

Методы отработывали на сортах Чакинский 77, Чакинский 931 и Спартак селекции ФБГНУ ТНИИСХ.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

За основу взят метод Т.С. Антоновой, 2005 [7], модифицированный нами: а) культуру патогенов выращивали на картофельно-сахарозной среде, содержащей по четверти основных компонентов – картофеля и сахарозы (КСА), разработанной Е.М. Reis [11], без фунгицида фундазола, описанной нами ранее [9]; б) для сохранения патогенности и агрессивности грибов в течение зимы ими заражали семена подсолнечника. Для этого в условиях стерильного бокса простерилизованные семена раскладывали на чашки Петри с культурой патогена, выращенной на картофельно-сахарозной питательной среде. Полученные колонии соответствующих грибов проверяли под микроскопом на чистоту культуры и также пересевали в пробирки с аналогичной средой.

Простерилизованные семена анализируемых сортов выращивали на увлажненной фильтровальной бумаге в кюветах (подносах) в течение 3–5 дней при 22–24 °С, затем проростки помещали в приготовленную спорово-мицелиальную суспензию, налитую в чашки Петри с перфорированными крышками. Далее по методу Т.С. Антоновой [7] выдерживали в ней не менее 6 часов.

Визуальную оценку иммунологической характеристики проростков проводили также по методу Т.С. Антоновой [7].

Типы поражения проростков изучаемыми видами фузариев были одинаковыми, различия состояли лишь в количестве растений с поражениями 4–6 групп. Об идентичности повреждений проростков сильно и средне патогенными видами этого рода сообщается в литературе [10]. У подавляющего большинства проростков всех сортов, зараженных высокопатогенным штаммом *F. verticillioides*, погибли главные корни, гипокотиль и даже семядоли. Лишь у сорта Спартак небольшая часть проростков сохранила жизнеспособность. Иную картину наблюдали при заражении растений другими видами *Fusarium*. К высокопатогенным (интенсивность поражения проростков 4,2 и 4,8 балла, соответственно) штаммам *F. sporotrichioides* и *F. oxysporum* устойчивость проявили до 38,9 и 42,9 % проростков, соответственно. К менее патогенному – *F. tricinctum* (3,4 балла) – до 87,5 %. У растений с разной степенью устойчивости (1–3 группы поражения) через 2–3 дня образовывались боковые корни в верхней трети главного корня. Проростки, зараженные *F. sporotrichioides*, *F. oxysporum* и *F. tricinctum*, со сформировавшимися боковыми корешками, высаживали в рассадные горшочки и через 3 дня укрепившиеся в почве проростки высаживали в поле [7] для изучения их устойчивости в естественных условиях, поливая их утром и вечером. Однако в открытом грунте проростки начали погибать, начиная со второго дня, и к концу 4-го дня погибли все.

Реизоляция патогенов из зараженных проростков подтвердила, что растения погибли именно из-за данного вида.

Быстрая гибель проростков в открытом грунте, по нашему мнению, указывает на то, что этот метод может быть использован лишь для изучения устойчивости подсолнечника в лабораторных условиях.

Нами опробован также способ инокуляции инъекцией водной суспензии изучаемых патогенов в различ-

ные органы подсолнечника, применяемый и Т.С. Антоновой [10], и С.Г. Бородиным [2]. Этим способом инокулировали корзинки подсолнечника в фазы бутонизации и цветения, в гипокотиль, эпикотиль и нижнюю часть стебля в фазу начала бутонизации. При этом способ инъекции мы опробовали в двух вариантах: 1) концентрация спорово-мицелиальной суспензии составляла 5000 спор/мл [2]; 2) $1,2 \times 10^6$ – $1,2 \times 10^7$ в 1 мл [10].

Исследования показали, что 5000 спор/мл [2] – низкая концентрация инокулюма, не обеспечивавшая заражение корзинок и, как следствие, невозможность провести оценку устойчивости подсолнечника к этим патогенам, поскольку в месте инъекции образовывалась небольшая, не более 2–3 мм в диаметре, одревесневшая «язвочка», которую, на наш взгляд, невозможно отнести ни к проявлению устойчивости, ни к восприимчивости; в результате применения инокулюма в концентрации $1,2 \times 10^6$ – $1,2 \times 10^7$ в 1 мл [7] диаметр «язвочки» был заметно больше – 0,5–0,7 мм. Кроме того, в радиусе 1,0–1,5 см от места инъекции нами (при реизоляции) было зарегистрировано спороношение соответствующих возбудителей [12]. Реизоляция патогенов во всех случаях была положительной. Для дальнейших исследований мы отобрали метод инъекции суспензии патогенов в корзинку, поскольку столкнулись с трудностями при инъекции инокулюма в гипокотиль, эпикотиль и нижнюю часть стебля подсолнечника.

Указанные недостатки привели нас к необходимости создания нового, адаптированного к условиям Тамбовской области метода искусственного инфекционного фона грибов рода *Fusarium* для изучения устойчивости подсолнечника к корневой гнили.

Известно, что почва – естественный источник инфекции многими грибами, в т. ч. *Fusarium* spp. Однако в природе не всегда создаются благоприятные условия для их развития, следовательно, естественное заражение подсолнечника этими грибами невозможно использовать для изучения устойчивости растений (корней и корзинок) к патогенам. Исходя из изложенного, мы испытали три способа искусственного заражения подсолнечника тремя высокопатогенными видами этого рода: *F. sporotrichioides*, *F. oxysporum* (совместно с его разновидностью *F. oxysporum orthoceras*), *F. verticillioides*: 1 – посев зараженными семенами; 2 – инъекция инокулюма в тыльную сторону корзинки; 3 – опрыскивание цветоложа корзинки спорово-мицелиальной суспензией изучаемых патогенов в период цветения. В настоящей статье приведены результаты испытания **метода посева зараженными семенами**. Семена сорта Чакинский 931 стерилизовали по описанному выше методу и раскладывали в крышки чашек Петри, в которые предварительно раскладывали кружки стерильной фильтровальной бумаги, наливали приготовленную спорово-мицелиальную суспензию возбудителей. Объем суспензии, покрывающий семена, составлял 7,0–10,0 мл. Крышки с семенами ставили на подносы и накрывали сверху стеклом во избежание попадания на семена посторонней инфекции. Подготовленные таким образом семена инкубировали при 22–24 °С и естественных условиях освещения двое (1 вариант) и трое (2 вариант) суток. Зараженность семян оценивали по побурению проклюнувшихся проростков. Как и следовало ожидать, при трехсуточной инкубации количество заразившихся семян было большим. При этом длина проростков при двухсуточном заражении составляла 2–3 мм, при трехсуточном достигала 5–6 мм (рис. 1).

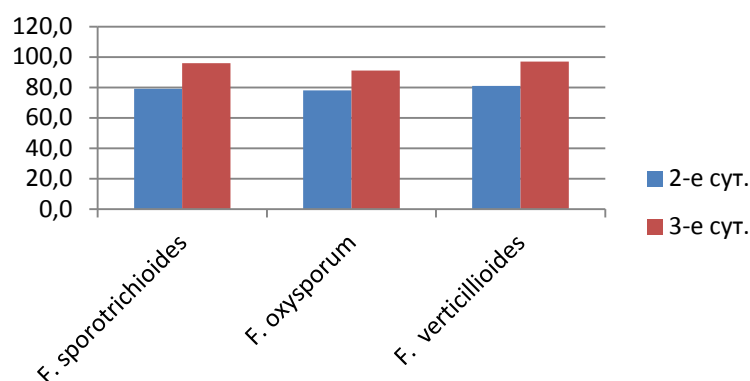


Рис. 1. Количество заразившихся семян сорта Чакинский 931 при разных сроках инкубации в суспензии патогена

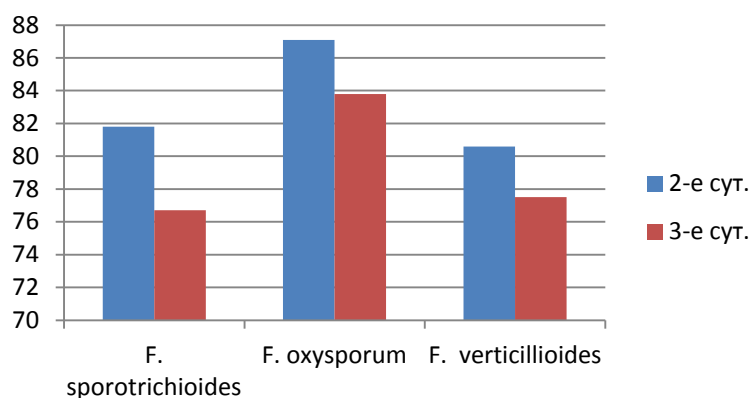


Рис. 2. Всхожесть семян подсолнечника сорта Чакинский 931 при разной продолжительности инкубации семян, %

Зараженные семена высаживали в поле для изучения их устойчивости к возбудителям фузариозной корневой гнили. Опыт проводили в трехкратной повторности, в каждой повторности по 3 ряда, в каждом ряду по 16 лунок. В каждую лунку высаживали по 5 семян, располагая семена на достаточном расстоянии друг от друга, в расчете на то, что в начале вегетации и в цветение растения будут удалены для подсчета количества пораженных корней. К созреванию в лунке оставляли по 1–2 растения. Всхожесть семян, зараженных изучаемыми патогенами, представлена на рис. 2.

На рис. 2 видно, что и на всхожести отразилось время инкубации зараженных семян: при трехсуточной инкубации всхожесть семян, зараженных патогенами, была ниже. Иммунологическую оценку пораженных растений проводили по разработанной нами пятибалльной системе (табл. 1). Наличие возбудителей на пораженных корнях проверяли реизолацией патогена из фрагментов корней растений.

Полученные результаты представлены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что почти четверть взошедших проростков погибла уже в фазе семядольных листьев – 1-я пара настоящих листьев, при этом трехсуточная инкубация зараженных семян вызвала большее число погибших проростков, по сравнению с двухсуточной инкубацией, на 3,6 % (*F. sporotrichioides*), 3,8 % (*F. oxysporum*) и 3,4 % (*F. verticillioides*). Поражение большей части выживших растений составляло 1–2 балла,

что, согласно нашей шкале, означало устойчивость и относительную устойчивость растений к фузариозной корневой гнили. В конце вегетации все три патогена проявились в полной мере: поражены были основания стеблей и отсутствовал центральный корень, что является критерием высокой восприимчивости растений к фузариозной корневой гнили. Несущественно отличалось также количество устойчивых и относительно устойчивых растений. Имелись, однако, некоторые различия в проявлении возбудителей в течение вегетации.

F. sporotrichioides. В период цветения у растений, пораженных на 1–2 балла, инфекция распространилась вверх по всему стеблю или в виде узкой, светло-бурой полосы с одной стороны, до корзинки. К полному цветению основание стебля окрасилось в светло-буроватый, к концу вегетации – бурый цвет.

F. oxysporum. К полному цветению основание стебля окрасилось в светло-буроватый цвет. К концу вегетации весь стебель приобрел буровато-серый оттенок, основание стебля – почти черного цвета. Растения у основания стебля искривлены, за счет чего они как бы стлались над почвой.

F. verticillioides в течение вегетации распространился по корневой системе и по стеблю, вплоть до корзинки. К полному цветению основание стебля окрасилось в светло-бурый цвет, к концу вегетации – в коричнево-бурый, весь стебель приобрел серо-коричневый оттенок, стал истонченным.

Таблица 1

Иммунологическая шкала для оценки устойчивости подсолнечника к фузариозной корневой гнили

Балл поражения	Симптомы поражения	Иммунологическая оценка
0	Корневая система и стебель здоровы	И – иммунитет
1	Поражено до 25,0 % верхних боковых корней	У – устойчивость
2	Поражено 25,0–50,0 % боковых корней, но здоров центральный корень	ОУ – относительная устойчивость
3	Поражен центральный корень и более 50,0 % боковых корней	В – восприимчивость
4	Отсутствует центральный корень и поражено основание стебля	ВВ – высокая восприимчивость

Таблица 2

Пораженность корневой системы подсолнечника при посеве зараженными семенами (сорт Чакинский 931, 2014–2015 гг.)

Поражено, балл, %											
3–4 листа				Цветение				Конец вегетации			
Погибло, %		0		1		2		3		4	
2-е сут.	3-и сут.	2-е сут.	3-и сут.	2-е сут.	3-и сут.	2-е сут.	3-и сут.	2-е сут.	3-и сут.	2-е сут.	3-и сут.
<i>F. sporotrichioides</i>											
21,9	25,5	5,6	2,2	19,4	19,0	21,9	22,3	17,3	17,4	13,8	13,6
<i>F. oxysporum</i>											
19,6	23,4	5,3	3,0	15,3	11,5	12,9	16,9	19,6	20,4	27,3	26,9
<i>F. verticillioides</i>											
19,2	22,6	6,8	4,3	16,6	9,7	13,5	17,2	19,2	19,9	24,7	27,4

Следует отметить, что *F. sporotrichioides* в нашей области чаще всего отмечали на стеблях и корзинках, гораздо реже – на корнях, тогда как *F. oxysporum* и *F. verticillioides*, напротив, являются возбудителями корневой гнили подсолнечника, причем у пораженных растений, как правило, отсутствовал центральный корень [9]. По нашему мнению, этим обстоятельством и объясняется тот факт, что количество пораженных корневой гнилью, вызываемой *F. sporotrichioides*, в два с лишним раза меньше.

Проведенные исследования показали, что метод посева зараженными семенами обеспечивает возможность отбора устойчивых к фузариозной корневой гнили растений, при этом количество дней инкубации зараженных семян в контролируемых условиях не меняет сути метода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований установлено следующее: лучшей питательной средой, обеспечивающей обильный рост спорово-мицелиальной массы, необходимой для приготовления инокулюма, является картофельно-сахарозный агар, содержащий по ¼ основных компонентов – картофеля (50 г) и сахарозы (5 г); для сохранения патогенности и агрессивности грибов необходимо в течение зимы в стерильных условиях заражать стерильные семена подсолнечника этими грибами, проверяя затем под микроскопом чистоту культуры; перспективным, адаптированным к условиям Тамбовской области, методом создания искусственного фона для изучения устойчивости подсолнечника к фу-

зариозной корневой гнили является **посев зараженными семенами, обеспечивающий** оптимальные условия и надежность заражения семян и корневой системы, приближая их к естественным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонова Т.С., Арасланова Н.М., Саукова С.Л. Распространение фузариоза подсолнечника в Краснодарском крае // Доклады РАСХН. 2002. № 2. С. 6-8.
2. Бородин С.Г., Котлярова И.А., Терещенко Г.А. Методы искусственного заражения подсолнечника грибами рода *Fusarium* // Масличные культуры: научно-технический бюллетень ВНИИМК. 2006. Вып. 2 (136). С. 73-78, 161-162, 169.
3. Булай В.И. Фузариоз. Киев: Наукова Думка, 1977. 443 с.
4. Obst A. Fifth european *Fusarium* Seminar – Mykotoxine, Taxonomie, Pathogenität und Resistenz // Gesunde Pflanzen. 1997. Bd. 49. № 8. S. 276-279.
5. Aćimović M. Prouzrokovaci bolesti suncokreta i njihovo suzbijanje. Beograd: Nolit, 1983. 104 s.
6. Котлярова И.А., Терещенко Г.А. Источники заражения растений подсолнечника грибами рода *Fusarium* // Масличные культуры: научно-технический бюллетень ВНИИМК. 2004. Вып. 2 (131). С. 62-64, 90, 96.
7. Антонова Т.С., Саукова С.Л. Оценка и отбор растений подсолнечника на устойчивость к фузариозной корневой гнили, вызываемой *F. sporotrichiella* var. *sporotrichiella* Shear: методические указания. Краснодар, 2005. 20 с.
8. Выприцкая А.А., Пучнин А.М., Кузнецов А.А. Грибы рода *Fusarium* Link et Fr. на подсолнечнике в Тамбовской области // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 394-398.
9. Кузнецов А.А. Патогенность грибов рода *Fusarium* Link et Fr. к проросткам подсолнечника в Тамбовской области // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 2. С. 768-771.
10. Антонова Т.С., Саукова С.Л., Клипперт Ю.В. Реакция корней и стеблей подсолнечника на заражение грибами рода *Fusarium* // Вестник РАСХН. 2006. № 2. С. 59-61.

11. Reis E.M. Selective medium for isolating *Cochliobolus sativus* from soil // *Plant Dis.* 1983. V. 67. № 1. P. 68-70.
12. Кузнецов А.А., Выприцкая А.А. Результаты изучения устойчивости подсолнечника к патогенным видам рода *Fusarium* Link et Fr. // Биологическая защита растений – основа стабилизации агроэкосистем: материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Инновационные

технологии применения биологических средств защиты растений в производстве органического сельскохозяйственной продукции». Краснодар, 2014. С. 376-378.

Поступила в редакцию 9 февраля 2016 г.

UDC 633.854.78:632.25

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-613-618

METHODS OF ARTIFICIAL INFECTION OF SUNFLOWER TOADSTOOL OF GENUS *FUSARIUM* LINK ET FR. IN THE CONDITIONS OF TAMBOV REGION

© A.A. Kuznetsov, A.A. Vypritskaya, Y.V. Zeleneva

At the result of long-lasting (1992–2015) observations in Tambov region at minimum 14 species of toadstool of genus *Fusarium* Lk. et Fr. were registered, five of which (*F. oxysporum* (including *F. oxysporum* var. *orthoceras*), *F. verticillioides*, *F. tricinctum*, *F. sporotrichioides*) are highly harmful. The work presents the results of research on use of some methods of artificial infectious background creation *F. oxysporum*, *F. verticillioides* и *F. sporotrichioides*, many of which are were considered to be harmful to be used in the conditions of Tambov region. The necessity to create new, adopted to the conditions of Tambov region method for studying the resistance of sunflower to *Fusarium* root rot. The results of research showed the possibility of resistant to *Fusarium* root rot plants by method of sowing the infected seeds.

Key words: sunflower; *Fusarium* wilt; root rot; method; agent; pathogenicity; harmfulness; inoculation; infectious background; resistance.

REFERENCES

1. Antonova T.S., Araslanova N.M., Saukova S.L. Rasprostranenie fuzarioza podsolnechnika v Krasnodarskom krae. *Doklady Rossiyskoy akademii sel'skokhozyajstvennykh nauk*, 2002, no. 2, pp. 6-8.
2. Borodin S.G., Kotlyarova I.A., Tereshchenko G.A. Metody iskusstvennogo zarazheniya podsolnechnika gribami roda *Fusarium*. *Maslichnye kul'tury: nauchno-tehnicheskij byulleten' Vserossiyskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta maslichnykh kul'tur*, 2006, no. 2 (136), pp. 73-78, 161-162, 169.
3. Bilay V.I. *Fuzarii*. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1977. 443 p.
4. Obst A. Fifth european *Fusarium* Seminar – Mykotoxine, Taxonomie, Pathogenität und Resistenz. *Gesunde Pflanzen*, 1997, Bd. 49, № 8, S. 276-279. (In German).
5. Aćimović M. Prouzrokovaci bolesti suncokreta i njihovog suzbijanje. Beograd, Nolit Publ., 1983. 104 s. (In Serbian).
6. Kotlyarova I.A., Tereshchenko G.A. Istochniki zarazheniya rastenij podsolnechnika gribami roda *Fusarium*. *Maslichnye kul'tury: nauchno-tehnicheskij byulleten' Vserossiyskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta maslichnykh kul'tur*, 2004, no. 2 (131), pp. 62-64, 90, 96.
7. Antonova T.S., Saukova S.L. Ocenka i otbor rastenij podsolnechnika na ustojchivost' k fuzarioznoj kornevoj gnili, vyzyvajemoj *F. sporotrichiella* var. *sporotrichiella* Shear. Krasnodar, 2005. 20 p.
8. Vypritskaja A.A., Puchnin A.M., Kuznecov A.A. Griby roda *Fusarium* Link et Fr. na podsolnechnike v Tambovskoj oblasti. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Serija Estestvennye i tehicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. Tambov, 2012, vol. 17, no. 1. pp. 394-398.
9. Kuznecov A.A. Patogennost' gribov roda *Fusarium* Link et Fr. k prorostkam podsolnechnika v Tambovskoj oblasti. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Serija Estestvennye i tehicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*. Tambov, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 768-771.
10. Antonova T.S., Saukova S.L., Klippert Ju.V. Reakcija kornej i stebelj podsolnechnika na zarazhenie gribami roda *Fusarium*. *Vestnik Rossijskoy akademii sel'skokhozyajstvennykh nauk*, 2006, no. 2, pp. 59-61.
11. Reis E.M. Selective medium for isolating *Cochliobolus sativus* from soil. *Plant Dis.* 1983, vol. 67, no. 1, pp. 68-70.
12. Kuznecov A.A., Vypritskaja A.A. Rezul'taty izucheniya ustojchivosti podsolnechnika k patogennym vidam roda *Fusarium* Link et Fr. *Biologicheskaja zashhita rastenij – osnova stabilizacii agrojekosistem: materialy Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii «Innovacionnye tehnologii primenenija biologicheskikh sredstv zashhity rastenij v proizvodstve organicheskogo sel'skokhozyajstvennoj produkcii»*. Krasnodar, 2014, pp. 376-378.

Received 9 February 2016

Кузнецов Александр Анатольевич, Среднерусский филиал Тамбовского научно-исследовательского института сельского хозяйства Россельхозакадемии, п. Новая жизнь, Тамбовский район, Тамбовская область, Российская Федерация, научный сотрудник, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Kuznetsov Aleksander Anatolevich, Middle Russian branch of Tambov Scientific Research Institute of Agriculture of Russian Academy of Agriculture, settlement Novaya Zhizn, Tambov region, Tambov province, Russian Federation, Research Worker, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Выприцкая Ася Александровна, Среднерусский филиал Тамбовского научно-исследовательского института сельского хозяйства Россельхозакадемии, п. Новая жизнь, Тамбовский район, Тамбовская область, Российская Федерация, кандидат биологических наук, руководитель группы болезней подсолнечника, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Vypritskaya Asya Aleksandrovna, Middle Russian branch of Tambov Scientific Research Institute of Agriculture of Russian Academy of Agriculture, settlement Novaya Zhizn, Tambov region, Tambov province, Russian Federation, Candidate of Biology, Head of Sunflower Diseases Group, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Зеленева Юлия Витальевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры медицинской биологии с курсом инфекционных болезней, e-mail: zelenewa@mail.ru

Zeleneva Yuliya Vitalevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Associate Professor of Medical Biology with a Course of Infectious Diseases Department, e-mail: zelenewa@mail.ru

УДК 632.4.01/.08
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-619-623

РАСПРОСТРАНЕННОСТЬ И РАЗВИТИЕ ВОЗБУДИТЕЛЕЙ ЛИСТОВЫХ ПЯТНИСТОСТЕЙ НА ТЕРРИТОРИИ ЦЕНТРАЛЬНО-ЧЕРНОЗЕМНОГО РЕГИОНА

© Ю.В. Зеленева, В.П. Судникова

На основании проведенных исследований выяснено, что лидирующее положение в Тамбовской области занимают септориозные пятнистости (*Septoria tritici* Rob. et. Desm., *Stagonospora avenae* f. sp. *triticea* Jons., *Stagonospora nodorum* [Berk.] Castellani et E.G. Germano), ржавчинные заболевания (бурая ржавчина *Puccinia recondita* Rob. ex Desm. f. sp. *tritici*), пиренофороз (*Pyrenophora tritici repentis*), альтернариозные пятнистости (возбудитель – *Alternaria* spp.). Для стабилизации фитосанитарного состояния агроценозов первоочередной задачей является систематический мониторинг популяционной структуры фитопатогенов на территории Центрально-Черноземного региона для осуществления учета частоты встречаемости видов, определения их положения в фитоценозе и их динамики.

Ключевые слова: бурая ржавчина; септориоз пшеницы; альтернариозные пятнистости; мучнистая роса; пшеница.

ВВЕДЕНИЕ

Потенциал урожайности зерновых культур зависит от таких элементов структуры урожая, как общая и продуктивная кустистость, число колосьев на 1 м², число зерен в колосе, масса 1000 зерен. Для реализации перечисленных возможностей растению на всех этапах развития необходимо создавать условия, помогающие избежать потери урожая. В этом немаловажная роль отводится защите посевов от болезней, и в частности, от возбудителей, поражающих лист. Установлено, что удаление листовых пластинок верхних двух листьев приводит к снижению на 15–30 % урожая и значительному ухудшению его качества, наблюдаемому при повреждении растения болезнями и вредителями [1].

Листовые пятнистости являются наиболее эпифитотийно опасными заболеваниями пшеницы на территории Центрально-Черноземного региона, вызывающими значительные потери урожая [2–3].

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

В период с 2008 по 2015 г. проводили обследования пшеницы на производственных посевах, полях НИИ и госсортоучастках территории ЦЧР. При сборе образцов пораженных растений особое внимание уделяли районированным в регионе сортам. В результате были собраны образцы с пятидесяти сортов озимой мягкой, тридцати яровой мягкой и пятнадцати яровой твердой пшеницы [4, 5].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основании проведенных исследований было выяснено, что лидирующее положение в Тамбовской области занимают септориозные пятнистости (*Septoria tritici* Rob. et. Desm., *Stagonospora avenae* f. sp. *triticea* Jons., *Stagonospora nodorum* [Berk.] Castellani et E.G. Germano), ржавчинные заболевания (бурая ржавчина *Puccinia triticina*), пиренофороз (*Pyrenophora*

tritici repentis), альтернариозные пятнистости (возбудитель – *Alternaria* spp.).

Полученные данные свидетельствуют о том, что патогенный комплекс возбудителей листовых пятнистостей в Тамбовской области изменяется и преобразуется с течением времени. Доля одних возбудителей уменьшается, других – напротив, увеличивается. На эти изменения оказывают влияние агроклиматические факторы, которые могут быть весьма специфичными для каждого конкретного года, а также биологические особенности сортов растений-хозяев.

Так, например, особенно сильное развитие бурой ржавчины (возбудитель – *Puccinia triticina*) наблюдалось в 2009 и 2012 гг. (рис. 1, 2).

Распространенными и эпифитотийно опасными по-прежнему являются септориозные пятнистости. Видовой состав возбудителей септориоза пшеницы был представлен грибами *Septoria tritici* Rob. et. Desm., *Stagonospora avenae* f. sp. *triticea* Jons., *Stagonospora nodorum* [Berk.] Castellani et E.G. Germano.

Распространение этих видов септориозных пятнистостей пшеницы в ЦЧР, по-видимому, обусловлено благоприятными климатическими факторами для их развития. Годы, в течение которых проводились исследования, были неодинаковы по среднемесячным значениям температуры, а также характеризовались значительными колебаниями выпадения осадков. Учитывая высокую отзывчивость болезней зерновых культур на обеспеченность влагой и температурный режим, можно объяснить причину изменения частоты встречаемости видов, вызывающих септориоз, в различные годы в Тамбовской области. Так, согласно литературным данным, оптимальная температура для *S. tritici* составляет от +16 до +25 °С, а для *S. nodorum* – от +12 до +26 °С [4]. Кроме того, в распространении септориоза имеет большое значение умеренно холодная зима и теплое лето с достаточной увлажненностью. При этом также необходимо учитывать роль биологических свойств сорта-хозяина.

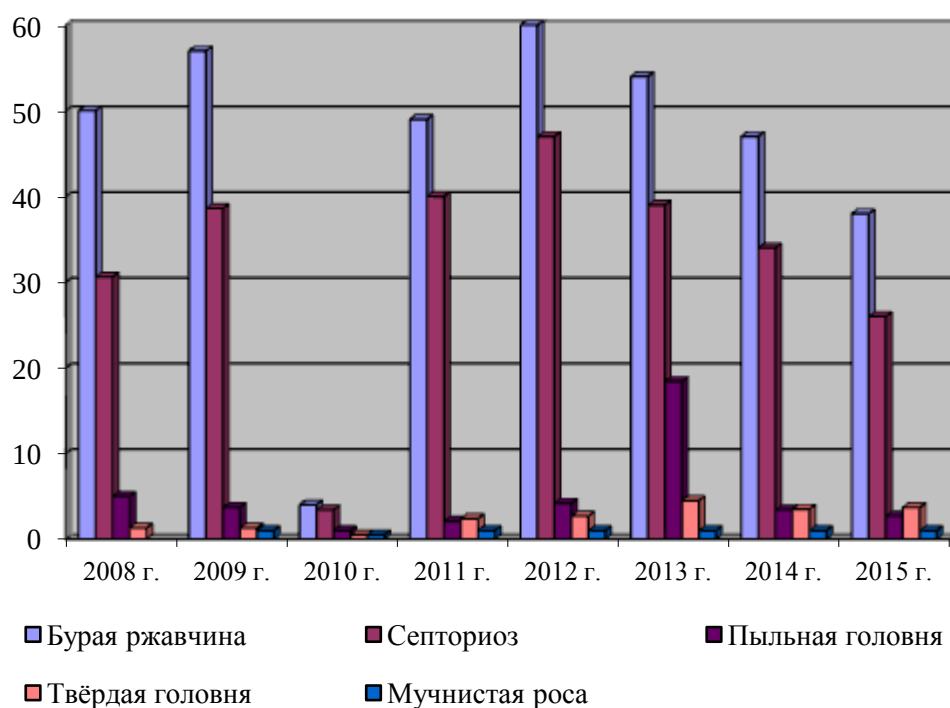


Рис. 1. Интенсивность поражения болезнями посевов озимой мягкой пшеницы в Центрально-Черноземном регионе (2008–2015 гг.)

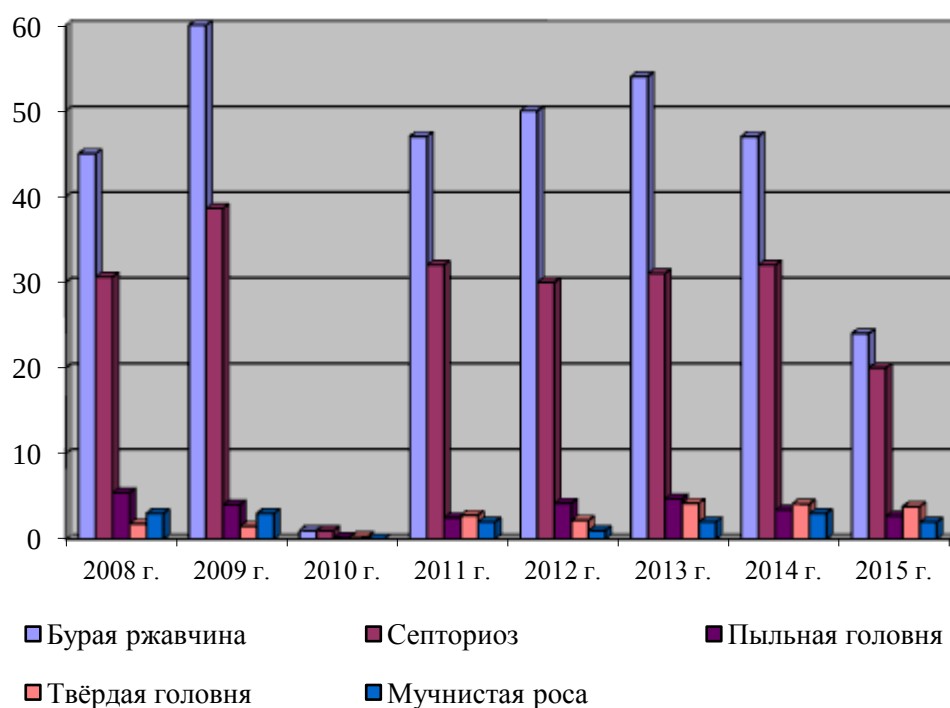


Рис. 2. Интенсивность поражения болезнями посевов яровой пшеницы в Центрально-Черноземном регионе (2008–2015 гг.)

Доминирующим видом на протяжении всех лет изучения был *Septoria tritici*. Частота его встречаемости как на озимых, так и на яровых сортах превышала

90 %. На мягкой яровой пшенице она составляла 92 %, на мягкой озимой – 94 %, на твердой яровой пшенице – 99 %.

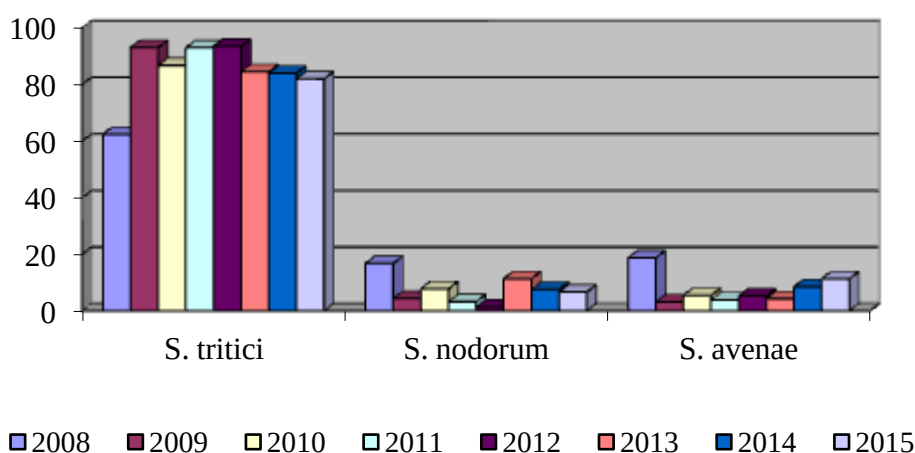


Рис. 3. Частота встречаемости видов септориоза в 2008–2015 гг.

Вторым по частоте встречаемости был вид *Stagonospora avenae*. Данный гриб отмечался на мягкой озимой и мягкой яровой пшенице в 6 % случаев. Реже всего патоген регистрировался на твердой яровой пшенице – 1 % от общего количества.

Что же касается вида *Stagonospora nodorum*, то он был отмечен на озимой и яровой пшенице (частота встречаемости – 1 и 2 % соответственно). Таким образом, несмотря на благоприятные погодные условия, не наблюдалось высокой распространенности видов *Stagonospora nodorum* и *Stagonospora avenae* (рис. 3).

Среди большого числа вредоносных грибных болезней пшеницы доминирующее положение в настоящее время занимает бурая ржавчина. Патоген *Puccinia tritica* представляет собой опасность в течение всего периода вегетации растений: от всходов до созревания. Для эффективного контроля эпифитотий необходимы знания структуры популяций возбудителей, устойчивости сортов, региональных агроэкологических особенностей возделывания культуры и развития патогена.

В результате проведенных исследований было установлено, что популяция возбудителя бурой ржавчины пшеницы обладает большой степенью гетерогенности. Она включает 44 аллели вирулентности. Доминируют высокоагрессивные рр-гены, на долю которых в структуре приходится до 56,5 % поразившихся сортов от числа изученных.

По степени выраженности фенотипы популяций на районированных сортах яровой и озимой пшеницы разделялись на слабовыраженный фенотип (0–15 генов вирулентности), средневыраженный фенотип (15–17 генов вирулентности) и высоковыраженный (18 и более генов вирулентности).

Преобладал высоковыраженный фенотип. Он формировался на сортах яровой пшеницы: Тризо, Л-503, Лебедушка, Воронежская 16, Виза-Виза, Воронежская 6, Симбирцит, Курская 2038, Жница, Иволга, Экадо 109, Софья, Обская 14; озимой пшеницы: Синтетик, Черноземка 115, Мироновская 808, Рубин, Заря, Скипетр, Бирюза, Базальт.

Наиболее высокий показатель зарегистрирован на сорте Базальт – 35 рр-генов. Субпопуляции патогена из этих же сортов обладали также и высоким индексом вирулентности – от 0,7 до 3,9 ед.

Полученные данные показали, что при составлении селекционных программ на иммунитет при создании сортов, обладающих эффективной устойчивостью к бурой ржавчине на территории ЦЧР, можно рекомендовать селекционерам использовать изогенные линии, несущие Lr9, Lr14ав, Lr19, Lr25, Lr28, Lr29, Lr36, Lr38, Lr47, Lr Tr, Lr39 (41), Lr40, Lr44, Lr50. Данные гены проявляют ювенильную устойчивость, являются эффективными и высокоэффективными.

На яровую пшеницу бурая ржавчина попадает преимущественно с озимых сортов, ближе к концу вегетации растений. Поэтому, на наш взгляд, главная роль должна принадлежать сортам с неспецифической и возрастной устойчивостью. Использование генов Lr22, Lr28, Lr37 и Lr44 обеспечивают защиту на более поздних периодах развития ржавчины.

Ежегодно отмечается нарастание в патогенном комплексе альтернариозных пятнистостей (возбудитель – *Alternaria alternata*).

Род *Alternaria* представляет собой весьма большую и разнообразную по биологическим характеристикам группу микромицетов, многие из которых имеют широкое распространение. Среди представителей этого рода известны виды с разной степенью паразитизма (от сапротрофов до биотрофов), уровнем специализации и специфическими взаимоотношениями с растениями-хозяевами. Виды рода *Alternaria* часто обнаруживаются на злаках и считаются возбудителями черного зародыша и листовой пятнистости зерновых культур во многих странах мира. Они способны «загрязнять» зерно своими метаболитами, токсичными не только для растений, но и для человека и животных [6]. Для идентификации возбудителя проведена изоляция гриба в чистую культуру.

Были получены изоляты с девяти сортов мягкой озимой пшеницы: Ариадна, Белгородская 16, Волжская 100, Дон 93, Заря, Льговская 4, Льговская 167, Московская 56, Московская 70, а также с шести сортов яровой пшеницы: Биора, Дарья, Жница, Кинельская 97, Краснокутка 10 и Красноуфимская. При выращивании на картофельно-морковном агаре колонии со всех представленных сортов (как озимых, так и яровых) имели бархатистый слабо развитый воздушный мицелий, серого цвета, иногда с вкраплениями оливкового или

розового пигмента. Данный тип колоний является характерным для *Alternaria alternata*, что в дальнейшем и было подтверждено методами микроскопии.

В последние годы на посевах пшеницы территории ЦЧР получает распространение желтая пятнистость (пиренофороз). Первые симптомы болезни наблюдаются весной в виде мелких желто-коричневых пятен, которые увеличиваются и принимают форму линзы, окруженной небольшой желтой зоной. Затем пятна срастаются и распространяются от верхушки листа к его основанию, листья желтеют и отмирают. Степень проявления болезни зависит от стадии развития растений пшеницы, погодных условий, концентрации инокулюма. Нижние более старые листья поражаются сильнее, чем молодые [7]. Максимальное поражение возбудителем наблюдается в фазе молочно-восковой спелости растений. Относительную устойчивость проявили районированные в 5 регионе сорта яровой пшеницы Безенчукская 182, Донская элегия, КВС Авилон и озимой Антонивка, Безенчукская 380, Звонница.

Мучнистая роса (*Erysiphe graminis* D.C.Sp. tritici Em. Marchal) проявляется на листьях, стеблях, листовых влагалищах, колосьях. Болезнь можно распознать по белому налету, образованному мицелием и конидиеносцами на поверхности листьев, а на более поздних стадиях – по сферическим темно-коричневым или черным плодовым подушечками (клейстокарпиями), которые развиваются на сплетениях мицелия. Отмечено, что возбудитель сильнее развивается на посевах озимой пшеницы, посеянной в ранние, а яровой – в поздние сроки. Усилению болезни способствует чередование сухой и влажной погоды. Вспышки болезни отмечались в годы с относительно прохладной погодой весной или в начале лета. При испытании сортообразцов Северо-американской и Латиноамериканской гибридных групп, СИММИТ, а также сортов и гибридов из Восточноазиатской экологической группы отобрано 25 сортообразцов, устойчивых к болезни. В их числе:

сложные гибриды под каталогами 31197, 31168, 31174, 31239, 32284, 33689, 366618, 31232, 31265, 31362, 34267 – США, 31770, 34928, 34932, 30649, 34955 – Мексика, 30107, 30304, 31781, 31891, 32050, 32069, 32216, 32380 – СИММИТ, 30630 – Сирия.

Таким образом, считаем, что для стабилизации фитосанитарного состояния агроценозов первоочередной задачей является систематический мониторинг популяционной структуры фитопатогенов на территории ЦЧР для осуществления учета частоты встречаемости видов, определения их положения в фитоценозе и их динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петин Н.С., Павлов А.Н. О роли отдельных органов в наливе зерна пшеницы // ДАН СССР. 1957. № 117 (1). С. 146-149.
2. Зеленева Ю.В., Плехотник В.В., Судникова В.П., Денисова Ю.М. Создание источников устойчивости яровой пшеницы к опасным болезням и вредителям в условиях Центрального Черноземья // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2015. № 3 (57). С. 20-27.
3. Плехотник В.В., Зеленева Ю.В., Судникова В.П. Источники и высокоэффективные доноры для селекции яровой пшеницы на устойчивость к стрессовым факторам среды // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2014. № 1 (50). С. 109-113.
4. Зеленева Ю.В., Судникова В.П. Устойчивость видов *Triticum* L. к возбудителям заболевания септориоза // Теоретические и прикладные аспекты современной науки. Серия: естественно-техническая. Тамбов, 2015. С. 137-154.
5. Зеленева Ю.В. Иммунологическое обоснование селекции пшеницы на устойчивость к возбудителю *Septoria tritici* Rob. et. Desm. в условиях ЦЧР: автореф. дис. ... канд. сельскохозяйств. наук. Мичуринск, 2009. 23 с.
6. Ганнибал Ф.Б. Виды рода *Alternaria* в семенах зерновых культур в России // Микология и фитопатология. 2008. Т. 42. № 2. С. 359-368.
7. Cox D.J., Hosford R.M. Resistance winter wheats compared at differing growth stages and leaf positions for tan spot severity // Plant Dis. 1987. V. 71. P. 883-886.

Поступила в редакцию 10 марта 2016 г.

UDC 632.4.01/08

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-619-623

PREVALENCE AND DEVELOPMENT OF LEAF SPOTTINESS AGENTS ON THE TERRITORY OF CENTRAL AND BLACK EARTH REGION

© Y.V. Zeleneva, V.P. Sudnikova

On the basis of the survey, it was found that the leading position in the Tambov province occupy septoria blotch (*Septoria tritici* Rob. et Desm., *Stagonospora avenae* f. sp. triticea Jons., *Stagonospora nodorum* [Berk.] Castellani et E.G. Germano), rust diseases (leaf rust *Puccinia recondita* Rob. ex Desm. f. sp. tritici), pirenophorosis (*Pyrenophora tritici repens*), alternariosis spot (pathogen – *Alternaria* spp.). We believe that in order to stabilize the phytosanitary condition of agroecosystems priority is the systematic monitoring of population structure of plant pathogens in the territory of the Central Black Earth region for the implementation of accounting frequency of occurrence of the species to determine their position in the phytocenosis and their dynamics.

Key words: brown rust; septoriososis of wheat; alternariosis spot; powdery mildew; wheat.

REFERENCES

1. Petinov N.S., Pavlov A.N. O roli otchel'nykh organov v nalive zerna pshenitsy. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1957, no. 117 (1), pp. 146-149.
2. Zeleneva Yu.V., Plakhotnik V.V., Sudnikova V.P., Denisova Yu.M. Sozdanie istochnikov ustoychivosti yarovoy pshenitsy k opasnym bolezniam i vreditelyam v usloviyakh Tsentral'nogo Chernozem'ya. *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet imeni V.I. Vernadskogo*, 2015, no. 3(57), pp. 20-27.
3. Plakhotnik V.V., Zeleneva Yu.V., Sudnikova V.P. Istochniki i vysokoeffektivnye donory dlya selektsii yarovoy pshenitsy na ustoychivost' k stressovym faktoram sredy. *Voprosy sovremennoy nauki i praktiki. Universitet imeni V.I. Vernadskogo*, 2014, no. 1 (50), pp. 109-113.
4. Zeleneva Yu.V., Sudnikova V.P. Ustoychivost' vidov *Triticum L.* k vozbuditelyam zabolevaniya septorioza. *Teoreticheskie i prikladnye aspekty sovremennoy nauki. Seriya: estestvenno-tekhnicheskaya*, Tambov, 2015, pp. 137-154.
5. Zeleneva Yu.V. *Immunologicheskoe obosnovanie selektsii pshenitsy na ustoychivost' k vozbuditelyu Septoria tritici Rob. et. Desm. v usloviyakh TsChR*. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata sel'skokhozyaystvennykh nauk. Michurinsk, 2009. 23 p.
6. Gannibal F.B. Vidy roda *Alternaria* v semenakh zernovykh kul'tur v Rossii. *Mikologiya i fitopatologiya*, 2008, vol. 42, no. 2, pp. 359-368.
7. Cox D.J., Hosford R.M. Resistance winter wheats compared at differing growth stages and leaf positions for tan spot severity. *Plant Dis.*, 1987, vol. 71, pp. 883-886.

Received 10 March 2016

Зеленева Юлия Витальевна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры медицинской биологии с курсом инфекционных болезней, e-mail: zelenewa@mail.ru

Zeleneva Yuliya Vitalevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Associate Professor of Medical Biology with a Course of Infectious Diseases Department, e-mail: zelenewa@mail.ru

Судникова Валентина Павловна, Среднерусский филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Тамбовский научно-исследовательский институт сельского хозяйства» (Среднерусский филиал ФГБНУ Тамбовский НИИСХ), п. Новая жизнь, Тамбовский район, Тамбовская область, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, ведущий научный сотрудник иммунитета растений, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Sudnikova Valentina Pavlovna, Middle Russian branch of Federal State budgetary scientific institution "Tambov Scientific-Research Institute of Agriculture" (Middle-Russian branch of FSBSI Tambov Scientific-Research Institute of Agriculture), settlement Novaya Zhizn, Tambov district, Tambov province, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Leading Research Worker of Plants Immune System Laboratory, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

УДК 632. 914

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-624-626

ЗАВИСИМОСТЬ УРОЖАЙНОСТИ ПРОСА ОТ ФАКТОРОВ ПОГОДЫ В УСЛОВИЯХ ТАМБОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© В.В. Чекмарев, Ю.В. Зеленева

В Тамбовской области выращивают многие культурные растения, в т. ч. просо. Их урожайность во многом зависит от складывающихся условий погоды. Не все погодные факторы оказывают решающее влияние на величину урожая. Ведущая роль принадлежит осадкам и температуре воздуха. Данные факторы оказывают влияние на продуктивность растений в определенный период их развития. Выявление ведущих факторов погоды и периода их влияния на растения позволяет прогнозировать урожайность сельскохозяйственных культур. Целью исследований было изучение зависимости продуктивности растений проса от погодных условий вегетационного периода. В работе были использованы многолетние результаты полевых опытов и данные метеорологических наблюдений. Математические расчеты проводились с применением компьютерной техники и программы Excel. Установлено, что на урожайность культуры существенное влияние оказывали факторы погоды мая и июня. В наибольшей степени этот показатель зависел от гидротермических условий. Величина корреляции (R) между урожайностью проса и гидротермическим коэффициентом (ГТК) мая составила 0,735, июня – 0,600, за весь период – 0,931. Высокий уровень продуктивности культуры (2,11–2,93 т/га) отмечен в годы, когда ГТК за вышеуказанный период составил 1,16–2,00. В годы с низкой урожайностью проса (1,32–1,89 т/га) гидротермический коэффициент за период май–июнь находился на уровне 0,21–0,83. Получено уравнение прямолинейной регрессии, отражающее данную зависимость. Ретроспективный анализ показал удовлетворительную сходимость ожидаемой и фактической урожайности культуры.

Ключевые слова: просо; урожайность; гидротермический коэффициент (ГТК); уравнение прямолинейной регрессии; прогноз.

ВВЕДЕНИЕ

Продуктивность растений проса в условиях Тамбовской области часто ограничивается недостатком влаги в период вегетации. Температура воздуха также играет важную роль – она оказывает существенное влияние на испаряемость влаги. Формула гидротермического коэффициента (ГТК), представляющая собой соотношение этих показателей, позволяет оценить погодные условия как благоприятные или негативные для формирования урожайности культурных растений. Данная формула была получена Г.Т. Селяниновым в 1928 г. [1]. Этот показатель характеризует степень увлажнения территории за определенный период и может использоваться для оценки вероятной урожайности сельскохозяйственных культур. Для получения более точной оценки влияния факторов погоды на продуктивность растений необходим анализ многолетних данных. Ранее было установлено, что урожайность яровых пшеницы и ячменя в условиях Тамбовской области зависит от погодных факторов мая и июня [2–3]. Полученные результаты позволили предположить, что на продуктивность других яровых зерновых культур, в частности проса, оказывают влияние те же факторы погоды. В связи с этим цель исследований заключалась в изучении зависимости урожайности этой культуры от гидротермических условий.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

В качестве материала исследований использовались результаты по определению урожайности проса на

опытном поле Тамбовского НИИСХ и данные метеорологических наблюдений, представленные в монографии Н.Д. Коновалова [4]. В работе применялись методы расчетов, изложенные в руководстве К.М. Степанова и А.Е. Чумакова [5]. Вычисления проводились с использованием компьютерной техники и программы Excel.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В результате исследований было установлено, что наибольшее влияние на урожайность проса оказывали гидротермические условия мая и июня. Коэффициенты корреляции, отражающие связь ГТК с продуктивностью растений, за эти месяцы составили 0,600–0,735. Наибольшей величины (0,931) данный показатель достиг при среднем значении гидротермического коэффициента за вышеуказанный период (табл. 1).

Как свидетельствуют полученные результаты, при значениях ГТК за май–июнь 0,21–0,83 урожайность проса составила 1,32–1,89 т/га, при 1,16–2,00 данный показатель варьировал от 2,11 до 2,93 т/га. Высокий уровень продуктивности культуры чаще наблюдался в годы, когда гидротермические коэффициенты мая и июня были выше единицы или близки к ней. При дальнейших расчетах было получено уравнение прямолинейной регрессии:

$$Y = 1,30 + 0,82 X, \quad (1)$$

где Y – ожидаемая урожайность проса, т/га; X – суммарный индекс погоды, численно равный ГТК за период май–июнь.

Таблица 1

Гидротермические условия мая–июня и урожайность проса (Тамбовский НИИСХ)

Год	Урожайность проса, т/га	ГТК		
		Май	Июнь	Среднее
1971	1,74	0,13	1,53	0,83
1972	1,32	0,80	0,07	0,44
1973	2,57	0,77	1,97	1,37
1975	1,60	0,34	0,28	0,31
1976	2,93	3,03	0,97	2,00
1977	2,11	0,65	1,66	1,16
1978	2,72	1,51	1,41	1,46
1980	2,64	2,46	1,02	1,74
1981	1,61	0,36	0,05	0,21
1983	2,52	1,29	1,21	1,25
1984	1,89	0,28	0,46	0,37
1985	2,42	0,47	2,51	1,49
1986	1,54	0,39	0,44	0,42
1989	2,36	1,33	0,99	1,16
1990	2,29	0,77	2,04	1,41
Коэффициент корреляции, R		0,735	0,600	0,931

Проверка уравнения регрессии с помощью ретроспективного анализа показала удовлетворительные результаты. Среднее арифметическое отклонение составило 0,16 т/га (8,1 %), среднее квадратическое – 0,18 т/га (10,4 %), оправдываемость (вероятность) прогноза – 93,3 %. Ожидаемая урожайность проса в целом была близка к фактической, полученной при обмолоте зерна.

ВЫВОДЫ

В условиях Тамбовской области на урожайность проса существенное влияние оказывают гидротермические условия мая и июня. Высокая урожайность культуры (2,11–2,93 т/га) отмечена в годы, когда ГТК за период май–июнь составлял 1,16–2,00. Данная зависимость и полученное уравнение регрессии могут ис-

пользоваться при составлении прогноза урожайности проса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селянинов Г.Т. О сельскохозяйственной оценке климата // Труды по сельскохозяйственной метеорологии. 1928. Вып. 20. С. 169-178.
2. Чекмарев В.В. Погодные условия и урожайность яровой пшеницы // Зерновое хозяйство России. 2012. № 1 (19). С. 27-29.
3. Чекмарев В.В., Постовая О.В. Влияние погодных факторов на урожайность ярового ячменя // Зерновое хозяйство России. 2013. № 4 (28). С. 5-7.
4. Коновалов Н.Д. Динамика изменения погоды за 1891–2000 годы на территории Тамбовской области (ЦЧЗ) и урожайность полевых культур. Тамбов: Пролетарский светоч, 2000. 139 с.
5. Степанов К.М., Чумаков А.Е. Прогноз болезней сельскохозяйственных растений. Л.: Колос, 1972. 271 с.

Поступила в редакцию 10 марта 2016 г.

UDC 632. 914
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-624-626

THE DEPENDENCE OF THE YIELD OF MILLET ON THE WEATHER FACTORS IN THE CONDITIONS OF THE TAMBOV PROVINCE

© V.V. Chekmarev, Y.V. Zeleneva

Many cultural plants including millet grow in the Tambov province. Their productivity depends on forming conditions of the weather. Not all weather factors render the solving influence upon value of the harvest. The leading role belongs to the total precipitates and temperature of the air. The given factors influence on productivity of the plants in determined period of their development. Discovery of leading factors of the weather and period of their influence on plants allows forecast the productivity of the crops. The purpose of the study is to study dependence of productivity of the millet' plants on weather conditions of vegetative period. The long-term data of field experience and results of the meteorological observations were used in work. The

mathematical calculations were conducted with use of computer technology and program Excel. It was established that the factors of the weather of the May and June have significant influence on productivity of the culture. This factor in the most degree depended on hydrothermal conditions. The value of correlations (R) between productivity of millet and hydrothermal coefficient (HTC) of the May was 0.735, June – 0.600, for the whole period – 0.931. The high level of productivity of the culture (2.11–2.93 t/h) was registered in years, when HTC for above named period was on the level 1.16–2.00. In years with low productivity of millet (1.32–1.89 t/h) the hydrothermal coefficient for period May–June was at a rate of 0.21–0.83. Equation of rectilinear regression was received, reflecting given dependency. The retrospective analysis shows satisfactory convergence of expected and actual productivity of the culture.

Key words: millet, harvest; hydrothermal coefficient (HTC); equation to rectilinear regression; forecast.

REFERENCES

1. Selyaninov G.T. O sel'skokhozyaystvennoy otsenke klimata. *Trudy po sel'skokhozyaystvennoy meteorologii*, 1928, no. 20, pp. 169-178.
2. Chekmarev V.V. Pogodnye usloviya i urozhaynost' yarovoy pshenitsy. *Zernovoe khozyaystvo Rossii*, 2012, no. 1 (19), pp. 27-29.
3. Chekmarev V.V., Postovaya O.V. Vliyaniye pogodnykh faktorov na urozhaynost' yarovogo yachmenya. *Zernovoe khozyaystvo Rossii*, 2013, № 4 (28), pp. 5-7.
4. Kononov N.D. *Dinamika izmeneniya pogody za 1891–2000 gody na territorii Tambovskoy oblasti (Tsentral'no-Chernozemnyy zapovednik) i urozhaynost' polevykh kul'tur*. Tambov, Printing Office "Proletarskiy svetoch", 2000. 139 p.
5. Stepanov K.M., Chumakov A.E. *Prognoz bolezney sel'skokhozyaystvennykh rasteniy*. Leningrad, Kolos Publ., 1972. 271 p.

Received 10 March 2016

Чекмарев Виктор Валентинович, Среднерусский филиал Тамбовского научно-исследовательского института сельского хозяйства Россельхозакадемии, п. Новая жизнь, Тамбовский район, Тамбовская область, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, зав. лабораторией патофизиологии растений, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Chekmarev Viktor Valentinovich, Middle Russian branch of Tambov Scientific Research Institute of Agriculture of Russian Academy of Agriculture, settlement Novaya Zhizn, Tambov district, Tambov province, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Head of Pathophysiology of Plants Laboratory, e-mail: tmbsnifs@mail.ru

Зеленева Юлия Витальевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент кафедры медицинской биологии с курсом инфекционных болезней, e-mail: zelenewa@mail.ru

Zeleneva Yuliya Vitalevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Associate Professor of Medical Biology with a Course of Infectious Diseases Department, e-mail: zelenewa@mail.ru

УДК 633.113
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-627-631

РАЗНОКАЧЕСТВЕННОСТЬ СОРТОВ ЯРОВОЙ ПШЕНИЦЫ

© В.В. Корякин, А.В. Куляев, А.В. Абросимова, А.Г. Караваева,
М.И. Маслова, А.С. Толмачева, А.Е. Коробова

Представлены многолетние данные по параметрам колоса сортов яровой пшеницы. Дается анализ изменчивости колосьев в зависимости от условий внешней среды как внутри сорта, так и между сортами. Показана связь отдельных элементов продуктивности колоса.

Ключевые слова: пшеница; колос; колосок; разнокачественность; зерновка.

Главной целью селекции пшеницы является создание высокопродуктивных генотипов. З. Натрова и Я. Смочек считают, что для управления этим процессом необходимо знать причинные связи между отдельными компонентами, участвующими в формировании урожая [1]. То есть знать основные характеристики интенсивных генотипов. Дальнейшие успехи селекции, по их мнению, будут в значительной степени зависеть от знания основных закономерностей формирования урожая.

Главными компонентами, участвующими в формировании урожая, являются число колосьев на единицу площади и продуктивность одного колоса в граммах, которая складывается из числа зерен и массы зерновки. Слагаемые этих компонентов определяются генетическими взаимодействиями многих факторов и агроэкологических условий [2].

Ж. Hansel определил для яровой пшеницы, что наиболее устойчивыми компонентами урожая является масса отдельного зерна и число зерен в колосе [3]. По нашим данным, 2013 и 2014 гг. по количеству зерен в колосе не имели существенных различий внутри сортов. С другой стороны, количество зерен в колосе у сортов в 2015 г. достоверно отличалось от этих показателей в 2013 и 2014 гг. Полученные нами результаты по массе зерновки показали, что сорта также имели достоверные различия в период исследований, однако,

они не были привязаны к одному году. Лучшими показателями по этому признаку для сортов Фаворит, Йолдыз, Аквилон характеризовался 2013, для сортов Прохоровка и Торридон – 2015, для Ямальной – 2014 гг. Вероятно, величина варьирования этого признака меньше всего зависит от условий года.

Наши исследования показали, что число колосков в колосе напрямую зависит от длины колосового стержня (табл. 1, 2). На протяжении трех лет исследований эта закономерность прослеживалась, хотя условия конкретного года могли существенно сказываться на этих показателях. В целом за три года коэффициент корреляции между длиной колосового стержня и количеством колосков в колосе составил – 0,84. На увеличение длины колоса, а следовательно, и возрастание числа колосков пшеницы указывал Н.М. Rawson [4].

В 2013 г. все сорта кроме Тулайковской 10 обнаружили наибольшие показатели по длине колосового стержня по сравнению с 2014 и 2015 гг. Достоверное превышение было выявлено по сортам Йолдыз, Аквилон, Фаворит. Исключение составил сорт Тулайковская 10, который достоверно уступил 2014 г. и показал несущественные различия с 2015 г.

Судя по полученным данным, погодные условия 2014 и 2015 гг., на наш взгляд, были более однотипными, хотя достоверные различия по длине колоса были обнаружены по двум сортам – Фавориту и Ямальной.

Таблица 1

Длина колосового стержня, см

№ п/п	Сорта	Годы		
		2013	2014	2015
1	Фаворит	9,1 ± 0,64	7,9 ± 0,18 7,9 ± 0,18	7,2 ± 0,23* 7,2 ± 0,23*
2	Йолдыз	9,2 ± 0,49	7,5 ± 0,28**	7,7 ± 0,47*
3	Аквилон	7,8 ± 0,27	6,1 ± 0,32**	6,1 ± 0,18***
4	Тулайковская 10	6,3 ± 0,18**	7,0 ± 0,02	7,0 ± 0,40
5	Торридон	6,6 ± 0,36	6,1 ± 0,14	5,9 ± 0,22
6	Прохоровка	–	7,2 ± 0,16	7,6 ± 0,63
7	Ямальная	–	9,2 ± 0,31	7,7 ± 0,26**

Таблица 2

Количество колосков в колосе, шт.

№ п/п	Сорта	Годы		
		2013	2014	2015
1	Фаворит	$17,4 \pm 0,93$	$16,8 \pm 0,37$ $16,8 \pm 0,37$	$14,8 \pm 0,73^*$ $14,8 \pm 0,73^*$
2	Йолдыз	$18,2 \pm 1,02$	$15,8 \pm 0,49^*$ $15,8 \pm 0,49$	$16,8 \pm 0,37$ $16,8 \pm 0,37$
3	Аквилон	$15,6 \pm 0,24$	$13,8 \pm 0,49^{**}$ $13,8 \pm 0,49$	$14,4 \pm 0,6$ $14,4 \pm 0,6$
4	Тулайковская 10	$12,8 \pm 0,37^{***}$ $12,8 \pm 0,37^{***}$	$16,0 \pm 0$	$15,8 \pm 0,2$ $15,8 \pm 0,2$
5	Торридон	$16,0 \pm 0,40$	$15,6 \pm 0,51$ $15,6 \pm 0,51$	$15,0 \pm 0,45$ $15,0 \pm 0,45$
6	Прохоровка	–	$15,8 \pm 0,49^*$	$17,2 \pm 0,49$
7	Ямальная	–	$19,0 \pm 0,63$	$16,0 \pm 0,55^{**}$

Таблица 3

Взаимосвязь продуктивности колоса с количеством колосков

№ п/п	Сорта	Продуктивность колоса, г			Количество колосков в колосе, шт.		
		2013	2014	2015	2013	2014	2015
1	Фаворит	1,669	1,599	1,225	17,4	16,8	14,8
2	Йолдыз	1,903	1,580	1,396	18,2	15,8	16,8
3	Аквилон	1,996	1,537	1,320	15,6	13,8	14,4
4	Тулайковская 10	1,358	1,513	1,113	12,8	16,0	15,8
5	Торридон	1,828	1,653	1,280	16,0	15,6	15,0
6	Прохоровка	–	1,437	1,517	–	15,8	17,2
7	Ямальная	–	2,117	1,126	–	19,0	16,0

Таблица 4

Плотность колоса, шт./см

№ п/п	Сорта	Годы		
		2013	2014	2015
1	Фаворит	1,9	2,1	2,0
2	Йолдыз	2,0	2,1	2,2
3	Аквилон	2,0	2,3	2,4
4	Тулайковская 10	2,0	2,3	2,3
5	Торридон	2,5	2,5	2,6
6	Прохоровка	–	2,2	2,3
7	Ямальная	–	2,4	2,0

Аналогичную картину мы наблюдаем и по количеству колосков в колосе (табл. 2). 2013 г. выявил наиболее высокие показатели по сравнению с 2014 и 2015 гг. Это еще раз подтверждает наше предположение о положительной корреляции между длиной колосового стержня и количеством колосков в колосе.

Число колосков пшеницы является важным компонентом продуктивности колоса. Нами установлено, что сортовые различия влияют на число колосков в колосе. Так, в 2013 г. этот показатель по сортам различался на 29,6 %, в 2014 – на 27,4 %, а в 2015 г. колебания были минимальными – всего 16,3 %. Кроме того, наши исследования, в общем, согласуются с другими авторами, отмечающими линейную зависимость между продук-

тивностью колоса и числом колосков [5]. По нашим данным, только Тулайковская 10 выходит за рамки данного утверждения (табл. 3).

Мы попытались связать плотность колоса с количеством колосков и количеством зерен в колосе. Было обнаружено, что отдельные сорта, хотя и имеют незначительные колебания по плотности колоса, все же сохраняют определенные ранги. Так, плотность колоса у сортов Фаворит и Йолдыз за три года была на уровне 2,0; 2,1 шт./см, у Тулайковской 10 и Аквилон 2,2 и 2,23 соответственно. Сорт Торридон имел самую высокую плотность колоса – 2,5 шт./см. Сорт Прохоровка за два года имел меньший размах варьирования, чем Ямальная. Оказалось, что в целом по сортам за три

года плотность колоса и количество зерен в колосе имели слабую корреляцию $r = 0,23$. А плотность колоса и количество колосков в колосе имели очень слабую отрицательную корреляцию $r = -0,06$.

Самые высокие показатели по плотности колоса за три года выявлены у сорта Торридон. В 2013 г. все сорта, кроме Торридона обнаружили незначительную разницу по этому признаку. За три года исследований сорта Фаворит и Йолдыз показали самые стабильные данные по плотности колоса. Аквилон и Тулайковская 10 в 2014 и 2015 гг. имели более высокие показатели, чем в 2013 г., но мало отличались между собой. За два года исследований сорт Прохоровка имел данные, схожие с Тулайковской 10. Сорт Ямальская наибольшую плотность колоса обнаружил в 2014 г., а в 2015 г. сравнялся со стандартным сортом. Наибольшую плотность колоса в отдельные годы обнаружили сорта Аквилон, Торридон и Ямальская (табл. 4).

По количеству зерен в колосе большинство сортов (Фаворит, Йолдыз, Аквилон, Торридон) в 2013 г. существенно превысили показатели 2015 г. В свою очередь 2014 г. был более благоприятным по сравнению с 2015 г. для сортов Фаворит, Йолдыз, Тулайковская 10, Торридон и Ямальская. По сортам Прохоровка и Аквилон различия были несущественными (табл. 5).

Исследуемые сорта имели различную норму реакции по количеству зерен в колосе в конкретном году (табл. 6).

По количеству зерен в колосе в 2013 и 2015 гг. лучшие показатели были у сорта Аквилон, который достоверно превысил большинство исследуемых сортов. 2014 г. был наиболее благоприятен для сорта Ямальская, хотя существенных различий в отношении сортов Аквилон и Торридон математически доказать не удалось.

С одной стороны, сорт Аквилон имел наименьшее количество колосков в колосе (табл. 7). По этому признаку он достоверно уступил в сумме за два года всем сортам, кроме Торридона. Трехлетние данные свидетельствовали о существенном превышении по количеству колосков в колосе над Аквилонем только сортами Фаворит и Йолдыз. Тулайковская 10 и Торридон также превысили Аквилон, однако, достоверных различий математически доказать не удалось.

С другой стороны, Аквилон имел наибольшее количество зерен в колосе в 2013 и 2015 гг., несущественно уступив в 2014 г. лидеру – Ямальская.

Тем не менее, противоречий здесь не наблюдается, т. к. Аквилон относится к сортам, имеющим наибольшее количество зерен в отдельном колоске [6].

Таблица 5

Количество зерен в колосе, шт.

№ п/п	Сорта	Годы		
		2013	2014	2015
1	Фаворит	40,8 ± 2,48 40,8 ± 2,48	40,8 ± 1,32	32,4 ± 1,86** 32,4 ± 1,86*
2	Йолдыз	43,4 ± 1,86	39,6 ± 3,31 39,6 ± 3,31	29,6 ± 2,58*** 29,6 ± 2,58*
3	Аквилон	55,4 ± 2,60	39,4 ± 5,45*	37,2 ± 1,24***
4	Тулайковская 10	36,8 ± 1,99	41,0 ± 2,07	32,4 ± 3,50*
5	Торридон	50,5 ± 2,75	44,8 ± 2,69 44,8 ± 2,69	33,6 ± 3,06** 33,6 ± 3,06*
6	Прохоровка	–	38,2 ± 2,80	34,6 ± 4,30
7	Ямальская	–	49,2 ± 3,12	30,0 ± 2,24***

Таблица 6

Различия между сортами по количеству зерен в колосе

Годы	Сорта						
	Фаворит	Йолдыз	Аквилон	Тулайковская 10	Торридон	Прохоровка	Ямальская
2013	40,8 ± 2,48**	43,4 ± 1,86**	55,4 ± 2,60	36,8 ± 1,99***	50,5 ± 2,75	–	–
2014	40,8 ± 1,32*	39,6 ± 3,31*	39,4 ± 5,45	41,0 ± 2,07*	44,8 ± 2,69	38,2 ± 2,80*	49,2 ± 3,12
2015	32,4 ± 1,86*	29,6 ± 2,58*	37,2 ± 1,24	32,4 ± 3,50	33,6 ± 3,06	34,6 ± 4,30	30,0 ± 2,24*

Таблица 7

Количество колосков в колосе по многолетним данным, шт.

Период	Сорта						
	Фаворит	Йолдыз	Аквилон	Тулайковская 10	Торридон	Прохоровка	Ямальская
2014–2015	15,8 ± 0,55*	16,3 ± 0,43**	14,1 ± 0,55	15,9 ± 0,1**	15,3 ± 0,48	16,5 ± 0,49**	17,5 ± 0,59***
2013–2015	16,3 ± 0,68*	16,9 ± 0,63**	14,6 ± 0,44	14,9 ± 0,19	15,5 ± 0,45	–	–

Таблица 8

Влияние условий года на массу зерновки, мг

№ п/п	Сорта	Годы		
		2013	2014	2015
1	Фаворит	40,92 ± 0,65	39,2 ± 0,67* 39,2 ± 0,67	37,58 ± 0,76*** 37,58 ± 0,76*
2	Йолдыз	43,84 ± 0,58*** 43,84 ± 0,58	40,1 ± 0,66*** 40,1 ± 0,66***	47,36 ± 0,74
3	Аквилон	36,02 ± 0,56	34,09 ± 0,71*	35,48 ± 0,66
4	Тулайковская 10	36,9 ± 0,63	36,9 ± 1,39 36,9 ± 1,39	34,36 ± 0,65** 34,36 ± 0,65*
5	Торридон	36,17 ± 0,66*	36,9 ± 1,23	38,09 ± 0,72
6	Прохоровка	—	37,63 ± 1,69***	45,14 ± 0,71
7	Ямальская	—	42,96 ± 0,60	39,14 ± 0,94***

Полученные нами данные по массе зерновки согласуются с результатами J. Hansel [3]. Мы обнаружили, что этот показатель в меньшей степени, чем другие признаки приурочен к условиям года. Так, 2013 г. по массе зерновки был лучшим для Фаворита, Аквилона и Тулайковской 10, в то же время 2015 г. выявил преимущества для сортов Йолдыз, Торридон и Прохоровка. Для сорта Ямальская самым благоприятным оказалась 2014 г. (табл. 8).

ВЫВОДЫ

1. Число колосков в колосе тесно связано с длиной колосового стержня ($r = 0,84$).
2. Самые высокие показатели по плотности колоса за три года выявлены у сорта Торридон, а сорта Фаворит и Йолдыз отличались более низкими показателями и имели самые стабильные данные по этому признаку.
3. Все сорта, за исключением Тулайковской 10, обнаружили линейную зависимость между продуктивностью колоса и числом колосков на протяжении трех лет.
4. Внешние условия оказали существенное влияние на количество зерен в колосе как внутри каждого сорта, так и между отдельными сортами.

5. Выявлены сорта (Аквилон), у которых наибольшее количество зерен в колосе обусловлено не увеличением колосков в колосе, а увеличением количества зерен в отдельном колоске.

6. Условия года оказали наименьшее влияние на массу зерновки, чем на другие признаки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Натрова З., Смочек Я. Продуктивность колоса зерновых культур. М.: Колос, 1983. 45 с.
2. Бороевич С. Генетические аспекты селекции высокоурожайных сортов пшеницы // Сельскохозяйственная биология. 1968. Т. 3. № 2. С. 285-299.
3. Hansel J. Physiologie der Ertragsbildung und die Zucht auf Ertrag der Getreide // Z. Pflanzenz. 1965. V. 54. № 2. P. 97-100.
4. Rawson H.M. Spikelet number, its control and relation to yield per ear in wheat // Austr. J. Biol. Sci. 1970. V. 23. P. 1-15.
5. Rawson H.M. An upper limit for spikelet number per ear in wheat, as controlled by photoperiod // Austr. J. Agric. Res. 1971. V. 22. P. 537-546.
6. Корякин В.В., Мартынов Д.А., Маслова М.И. Влияние условий года на параметры колоса сортов яровой пшеницы // Science without borders – 2015: materials of the XI international scientific and practical conference. Sheffield, Science and education LTD., 2015. С. 81-85.

Поступила в редакцию 29 февраля 2016 г.

UDC 633.113
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-627-631

GOODNESS OF SPRING WHEAT SORTS

© V.V. Koryakin, A.V. Kulyaev, A.V. Abrosimova, A.G. Karavaeva,
M.I. Maslova, A.S. Tolmacheva, A.E. Korobova

The long-time data on the parameters of the spike spring wheat varieties are presented. The analysis of spikes variability depending on environmental conditions both the variety within and between varieties is given. The connection of the individual elements of the spike productivity is shown.

Key words: wheat; spike; spikelet; heterogeneity; weevil.

REFERENCES

1. Natrova Z., Smochek Ya. *Produktivnost' kolosa zernovykh kul'tur*. Moscow, Kolos Publ., 1983. 45 p.
2. Boroevich S. Geneticheskie aspekty seleksii vysokourozhaynykh sortov pshenitsy. *Sel'skokhozyaystvennaya biologiya*, 1968, vol. 3, no. 2, pp. 285-299.
3. Hansel J. Physiologie der Ertragsbildung und die Zuchtung auf Ertrag der Getreide. *Z. Pflanzenz*, 1965, vol. 54, no. 2, pp. 97-100.
4. Rawson H.M. Spikelet number, its control and relation to yield per ear in wheat. *Austr. J. Biol. Sci.*, 1970, vol. 23, pp. 1-15.
5. Rawson H.M. An upper limit for spikelet number per ear in wheat, as controlled by photoperiod. *Austr. J. Agric. Res.*, 1971, vol. 22, pp. 537-546.
6. Koryakin V.V., Martynov D.A., Maslova M.I. Vliyanie usloviy goda na parametry kolosa sortov yarovoy pshenitsy. *Materials of the XI international scientific and practical conference "Science without borders – 2015"*. Sheffield, Science and education LTD., 2015, pp. 81-85.

Received 29 February 2016

Корякин Виктор Валентинович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, e-mail: korjakin@tsu.tmb.ru

Koryakin Viktor Valentinovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Biology, Associate Professor, Associate Professor of Biology Department, e-mail: korjakin@tsu.tmb.ru

Куляев Александр Владимирович, ФГБУ «Госсорткомиссия» по Тамбовской области, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат сельскохозяйственных наук, начальник филиала, e-mail: incpekturatambov@mail.ru

Kulyaev Aleksander Vladimirovich, of FSBI "Gossortcomissiya" branch in the Tambov region, Tambov, Russian Federation, Candidate of Agriculture, Head of Branch, e-mail: incpekturatambov@mail.ru

Абросимова Анастасия Владимировна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: abrosimova.nastasiya@yandex.ru

Abrosimova Anastasiya Vladimirovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: abrosimova.nastasiya@yandex.ru

Каравая Анастасия Геннадиевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: rapira1109@yandex.ru

Karavaeva Anastasiya Gennadiyevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: rapira1109@yandex.ru

Маслова Марина Ивановна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистр по направлению подготовки «Биология», e-mail: marina.maslova.8989@mail.ru

Maslova Marina Ivanovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Master's Degree of "Biology" Training Direction, e-mail: marina.maslova.8989@mail.ru

Толмачева Ангелина Сергеевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: tolma4ewa.angel@yandex.ru

Tolmacheva Angelina Sergeevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: tolma4ewa.angel@yandex.ru

Коробова Алена Евгеньевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: korobock1994@gmail.com

Korobova Alena Evgenyevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: korobock1994@gmail.com

УДК 633.113

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-632-635

ВЛИЯНИЕ ЧЕРЕЗЕРНИЦЫ НА ПОТЕНЦИАЛЬНУЮ ПРОДУКТИВНОСТЬ КОЛОСА

© В.В. Корякин, А.В. Абросимова, М.А. Кабанова,
Н.М. Платонова, Л.И. Мошечкова, О.А. Уварова

Представлены многолетние данные по параметрам колоса сортов яровой пшеницы – Фаворит и Торридон. Анализируется череззерница в колосьях отдельных сортов в зависимости от внешних условий. Сравнивается реальная и потенциальная продуктивность колоса.

Ключевые слова: пшеница; колос; колосок; зерновка; череззерница; продуктивность.

К настоящему времени большое количество научных работ посвящено продуктивности колоса, которая в свою очередь складывается из количества зерен в колосе и их массы [3]. Отдельные сорта пшеницы формируют колосья, различающиеся количеством колосков в колосе, количеством зерен в колосках, числом цветков с не завязавшимися семенами. Последнему фактору внимание уделяется меньше всего, хотя отдельные авторы связывают череззерницу или количество недоразвитых колосков с крупностью зерна. Так, П.Ф. Секун исследовал у двух сортов мягкой озимой пшеницы группы колосьев с разным содержанием недоразвитых колосков и обнаружил, что чем меньше таких колосков, тем крупнее зерно [4]. Он объяснил это лучшим снабжением колоса пластическим материалом.

В.В. Корякин с соавторами показал, что сорта яровой пшеницы по количеству не завязавшихся зерен могут заметно различаться по годам, но сохраняют определенные ранги между собой [1].

Закладка колосков в колосе происходит в период прохождения III–IV этапов органогенеза. На V–IX этапах формируются цветки в колосках. Процент развитых цветков на VII–VIII этапах в значительной степени отражает озерненность колоса на заключительном XII этапе [2].

Материалом для наших исследований служили колосья сортов Фаворит и Торридон, находящихся в сортоиспытании в Тамбовской области. На протяжении

трех лет по каждому сорту было исследовано 15 колосьев. Череззерницу определяли в крайних цветках колоска. Колос условно делили на три части: верхняя – 25 %, средняя – 50 % и нижняя – 25 % колосков.

Нами выявлено, что сорта отличаются количеством колосков в колосе и количеством зерен в колоске. Сорта различались по количеству не завязавшихся зерен в крайних цветках колосков. Череззерница отдельных частей колоса варьировала как по годам внутри сорта, так и между сортами.

В 2013 г. мы выявили, что у сорта Фаворит процент не завязавшихся зерен был самым высоким в верхней части колоса – 28,3 %. Череззерница в средней и нижней части колоса имела значительно более низкие показатели – 3,3 и 5,3 %, соответственно. В целом по колосу процент не завязавшихся зерен составил 10,3, в т. ч. наблюдалось 3,4 % колосков полностью не завязавших зерен. В 2014 г. 100 % крайних цветков в средней части колоса завязали зерновки. Верхняя часть колоса обнаружила 25 % цветков, не завязавших зерновки. Нижняя часть колоса по сравнению с 2013 г. почти в четыре раза увеличила череззерницу в крайних цветках. В целом по колосу череззерница составила 10,7 %, в т. ч. – 1,8 % пустозерных колосков.

По 2015 г. мы наблюдаем полноценную среднюю часть колоса. Верхняя часть колоса выявила наибольшие показатели – 31,6 % череззерницы по сравнению с 2013 и 2014 гг. Нижняя часть колоса имела показатели

Таблица 1

Череззерница крайних цветков в колосьях яровой пшеницы сорта Фаворит (2013–2015 гг.)

Параметры	Часть колоса									В целом по колосу		
	верхняя			средняя			нижняя					
	2013	2014	2015	2013	2014	2015	2013	2014	2015	2013	2014	2015
Количество крайних цветков в колосе, шт.	46	40	38	90	88	76	38	40	34	174	168	148
Количество не завязавшихся зерен в крайних цветках, %	28,3	25,0	31,6	3,3	0	0	5,3	20,0	17,6	10,3	10,7	12,2
Количество пустозерных колосков. %	10,9	0	0	1,1	0	0	0	7,5	5,9	3,4	1,8	1,3

завязываемости зерен несколько выше, чем в 2014 г. В целом по колосу процент не завязавшихся зерен составил 12,2 %, в т. ч. 1,3 % пустозерных колосков.

Количество не завязавшихся зерен с 2013 по 2015 г. изменялось от 10,3 до 12,2 %. За три года размах варьирования по сорту Фаворит составил 15,6 % (табл. 1).

В 2013 г. мы выявили, что у сорта Торридон процент не завязавшихся зерен был самым высоким в нижней части колоса – 10,0 %. Череззерница в средней и верхней части колоса имели более низкие показатели – 0,0 и 0,03 %, соответственно. В целом по колосу процент не завязавшихся зерен составил 10,2, в т. ч. наблюдалось 2,3 % колосков, полностью не завязавших зерна.

В 2014 г. 100 % крайних цветков в средней части колоса завязали зерновки. Верхняя часть колоса обнаружила 17,5 % цветков, не завязавших зерновки, в нижней части колоса выявлена 30,0 % череззерница. В целом по колосу череззерница по сравнению с 2013 г. выросла до 12,2 %, в т. ч. количество пустозерных колосков увеличилось до 3,2 %.

В 2015 г. мы обнаружили по сорту Торридон максимальные показатели череззерницы – 50 % в нижней части колоса, в т. ч. 20,6 % пустозерных колосков. Средняя часть выявила 100 % завязываемость зерен.

Довольно высокая череззерница – 32,5 % – наблюдалась в верхней части колоса.

Количество не завязавшихся зерен с 2013 по 2015 г. изменялось от 10,2 до 20,7 %. За три года размах варьирования составил 50,7 % (табл. 2).

В целом за три года у сорта Фаворит череззерница верхней части колоса в два раза превысила нижнюю ее часть. В средней части колоса было выявлено всего 0,8 % не завязавшихся зерен. Всего было проанализировано за годы испытаний 620 крайних цветков колоса, выявлено 8,7 % не завязавшихся зерновок, в т. ч. 1,8 % пустозерных колосков (табл. 3).

За три года по сорту Торридон череззерница нижней части колоса на 4 % превысила верхнюю. В средней части колоса обнаружено всего 0,4 % не завязавшихся зерен. В общем было проанализировано за годы испытаний 434 крайних цветка. Всего выявлено 14,5 % не завязавшихся зерновок, в т. ч. 3,7 % пустозерных колосков (табл. 4).

Несмотря на то, что мы проанализировали одинаковое количество колосков по обоим сортам, обнаружилась большая разница (30 %) по количеству крайних цветков в колосе. Это обусловлено тем, что стандартный сорт (Фаворит) из года в год формирует большее количество колосков в колосе, чем Торридон [1]. Наши

Таблица 2

Череззерница крайних цветков в колосьях яровой пшеницы сорта Торридон (2013–2015 гг.)

Параметры	Часть колоса									В целом по колосу		
	верхняя			средняя			нижняя					
	2013	2014	2015	2013	2014	2015	2013	2014	2015	2013	2014	2015
Количество крайних цветков в колосе, шт.	32	40	40	66	76	76	30	40	34	128	156	150
Количество не завязавшихся зерен в крайних цветках, %	0,03	17,5	32,5	0	0	1,3	10,0	30,0	50,0	10,2	12,2	20,7
Количество пустозерных колосков, %	6,25	0	2,5	0	0	0	3,3	12,5	20,6	2,3	3,2	5,3

Таблица 3

Череззерница крайних цветков в колосьях яровой пшеницы сорта Фаворит, 2013–2015 гг.

Параметры	Часть колоса			В целом по колосу
	верхняя	средняя	нижняя	
Количество крайних цветков в колосе, шт.	124	384	112	620
Количество не завязавшихся зерен в крайних цветках колоса, %	28,2	0,8	14,3	8,7
Количество пустозерных колосков, %	4,0	0,3	4,5	1,8

Таблица 4

Череззерница крайних цветков в колосьях яровой пшеницы сорта Торридон, 2013–2015 гг.

Параметры	Часть колоса			В целом по колосу
	верхняя	средняя	нижняя	
Количество крайних цветков в колосе, шт.	112	218	104	434
Количество не завязавшихся зерен в крайних цветках колоса, %	26,8	0,4	30,8	14,5
Количество пустозерных колосков, %	2,7	0	12,5	3,7

Таблица 5

ВЫВОДЫ

Реальная и потенциальная продуктивность колоса

Название сорта	Годы	Реальная продуктивность колоса, г	Потенциальная продуктивность колоса, г
Фаворит (стандарт)	2013	7,33	8,05
	2014	7,99	8,70
	2015	6,08	6,76
Торридон	2013	7,30	7,77
	2014	8,33	9,04
	2015	6,39	7,57

исследования показали, что сорт Торридон по сравнению с Фаворитом имел в два раза больше пустозерных колосков и на 40 % превзошел его по череззернице в крайних цветках колосков.

Е.М. Kirby на яровой пшенице показал, что развитие цветков идет от основания колоска к его вершине примерно с однодневным интервалом [5]. Причем полностью обычно развиваются только первые три или четыре цветка, и только два или три завязывают зерна. В своей работе мы учитывали формирование зерновок в крайних (первых) цветках колоска. В связи с череззерницей первых цветков колоска мы определили потенциальную продуктивность колоса.

Разница между потенциальной и реальной продуктивностью колоса у сортов Фаворит и Торридон в 2015 г. составила 10,0 и 15,6 %, соответственно. В 2014 и 2015 гг. она изменилась на 8,11 и 8,93 % у сорта Фаворит и на 7,82 и 6,10 % у сорта Торридон. В целом за три года у сорта Фаворит продуктивность колоса была не реализована на 9 %, а у сорта Торридон – на 9,8 %. Если учесть, что размах варьирования череззерницы за три года у сорта Торридон составил 50,7 %, а у Фаворита 15,6 %, то следовало бы ожидать более серьезные различия между сортами по потенциальной продуктивности колоса. Однако Торридон превзошел Фаворит по количеству зерен в отдельных колосках, что сгладило различия по продуктивности колосов между сортами.

С нашей точки зрения, перед селекционерами стоит задача устранить недостатки сортов, обусловленные череззерницей. При этом будет существенно увеличена продуктивность колоса, а следовательно, и урожайность.

1. В целом за три года череззерница в крайних цветках колосков для сорта Фаворит составила 8,7 %, для сорта Торридон – 14,5 %.

2. Сорт Торридон превзошел Фаворит по количеству пустозерных колосков – 3,7 и 1,8 %, соответственно.

3. Исследуемые сорта выявили наименьший процент череззерницы в крайних цветках колосков средней части колоса.

4. В 2015 г. изучаемые сорта имели самую высокую череззерницу в верхней части колоса – 31,6 % у Фаворита и 32,5 % у Торридона.

5. Нижняя часть колоса у сорта Торридон обнаружила максимальную череззерницу в 2015 г. – 50 %, по сорту Фаворит наибольшее количество не завязавшихся семян выявлено в 2014 г. – 20 %.

6. Череззерница сорта Фаворит за годы исследований колебалась от 10,3 до 12,2 %, размах варьирования составил 15,6 %; по сорту Торридон череззерница изменялась от 10,2 до 20,7 %, а размах варьирования составил 50,7 %.

7. В целом за три года сорт Фаворит уступил по продуктивности колоса сорту Торридон – 7,14 против 7,35 г.

8. С учетом череззерницы в крайних цветках потенциальная продуктивность колоса Фаворит выросла на 9 %, а сорта Торридон – на 9,8 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корякин В.В., Мартынов Д.А., Маслова М.И., Засыпкин А.С., Коновальцева Т.Б., Тарова А.С. Влияние условий года на параметры колоса сортов яровой пшеницы // Materials of the 11 international scientific and practical conference "Science without borders – 2015". Sheffield, Science and education Ltd., 2015. P. 81-85.
2. Куперман Ф.М., Ржанова Е.И., Мурашев В.В., Львова И.Н., Седова Е.А., Ахундова В.А., Щербина И.П. Биология развития культурных растений: учебное пособие для студентов биологических специальностей вузов / под ред. Ф.М. Куперман. М.: Высшая школа, 1982. 343 с.
3. Натрова З., Смочек Я. Продуктивность колоса зерновых культур. М.: Колос, 1983. 45 с.
4. Секун П.Ф. К вопросу о разнокачественности зерна в колосьях озимой пшеницы // Сельскохозяйственная биология. 1967. Т. 2. № 6. С. 896-899.
5. Kirby E.J.M. Ear development in spring wheat // J. Agric. Sci. 1974. V. 82. P. 437-447.

Поступила в редакцию 15 марта 2016 г.

UDC 633.113
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-632-635

INFLUENCE OF LAX EAR ON POTENTIAL EAR PRODUCTIVITY

© V.V. Koryakin, A.V. Abrosimova, M.A. Kabanova,
N.M. Platonova, L.I. Moshechkova, O.A. Uvarova

The long-time data on the parameters of the spike spring wheat varieties – Favorite and Torridon are presented. Lax ear in the spikes of individual varieties, depending on external conditions are analyzed. The real and potential productivity of the spike is analyzed.

Key words: wheat; spike; spikelet; weevil; lax ear; productivity.

REFERENCES

1. Koryakin V.V., Martynov D.A., Maslova M.I., Zasyupkin A.S., Konoval'tseva T.B., Tarova A.S. Vliyanie usloviy goda na parametry kolosa sortov yarovoy pshenitsy. *Materials of the XI international scientific and practical conference "Science without borders – 2015"*. Sheffield, Science and education Ltd., 2015, pp. 81-85.
2. Kuperman F.M., Rzhanova E.I., Murashev V.V., L'vova I.N., Sedova E.A., Akhundova V.A., Shcherbina I.P. *Biologiya razvitiya kul'turnykh rasteniy*. Moscow, Vysshaya shkola, 1982. 343 p.
3. Natrova Z., Smochek Ya. *Produktivnost' kolosa zernovykh kul'tur*. Moscow, Kolos Publ., 1983. 45 p.
4. Sekun P.F. K voprosu o raznokachestvennosti zerna v kolos'yakh ozimoy pshenitsy. *Sel'skokhozyaystvennaya biologiya*, 1967, vol. 2, no. 6, pp. 896-899.
5. Kirby E.J.M. Ear development in spring wheat. *J. Agric. Sci.*, 1974, vol. 82, pp. 437-447.

Received 15 March 2016

Корякин Виктор Валентинович, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии, e-mail: korjakin@tsu.tmb.ru

Koryakin Viktor Valentinovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Biology, Associate Professor of Biology Department, e-mail: korjakin@tsu.tmb.ru

Абросимова Анастасия Владимировна, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: abrosimova.nastasiya@yandex.ru

Abrosimova Anastasiya Vladimirovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: abrosimova.nastasiya@yandex.ru

Кабанова Мария Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: Mashakotel1988@bk.ru

Kabanova Mariya Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: Mashakotel1988@bk.ru

Платонова Наталия Михайловна, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: platonovanatali@yandex.ru

Platonova Nataliya Mikhaylovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: platonovanatali@yandex.ru

Мошечкова Лия Игоревна, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: moshechkova.liya@mail.ru

Moshechkova Liya Igorevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: moshechkova.liya@mail.ru

Уварова Ольга Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.П. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, бакалавр по направлению подготовки «Биология», e-mail: olga.uvarova@yandex.ru

Uvarova Olga Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Bachelor of "Biology" Training Direction, e-mail: olga.uvarova@yandex.ru

УДК 599-19:599.4-15

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-636-639

ПЕЩЕРА УАЗ-АБАА – ВАЖНЕЙШЕЕ УБЕЖИЩЕ РУКОКРЫЛЫХ (CHIROPTERA) АБХАЗИИ

© А.Н. Иваницкий

Фауна рукокрылых пещеры Уаз-Абаа долгое время оставалась слабо изученной. Экология летучих мышей пещеры была не известна, нуждалась в уточнении видовой состав. В работе приводятся данные о 8 видах, отмеченных в пещере, в т. ч. 3 – впервые. Представлены сведения о зимовке в пещере 6 видов летучих мышей и выводковых колониях 3 видов. Крупные колонии троглофильных рукокрылых, найденные в пещере Уаз-Абаа, нуждаются во всемерной охране.

Ключевые слова: рукокрылые; Уаз-Абаа; зимовки; выводковые колонии.

ВВЕДЕНИЕ

В литературе имеются описания населения рукокрылых различных пещер Кавказа: Шуби-Ныхсской в Северной Осетии [1], Каньон [2] и Ахштырской [3] в Краснодарском крае и др. Однако ни одна из пещер Кавказа не отличается столь давней историей изучения ее хироптерофауны, как пещера Уаз-Абаа. Исследование фауны рукокрылых пещеры насчитывает уже свыше 100 лет. В разное время ее изучали К.А. Сатунин [4–6], Ф.А. Зайцев [7–8], В. Ханак [9], М.В. Перов [10–11], а также Е. Лосев и З.И. Адзинба [12]. Пещере Уаз-Абаа посвящена и наша ранняя публикация [12]. Относительно хорошая изученность этой пещеры приобретает еще большее значение, если учесть, что летучие мыши в Абхазии до начала наших целенаправленных работ в 2000 г. не являлись объектом специальных исследований, а прежние наблюдения за ними в основном были попутными и отрывочными. Цель настоящей работы – восполнение пробелов в знаниях о рукокрылых пещеры Уаз-Абаа – установление видового состава, получение сведений об особенностях их экологии.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Обследование пещеры осуществляли в период с 2000 по 2014 г. во все сезоны года. С целью изучения видового состава и некоторых биологических особенностей проводили учет рукокрылых, выборочный осмотр и кольцевание зверьков, а также сбор черепов погибших животных. Кроме установления видовой принадлежности и пола, оценивали возраст и репродуктивное состояние зверьков, а также производили их стандартные промеры и взвешивание. Кроме того, в работе учтены коллекционные экземпляры, добытые в пещере Уаз-Абаа и хранящиеся в таких учреждениях, как Зоологический институт РАН (ЗИН, Санкт-Петербург), Зоологический музей МГУ (ЗММУ, Москва), кафедра биогеографии Географического факультета МГУ (БГМУ, Москва), Государственный музей Грузии имени С.Н. Джанашия (ГМГ, Тбилиси), Институт

Зоологии АН Грузии (ИЗГ, Тбилиси), Пражский национальный музей (ПНМ, Прага).

Пещера Уаз-Абаа (в некоторых литературных источниках называется также Адзаба) находится в окрестностях с. Верняя Эшера Сухумского района в нижнем течении р. Гумиста на правом берегу в глубокой лощине. У спуска в эту лощину стоит древняя каменная башня. Аркообразный вход в пещеру ориентирован на восток, расположен на высоте 350 м н. у. м., его высота около 10 м, а ширина 4–6 м. Пещера древовидная. Протяженность хода – 145 м (рис. 1).

Воздушные течения особенно хорошо выражены в первом колене: в правой половине – теплое входящее, в левой – холодное выходящее течение. Температура воздуха в летнее время (25 июля) снаружи в расщелине +20,3 °С, тогда как в пещере примерно в 35 метрах от входа – +15,5 °С. Абсолютная влажность воздуха снаружи – 16,2 мм, в пещере – 12,6 мм, относительная влажность, соответственно, 91 и 96 %.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В пещере Уаз-Абаа зарегистрированы 8 видов рукокрылых 2 семейств (табл. 1) (33,3 % хироптерофауны Абхазии). Из них виды рода *Rhinolophus*, а также *Myotis blythii* и *Miniopterus schreibersii* являются типичными троглофилами. Зимние убежища у всех этих видов вне подземелий не известны, кроме того, часть выводковых колоний обнаружена также в подземельях. Три остальных вида, найденных в пещере, относятся к гемитроглофилам, или троглоксенам.

Rhinolophus hipposideros (Borkhausen, 1797). Впервые в пещере Уаз-Абаа найден нами 30 декабря 2006 г. Единичные особи в этой пещере найдены только на зимовке.

Rhinolophus ferrumequinum (Schreber, 1774). Впервые обнаружен К.А. Сатуниным в сентябре 1909 г. Встречен здесь также летом 1972 г. З.И. Адзинба (личн. сообщение и фото), 18 августа 1979 г. М.В. Перовым (кол. ЗИН). Зимой здесь мы наблюдали колонию, насчитывающую 10–50 особей. В теплый период – только единичные особи.

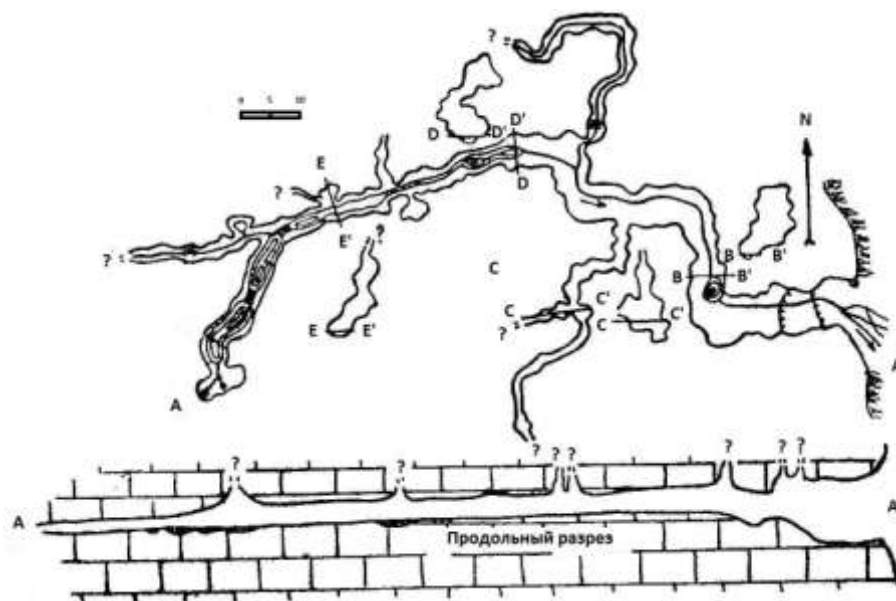


Рис. 1. План-схема пещеры Уаз-Абаа (по З.К. Тинтилову [13], с изменениями)

Таблица 1

Численность рукокрылых в пещере Уаз-Абаа по результатам учетов разных лет. Цифры в надстрочном регистре рядом с датой – результаты учетов из литературных источников: 1 – [4–6; кол. ГМГ], 2 – [7, 8; кол. ИЗГ], 3 – [кол. БГМУ, ЗММУ], 4 – [9; кол. ПНМ], 5 – [фото и личн. сообщ. З.И. Адзинба]; 6 – [10, 11; кол. ЗИН]

Дата	Виды								Всего
	<i>Rhinolophus hipposideros</i>	<i>Rhinolophus ferrumequinum</i>	<i>Rhinolophus euryale</i>	<i>Myotis mystacinus</i>	<i>Myotis blythii</i>	<i>Plecotus auritus</i>	<i>Barbastella barbastellus</i>	<i>Miniopterus schreibersii</i>	
09.1909 ¹	–	1	–	–	–	–	–	много	много
10.08.1940 ²	–	–	–	–	+	–	–	много	много
10.06.1953 ³	–	–	2	–	–	–	–	–	2
13.07.1964 ⁴	–	–	–	–	–	–	–	2	2
лето 1972 ⁵	–	1	–	–	–	–	–	–	1
11–19.08.1975 ⁶	–	–	3	–	6	–	–	5	14
11.08.1976 ⁶	–	–	1	–	–	–	–	15	16
06.08.1977 ⁶	–	–	–	–	–	–	–	15	15
18.08.1979 ⁶	–	4	–	–	–	–	–	–	4
1970-е ⁶	–	–	–	–	–	50	–	–	50
17.11.2000	–	50	–	–	–	–	–	100	150
09.05.2001	–	–	–	–	10	–	–	300	310
04.04.2002	–	2	–	–	–	–	–	250	252
17.12.2002	–	–	череп	–	–	–	–	100	100
03.02.2003	–	1	–	–	череп	–	1	450	452
28.03.2003	–	–	–	–	–	–	–	268	268
30.12.2003	1	20	2	–	–	–	–	–	23
16.08.2004	–	–	–	–	–	–	–	100	100
21.12.2004	–	10	–	–	–	–	–	3	13
18.08.2005	–	–	–	–	–	–	–	200	200
26.07.2010	–	–	500	1	200	–	–	1000	1701
23.08.2013	–	–	–	–	–	–	–	500	500
15.08.2014	–	–	50	–	–	–	–	250	300
05.12.2014	5	9	–	–	2	–	–	100	116
Всего	6	98	558	1	219	50	1	3660	>4593

Rhinolophus euryale Blasius, 1853. Впервые отловлен здесь Е. Лосевым 10 июня 1953 г. (кол. БГМУ, ЗММУ), в 1970-е годы также М.В. Перовым [10]. В теплое время в пещере пребывает до нескольких сотен особей. Например, 26 июля 2010 г. нами здесь учтена выводковая колония до 500 взрослых особей с детенышами. На зимовке – единично.

Myotis mystacinus (Kuhl, 1817). Единственный мертвый взрослый самец найден нами 26 июля 2010 г. под выводковой колонией южных подковоносов. Это первая находка вида в пещере Уаз-Абаа. Возможно, среди огромного скопления этих подковоносов были и другие ушатые ночницы.

Myotis blythii (Tomes, 1857). Впервые найден А. Остерлоффом 10 августа 1940 г. (кол. ИЗГ). Позднее также наблюдалась М.В. Перовым [10]. В теплое время встречается от нескольких десятков до пары сотен особей, например, 26 июля 2010 г. обнаружена выводковая колония, насчитывавшая около 200 особей. На зимовке найдены лишь единичные особи.

Plecotus auritus (Linnaeus, 1758). В пещере полусотенная колония ушанов наблюдалась только однажды в 1970-е гг. М.В. Перовым [11]. Нами бурый ушан в пещере не встречен ни разу.

Barbastella barbastellus (Schreber, 1774). Зимующая взрослая самка найдена 17 декабря 2002 г. в щели в приходовой части пещеры. Это первая находка вида в пещере.

Miniopterus schreibersii (Kuhl, 1817). Длиннокрыл встречен здесь в большом количестве практически всеми исследователями [4–11]. В теплое время нами наблюдалась колония от 100 до 1000 особей. На зимовках животные этого вида отмечены в количестве от 3 до 450 особей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пещере Уаз-Абаа зарегистрировано 8 видов рукокрылых, из которых 3 (*Rh. hipposideros*, *M. mystacinus* и *B. barbastellus*) отмечены впервые. В ходе наших исследований впервые здесь на зимовке найдены 6 видов рукокрылых. Также в этом подземелье впервые обнаружены выводковые колонии 3 видов (*R. euryale*, *M. blythii* и *Min. schreibersii*).

Таким образом, пещера Уаз-Абаа является важным убежищем для ряда редких, краснокнижных видов рукокрылых. Пещера служит местом размножения и локализации зимовочных колоний многих трогло-

фильных видов не только Абхазии, но и Колхиды в целом. Учитывая ключевое положение этой пещеры и крайнюю уязвимость населения рукокрылых в ней, необходимо исключить любое ее хозяйственное использование. К сожалению, уже предпринимаются многочисленные попытки проведения здесь организованных экскурсий. Кроме того, пещеру посещает довольно значительное число местных жителей, вблизи пещеры организуют молодежные лагеря, тренировочные базы спасательной службы МЧС и др., что несомненно способствует созданию губительного фактора беспокойства. Для защиты от коммерческой эксплуатации пещеры Уаз-Абаа наиболее эффективен механизм охраны путем объявления ее зоологическим памятником природы. В качестве незамедлительной практической меры рекомендуется установление антивандального металлического ограждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деревщикова Н.А., Комаров Ю.Е., Кунаев И.Т., Попов К.П. Шуби-Ныхаская пещера // Пещеры. Типы и методы исследований: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 1984. С. 30–37.
2. Gazaryan S.V. The Canyon cave – a unique hibernation site for bats // *Plecotus et al.* 1999. № 2. Р. 126.
3. Смирнов Д.Г. Находки рукокрылых в Ахштырской пещере // *Plecotus et al.* 2001. № 4. С. 64–68.
4. Сатунин К.А. Пещерные летучие мыши Абхазии // Изв. Кавк. отд. РГО. 1911–1912. № 21 (1). С. 47–48.
5. Сатунин К.А. Экскурсия в пещеры Сухумского округа. Пещеры-великаны Абхаскира и Адзаба // Изв. Кавк. отд. РГО. 1911–1912. № 21 (1). С. 13–18.
6. Сатунин К.А. Фауна Черноморского побережья Кавказа // Тр. общ. изуч. Черномор. побережья Кавказа. СПб., 1913. Т. 2. С. 13–21.
7. Зайцев Ф.А. К фауне пещер Абхазии // Сообщ. Грузин. ф-ла АН СССР. 1940. Т. 1. № 1. С. 63–70.
8. Зайцев Ф.А. Обзор пещерной фауны Грузии // Тр. Зоол. ин-та ГССР. 1949. № 8. С. 151–173.
9. Benda P., Hanák V., Červený J. Bats (Mammalia: Chiroptera) of the Eastern Mediterranean and Middle East. Part 9. Bats from Transcaucasia and West Turkestan in collection of the National Museum, Prague // *Acta Soc. Zool. Bohem.* 2011. № 75. Р. 159–222.
10. Перов М.В. К изучению рукокрылых Грузии // Рукокрылые (Chiroptera). М.: Наука, 1980. С. 59–63.
11. Перов М.В. К охране рукокрылых // Проблемы экологии и охраны окружающей среды: сб. тр. 1 республ. конф. Тбилиси, 1983. Т. 1. С. 213–221.
12. Иваницкий А.Н. Рукокрылые пещеры Уаз-Абаа (Сухумский район, Абхазия) // *Plecotus et al.*, pars. spec. 2002. С. 88–91.
13. Тинтилозов З.К. Карстовые пещеры Грузии. Тбилиси: Мецниереба, 1976. 276 с.

Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.

UDC 599-19:599.4-15

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-636-639

THE WAZ-ABAA CAVE – AN IMPORTANT SHELTER FOR BATS (CHIROPTERA) OF ABKHAZIA

© A.N. Ivanitskiy

The bat fauna of the Waz-Abaa cave long remained poorly studied. Ecology of bats in the cave was not known; the species composition in it needs to be clarified. The article presents data on the eight species that have been recorded in the cave, including three species for the first time. Information about hibernation in the cave of six bat species and nursery colonies of three species is presented. Large colonies of troglomorphic bats that were found in the Waz-Abaa cave need the full protection.

Key words: bats; Waz-Abaa; hibernation; nursery colony.

REFERENCES

1. Derevshchikova N.A., Komarov Yu.E., Kunaev I.T., Popov K.P. Shubi-Nykhasskaya peshchera. *Mezhvuzovskiy sbornik nauchnykh trudov "Peshchery. Tipy i metody issledovaniy"*. Perm, 1984, pp. 30-37.
2. Gazaryan S.V. The Canyon cave – a unique hibernation site for bats. *Plecotus et al.*, 1999, no. 2, p. 126.
3. Smirnov D.G. Nakhodka rukokrylykh v Akhshtyrskoy peshchere. *Plecotus et al.*, 2001, no. 4, pp. 64-68.
4. Satunin K.A. Peshchernye letuchie myshi Abkhazii. *Izvestiya Kavkazskogo otdela Russkogo geograficheskogo obshchestva*, 1911–1912, no. 21 (1), pp. 47-48.
5. Satunin K.A. Ekskursiya v peshchery Sukhumskogo okruga. Peshchery-velikany Ablaskira i Adzaba. *Izvestiya Kavkazskogo otdela Russkogo geograficheskogo obshchestva*, 1911–1912, no. 21 (1), pp. 13-18.
6. Satunin K.A. Fauna Chernomorskogo poberezh'ya Kavkaza. *Trudy obshchestva izucheniya Chernomorskogo poberezh'ya Kavkaza*, St. Petersburg, 1913, vol. 2, pp. 13-21.
7. Zaytsev F.A. K faune peshcher Abkhazii. *Soobshcheniya Gruzinskogo filiala Akademii nauk SSSR*, 1940, vol. 1, no. 1, pp. 63-70.
8. Zaytsev F.A. Obzor peshchernoy fauny Gruzii. *Trudy Zoologicheskogo instituta GSSR*, 1949, no. 8, pp. 151-173.
9. Benda P., Hanák V., Červený J. Bats (Mammalia: Chiroptera) of the Eastern Mediterranean and Middle East. Part 9. Bats from Transcaucasia and West Turkestan in collection of the National Museum, Prague. *Acta Soc. Zool. Bohem.*, 2011, no. 75, pp. 159-222.
10. Perov M.V. K izucheniyu rukokrylykh Gruzii. *Rukokrylye (Chiroptera)*. Moscow, Nauka Publ., 1980, pp. 59-63.
11. Perov M.V. K okhrane rukokrylykh. *Sbornik trudov 1 respublikanskoy konferentsii "Problemy ekologii i okhrany okruzhayushchey sredy"*, Tbilisi, 1983, vol. 1, pp. 213-221.
12. Ivanitskiy A.N. Rukokrylye peshchery Uaz-Abaa (Sukhumskiy rayon, Abkhaziya). *Plecotus et al., pars. spec.*, 2002, pp. 88-91.
13. Tintilozov Z.K. *Karstovye peshchery Gruzii*. Tbilisi, Metsniereba Publ., 1976. 276 p.

Received 18 March 2016

Иваницкий Александр Николаевич, Институт экологии Академии наук Абхазии, г. Сухум, Республика Абхазия, научный сотрудник отдела биотических исследований, e-mail: nathusii@mail.ru

Ivanitskiy Aleksander Nikolaevich, Institute of Ecology of Academy of Sciences of Abkhazia, Sukhum, Republic of Abkhazia, Research Worker of Biotic Research Department, e-mail: nathusii@mail.ru

УДК 004.89

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-640-647

ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБЪЕКТА НА БАЗЕ ИНС-МОДЕЛЕЙ

© А.А. Арзамасцев, Н.А. Зенкова

В статье описаны основные этапы разработки экспертной системы на базе интеллектуального ядра, представляющего собой математическую модель объекта, разработанного с использованием искусственных нейронных сетей и эмпирических данных.

Ключевые слова: экспертная система; ИНС-модель; искусственные нейронные сети.

Целью данной статьи является апробация технологии разработки экспертных систем на основе ИНС-моделей, предложенная нами ранее [1–3] для промышленного объекта.

Объект представляет собой биотехнологический процесс, в котором осуществляется утилизация отходов производства этанола на мелассной сырьевой основе с выработкой бактериальной биомассы. Детальное описание данного процесса с описанием основных технологических параметров, а также как объекта управления дано в наших работах [4–6].

На рис. 1 показана схема данного биотехнологического процесса. Данная технология была реализована на ОАО «Биохим», г. Рассказово, Тамбовская область. Выбор данного объекта для апробации экспертной системы связан с тем, что в нашем распоряжении име-

ется значительный объем производственных данных по этому процессу за предыдущие годы.

На рис. 2 показана упрощенная схема участка производства бактериальной биомассы, являющегося объектом рассмотрения. Основными технологическими единицами являются: биореактор, в котором осуществляется выработка биомассы, термофлотатор, служащий для ее концентрирования, и сушилка-гранулятор, в которой биомасса высушивается и приобретает товарный вид.

Основной технологической единицей, влияющей на утилизацию отходов и выработку биомассы, является четырехсекционный биореактор-ферментер, детальное описание которого также приведено в наших работах [4–6].

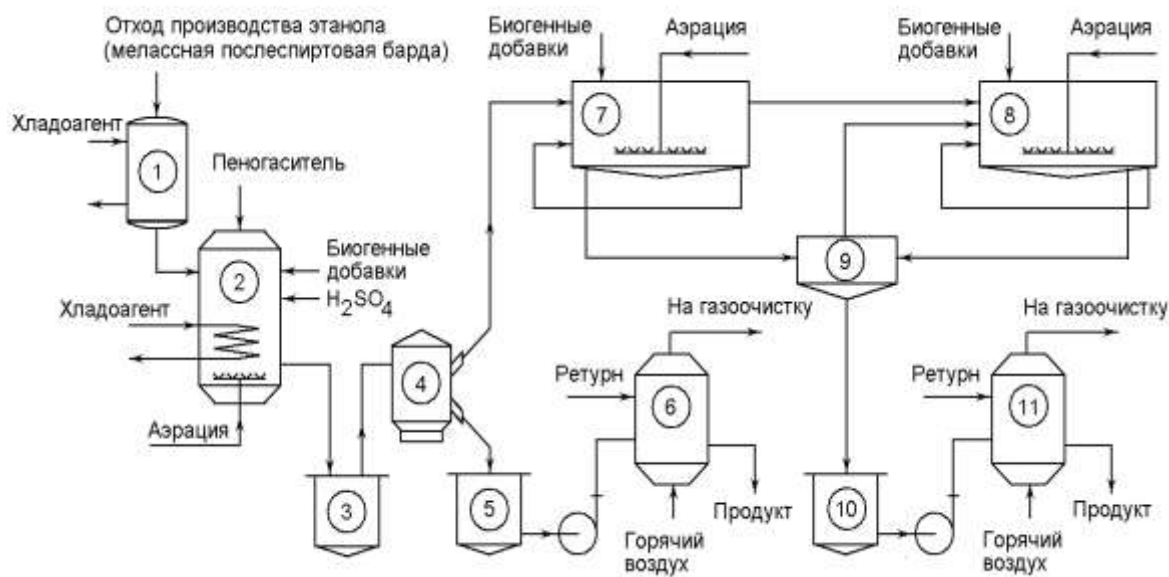


Рис. 1. Схема биотехнологического процесса утилизации отходов производства этанола с выработкой бактериальной биомассы. 1 – теплообменник; 2 – биохимический реактор первой ступени; 3 – резервуар; 4 – сепаратор; 5 – резервуар; 6 – сушилка-гранулятор; 7, 8 – биохимические реакторы второй ступени; 9 – термофлотатор; 10 – резервуар для белкового концентрата; 11 – сушилка-гранулятор

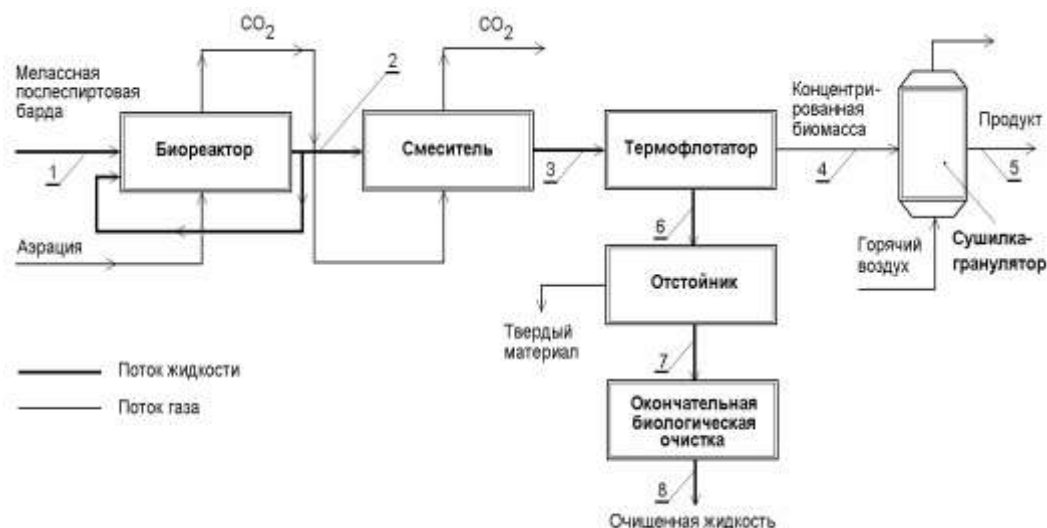


Рис. 2. Упрощенная схема биотехнологического процесса с указанием основных потоков. 1 – отход производства этанола – субстрат (ХПК $\approx 55000\text{--}60000$ мгО₂/л, БПК₅ $\approx 25000\text{--}32000$ мгО₂/л; сухих веществ 8–12 %, объемный расход 10 м³/ч); 2 – биомасса и остаточный субстрат (концентрация биомассы 10–20 кг/м³, концентрация остаточного субстрата ХПК $\approx 1000\text{--}3000$ мгО₂/л, БПК₅ $\approx 200\text{--}500$ мгО₂/л; объемный расход 10 м³/ч); 3 – биомасса, обогащенная двуокисью углерода; 4 – концентрированная биомасса (концентрация до 25–40 кг/м³); 5 – готовый продукт (выработка 1–1,6 т/сут, зольность – не более 26 %, содержание протеина – не менее 47 %); 6 – осветленный сток на биологическую очистку; 7 – осветленный сток после окончательного отделения биомассы; 8 – очищенная жидкость (ХПК не более 3000 мгО₂/л, БПК₅ не более 200–500 мгО₂/л)

Технология разработки экспертной системы для данного объекта. Далее опишем технологию разработки экспертной системы для этого объекта, включающую обучение интеллектуального ядра на основе искусственных нейронных сетей (построение ИНС-модели) и сравнение результатов определения технологических параметров, полученных с использованием экспертной системы и для реального объекта.

На рис. 3 показан фрагмент файла данных, полученных с технологического процесса (рис. 1 и рис. 2). Здесь приведены численные значения входных параметров: расхода отхода производства этанола – F , м³/ч, его концентрации – S_0 , кг/м³ (по БПК), температур в секциях реактора – $T_1\text{--}T_4$, °С, кислотности среды в секциях реактора – $pH_1\text{--}pH_4$ и выходных параметров: концентраций биомассы в секциях – $x_1\text{--}x_4$, кг/м³ и концентраций субстрата в секциях реактора – $s_1\text{--}s_4$, кг/м³ (по БПК).

Таким образом, полный файл данных представляет собой прямоугольную матрицу, содержащую 1000 строк, каждая из которых характеризует состояние биореактора и 18 столбцов, элементов каждого из которых характеризуют один из параметров состояния данного процесса. Необходимо отметить, что все параметры соответствуют схемам объекта (рис. 1, 2).

F	s_0	T_1	T_2	T_3	T_4	pH_1	pH_2	pH_3	pH_4	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	s_4
9,84	29,78	20,63	28,12	27,06	30,40	7,96	7,76	8,79	9,49	10,18	10,79	10,53	10,89	14,47	8,44	1,08	0,20
9,43	29,35	20,14	24,22	28,36	30,64	7,62	7,66	8,29	9,12	9,86	10,50	10,13	10,73	17,80	8,41	1,82	0,33
9,77	29,30	19,79	24,78	28,30	29,61	7,08	8,08	8,95	9,03	9,86	10,02	14,92	15,35	22,10	9,19	1,39	0,36
10,39	30,03	19,38	24,87	27,37	30,33	7,95	8,31	8,69	9,22	9,80	10,52	15,52	15,95	18,91	6,35	1,35	0,20
10,66	29,68	20,02	24,71	28,62	29,71	7,64	7,69	8,00	9,62	9,92	11,49	14,68	16,35	19,58	10,79	2,71	0,64
9,11	30,54	20,87	24,27	28,56	30,30	7,23	8,44	8,85	9,04	9,29	10,96	15,90	16,33	20,30	6,11	1,00	0,18
9,96	31,22	19,42	24,60	28,09	30,23	7,23	8,48	8,14	9,02	9,06	10,10	16,89	16,82	20,29	8,17	1,97	0,36
9,58	29,96	20,39	25,85	27,71	30,00	7,31	8,15	8,47	8,85	9,30	10,61	15,42	15,80	18,94	5,67	1,13	0,13
9,27	30,26	19,55	25,90	27,76	30,58	7,14	7,64	8,26	8,09	7,94	11,07	15,21	16,06	22,26	10,34	2,59	0,46
10,62	29,79	19,23	25,90	27,91	30,89	7,07	7,65	8,89	9,00	7,90	11,72	14,67	16,43	19,30	9,74	2,39	0,48
10,39	29,70	19,08	24,02	27,01	30,44	7,05	7,73	8,66	9,21	7,90	10,67	13,82	14,06	19,36	11,15	3,01	0,47
10,71	29,36	19,88	24,63	27,09	29,23	7,04	8,43	8,23	9,09	7,92	10,79	14,70	15,31	18,79	6,54	1,46	0,34
9,41	29,46	20,87	24,32	28,65	30,40	7,81	7,64	8,09	9,42	10,57	10,69	15,80	15,84	19,36	5,56	1,03	0,13
10,77	30,66	19,89	21,88	27,09	30,70	7,83	7,99	8,74	9,03	7,82	12,83	15,24	15,96	21,14	8,43	1,89	0,36
10,06	30,96	19,94	25,08	28,09	30,60	7,12	8,13	8,65	9,11	8,82	12,39	16,39	16,06	22,44	9,55	2,04	0,39
10,02	31,41	20,62	24,36	27,44	29,56	7,81	7,57	8,44	9,08	9,40	10,02	15,63	16,24	17,25	8,37	1,87	0,34

Рис. 3. Фрагмент файла данных наблюдений за биотехнологическим процессом

Построение экспертной системы для данного объекта заключается в разработке математической модели, позволяющей связать между собой входные (возмущения), управляющие и выходные параметры биореактора, заданные их значениями (рис. 3), т. е. получить зависимость вида:

$$Y = F(x, u, P). \quad (1)$$

Такая модель представляет собой наиболее важную часть экспертной системы – ее решатель, совмещенный в единое целое с базой знаний. Поскольку в данной работе речь идет о разработке экспертной системы, имеющей в качестве интеллектуального ядра модель на основе искусственных нейронных сетей (ИНС-модель), то операторное уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$Y = F_S(x, u, w), \quad (2)$$

где x – вектор входных координат (возмущений) объекта, представляющих собой набор входных переменных, на которые пользователь объекта не может оказывать воздействия или влияния; u – вектор варьируемых



Рис. 3. Схема представления объекта для разработки ИНС-модели

параметров (управляющих воздействий), который представляет собой набор входных переменных, с помощью которых пользователь объекта может оказывать влияние на процесс; Y – вектор выходных координат, численно выражающий интересующие свойства объекта (рис. 4); w – вектор весовых коэффициентов ИНС-модели, размерность которого определяет также ее число степеней свободы для настройки (обучения) по эмпирическим данным (рис. 3); F_S – оператор связи, зависящий от структуры ИНС-модели – S .

В нашем случае x представляет собой одномерный вектор с двумя координатами F и S_0 , u – одномерный вектор с восемью координатами T_1 – T_4 и pH_1 – pH_4 , Y – одномерный вектор с восемью координатами x_1 – x_4 и S_1 – S_4 .

Полученная модель должна быть нелинейной, т. к., например, в нее в качестве входных величин входят pH (показатель кислотности) среды, являющийся логарифмической функцией концентрации ионов водорода, и температура, зависимость от которой основных показателей биотехнологического процесса выражается экспоненциальным уравнением Аррениуса [4].

По данным технологического процесса (рис. 3) разрабатывали экспертную систему с использованием нашего программного обеспечения [7–9], вначале с использованием одного процессора, а затем с использованием вычислительного кластера. Ниже приведены результаты данной работы.

Так, на рис. 5 и 6 показан процесс обучения ИНС-модели с определенной конфигурацией. В данном случае речь идет об обучении ИНС с десятью входными нейронами, тремя нейронами в скрытом слое (линейная, квадратичная и кубическая функции) с использованием одного единственного процессора градиентным методом. Из рис. 5 и 6 видно, что погрешность модели быстро уменьшается, т. е. сеть с такой конфигурацией быстро обучается эмпирическим данным.

Необходимо отметить, что разрабатываемое нами программное обеспечение включает также авторский конструктивный алгоритм выбора структуры сети, описанный нами в [1–3].

В логарифмической системе координат (рис. 6) эмпирические данные по обучению ИНС-модели достаточно хорошо ложатся на прямую линию (с коэффициентом корреляции 0,983), что указывает на возможность использования для описания данного процесса зависимостей вида [1–3]:

$$\frac{dE(t)}{dt} = k_4 [E^* - E(t)], \quad (3)$$

с начальным условием: $E(0) = E_0$

Разделяя переменные в уравнении (3) и интегрируя, получим:

$$\int \frac{dE(t)}{k_4 (E^* - E(t))} = \int dt \quad \text{или} \\ -\frac{1}{k_4} \ln[k_4 (E^* - E(t))] = t + c. \quad (4)$$

Определив постоянную интегрирования из начальных условий, получим решение в виде:

$$E(t) = E^* (1 - e^{-k_4 t}) + E_0 e^{-k_4 t}. \quad (5)$$

Здесь E – среднее квадратическое отклонение ИНС-модели от эмпирических данных; k_4 – коэффициент. Данные уравнения на практике позволяют решить следующие задачи: оценить первичный период накопления информации, необходимой для построения ИНС-

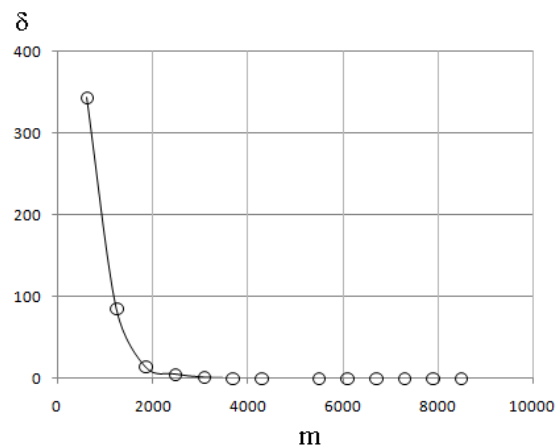


Рис. 5. Процесс обучения ИНС-модели (линейная, квадратичная и кубическая функции нейронов) градиентным методом. δ – среднеквадратическая погрешность, m – число тактов обучения. Один процессор

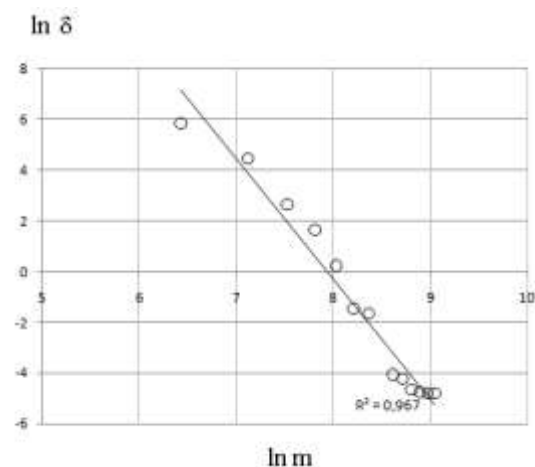


Рис. 6. Процесс обучения ИНС-модели (линейная, квадратичная и кубическая функции нейронов) градиентным методом. Один процессор. В логарифмических координатах

модели исследуемого объекта; определить начальную структуру ИНС-модели на основе входных характеристик объекта исследования; сделать оценку количества циклов обучения ИНС-модели в присутствии эксперта.

На рис. 7–10 показаны корреляции эмпирических данных (рис. 3) и значений x_1 , рассчитанных по ИНС-модели для различных структур ИНС. Из этих рисунков следует, что наилучшая структура ИНС-модели, соответствующая эмпирическим данным и определенная по среднеквадратической погрешности: десять входных нейронов, три нейрона с линейной, квадратичной и кубической передаточными функциями в скрытом слое и один выходной нейрон.

В табл. 1 приведены основные параметры моделей, корреляции для которых приведены на рис. 7–10.

На рис. 11 приведена также и схема ИНС-модели. Обучение ИНС-моделей, используемых в качестве интеллектуального ядра экспертных систем, проводили и на вычислительных кластерах. При этом проводили

расчеты концентраций субстрата в первой и четвертой секциях и концентрации биомассы в четвертой секции реактора: S_1 , S_4 и X_4 .

Был использован вычислительный кластер Тамбовского государственного технического университета, имеющий 4 процессора. Распараллеливание осуществляли на уровне вычисления значения целевой функции. Эффективность составила 90–92 %, время расчетов параллельной версии – около 4 часов с автоматизированным поиском оптимального варианта структуры ИНС-модели, показанной на рис. 12. В качестве оптимальной структуры ИНС-модели кластерной версией программы автоматизировано выбрана структура с одним кубическим, двумя квадратичными и четырьмя линейными нейронами. При этом относительные погрешности составили: для x_4 – 9 %, для s_1 – 19 %, для s_4 – 2 %. Корреляции эмпирических данных и расчетов по ИНС-модели для этих случаев показаны на рис. 13, 14 и 15.

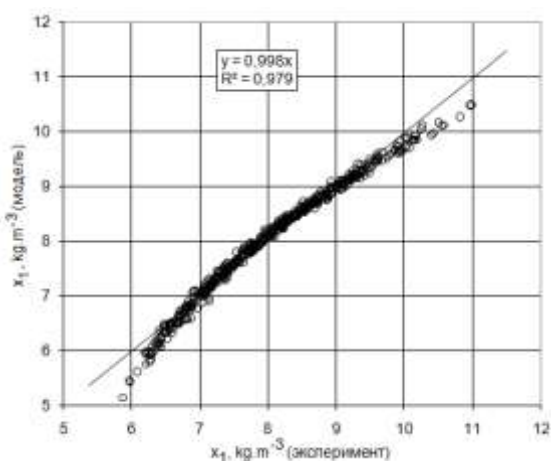


Рис. 7. Корреляция реальных данных – x_1 и расчетов x_1 по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным нейроном. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных

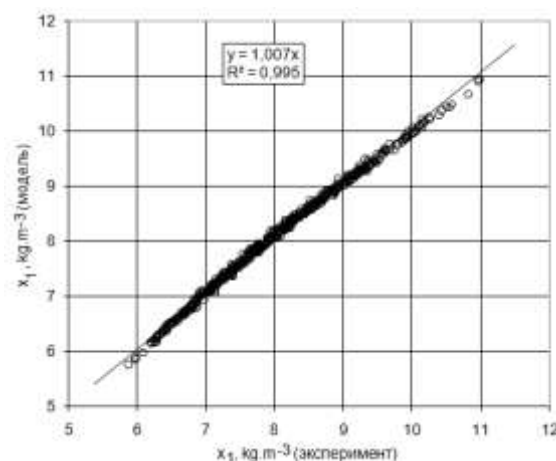


Рис. 9. Корреляция реальных данных – x_1 и расчетов x_1 по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным, одним квадратичным и одним кубическим нейронами. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных.

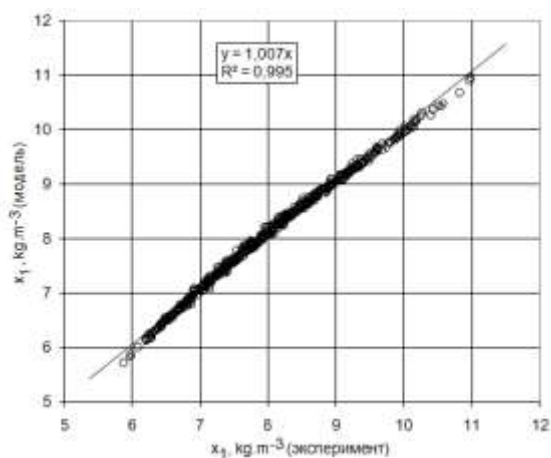


Рис. 8. Корреляция реальных данных – x_1 и расчетов x_1 по ИНС-модели для нейронной сети с одним линейным и одним квадратичным нейронами. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных

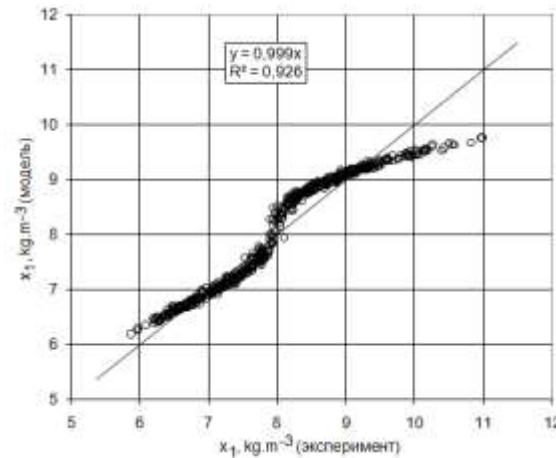


Рис. 10. Корреляция реальных данных – x_1 и расчетов x_1 по ИНС-модели для нейронной сети с одним сигмоидальным нейроном. Изображена корреляционная зависимость для 500 первых данных

Таблица 1

Основные показатели описания эмпирических данных биотехнологического процесса с использованием различных ИНС-моделей, используемых в качестве интеллектуального ядра экспертных систем

Характеристика скрытого слоя	Коэффициент корреляции расчетных и эмпирических данных	Средняя квадратическая ошибка ИНС-модели	Время обучения ИНС-модели, мин.
Один линейный нейрон	0,989	0,02178	1,5
Линейный и квадратичный нейроны	0,997	0,00837	3
Линейный, квадратичный и кубический нейроны	0,997	0,00826	4,3
Сигмоидальный нейрон	0,962	0,07659	3

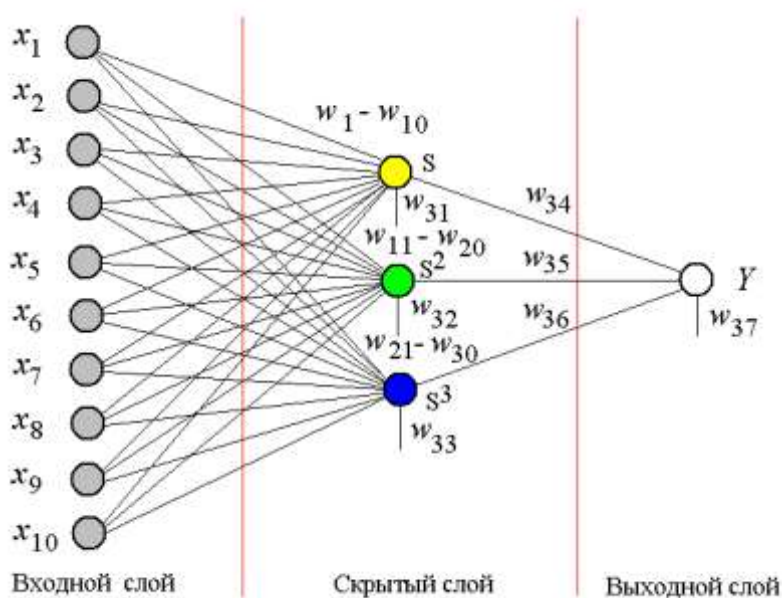


Рис. 11. Структура ИНС-модели, обеспечивающей адекватное представление эмпирической информации для производственного процесса, представленного на рис. 1 и 2

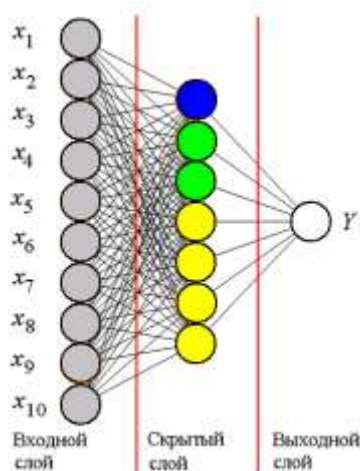


Рис. 12. Структура ИНС-модели, полученная с помощью вычислительного кластера и обеспечивающая адекватное представление эмпирической информации для производственного процесса, представленного на рис. 1 и 2

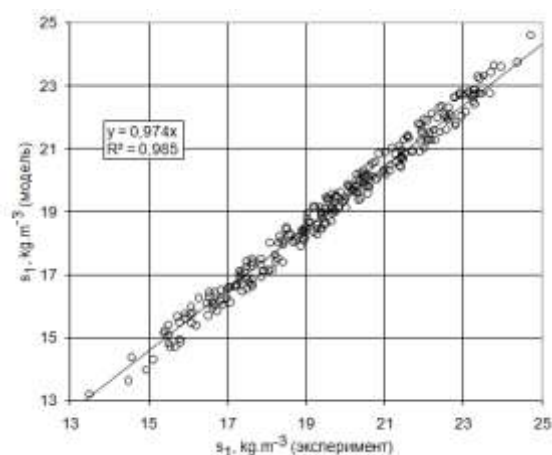


Рис. 13. Корреляция реальных данных – s_1 и расчетов s_1 по ИНС-модели для нейронной сети, показанной на рис. 12. Изображена корреляционная зависимость для 250 первых данных

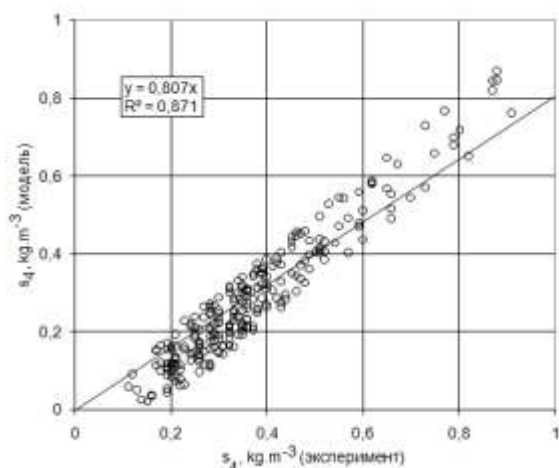


Рис. 14. Корреляция реальных данных – s_4 и расчетов s_4 по ИНС-модели для нейронной сети, показанной на рис. 12. Изображена корреляционная зависимость для 250 первых данных

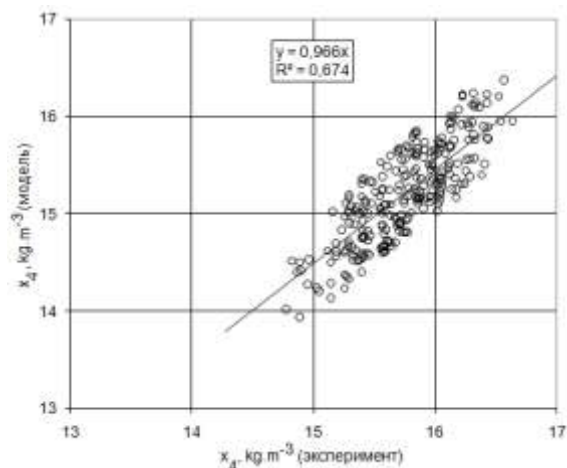


Рис. 15. Корреляция реальных данных – x_4 и расчетов x_4 по ИНС-модели для нейронной сети, показанной на рис. 12. Изображена корреляционная зависимость для 250 первых данных

Весовые коэффициенты ИНС-модели (рис. 12) для расчета s_1 приведены ниже:

0.4288162291 0.6911659837 0.1684842408 0.4616163075 0.7723379135 0.4216362238 0.9884165525 0.9788873196
0.6507799029 0.9671633244 0.5300018191 0.01564698666 0.3375403881 0.2216714323 0.4493710399 0.7133677006
0.5164060593 0.06919586658 0.4069945812 0.370903194 0.505251348 0.1388458759 0.4709280729 0.6744026542
0.6213706732 0.07822722197 0.8713401556 0.3879356384 0.5161554813 0.8892344236 0.1537122428 0.1915409863
0.5621814728 0.5658055544 0.9058300853 0.5828891993 0.995773077 0.9083153009 0.8174400926 0.6529616714
0.1239705533 0.3195488155 0.9493271112 0.4367306828 0.8182460666 0.6685219407 0.4569704831 0.3795740008
0.9782751203 0.8832216859 0.9629584551 0.4627134502 0.2770597935 0.4101133347 0.1543281227 0.9040151834
0.7805030942 0.3157556355 0.2891126871 0.5657803416 0.1679721922 0.4115138948 0.7431307435 0.7208458185
0.267467916 0.8945841193 0.5835685134 0.2519495189 0.07455415279 0.384468019 0.1137303263 0.3678540885
0.9564149976 0.01722002774 0.8362314701 0.78604424 -0.2695320249 0.5538398623 0.4061145186 -0.01418774575
0.673956871 0.5876576304 0.4519741535 0.9328891635 0.04772821069 0.8873259425 0.1167072952 0.8477321267
0.2128166556 0.4433260858 0.3933708966 0.396352917 0.1390984654 0.3976278305 0.375639379

Весовые коэффициенты ИНС-модели (рис. 12) для расчета s_4 :

-0.5704417825 -0.3067550063 -0.8308624625 0.4633195698 0.7747497559 -0.5769819021 0.9883269072 -0.02421592176
0.651948154 -0.03596661985 -0.4777849317 0.03908353299 -0.6614277363 -0.7468106151 -0.5182107091 -0.2548091412
-0.479221344 -0.9636934996 -0.5867102146 -0.6539791226 0.4907354712 -0.842656672 0.4675816298 -0.3012738824
0.647780776 -0.8964956403 0.8684352636 0.3658132553 -0.4878232479 -0.1296569407 -0.9198666215 -0.5133520961
0.5029249191 0.5552321672 0.1379725337 -0.2230418921 0.8237388134 -0.05016455799 -0.3082303703 0.6203956008
0.110185191 0.3382017314 0.9468284845 0.4570706487 -0.1558273286 0.6927443147 0.4551470578 0.3587762713
-0.02263088711 0.86644274 -0.0193118006 -0.520377934 0.250112772 -0.0408744812 0.1773202568 -0.2229760885
0.6667154431 -0.5945608616 -0.5990222692 0.5554787517 0.1193605512 -0.3891767859 0.7373982072 -0.3085044324
0.384406507 0.911829412 -0.4308186471 0.2650654018 -0.7632086873 0.3955869079 -0.8295327425

Весовые коэффициенты ИНС-модели (рис. 12) для расчета x_4 :

-0.5694060922 -0.307300508 -0.8305162787 0.462882787 0.7741994858 -0.5763953924 0.9889353514 -0.02372954786
0.6522523761 -0.03583501279 -0.381878674 -0.01728148013 -0.636954546 -0.7451941371 -0.5691607594 -0.2912786007
-0.4150056839 -0.9485729933 -0.5316421986 -0.6321180463 0.4832786918 -0.8323836923 0.4667853117 -0.3034873605
0.6527198553 -0.8909805417 0.8609946966 0.3653144836 -0.492610693 -0.1329366267 -0.8492556214 -0.5841318965
0.500246048 0.5419026613 0.06970185786 -0.2706416845 0.8380429745 -0.1023810878 -0.2908897102 0.5919341445
0.1276708096 0.3295662105 0.9494491816 0.4543088078 -0.1653430909 0.6837120652 0.4659579098 0.3602868915
-0.01319523342 0.8676882386 -0.03200615942 -0.4333055615 0.1920378208 -0.07105731964 0.1847007424
-0.138266921 0.6991356015 -0.6002905369 -0.6089967489 0.5872494578 0.1409412473 -0.4160847068 0.7910585999
-0.2642692029 0.3661999106 0.9121851325 -0.4759331644 0.2709161937 -0.812210381 0.3853225112 -0.8021785021

Сравнение времени выполнения программы на единичном процессоре и вычислительном кластере показало, что существенная доля временных затрат получения ИНС-модели экспертной системы приходится на поиск структуры сети.

Таким образом, проектирование экспертной системы для производственного процесса выработки биомассы подтвердило возможность предложенной в [1–3] технологии разработки интеллектуального ядра, базиремого на ИНС-моделях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арзамасцев А.А., Неудахин А.В. Методика разработки экспертных систем, использующих в качестве интеллектуального ядра ИНС-модели // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 2-3. С. 219-222.
2. Арзамасцев А.А., Неудахин А.В., Зенкова Н.А. Автоматизированная технология построения экспертных систем с интеллектуальным ядром на основе ИНС-моделей // Открытое образование. 2008. Вып. 3 (68). С. 35-39.
3. Арзамасцев А.А., Неудахин А.В. Автоматизированная технология построения экспертных информационных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 83-85.
4. Арзамасцев А.А. Математическое и компьютерное моделирование. Тамбов: Издат. дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2010. 257 с.
5. Арзамасцев А.А., Плотнокова Ю.В. Информационная система для оптимизации биотехнологического процесса на основе методов математического моделирования // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 5. С. 376-393.
6. Арзамасцев А.А., Плотнокова Ю.В. Оптимизация биотехнологического процесса утилизации отходов производства этанола на основе методов математического моделирования // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 174-179.

7. Арзамасцев А.А., Рыков В.П., Крючин О.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Симулятор искусственной нейронной сети с реализацией модульного принципа обучения». № 2012618141, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 07.09.2012 г.
8. Арзамасцев А.А., Крючин О.В., Кващенко О.Д., Зенкова Н.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Инструмент хранения информации для экспертных систем, базирующихся на искусственных нейронных сетях на основе СУБД Postgree (DBInteractor)». № 2012612513, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 11.01.2012 г.
9. Арзамасцев А.А., Крючин О.В., Банников С.С., Зенкова Н.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Сервер взаимодействия ядра экспертной системы с пользователями». № 2012612512, зарегистр. в ФГБУ ФИПС 11.01.2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ:

1. Работа выполнена при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, 2011–2012. Проект: «Разработка автоматизированной технологии и программно-технологического комплекса для построения экспертных систем для различных сфер деятельности, включающей оригинальные способы и программные механизмы разработки экспертных систем, поддерживающих распределенный ввод данных, параллельные вычисления и имеющих интеллектуальное ядро, основанное на нейросетевых моделях» (НИОКР № 8894p/14330).

2. Выражаем благодарность к.т.н. О.В. Крючину, С.С. Банникову, О.Д. Кващенко за большой вклад в разработку программного обеспечения и помощь в проведении вычислительных экспериментов.

Поступила в редакцию 2 апреля 2016 г.

UDC 004.89

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-640-647

EXPERT SYSTEM FOR INDUSTRIAL PROJECT BASING ON ANN-MODELS

©A.A. Arzamastsev, N.A. Zenkova

The article describes basic stages of expert system basing on intelligent heart, presenting mathematical model of object, developed with the use of artificial neural networks and empirical data.

Key words: expert system; ANN-model; artificial neural networks.

REFERENCES

1. Arzamastsev A.A., Neudakhin A.V. Metodika razrabotki ekspertnykh sistem, ispol'zuyushchikh v kachestve intellektual'nogo yadra INS-modeli. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2008, vol. 13, no. 2-3, pp. 219-222.
2. Arzamastsev A.A., Neudakhin A.V., Zenkova N.A. Avtomatizirovannaya tekhnologiya postroeniya ekspertnykh sistem s intellektual'nym yadrom na osnove INS-modeley. *Otkrytoe obrazovanie*, 2008, no. 3 (68), pp. 35-39.
3. Arzamastsev A.A., Neudakhin A.V. Avtomatizirovannaya tekhnologiya postroeniya ekspertnykh informatsionnykh sistem. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 83-85.
4. Arzamastsev A.A. *Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie*. Tambov, Publishing House of Tambov State University named after G.R. Derzhavin, 2010. 257 p.
5. Arzamastsev A.A., Plotnikova Yu.V. Informatsionnaya sistema dlya optimizatsii biotekhnologicheskogo protsesssa na osnove metodov matematicheskogo modelirovaniya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2008, vol. 13, no. 5, pp. 376-393.

6. Arzamastsev A.A., Plotnikova, Yu.V. Optimizatsiya biotekhnologicheskogo protsessa utilizatsii otkhodov proizvodstva etanola na osnove metodov matematicheskogo modelirovaniya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2011, vol. 16, no. 1, pp. 174-179.
7. Arzamastsev A.A., Rykov V.P., Kryuchin O.V. *State registration certificate of program for EVM «Simulyator iskusstvennoy neyronnoy seti s realizatsiey modul'nogo printsipa obucheniya»*. № 2012618141, registered in FIPS 7 September 2012.
8. Arzamastsev A.A., Kryuchin O.V., Kvashenkin O.D., Zenkova N.A. *State registration certificate of program for EVM «Instrument khraneniya informatsii dlya ekspertnykh sistem, baziruyushchikhsya na iskusstvennykh neyronnykh setyakh na osnove SUBD Postgree (DBInteractor)»*. № 2012612513, registered in FIPS 11 January 2012.
9. Arzamastsev A.A., Kryuchin O.V., Bannikov S.S., Zenkova N.A. *State registration certificate of program for EVM «Server vzaimodeystviya yadra ekspertnoy sistemy s pol'zovatelyami»*. № 2012612512, registered in FIPS 11 January 2012.

GRATITUDE:

1. The work is fulfilled under support of Fund of minor forms of enterprises assistance in scientific-technical sphere, 2011–2012. Project: “Development of automate technology and program-technological complex for building expert systems for different spheres of activity, including original ways and program mechanisms of expert systems development, supporting distributed data input, parallel computations and having intelligent heart, based on neural network models” (НИОКР № 8894p/14330).

2. We thank Candidates of Technics O.V. Kryuchina, S.S. Bannikova, O.D. Kvashenkina for great input in development of content solution and help in carrying out modeling exercise.

Received 2 April 2016

Арзамасцев Александр Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Arzamastsev Aleksander Anatolevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Mathematical Modeling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

Зенкова Наталья Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат психологических наук, доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Zenkova Natalya Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate of Psychology, Associate Professor of Mathematical Modeling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

УДК 66.081.63

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-648-652

ДИФРАКТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРОЗНОСТИ АЦЕТАТЦЕЛЛЮЛОЗНОЙ КОМПОЗИЦИОННОЙ МЕМБРАНЫ МГА-95

© С.И. Лазарев, Ю.М. Головин, К.В. Шестаков,
Э.Ю. Яновская, Д.С. Лазарев, В.Ю. Попов

Выполнены дифрактометрические исследования аморфных областей воздушно-сухого, водонасыщенного и рабочего образцов полупроницаемой мембраны МГА-95. Приведен сравнительный анализ дифрактограмм новой и бывшей в эксплуатации мембраны МГА-95, который показал, что фактор наложения внешнего воздействия играет лишь стимулирующую роль на перенос вещества, но не на внутримолекулярные структурные изменения основы полупроницаемой ацетатцеллюлозной мембраны. Методом малоуглового рентгеновского рассеивания исследована структура пор мембраны МГА-95, которая рассчитана с позиции фрактальной концепции, где установлены три вида пор (сфера, диск, цилиндр) и определены их средние радиусы инерции.

Ключевые слова: мембрана; структура пор; сорбционная способность; аморфность; радиусы инерции.

ВВЕДЕНИЕ

Первые исследования в области изучения структурных свойств целлюлозных материалов относятся к 20-м гг. XX в. [1]. Венгерско-английский физикохимик Майкл Поляни, занимаясь облучением волокон целлюлозы, показал, что пятна на рентгенограммах возникают от кристаллов, ориентированных вдоль оси волокна, что позволило рентгенометрическим методом установить размеры элементарной ячейки целлюлозы.

Другим методом, позволяющим исследовать структурные свойства целлюлозы, описанным авторами в работе [2], является метод квантовой химии, который рассчитывает структуру элементарного звена ацетатцеллюлозной мембраны, что позволяет проанализировать главную ее функцию – удерживание электролитов при электростатическом взаимодействии атомов кислорода карбонильных и оксигрупп с анионами электролита.

Исследование структурных характеристик полупроницаемых мембран на основе целлюлозы и ее производных проводили и другие авторы, например, описанные в работах [3–4], где рассматриваются изменения структурных характеристик мембран с позиций кинетики процесса. Однако проникновение растворителя или растворенного вещества, учитывая специфику строения ацетатцеллюлозных мембран, возможно по двум механизмам – молекулярной диффузии через монолитные слои и капиллярного всасывания каналами или порами полупроницаемой мембраны. Вероятно, это связано с тем, что течение внутрипоровой жидкости обусловлено структурными изменениями полимерной полупроницаемой мембраны.

Целью данной работы явилось проведение дифрактометрических исследований для изучения пористости ацетатцеллюлозной мембраны МГА-95.

ЭКСПЕРИМЕНТ

Рентгенометрические исследования осуществляли в области больших углов 2θ от 2° до 40° на дифрактометре Дрон-3 с автоматической записью на ПК в геометрии на «отражение». Использовалось излучение CuK_α ($\lambda = 1,54 \text{ \AA}$). Монохроматизация обеспечивалась Ni-фильтром.

Исследования структуры порового пространства проводили методом малоуглового рентгеновского рассеивания. Измерения проведены в диапазоне значений углов рассеяния от $0,34$ до $1,8$ (10^{-2} рад).

Размер аморфных областей определяли по формуле Шеррера [5]:

$$L_{ам} = \lambda \left(\beta \cos \frac{2\theta}{2} \right)^{-1} \quad (1)$$

Кристаллографические расчеты для рефлексов при углах $2\theta = 16,5^\circ, 22,5^\circ, 25,5^\circ$ проводились по уравнению Брэгга:

$$d = \lambda \cdot (2 \sin \theta)^{-1} \quad (2)$$

Для расчета рентгеновской степени кристалличности (СК) применялась методика Аггарвала–Гилля [6], сущность которой заключается в том, что на дифрактограмме полимерного материала разделяют отражения, связанные с кристаллической и аморфной фазами, а расчет производится по соотношению

$$СК = \frac{I_k}{I_k + I_a} \cdot 100\%, \quad (3)$$

где I_k – интегральная интенсивность кристаллической фазы; I_a – интегральная интенсивность аморфной фазы.

Расчет их радиусов инерции R_g производился по формуле [7–8]:

$$R_g = \sqrt{3}/s_m, \quad (4)$$

где s_m – вектор рассеяния, при котором наблюдается максимум функции.

Радиусы пор мембраны рассчитывали по следующей формуле:

$$r_k = \sqrt{(5R_{gk}/3)}. \quad (5)$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При проведении рентгенодифрактометрических исследований воздушно-сухого и водонасыщенного состояния мембраны в области больших углов получены экспериментальные данные, которые приведены в виде дифрактограмм на рис. 1. Приступая к анализу рентгенограмм (рис. 1), отметим, что рефлексы с максимумами при углах 2θ 8,4°, 16,5°, 22,5°, 25,5° размыты и малоинтенсивны. При этом легко заметить, что происходит перераспределение интенсивности и увеличение диффузной составляющей рассеяния в образце мембраны, насыщенной водой. Однако положения максимумов рентгеновского рассеивания при углах 16,5°, 22,5°, 25,5° для образцов мембраны в различных состояниях почти не меняются. В то же время максимум при угле 8,4° не только сильно расширяется, но и наблюдается его смещение в область больших углов (9,6°) у образца мембраны, насыщенного водой.

Сравнение наших данных с экспериментальными результатами работы [9] позволяют сделать вывод, что кривые рентгеновского рассеяния типичны для ацетатов целлюлозы, сформированных из растворов. Как отмечается в работе, формирование мезофазы при увеличении концентрации полимера вызывает рост интенсивности рентгеновского рассеяния в области углов 2θ , 7–8° и уменьшения при углах 2θ , 20–21°, отвечающих за кристаллизацию полимера. Расчет по формуле (2) дает следующие величины межплоскостных расстояний $d_{16,5} = 0,597$ нм; $d_{22,5} = 0,439$ нм; $d_{25,5} = 0,387$ нм, что согласуется с параметрами кристаллической решетки

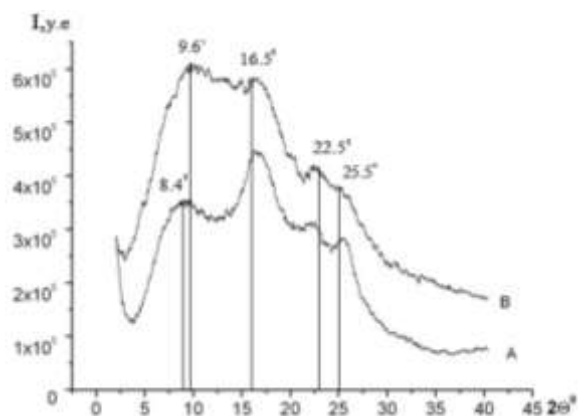


Рис. 1. Рентгеновская дифрактограмма образцов полимерной мембраны МГА-95 в геометрии на отражение: А – воздушно-сухое состояние мембраны; В – водонасыщенного состояния мембраны

целлюлозы альфа-фазы при радиальной дифракции от кристаллографических плоскостей: (100); (010); (110). Поэтому рефлексы при углах дифракции 2θ – 16,5°, 22,5°, 25,5° следует идентифицировать как структурное состояние кристаллической части ацетатцеллюлозы. Что касается широкого максимума при угле 2θ , равном 8,4°, то с большой вероятностью можно отнести к дифракции рентгеновских лучей от аморфной части гетерофазной структуры мембраны [9].

Эксплуатационные свойства ацетатцеллюлозных мембран зависят не только от химического состава, строения макромолекул, но и от их взаимного расположения, т. е. надмолекулярной структуры полимера. Если в кристаллических структурах полимерные цепи упорядочены, то в аморфных они располагаются, подчиняясь ближнему порядку, формируя за счет межмолекулярного взаимодействия полярных групп аморфные области (рис. 2).

Из сопоставления дифрактограмм (рис. 3) образцов воздушно-сухой и рабочей (бывшей в эксплуатации) мембраны видно, что положение рефлексов для обоих образцов не меняется, однако при этом наблюдается исчезновение резкой структуры рефлексов при углах 16,5°, 22,5°, 25,5° в образце мембраны, бывшей в эксплуатации (рис. 3б). Обнаруженное совпадение углов дифракции указывает на малую чувствительность макромолекул к механической и термодинамической нагрузке при циклических условиях эксплуатации. Что касается размытости дифракционных рефлексов, то это обусловлено влиянием различных факторов, в частности, наличием в порах либо на поверхности мембраны остатков растворителя или раствора. Чтобы получить объяснение этим экспериментальным данным в мембранах на основе аморфно-кристаллических полимеров, необходимы знания соотношения кристаллической и аморфной фаз в них.

Рассчитанное значение СК для образца сухой мембраны составило 57 %, а для водонасыщенного и рабочего образцов мембран, соответственно, 27 и 38 %. Результаты расчетов СК указывают на то, что доля аморфности в водонасыщенном образце мембраны увеличилась почти в два раза. Подобное изменение СК можно объяснить адсорбционными свойствами молекул воды, которые обладают малым молекулярным объемом и сильной тенденцией к донорно-акцеп-

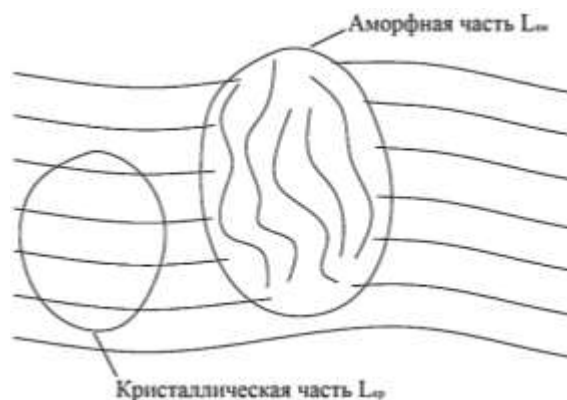


Рис. 2. Расположение аморфных и кристаллических областей в полупроницаемых мембранах

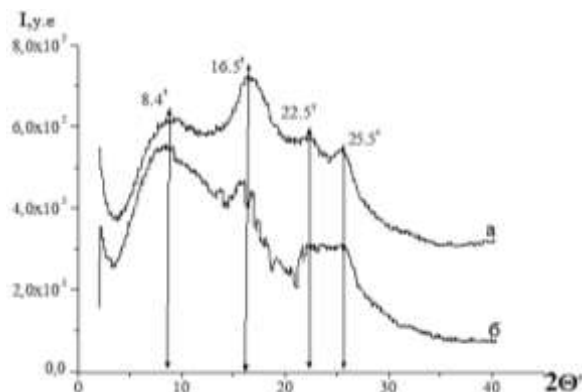


Рис. 3. Рентгеновские дифрактограммы от образцов полимерной мембраны МГА-95, полученных в геометрии на отражение: а) образец воздушно-сухой мембраны; б) образец рабочей мембраны

торным взаимодействиям с ионами потенциалобразующих поверхностей капиллярно-пористого пространства мембраны. При нарушении межмолекулярного взаимодействия целлюлозы увеличивается доля аморфной составляющей в полимере. Такое объяснение согласуется с выводами авторов работы [6].

Для понимания и объяснения этих экспериментальных данных желательно иметь сведения об изменении в процессе эксплуатации аморфной фазы мембраны. С этой целью нами были проведены детальные измерения дифракционных максимумов при 2θ , равных $8,4^\circ$ и $16,5^\circ$ (рис. 4).

Полнопрофильный анализ формы дифракционных максимумов осуществляли в программе Origin 6.0. Установлено, что наилучшую аппроксимацию этих пиков дает бимодальная функция Гаусса, при этом определены количественные значения полуширины рефлексов и размеры $L_{ам}$ аморфной фазы [10], которые приведены в табл. 1. Как видно из табл. 1, наблюдается уширение дифракционного максимума и уменьшение размера аморфной фазы, что скорее и прежде всего вызвано нарушением надмолекулярной структуры основы мембраны.

Наряду с рентгенодифрактометрическими исследованиями, проведенными в области больших углов, большой интерес представляют собой исследования методом малоуглового рентгеновского рассеивания, которые позволяют изучить структуру порового пространства (порозность) мембран, например, виды пор, их размер и радиусы инерции [11]. При анализе кривой

$y = s^2 \cdot I(s)$ в качестве аппроксимирующей функции использовали функцию Гаусса. Было установлено, что наилучшим образом кривую рассеяния для мембраны МГА-95 можно описать суперпозицией трех функций Гаусса с максимумами $s_m = 0,62 \text{ нм}^{-1}$, $s_m = 0,4 \text{ нм}^{-1}$, $s_m = 0,28 \text{ нм}^{-1}$.

Значения размеров радиусов пор и средние величины радиусов инерции приведены в табл. 2. Кривые функции распределения по размерам полидисперсных сферических частиц, рассчитанные по программе Gnom4,5a [12], представлены на рис. 5.

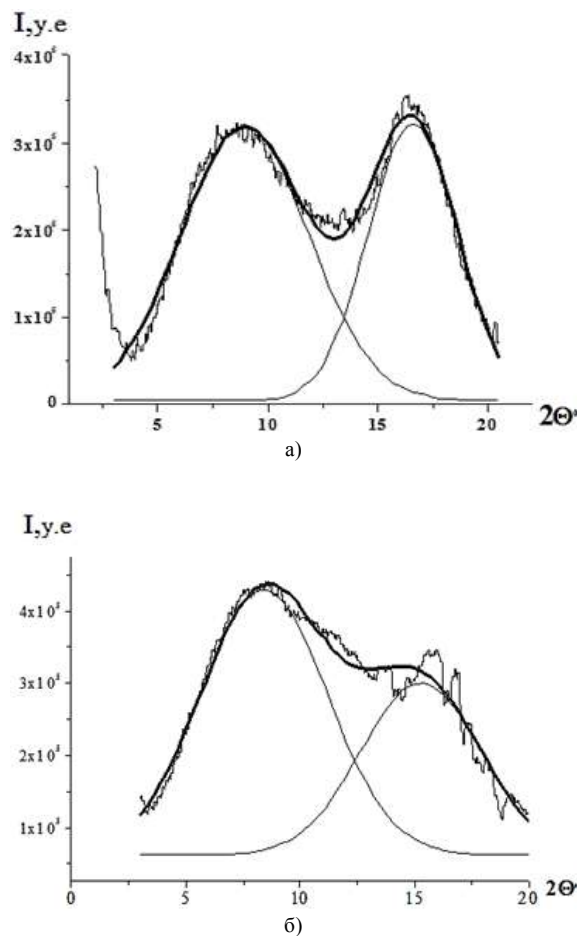


Рис. 4. Дифракционные максимумы при углах рассеяния 2θ $8,4^\circ$ и $16,5^\circ$: а) водонасыщенный образец мембраны; б) рабочий образец мембраны

Таблица 1

Параметры надмолекулярной структуры образца мембраны МГА-95 при анализе аморфных дифракционных максимумов

Образцы мембраны МГА-95	Аморфные дифракционные максимумы			
	Положение максимума 2θ , град	Полуширина пика β , град	Интеграл полуширина $\beta_{ин}$, град	$L_{ам}$, нм
Воздушно-сухая	8,4	5,4	6,9	1,7
Водонасыщенная	9,6	6,5	8,2	1,4
Рабочая	8,4	5,6	7,0	1,6

Таблица 2

Размеры радиусов пор r_1 , r_2 , r_3 и радиусов инерции R_g в нм

Форма Объект	Сфера				Диск						Цилиндр			
	R_q	r_1	R_q	r_2	R_q	r_1	R_q	r_2	R_q	r_3	R_q	Rg	Rg	r_3
МГА-95	3,3	8,3	14,1	15,1	6,4	21	2,4	14,4	2,0	8,2	2,7	4,25	6,1	10,3

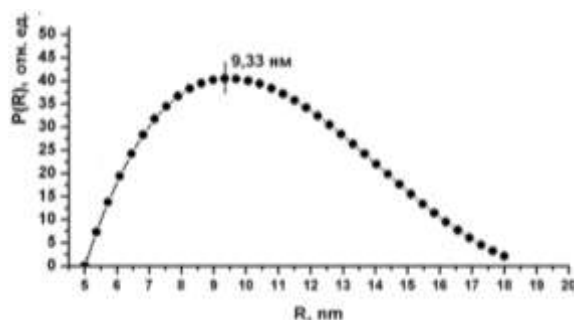


Рис. 5. Функция распределения по размерам полидисперсных сферических частиц для мембраны МГА-95

Результаты проведенных дифрактометрических исследований порозности ацетатцеллюлозной мембраны МГА-95 позволяют сделать следующее заключение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рентгенодифрактометрическим методом экспериментально исследованы аморфные области воздушно-сухого, водонасыщенного и рабочего образцов полупроницаемой мембраны МГА-95 и приведена характеристика рентгеновских дифрактограмм в геометрии на отражение. Выполненный сравнительный анализ дифрактограмм новой и бывшей в эксплуатации мембраны МГА-95 показал, что фактор наложения внешнего воздействия (градиента давления) играет лишь стимулирующую роль на перенос вещества, но не на внутримолекулярные структурные изменения основы мем-

браны. Исследована структура порового пространства мембраны МГА-95 методом малоуглового рентгеновского рассеивания, которая рассчитана с позиции фрактальной концепции. Получены численные значения радиусов пор как параметра, формирующего скелет порового пространства обратноосмотических композиционных мембран. Определены три вида пор (сфера, диск, цилиндр) в мембране и их средние величины радиусов инерции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков В.А., Вонский Е.В., Кузнецова Г.И. Выдающиеся химики мира. М.: Высш. школа, 1991. 656 с.
2. Бутырская Е.В., Шапошник В.А., Резников А.А. // Журнал структурной химии. 2005. Т. 46. № 1. С. 170.
3. Седелкин В.Н., Потехина Л.Н., Чиркова О.А., Олейникова Е.В. // Мембраны и мембранные технологии. 2014. Т. 4. № 2. С. 114-128.
4. Фенько Л.А., Семенкевич Н.Г., Бильдюкевич А.В. // Мембраны и мембранные технологии. 2011. Т. 1. № 1. С. 66-76.
5. Арисова В.Н. Структура и свойства КМ. Волгоград: ВолгГТУ, 2008. 96 с.
6. Ковалев Г.В., Бугаенко Л.Т. // Вестник Московского университета. 2002. Т. 43. № 1. С. 67-70.
7. Порай-Кошиц М.А. Практический курс рентгеноструктурного анализа: учебник для университетов. М.: МГУ, 1960. Т. 2. 532 с.
8. Сверзун Д.И. Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние. М.: Наука, 1986. 280 с.
9. Шитовская А.Б. Автореф. дис. ... д-ра хим. наук. Саратов, 2009. 32 с.
10. Иоелович М.Я., Веверис Г.П. // Химия древесины. 1987. № 5. С. 75-80.
11. Лазарев С.И., Головин Ю.М., Быстрицкий В.С. и др. // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 4. С. 1260-1262.

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

UDC 66.081.63
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-648-652

DIFFRACTION RESEARCH OF POROSITY OF CELLULOSE ACETATE COMPOSITE MEMBRANE MGA-95

© S.I. Lazarev, Y.M. Golovin, K.V. Shestakov,
E.Y. Yanovskaya, D.S. Lazarev, V.Y. Popov

Method of X-ray diffraction was used for research of sorption regions of air-dry, water-saturated and working samples of a semi-permeable membrane MGA-95. Comparative analysis of the diffraction patterns of new and working membrane's samples shows that factor of external influence plays only a catalytic role in the transport of material, but not on the intramolecular structural changes in base of cellulose acetate semi-permeable membrane. There was found the structure of membrane MGA-95 pores by small-angle X-ray scattering, which was calculated from the position of the fractal concept, where there are three kinds of pores (sphere, disc, cylinder) and determination of their average inertia radius.

Key words: membrane; pores structure; sorption ability; amorphousness; inertia radiuses.

REFERENCES

1. Volkov V.A., Vonskii E.V., Kuznetsova G.I. *Vydayushchiesya khimiki mira*. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1991. 656 p.
2. Butyrskaya E.V., Shaposhnik V.A., Reznikov A.A. *J. of Structural Chemistry*, 2005, vol. 46, no. 1, p. 170.
3. Sedelkin V.N., Potekhina L.N., Chirkova O.A., Oleinikova E.V. *Membranes and membrane technologies*, 2014, vol. 4, no. 2, pp. 114-128.
4. Fen'ko L.A., Semenkevich N.G., Bil'dyukevich A.V. *Membranes and membrane technologies*, 2011, vol. 1, no. 1, pp. 66-76.
5. Arisova V.N. *Structure and properties of km*. Volgograd, Volgograd State Technical University Publ., 2008. 96 p.
6. Kovalev G.V., Bugaenko L.T. *Moscow University Chemistry Bulletin*, 2002, vol. 43, no. 1, pp. 67-70.
7. Porai-Koshits M.A. *Prakticheskii kurs rentgenostrukturnogo analiza*. Moscow, Moscow State University Publ., 1960. Vol. 2. 532 p.
8. Svergun D.I. *Rentgenovskoe i neitronnoe malouglovoe rasseyanie*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 280 p.
9. Shipovskaya A.B. *Avtoreferat dissertatsii ... doktora khimicheskikh nauk*. Saratov, 2009. 32 p.
10. Ioelovich M.Ya., Vevers G.P. *Chemistry of wood*, 1987, no. 5, pp. 75-80.
11. Lazarev S.I., Golovin Yu.M., Bystritskii V.S. et al. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2012, vol. 17, no. 4, pp. 1260-1262.

Received 1 March 2016

Лазарев Сергей Иванович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Lazarev Sergey Ivanovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Головин Юрий Михайлович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат химических наук, доцент, доцент кафедры физики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Golovin Yuriy Mikhaylovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Chemistry, Associate Professor, Associate Professor of Physics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Шестаков Константин Валерьевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Shestakov Konstantin Valerevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Яновская Элина Юрьевна, Российский национальный исследовательский медицинский университета им. Н.И. Пирогова, г. Москва, Российская Федерация, доцент кафедры педиатрии, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Yanovskaya Elina Yurevna, Pirogov Russian National Research Medical University, Moscow, Russian Federation, Associate Professor of Paediatrics, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Лазарев Дмитрий Сергеевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, студент, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Lazarev Dmitriy Sergeevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Попов Вадим Юрьевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Popov Vadim Yurevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

УДК 66.081.63
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-653-658

ЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЛЬТРАФИЛЬТРАЦИОННОГО КОНЦЕНТРИРОВАНИЯ БЕЛКА В ПОДСЫРНОЙ СЫВОРОТКЕ

© С.И. Лазарев, В.Ю. Богомолов, А.А. Арзамасцев,
К.К. Полянский, С.А. Вязовов, А.А. Левин

Разработана эмпирическая модель ультрафильтрационного концентрирования белков в подсырной сыворотке. Выполнена проверка адекватности эмпирической модели путем сравнения экспериментальных и расчетных данных. Отклонение расчетных данных от экспериментальных не превысило 10 %.

Ключевые слова: модель; мембрана; ультрафильтрационный процесс.

ВВЕДЕНИЕ

Для эффективной переработки вторичного молочного сырья необходимо получение высококонцентрированных продуктов мембранного процесса. Для этих целей в промышленности реализуют многоступенчатые мембранные процессы, либо организуют схемы мембранного концентрирования с замкнутой циркуляцией раствора [1–7]. Поскольку процесс получения подсырной сыворотки является периодическим, то в данной работе нет необходимости рассматривать многоступенчатые мембранные системы непрерывного действия, что требует предварительного математического описания.

ИССЛЕДОВАНИЯ

В рамках данной работы рассматривается ультрафильтрационная установка с замкнутой циркуляцией раствора и возможностью ее математического описания. Рассмотрим плоскокамерную установку, состоя-

щую из j камер разделения с замкнутой циркуляцией раствора по линии ретентата (рис. 1).

Рассматривая процессы, протекающие в данной установке для математического описания, примем следующие допущения [8–9]:

- 1) существует равновесие фаз на границе раствора и мембраны;
- 2) насос обеспечивает постоянство подачи;
- 3) в емкости с раствором происходит идеальное смешение;
- 4) все неучтенные свойства мембран учитываются через коэффициенты задержания и водопроницаемости;
- 5) электрические импульсы накладываются с равными периодами времени подачи тока и отсутствия тока;
- 6) мембрана симметрично проницаема, т. е. проницаемость пор потоком со стороны активного слоя мембраны равна проницаемости при направлении потока со стороны подложки;
- 7) скорость электродных реакций намного выше скорости массопереноса.

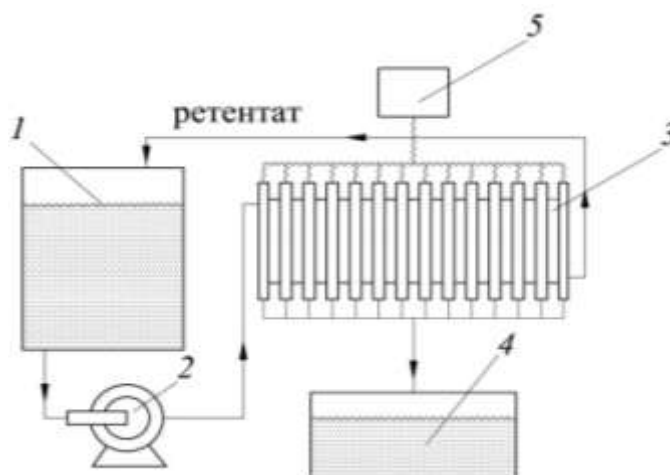


Рис. 1. Схема ультрафильтрационной установки с замкнутой циркуляцией раствора и возможностью наложения электрических импульсов: 1 – исходная емкость; 2 – насос; 3 – ультрафильтрационный аппарат с j камер разделения; 4 – емкость пермеата; 5 – источник электрических импульсов



Рис. 2. Схема основных потоков вещества при ультрафильтрации

Основные составляющие переноса веществ через мембрану представлены на рис. 2. В данной модели мы ограничимся следующими основными потоками: $m_{\text{кон}}$ – конвективный поток растворенного вещества под действием приложенного к системе давления; $m_{\text{диф}}$ – диффузионный поток растворенного вещества за счет разницы концентраций по разные стороны мембраны [10]; $V_{\text{кон}}$ – конвективный поток растворителя под действием приложенного к системе давления; $V_{\text{осм}}$ – осмотический поток растворителя под действием разности осмотических давлений растворов по разные стороны мембраны. В момент наложения электрического импульса в системе возникают электрокинетические потоки растворителя и растворенного вещества под действием разности потенциалов, однако в рамках данной работы мы учтем эти потоки при определении коэффициентов массопереноса.

Для составляющих массопереноса при ультрафильтрации можно записать следующие выражения:

- диффузионный перенос вещества [11]

$$m_{\text{диф}} = \frac{P_d}{\delta} (C_{\text{рет}} - C_{\text{пер}}), \quad (1)$$

где P_d – коэффициент диффузионной проницаемости, $\text{м}^2/\text{с}$; δ – толщина мембраны, м ; $C_{\text{рет}}$, $C_{\text{пер}}$ – концентрации растворенного вещества в ретентате и пермеате соответственно, $\text{кг}/\text{м}^3$;

- конвективный перенос вещества – перенос с потоком растворителя

$$m_{\text{кон}} = k_{\text{кон}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot C_{\text{кон}}, \quad (2)$$

где $k_{\text{кон}}$ – коэффициент, полученный при наложении электрических импульсов и учитывающий их влияние; $V_{\text{кон}}$ – конвективный перенос растворителя, м^3 ; $C_{\text{кон}}$ – концентрация растворенного вещества в конвективном потоке, $\text{кг}/\text{м}^3$;

- конвективный перенос растворителя

$$V_{\text{кон}} = \alpha \cdot \Delta P, \quad (3)$$

где α – коэффициент водопроницаемости, полученный с учетом влияния наложения электрических импульсов на мембранную систему, $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Па})$;

- осмотический перенос растворителя

$$V_{\text{осм}} = \alpha \cdot \Delta \pi, \quad (4)$$

где $\Delta \pi$ – разность осмотических давлений по обе стороны мембраны, Па .

Уравнение (4) для осмотического переноса растворителя учитывает влияние наложения электрических импульсов на мембранную систему посредством коэффициента α и записано не через привычный коэффициент осмотической проницаемости, получаемый только экспериментально, а через непосредственно движущую силу осмотического потока – осмотическое давление. В работе [12] определено значение осмотического давления молочной сыворотки и показана его зависимость от концентрации сухих веществ в сыворотке. Введение в уравнение величины осмотического давления, для которого определена непосредственная зависимость от концентрации разделяемого раствора, позволило избавиться модель от коэффициента осмотической проницаемости, величину которого можно было получить только путем проведения дополнительных экспериментов.

Аппроксимируя полученные данные в работе [12] зависимости осмотического давления молочной сыворотки от концентрации, получим выражение для нахождения π с доверительным интервалом 90 %:

$$\pi = 1,0455^C - 0,9404, \quad (5)$$

где 1,0455 и 0,9404 – коэффициенты аппроксимации.

Тогда, учитывая что $\Delta \pi$ – разность осмотических давлений по обе стороны мембраны, можем записать (4) в виде:

$$V_{\text{осм}} = \alpha \cdot (1,0455^{C_{\text{рет}}} - 1,0455^{C_{\text{пер}}}) \quad (6)$$

Запишем суммарный поток массы через коэффициент задержания мембраны

$$M = m_{\text{диф}} + m_{\text{кон}} = \frac{P_d}{\delta} (C_{\text{рет}} - C_{\text{пер}}) + k_{\text{кон}} \cdot V_{\text{кон}} \cdot C_{\text{кон}} = (1 - K) C_{\text{рет}} V_{\text{кон}} \quad (7)$$

Примем следующие допущения:

$$C_{\text{рет}} = 0,5(C_j^{\text{ex}} + C_j^{\text{bix}});$$

$$C_{j-1}^{\text{bix}} = C_j^{\text{ex}}; \quad (8)$$

$$V_{j-1}^{\text{bix}} = V_j^{\text{ex}}.$$

С учетом вышеописанного, для суммарных потоков массы (M) и растворителя (N) по j -й камере можно записать:

по растворенному веществу

$$M = (C_j^{\text{ex}} + C_j^{\text{bix}})(1 - K_j)\alpha_j \Delta P_j F_m \quad (9)$$

по растворителю

$$N = 2\alpha_j \Delta P_j F_m + 2\alpha_j (1,0455^{C_{pem}} - 1,0455^{C_{nep}}) F_m \quad (10)$$

Уравнение материального баланса по растворенному веществу для j -й камеры примет вид

$$V_j^{6x} C_j^{6x} d\tau - \sum m_j d\tau - V_j^{6blx} C_j^{6blx} = d(V_j C_j) \quad (11)$$

$$V_j^{6x} - \sum v_j = V_j^{6blx} \quad (12)$$

Выводим уравнение для расчета концентрации в пермеате

$$C_{nep} = \frac{M}{N} = \frac{0,5}{\alpha_j (\Delta P_j + 1,0455^{C_{pem}} - 1,0455^{C_{nep}})} \times \\ \times \left[(1 - K_j) \cdot (C_j^{6x} + C_j^{6blx}) \cdot \alpha_j \cdot \Delta P_j \right] \quad (13)$$

Учитывая допущение о режиме идеального смешения в емкости, составим для нее материальные балансы: по растворенному веществу

$$V_{nep}^{6blx} \cdot C_{nep}^{6blx} \cdot d\tau = d(C_1^{6x} \cdot V_1) + C_1^{6x} \cdot V_1^{6x} d\tau \quad (14)$$

по объемному расходу раствора

$$V_{pem}^{6blx} d\tau = dV_E + V_1^{6x} d\tau \quad (15)$$

Из уравнений (14) и (15) получим

$$V_E \cdot \frac{dC_1^{6x}}{d\tau} = V_{pem}^{6blx} \cdot (C_{pem}^{6blx} - C_{pem}^{6x}) \quad (16)$$

Учитывая, что

$$V_{pem}^{6blx} = V_1^{6x} - \sum_{j=1}^j N_j \quad (17)$$

выражение (15) запишем в виде

$$\frac{dV_E}{d\tau} = - \sum_{j=1}^j N_j \quad (18)$$

Принимаем, что $\sum_{j=1}^j N_j \neq f(\tau)$ и интегрируя, получим

$$V_E = V_{E0} - \tau \cdot \sum_{j=1}^j N_j \quad (19)$$

Подставив в (4.16) и сделав преобразования, получим

$$\frac{dC_1^{6x}}{d\tau} = z(\tau) \cdot (C_{pem}^{6blx} - C_1^{6x}), \quad (20)$$

$$\text{где } z(\tau) = \frac{V_1^{6x} - \sum_{j=1}^j N_j}{V_{E0} - \tau \cdot \sum_{j=1}^j N_j}$$

В итоге получаем систему уравнений, позволяющую определять изменение концентраций растворенного вещества в пермеате и ретентате с течением времени для каждой камеры ультрафильтрационного аппарата, а также величины объемных расходов пермеата и текущего объема раствора в емкости. Полученная система уравнений является замкнутой.

$$\left\{ \begin{aligned} & dC_j^{6blx} / d\tau + dC_j^{6x} / d\tau = \\ & = \varepsilon \cdot \left[(V_1^{6x} - \sum_{j=1}^{n-1} N_j) - 2L \right] C_j^{6x} - \\ & - \varepsilon \cdot \left[(V_1^j - \sum_{j=1}^n N_j) + 2L \right] C_j^{6blx}, \\ & dC_j^{6x} / d\tau = z(\tau) \cdot (C_j^{6blx} - C_j^{6x}), \\ & C_{nep} = R_j \cdot (C_j^{6x} - C_j^{6blx}), \\ & C_{j-1}^{6blx} = C_j^{6x}, \\ & C_j^{6x}(0) = C_j^{6blx}(0) = C_0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где $j = 1, 2, 3, \dots, n$, $\sum_{j=1}^{n-1} N_j = 0$;

$$N = 2\alpha_j F_m (\Delta P_j + 1,0455^{C_{pem}} - 1,0455^{C_{nep}});$$

$$\varepsilon = \frac{2}{F_m \chi}; \quad L = 0,5\alpha_j (1 - K_j) \Delta P F_m;$$

$$z(\tau) = \left(V_1^{6x} - \sum_{j=1}^n N_j \right) / \left(V_{E0} - \tau \sum_{j=1}^n N_j \right);$$

$$R_j = \left[(1 - K_j) \alpha_j \Delta P_j \right] / \left[\alpha_j (\Delta P_j + 1,0455^{C_{pem}} - 1,0455^{C_{nep}}) \right].$$

Проверка адекватности предложенной эмпирической модели проводилась средствами имитационного моделирования. На основе предложенной модели была разработана программа для ЭВМ (№ 2015614888), реализующая расчет основных характеристик ультрафильтрационного процесса концентрирования подсырной сыворотки [13]. Программа разработана в среде Turbo C++ 4.064Bit Version, на персональном компьютере ASUSU36S, на базе процессора IntelCorei3, под управлением операционной системы Windows 7 Basic.

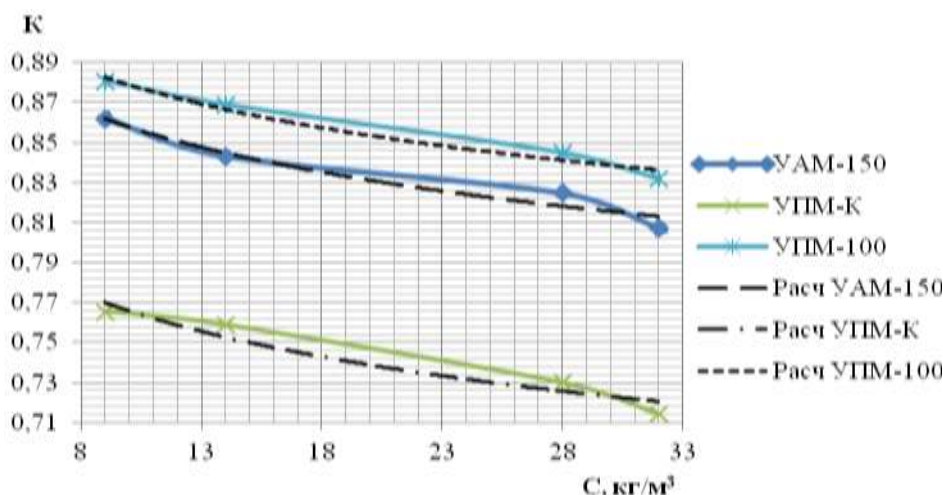


Рис. 3. Кинетические зависимости коэффициента задержания сыровоточных белков ультрафильтрационными мембранами УАМ-150, УПМ-К и УПМ-100 от концентрации исходного раствора

В программе были заданы параметры и условия ультрафильтрационных процессов, реализованных ранее в лабораторных условиях. Полученные в результате расчета значения коэффициента задержания сыровоточных белков ультрафильтрационными мембранами УАМ-150, УПМ-100 и УПМ-К при различных концентрациях исходного раствора были сопоставлены с результатами расчета (рис. 3).

Отклонения расчетных данных от экспериментальных не превысили 10 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе балансных соотношений разработана эмпирическая модель процесса ультрафильтрационного концентрирования и деминерализации подсырной сыровотки с учетом величины осмотического давления вторичного раствора молочной сыровотки, позволяющая рассчитывать значения концентрации и объемы пермеата и ретентата в промежуточных камерах и на выходе из плоскокамерного ультрафильтрационного аппарата. Проверена адекватность эмпирической модели путем сравнения экспериментальных и расчетных кинетических зависимостей коэффициента задержания от концентрации белка в ультрафильтрационном процессе концентрирования подсырной сыровотки. Расхождение между экспериментальными и расчетными значениями не превышало 10 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Семенов А.Г., Лобасенко Б.А. Математические модели ультрафильтрации. Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2010. 176 с.
2. Семенов А.Г., Лобасенко Б.А. Получение молочных белков путем мембранной ультрафильтрации с отдельным отводом потока концентрата // Достижения науки и техники АПК. 2009. № 5. С. 65-67.
3. Семенов А.Г., Благоческая Н.А., Сафонов А.А. Математическая модель порционной установки для ультрафильтрационной сепарации молока // Технология и техника пищевых производств. Ке-

мерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2003. С. 168-171.

4. Семенов А.Г. Развитие гелевого загрязнения мембраны при тангенциальной ультрафильтрации раствора высокомолекулярного соединения // Техника и технология пищевых производств. 2011. № 1. С. 79-83.
5. Семенов А.Г., Тимофеев А.Е. Моделирование и расчет ультрафильтрационных установок периодического действия // Техника и технология пищевых производств. 2011. № 1. С. 84-89.
6. Семенов А.Г., Лобасенко Б.А. Интенсификация ультрафильтрационного концентрирования сыровоточных белков в установках с керамическими мембранами // Молочная индустрия мира и Российской Федерации: материалы Междунар. науч.-практ. конф. Москва, 12-15 марта 2013 г. М., 2013. С. 123-125.
7. Семенов А.Г., Лобасенко Б.А. Мембранные методы в технологии продуктов на основе молока и молочной сыровотки. Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2014. 147 с.
8. Suki A., Fane A.G., Fell C.J.D. Modeling fouling mechanisms in protein ultrafiltration // Journal of Membrane Science. 1986. V. 27. P. 181-193.
9. Лялин В.А., Старов В.М., Филиппов А.Н. Классификация и математическое моделирование режимов ультрафильтрации // Химия и технология воды. 1990. Т. 12. № 5. С. 387-393.
10. Tu S.-C., Ravindran V., Pirbazari M. A pore diffusion transport model for forecasting the performance of membrane processes // Journal of Membrane Science. 2005. V. 265. P. 29-50.
11. Vela M.-C., Vincent, Blanco S., Alvarez, Garcia J. Lora, Gonzalez-Zafra J.M., Bergantinos E., Rodriguez Utilization of a shear induced diffusion model to predict permeate flux in the crossflow ultrafiltration of macromolecules // Desalination. 2007. V. 206. P. 61-68.
12. Лазарев В.А. Разделение и концентрирование молочной сыровотки на ультрафильтрационных и обратноосмотических мембранах: дис. ... канд. техн. наук. М.: ПХТУ, 2015. 119 с.
13. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015614888. Расчет кинетических коэффициентов электробаромембранного извлечения органических веществ из промышленных стоков / С.И. Лазарев, В.Ю. Богомолов, В.Г. Казаков. 29.04.2015.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке со стороны Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания № 2014/219, код проекта 1222.

Поступила в редакцию 22 марта 2016 г.

UDC 66.081.63
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-653-658

EMPIRICAL MODEL OF ULTRA-FILTER PROTEIN CONCENTRATION IN CHEESE WHEY

© S.I. Lazarev, V.Y. Bogomolov, A.A. Arzamastsev,
K.K. Polyanskiy, S.A. Vyazovov, A.A. Levin

Empirical model of ultra-filter protein concentration in cheese whey is developed. The check of empirical model adequateness is made by comparison of experimental and estimated data. Defection of estimated data of experimental did not overgrew 10 %.

Key words: model; membrane; ultra-filter process.

REFERENCES

1. Semenov A.G., Lobasenko B.A. *Matematicheskie modeli ul'trafil'tratsii*. Kemerovo, Kemerovo Institute of Food Science and Technology Publ., 2010. 176 p.
2. Semenov A.G., Lobasenko B.A. Poluchenie molochnykh belkov putem membrannoy ul'trafil'tratsii s razdel'nym otvodom potoka kontsentrata. *Dostizheniya nauki i tekhniki APK*, 2009, no. 5, pp. 65-67.
3. Semenov A.G., Blagochevskaya N.A., Safonov A.A. Matematicheskaya model' portsiionnoy ustanovki dlya ul'trafil't-ratsionnoy separatsii moloka. *Tekhnologiya i tekhnika pishchevykh proizvodstv*, Kemerovo: Kemerovo Institute of Food Science and Technology Publ., 2003, pp. 168-171.
4. Semenov A.G. Razvitie gelevogo zagryazneniya membrany pri tangentsial'noy ul'trafil'tratsii rastvora vysoko-molekulyarnogo soedineniya. *Tekhnika i tekhnologiya pishchevykh proizvodstv*, 2011, no. 1, pp. 79-83.
5. Semenov A.G., Timofeev A.E. Modelirovanie i raschet ul'trafil'tratsionnykh ustanovok periodicheskogo deystviya. *Tekhnika i tekhnologiya pishchevykh proizvodstv*, 2011, no. 1, pp. 84-89.
6. Semenov A.G., Lobasenko B.A. Intensifikatsiya ul'trafil'tratsionnogo kontsentrirvaniya syvorotochnykh belkov v ustanovkakh s keramicheskimi membranami. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Molochnaya industriya mira i Rossiyskoy Federatsii"*. Moscow, 2013, pp. 123-125.
7. Semenov A.G., Lobasenko B.A. *Membrannye metody v tekhnologii produktov na osnove moloka i molochnoy syvo-rotki*. Kemerovo, Kemerovo Institute of Food Science and Technology Publ., 2014. 147 p.
8. Suki A., Fane A.G., Fell C.J.D. Modeling fouling mechanisms in protein ultrafiltration. *Journal of Membrane Science*, 1986, vol. 27, pp. 181-193.
9. Lyalin V.A., Starov V.M., Filippov A.N. Klassifikatsiya i matematicheskoe modelirovanie rezhimov ul'tra-fil'tratsii. *Khimiya i tekhnologiya vody*, 1990, vol. 12, no. 5, pp. 387-393.
10. Tu S.-C., Ravindran V., Pirbazari M. A pore diffusion transport model for forecasting the performance of membrane processes. *Journal of Membrane Science*, 2005, vol. 265, pp. 29-50.
11. Vela M.-C. Vincent, Blanco S. Alvarez, Garcia J. Lora, Gonzalez-Zafrilla J.M., Bergantinos E. Rodriguez Utilization of a shear induced diffusion model to predict permeate flux in the crossflow ultrafiltration of macromolecules. *Desalination*, 2007, vol. 206, pp. 61-68.
12. Lazarev V.A. *Razdelenie i kontsentrirvanie molochnoy syvorotki na ul'trafil'tratsionnykh i obratnoosmoti-cheskikh membranakh*. Dissertatsiya. ... kandidata tekhnicheskikh nauk. Moscow, D. Mendelev University of Chemical Technology of Russia Publ., 2015. 119 p.
13. Lazarev S.I., Bogomolov V.Yu., Kazakov V.G. *State registration certificate of program for EVM № 2015614888. Raschet kineticheskikh koef-fitsientov elektrobaromembrannogo izvlecheniya organicheskikh veshchestv iz promyshlennykh stokov*. 29 April 2015.

GRATITUDE: The work is fulfilled under financial support of Ministry of Education and Science of Russian Federation within the framework of basic part of state assign no. 2014/219, project code 1222.

Received 22 March 2016

Лазарев Сергей Иванович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Lazarev Sergey Ivanovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Богомолов Владимир Юрьевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Bogomolov Vladimir Yurevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Арзамасцев Александр Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Arzamastsev Aleksander Anatolevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Mathematical Modeling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

Полянский Константин Константинович, Воронежский филиал Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры коммерции и товароведения, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Polyanskiy Konstantin Konstantinovich, Plekhanov Russian University of Economics Voronezh branch, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor of Commerce and Merchandizing Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Вязовов Сергей Александрович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Vyazovov Sergey Aleksandrovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor of Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Левин Александр Александрович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Levin Aleksander Aleksandrovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Master's Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

УДК 66.081.63
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-659-662

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ РАДИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ СТРУКТУРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АЦЕТАТЦЕЛЛЮЛОЗНОЙ МЕМБРАНЫ МГА-95

© В.М. Поликарпов, С.И. Лазарев, Ю.М. Головин,
В.Н. Холодильник, О.А. Абоносимов, Д.С. Лазарев

Приведена методика исследования структурных характеристик ацетатцеллюлозной мембраны с помощью функции радиального распределения. Выполнен непосредственный расчет функции радиального распределения по формуле с точностью не менее 5 %. Получены данные для графических зависимостей по функции радиального распределения для образцов мембран МГА-95 воздушно-сухого и водонасыщенного состояния. Проведен анализ зависимостей функции радиального распределения с позиции изменения расстояния между соседними атомами, что, безусловно, влияет на размер диаметра пор, селективные и проницаемые свойства полимерных мембран.

Ключевые слова: методика; мембрана; функция радиального распределения.

ВВЕДЕНИЕ

К основным и прямым методам исследования структуры полимерных материалов относится метод рентгеноструктурного анализа. Если для оценки кристаллических структур полимерных систем метод структурного анализа применяется давно, то применение метода радиального распределения, характеризующего аморфные (некристаллические) фазы, а также фазовые составляющие переходных веществ, вызывает большие затруднения и не всегда возможно. Это вызвано тем, что, несмотря на распространенное множество гипотез, объясняющих строение неупорядоченных объектов [1,2] и достаточно удовлетворительно описывающих те или иные конкретные системы, создать многофункциональную модель практически невозможно. Хотя проблема, характеризующей структуру неупорядоченных и малоупорядоченных состояний, посвящено большое число исследований [3–4], но определенные успехи в этом направлении достигнуты лишь в работах, посвященных изучению соединений с молекулами относительно простого строения.

Одним из видов метода рентгеноструктурного анализа, качественно характеризующего анализ неупорядоченных систем, является способ построения и анализ функции радиального распределения (ФРР). Данный подход является по-существу единственным в настоящее время и развивающимся методом изучения структуры аморфных фаз полимерных систем и жидких растворов [5].

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

В настоящей работе для анализа структуры некристаллических фазовых компонентов полимерной полупроницаемой мембраны применялась методика построения функции радиального распределения в современной компьютерной версии. В качестве объекта

исследования служила полупроницаемая ацетатцеллюлозная мембрана МГА-95 воздушно-сухого и водонасыщенного состояний [6]. Методика исследования структурных фаз ацетатцеллюлозной полупроницаемой мембраны МГА-95 с помощью функции радиального распределения состояла из следующих этапов:

- 1) получение дифрактограммы ацетатцеллюлозной мембраны для воздушно-сухого и водонасыщенного состояния;
- 2) получение характеристики и выполнение возможных некоторых поправок для нахождения истинной интенсивности рассеяния рентгеновских лучей;
- 3) выполнение нормирования экспериментальной кривой интенсивности рассеивания методами вайнштейна и гинье;
- 4) проведение непосредственного расчета функции радиального распределения по формуле:

$$4\pi R\rho(R) = 4\pi R\rho_0(R) + \frac{2R}{\pi} \int_0^{\infty} s i(s) \sin(sr) ds ,$$

где ρ_0 – средняя атомная плотность; $i(s)$ – интенсивность когерентного рассеяния на один атом.

Полученный конечный результат в большой степени зависит от качества дифрактограммной кривой и от правильно проведенного её нормирования. Выполнение этих этапов являются сложными на практике и требуют от исследователя повышенного внимания. В частности, типичным результатом некорректного применения данных операций является образование ложных максимумов, что естественно вносит существенные сложности в процесс идентификации структуры полупроницаемой мембраны. Анализ и сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными выполняли для получения наиболее достоверных результатов. Для проведения расчетов применяли специально созданную программу типа ORIGIN, которая

учитывала все необходимые рентгеновские поправки и была построена с учетом специфики определения данных методом функции радиального распределения. Методы компьютерного расчета функции радиального распределения предварительно проверялись на модельных мембранах. Полученные данные выводили в виде графика.

Рентгенодифрактометрические измерения осуществляли в области больших углов 2θ от 2° – 40° на дифрактометре Дрон-3 с автоматической записью на ПК в геометрии на отражение. Использовалось излучение $\text{CuK}\alpha$ ($\lambda = 1,54\text{\AA}$). Монохроматизация обеспечивалась Ni-фильтром.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ИХ АНАЛИЗ

Полученные экспериментальные данные для их дальнейшей обработки функцией радиального распределения представлены в виде дифрактограмм на рис. 1 и содержат размытые малоинтенсивные пики с максимумами при углах 2θ , примерно равным $8,4^\circ$, $16,5^\circ$, $22,5^\circ$, $25,5^\circ$, при этом легко заметить, что происходит перераспределение интенсивности и увеличение диффузной составляющей рассеяния в образце мембраны, насыщенной водой (рис. 1В). Однако положение максимумов рентгеновского рассеяния при углах $16,5^\circ$, $22,5^\circ$, $25,5^\circ$ для образцов мембраны в различных состояниях почти не меняется. В то же время максимум при угле $8,4^\circ$ не только сильно расширяется, но и наблюдается его смещение в область больших углов $9,6^\circ$ у образца мембраны, насыщенной водой.

Результаты проведенного расчета по функции радиального распределения приведены в виде графических зависимостей на рис. 2 и 3. Их теоретический расчет для воздушно-сухого и водонасыщенного образцов говорит о наиболее вероятном изменении расстояния между соседними атомами в ацетатцеллюлозной мембране. Как видно из рис. 2, расчетные данные отмечают наличие межатомных расстояний от 1,66 до 14,38 в ацетатцеллюлозной мембране. В противовес приведенным данным для водонасыщенного образца мембраны, приведенным на рис. 3, межатомные расстояния в ацетатцеллюлозной мембране изменяются в диапазоне углов от 1,7 до 14,36. Сравнительный анализ показывает, что с водонасыщением мембраны происходят изменения в сторону увеличения наиболее вероятных расстояний, это отражается на дифракционных

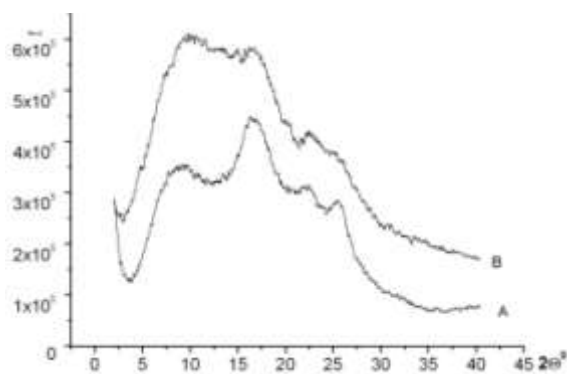


Рис. 1. Рентгеновские дифрактограммы от образцов полимерной мембраны МГА-95, полученных в геометрии на отражение. (А-воздушно-сухой образец; В-водонасыщенный образец)

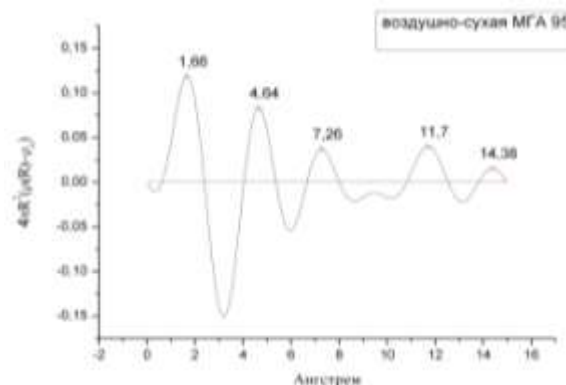


Рис. 2. График функции радиального распределения для мембраны МГА-95 в воздушно-сухом состоянии

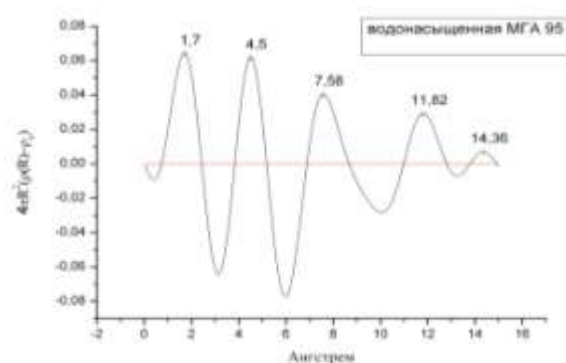


Рис. 3. График функции радиального распределения для мембраны МГА-95 в водонасыщенном состоянии

картинах исследуемых полимеров и на изменениях в решетке мембраны в сторону увеличения расстояний в полимерной матрице. Кроме того, как видно из сопоставления рис. 2 и 3, у водонасыщенного образца размер площади пиков больше, и с протеканием процесса водопоглощения увеличивается толщина исследуемой мембраны. Из литературных данных известно, что у водонасыщенной обратноосмотической мембраны по сравнению с воздушно-сухой толщина на 10–15 % выше [7–8], что косвенно подтверждают наши данные об увеличении межатомного расстояния в водонасыщенном образце на 10–15 %. Данные, приведенные на рис. 2 и 3, свидетельствуют об изменениях размера пор мембран с переходом её в рабочее (водонасыщенное) состояние. Как известно, в рабочем состоянии изменяется структура аморфной части ацетатцеллюлозной мембраны, что влечет за собой изменение ее пор (капилляров), которое влияет в итоге на качество и производительность обратноосмотического разделения промышленных растворов и стоков. Параметры по межатомному расстоянию, полученные с помощью функции радиального распределения как для воздушно-сухого, так и водонасыщенного состояния, можно сопоставить с данными рентгеновской дифрактограммы, при этом пики у мембраны МГА-95 при водонасыщенном состоянии имеют более размытое состояние. Все это еще раз подтверждает выдвинутую гипотезу об увеличении расстояния между соседними атомами, происходящем в кристаллической решетке в сторону

изменения её селективных и проницаемых свойств. В завершении можно отметить и практическую сторону применения полученных результатов рентгеноструктурного анализа и данных функции радиального распределения, которые могут быть использованы при диагностике и серийном производстве ацетатцеллюлозных мембран.

Практическая эффективность данной методики была проверена и на ряде других полимерных систем [9–11], где также отмечена целесообразность применения метода рентгеноструктурного анализа с использованием данных функции радиального распределения как для теоретического, так и практического анализа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Данные рентгеноструктурного анализа констатируют, что в процессе водонабухания наблюдается изменение структуры решетки мембраны за счет увеличения межмолекулярного расстояния, т. е., вероятно, происходит изменение и размера диаметра пор по всей структуре как активного слоя, так и подложки мембраны.

2. Из-за изменения межмолекулярного расстояния в кристаллической решетке, и, как следствие, размера пор в аморфной фазе полупроницаемой мембраны водонасыщенного образца, вероятно, будет изменяться и неравновесная сетка водородных связей между молекулами и их фрагментами. Сравнительный анализ данных функций радиального распределения показал, что их можно использовать при диагностике серийного производства ацетатцеллюлозных мембран и их аналогов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антипов Е.М. Сравнительное изучение структуры расплавов полиэтилена и его низкомолекулярных аналогов n-парафинов рентгеновскими методами: автореф. дис. ... канд. хим. наук. М.: НИФХИ им. Л.Я. Карпова, 1976.
2. Губанов А.И. Квантово-электронная теория аморфных проводников. Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1963. 82 с.
3. Скрышевский А.Ф. Структурный анализ жидкостей и аморфных тел. М.: Высшая школа, 1980. 328 с.
4. Лихачев В.А., Волков А.Е., Шудегов В.Е. Континуальная теория дефектов. Л.: ЛГУ, 1986. 96 с.
5. Поликарпов В.М. Переход «порядок-беспорядок» в кремний-, германий- и борсодержащих полимерах и их органических аналогах: дис. ... д-ра хим. наук. М.: ИХС РАН, 2003. 302 с.
6. Мембраны, фильтрующие элементы, мембранные технологии. Каталог. Владимир: ЗАО НТЦ «Владипор», 2007. 22 с.
7. Мудлер М. Введение в мембранную технологию: пер. с англ. / под ред. С.И. Япольского, В.П. Дубяга. М.: Мир, 1999. 513 с.
8. Дытнерский Ю.И., Николаев П.И. Баромембранные процессы. Теория и расчет. М.: Химия, 1986. 272 с.
9. Поликарпов В.М. Внутримолекулярные расстояния при анализе дифракционного рассеяния аморфных систем // Тез. докл. науч. конф. преподавателей. Тамбов: ТГПИ, 1999. С. 58.
10. Поликарпов В.М., Королев Ю.М., Антипов Е.М. Расчет структуры некристаллических компонентов некоторых полимеров // Высокомолек. соед. М., 2002. Т. А 44. № 12. С. 2111–2116.
11. Поликарпов В.М., Королев Ю.М., Антипов Е.М. Современные рентгеновские методы определения структуры некристаллических веществ // Тез. докл. науч. конф. ИХС РАН. М.: ИХС РАН, 2003. С. 145.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке государственного задания на 2014–2016 гг.

Поступила в редакцию 26 марта 2016 г.

UDC 66.081.63
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-659-662

USE OF RADIAL DISTRIBUTION FUNCTION IN RESEARCH OF STRUCTURAL CHARACTERISTICS OF CELLULOSE ACETATE MEMBRANE MGA-95

© V.M. Polikarpov, S.I. Lazarev, Y.M. Golovin,
V.N. Kholodilin, O.A. Abonosimov, D.S. Lazarev

Methods of research of structural characteristics of cellulose acetate membrane with the help of function of radial distribution is given. Direct estimation of radial distribution calculation on the formula with accuracy not less than 5 % is made. The data for characteristic curves of radial distribution for membrane MGA-95 specimens airdry and aqic state are received. The analysis of dependencies of radial distribution from the position of distance change in neighboring atoms that influences the size of pore diameter, selective and passable features of polymeric membranes.

Key words: methods; membrane; radial distribution function.

REFERENCES

1. Antipov E.M. *Sravnitel'noe izuchenie struktury rasplavov polietilena i ego nizkomolekulyarnykh analogov n-parafinov rentgenovskimi metodami*. Avtoreferat dissertatsii ... kandidata khimicheskikh nauk. Moscow, Karpov Institute of Physical Chemistry Publ., 1976.
2. Gubanov A.I. *Kvantovo-elektronnaya teoriya amorfnykh provodnikov*. Moscow, Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ., 1963. 82 p.

3. Skryshevskiy A.F. *Strukturnyy analiz zhidkostey i amorfnykh tel*. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980. 328 p.
4. Likhachev V.A., Volkov A.E., Shudegov V.E. *Kontinual'naya teoriya defektov*. Leningrad, Pushkin Leningrad State University Publ., 1986. 96 p.
5. Polikarpov V.M. *Perekhod «poryadok-besporyadok» v kremniy-, germaniy- i borsoderzhashchikh polimerakh i ikh orga-nicheskikh analogakh*. Dissertatsiya ... doktora khimicheskikh nauk. Moscow, A.V. Topchiev Institute of Petrochemical Synthesis RAS Publ., 2003. 302 p.
6. *Membrany, fil'truyushchie elementy, membrannye tekhnologii. Katalog*. Vladimir: CJSC Research and Development Center «Vladipor», 2007. 22 p.
7. Mudler M. *Vvedenie v membrannuyu tekhnologiyu*. Moscow, Mir Publ., 1999. 513 p.
8. Dytnerskiy Yu.I., Nikolaev P.I. *Baromembrannye protsessy. Teoriya i raschet*. Moscow, Khimiya Publ., 1986. 272 p.
9. Polikarpov V.M. Vnutrimolekulyarnye rasstoyaniya pri analize difraktsionnogo rasseyaniya amorfnykh sistem. *Tezisy dokladov nauchnoy konferentsii prepodavateley*. Tambov, 1999. p. 58.
10. Polikarpov V.M., Korolev Yu.M., Antipov E.M. Raschet struktury nekristallicheskh komponentov nekotorykh polimerov. *Vysokomolekulyarnye soedineniya*, Moscow, 2002, vol. A 44, no. 12, pp. 2111-2116.
11. Polikarpov V.M., Korolev Yu.M., Antipov E.M. Sovremennye rentgenovskie metody opredeleniya struktury nekristallicheskh veshchestv. *Tezisy dokladov nauchnoy konferentsii Instituta neftekhimicheskogo sinteza im. A.V. Topchieva RAN*. Moscow, A.V. Topchiev Institute of Petrochemical Synthesis RAS Publ., 2003. p. 145.

GRATITUDE: The work is fulfilled under support of state assign for 2014–2016.

Received 26 March 2016

Поликарпов Валерий Михайлович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор химических наук, профессор кафедры физики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru
Polikarpov Valeriy Mikhaylovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Chemistry, Professor of Physics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Лазарев Сергей Иванович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Lazarev Sergey Ivanovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Головин Юрий Михайлович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат химических наук, доцент кафедры физики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru
Golovin Yuriy Mikhaylovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Chemistry, Associate Professor of Physics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Холодилин Валерий Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат химических наук, доцент кафедры физики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru
Kholodilin Valeriy Nikolaevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Chemistry, Associate Professor of Physics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Абоносимов Олег Аркадьевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Abonosimov Oleg Arkadevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor of Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

Лазарев Дмитрий Сергеевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, студент, кафедра прикладной геометрии и компьютерной графики, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru
Lazarev Dmitriy Sergeevich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Student, Applied Geometry and Computer Graphics Department, e-mail: geometry@mail.nnn.tstu.ru

УДК 533.65.013.622:
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-663-665

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕТА ГЕКСАКОПТЕРА

© А.А. Арзамасцев, Д.В. Образцов

Проведено исследование основных характеристик полета гексакоптера, в число которых входят: масса гексакоптера, равная в режиме висения суммарной статической тяге воздушных винтов, потребляемый ток и число оборотов двигателей.

Ключевые слова: основные характеристики полета; мультироторный летательный аппарат; гексакоптер.

Ранее одним из авторов исследовались различные характеристики полета мультироторных летательных аппаратов (МРЛА). Предложены математические модели для оптимизации емкости аккумуляторной батареи, расчета полетной массы МРЛА, проведено сравнение различных формул для расчета тяги воздушного винта, предложено уравнение для расчета статической тяги воздушного винта в зависимости от его шага, диаметра, числа оборотов и параметров среды (температуры и давления воздуха) [1].

Решались задачи маршрутизации МРЛА – минимизация энергопотребления и максимизация полетного времени, требуемого для прохождения известных пунктов маршрута [2]. Было показано, что из-за существенных различий в энергопотреблении МРЛА при его подъеме (снижении) и при горизонтальном полете суммарное энергопотребление при облете маршрута существенным образом зависит от способа его прохождения [2]. Поэтому задачи оптимального облета маршрута применительно к МРЛА были названы автором работы [2] «задачами маршрутизации МРЛА» и классифицированы, как ассиметричные задачи коммивояжера (Travelling salesman problem – TSP), относящиеся к классу NP-трудных, трансвычислительных задач [2]. В этой же работе приведены примеры решения некоторых задач маршрутизации для небольшого числа пунктов облета. Показано, что по сравнению с «интуитивным» облетом маршрута на оптимальных маршрутах может быть достигнуто 25-процентное сокращение энергопотребления или времени полета. Однако расчеты работы [2] базируются на данных, полученных в результате экспериментов, проведенных лишь на одном МРЛА. Поэтому было бы желательно накопить больший объем данных, характеризующих энергопотребление МРЛА в различных режимах полета, чему и посвящена данная работа.

Целью настоящей статьи является исследование взаимозависимости различных характеристик полета МРЛА.

Исследования проводили в начале марта 2016 г. на гексакоптере конструкции Д.В. Образцова. Он имеет следующие основные характеристики: полетная масса – 2,05 кг, габаритные размеры – 0,61×0,61×0,27 м, максимальная скорость горизонтального перемещения – 12,1 м/с (43,6 км/ч); максимальная (кратковременная)

скорость подъема – 7,6 м/с (27 км/ч); скорость спуска – 3,2 м/с (12 км/ч); количество двигателей, воздушных винтов – 6; максимальная частота вращения винтов – 6800 мин⁻¹; диаметр винтов – 254 мм (10 дюймов); шаг винтов – 108 мм (4,25 дюйма); двигатели A2212/T13 (1000 об/В); аккумуляторная батарея 3S (11,1 В) 5200 мАч, 20С; полетный контроллер APM 2.6.

Предварительно шаг используемых воздушных винтов был тщательно промерен по всей длине лопасти, т. к. во многих случаях заявленное значение шага, которое обычно приводится на маркировке, не соответствует действительности. В нашем случае маркировка на винте соответствовала 10×4,5 дюйма. Как видно из табл. 1, в действительности используемые винты имеют диаметр 254 мм (10 дюймов) и шаг 108 мм (4,25 дюйма).

Эксперименты с МРЛА проводили в двух режимах: динамический (скоростной) подъем с последующим кратковременным висением на высоте примерно 50 м и спуском; статическое висение на небольшой высоте с фиксацией полной полетной массы, частоты вращения винтов, суммарного потребляемого тока и напряжения на батарее. В первой серии экспериментов предстояло оценить различие в потреблении мощности при подъеме и спуске. Во второй – предстояло оценить связь

Таблица 1

Расчет шага винта по длине лопасти

Расстояние от ступицы, мм	Угол наклона лопасти, град	Расчетный шаг винта, мм
30	29	104
40	23	107
50	19	108
60	16	108
70	14	110
80	12	107
90	12	110
100	10	111
110	9	109
120	8	106
Среднее значение шага винта, мм	–	108

Таблица 2

Основные параметры статического режима (висение) полета МРЛА

Полетная масса аппарата, кг	Частота вращения винтов, мин^{-1}	Суммарный ток, А	Напряжение на батарее, В	Потребляемая мощность, Вт
2,05*	4200*	25*	10,9*	272,5*
2,15	4300	28	10,4	291,2
2,247	4420	30	10,1	303
2,35	4520	32	10,3	329,6
2,45	4600	36	9,6	345,6
2,55*	4700*	39*	9,5*	370,5*

Примечание: * – приведенные числа соответствуют результатам интерполяции.

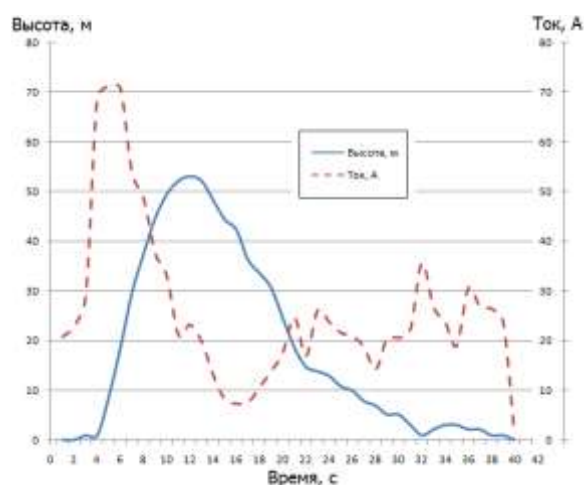


Рис. 1. Соотношение высоты подъема МРЛА (при максимальных оборотах двигателей $n = 6800 \text{ мин}^{-1}$ и расчетной статической тяге (по работе [1]) в $0,89 \text{ кг} = 8,7 \text{ Н}$) и потребляемого тока, А

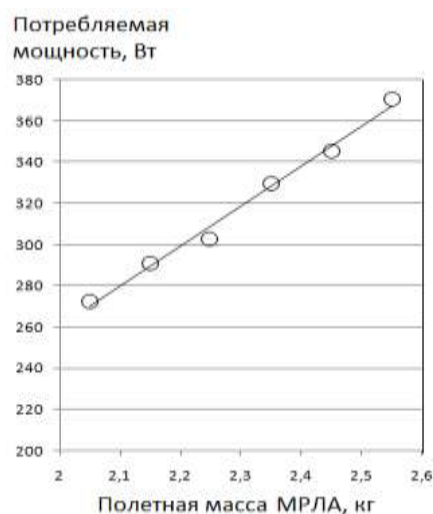


Рис. 3. Зависимость потребляемой мощности в режиме висения от полной полетной массы МРЛА

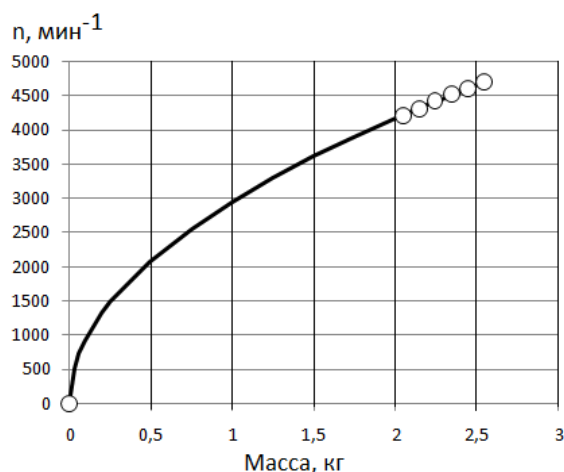


Рис. 2. Зависимость числа оборотов на валу двигателей в режиме висения от полной полетной массы МРЛА

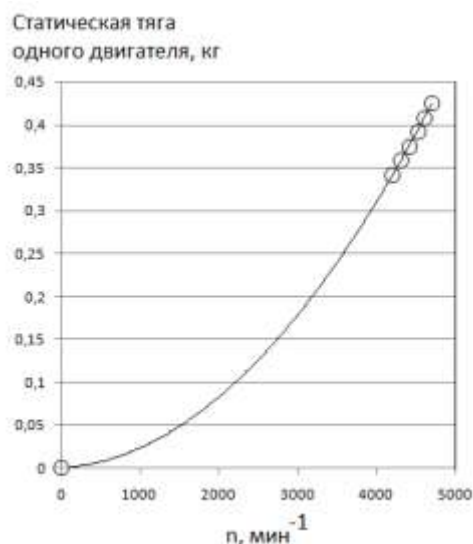


Рис. 4. Зависимость статической тяги одного двигателя с воздушным винтом $254 \times 108 \text{ мм}$ от числа оборотов вала винта

между различными параметрами в статическом режиме висения МРЛА.

На рис. 1 показан один из экспериментов первой серии. На графике хорошо видно, что наибольший потребляемый ток составил $71,2 \text{ А}$, что соответствует ско-

рости подъема в $7,6 \text{ м/с}$. Поскольку напряжение на батарее в момент подъема составило $9,03 \text{ В}$, можно оценить суммарную мощность, потребляемую двигате-

лями от источника питания в $71,2 \times 9,03 = 642,9$ Вт. Для сравнения, мощность, расходуемая квадрокоптером массой 1,4 кг при наборе высоты, составила 340 Вт [2]. Представляют также значительный интерес оценки скорости спуска МРЛА и потребления мощности в период висения и при спуске. Используя данные рис. 1 легко подсчитать, что нормальная скорость спуска МРЛА составляет 3,2 м/с. Потребляемый ток в режиме висения гексакоптера массой 2,05 кг составляет от 22 до 25 А, что соответствует потребляемой мощности в 220–250 Вт. Для сравнения потребляемая мощность при висении квадрокоптера массой 1,4 кг составила 160 Вт [2]. Потребляемый ток в режиме снижения составляет от 9 до 23 А, что соответствует потребляемой мощности 90–230 Вт. Для сравнения потребляемая мощность при снижении квадрокоптера массой 1,4 кг составила 50 Вт [2].

Результаты второй серии экспериментов (статическое висение на малой высоте) представлены в табл. 2. Для этой таблицы представляют значительный интерес зависимости потребляемой мощности от массы МРЛА (численно равной в статическом режиме силе тяги),

зависимость силы тяги от числа оборотов двигателя и зависимость числа оборотов двигателя в статическом режиме от общей полетной массы МРЛА. Они представлены на графиках рис. 2–4.

Таким образом, в результате проведенных экспериментов были получены данные, которые позволили произвести расчеты и определить зависимости потребляемой мощности в статическом и динамическом режимах полета МРЛА. Полученная информация может быть использована для проектирования новых МРЛА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арзамасцев А.А., Крючков А.А. Математические модели для инженерных расчетов летательных аппаратов мультироторного типа (Ч. 1) // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 6. С. 1821–1828.
2. Арзамасцев А.А. Математические модели для инженерных расчетов летательных аппаратов мультироторного типа (Ч. 2). Задачи маршрутизации // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 2. С. 466–469.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

UDC 533.65.013.622:

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-663-665

THE STUDY OF BASIC CHARACTERISTICS OF HEXACOPTER FLIGHT

© A.A. Arzamastsev, D.V. Obratsov

The study of basic characteristics of hexacopter flight, including: mass of hexacopter, like hover mode in summary static thrust of propellers, consumption current and engine speed is made.

Key words: basic characteristics of flight; multi-rotatory flying machine; hexacopter.

REFERENCES

1. Arzamastsev A.A., Kryuchkov A.A. Matematicheskie modeli dlya inzhenernykh raschetov letatel'nykh apparatov mul'tirotornogo tipa (Ch. 1). *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014. vol. 19. no. 6. pp. 1821–1828.
2. Arzamastsev A.A. Matematicheskie modeli dlya inzhenernykh raschetov letatel'nykh apparatov mul'tirotornogo tipa (Ch. 2). *Zadachi marshrutizatsii. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015. vol. 20. no. 2. pp. 466–469.

Received 21 March 2016

Арзамасцев Александр Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой математического моделирования и информационных технологий, e-mail: arz_sci@mail.ru

Arzamastsev Aleksander Anatolevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Head of Mathematical Modeling and Information Technologies Department, e-mail: arz_sci@mail.ru

Образцов Денис Владимирович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры «Материалы и технология», e-mail: odvru@rambler.ru

Obratsov Denis Vladimirovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor of “Materials and Technology” Department, e-mail: odvru@rambler.ru

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА АВТОМАТИЧЕСКОГО КОНТРАСТИРОВАНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

© Т.А. Калистратов

Рассматриваются цели и методы контрастирования нейронных сетей. Предлагается автоматический метод контрастирования сети, основанный на оценке значимости связей с использованием статистической информации о функционировании каждого нейрона сети. Описан метод предварительного автоматического семантического анализа структуры сети, подвергшейся контрастированию.

Ключевые слова: многослойный персептрон; контрастирование; отсечение малозначимых связей.

ВВЕДЕНИЕ

Контрастирование – упрощение структуры нейронной сети. Основная цель контрастирования – сделать механизмы, позволяющие нейронной сети преобразовывать входные данные в верные выходные, более понятными для наблюдателя.

Традиционные подходы [1–3]:

- 1) уменьшение количества связей;
- 2) уменьшение количества нейронов;
- 3) упрощение функций нейронов (переход по возможности к предельным случаям);
- 4) дискретизация выходных сигналов нейронов, использование конечного числа возможных величин сигнала;
- 5) уменьшение количества входных сигналов каждого нейрона.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Стоит отметить, что все эти методы, так же как и метод контрастирования нейронных сетей в целом, применимы далеко не всегда. Ввиду этого они слабо формализуемы и, как следствие, плохо поддаются автоматизации. Исходя из этих недостатков можно поставить следующие задачи для разработки более совершенного подхода к контрастированию:

- 1) алгоритм должен работать в автоматическом режиме, исключая, возможно, определения числовых коэффициентов, влияющих на чувствительность алгоритма к падению достоверности результатов и на уменьшение сложности сети;
- 2) помимо собственно упрощения сети, производить ее первичный анализ, который упростит дальнейшее интерпретирование полученных зависимостей в прикладной области задачи.

Для решения поставленных задач предполагается реализовать следующие принципы.

На этапе контрастирования:

- 1) отказаться от метода уменьшения количества входных сигналов, так как он может привести к потере семантических связей и разделению одного семантического узла на группу связанных нейронов;

2) наряду с использованием информации о величинах связей накапливать и агрегировать статистическую информацию о значениях, возникающих на входах и выходах во время функционирования сети;

3) использовать статистические данные о функционировании сети для анализа значимости ее нейронов и связей с целью дальнейшего отсечения малозначимых.

На этапе предварительного анализа семантики полученной структуры:

- 1) выявлять связанные блоки нейронов и модули, строить вложенную структуру связанности;
- 2) отказаться от парадигмы «один нейрон нейронной сети ставится в соответствие одному семантическому узлу» [1], т. к. семантически неделимые узлы могут иметь более сложную логику, нереализуемую с помощью одного нейрона.

Для реализации описанных выше принципов необходимо формализовать следующие критерии:

- 1) критерий, определяющий, какие нейроны и связи должны быть удалены в ходе контрастирования;
- 2) критерий, определяющий приемлемое падение достоверности данных, получаемых от нейронной сети в ходе одного шага контрастирования, а также за все этапы контрастирования;
- 3) критерий, определяющий группу взаимосвязанных нейронов сети как семантический модуль.

СБОР СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

При традиционном подходе к построению нейронной сети изменению подвергаются только веса нейронной связи. Таким образом, при статическом анализе структуры нейронной сети можно делать выводы относительно «нужности» каждой связи и нейрона, только опираясь на величины этих весов. Данной информации не всегда бывает достаточно, потому что она не позволяет отследить, например, связь с большим весом, исходящую от фактически вырожденного нейрона (синаптический сигнал которого близок к нулю на всем множестве входных значений) [4].

Предлагается, помимо данных о весах синаптических связей, оперировать следующими данными: сред-

нее значение синаптического сигнала нейрона, вероятность получения высокого уровня синаптического сигнала (более порогового значения). Интересной статистической характеристикой является отклонение синаптического сигнала нейрона, полученного при средних входных сигналах от его среднего статистического синаптического сигнала. Высокий уровень отклонения показывает наличие зависимости между входными сигналами.

Владея описанной статистической информацией, можно оценить средний вклад каждого нейрона и каждой связи на каждый выход сети.

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА КОНТРАСТИРОВАНИЯ СЕТИ

Основным методом при контрастировании сети является метод отсеечения малозначимых связей. Удаление нейрона из сети происходит, если удалены все его входящие или исходящие связи. Применяются также методы объединения двух нейронов, замены функции возбуждения нейрона на более простую и т. п., однако они или слабо применимы в автоматическом режиме, или реализуются через отсеечение малозначимых связей.

Отсечение малозначимых связей можно считать первым и, пожалуй, главным шагом в процессе контрастирования сети. В качестве критерия малозначимости связи можно использовать оценку следующих параметров:

- 1) вес связи;
- 2) среднее влияние связи на выходные значения сети;
- 3) верхняя оценка возможного пикового влияния связи на выходные значения сети.

Значение веса связи связано с ее малозначимостью достаточно тривиально: чем меньший по модулю вес имеет связь, тем предположительно меньший вклад в функционирование сети она вносит.

Оценку среднего влияния связи на выходные значения сети можно провести с использованием средних статистических значений сигналов нейронов.

Для оценки среднего влияния веса ω_{ij} можно воспользоваться формулой

$$K_{\omega_{ij}} = y_i |\omega_{ij}| \sum_k K_{\omega_{jk}}, \quad (1)$$

если нейрон j не является выходным, и

$$K_{\omega_{ij}} = y_i |\omega_{ij}| y_j / y_j^{\max}, \quad (2)$$

если нейрон j является выходным.

Здесь $K_{\omega_{ij}}$ – коэффициент среднего влияния веса связи между нейронами i и j ; ω_{ij} – вес связи; y_i – среднее статистическое значение сигнала нейрона i ; $y_j^{\max}$ – максимальное значение выходного нейрона j (на выборке, которая использовалась для сбора статистической информации).

Чтобы оценить возможное пиковое влияние связи на выходные значения, стоит в формулах 1–2 заменить средние статистические значения сигналов на максимально возможные. Для скрытых слоев при использовании сигмоидальной функции активации максимально возможное значение можно оценить, как 1. Отношение

$y_j / y_j^{\max}$ также принимает значение 1. Тогда формулы (1, 2) примут вид:

$$M_{\omega_{ij}} = |\omega_{ij}| \sum_k M_{\omega_{jk}}, \quad (3)$$

если нейрон j не является выходным, и

$$M_{\omega_{ij}} = |\omega_{ij}|, \quad (4)$$

если нейрон j является выходным.

Здесь $M_{\omega_{ij}}$ – коэффициент среднего влияния веса связи между нейронами i и j .

Так как нельзя утверждать, что один из параметров обеспечивает большую надежность определения несущественных связей при любых условиях, можно использовать обобщенный параметр:

$$R_{\omega_{ij}} = \lambda_1 |\omega_{ij}| + \lambda_2 K_{\omega_{ij}} + \lambda_3 M_{\omega_{ij}}, \quad (5)$$

где λ_1 , λ_2 , λ_3 – коэффициенты значимости параметров.

Опыт показывает, что для эффективной работы механизма контрастирования коэффициенты значимости можно задать следующим образом:

$$\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,8, \lambda_3 = 0,1.$$

В качестве критерия малозначимости связи можно использовать некоторое пороговое значение обобщенного параметра значимости связи, однако более результативным способом видится отсеечение определенного количества связей. По полученным эмпирическим данным, после окончания построения полносвязной нейронной сети (при первой итерации контрастирования) можно отсечь 20 % наименее значимых связей, и в дальнейшем уменьшать процент отсекаемых связей в зависимости от номера итерации контрастирования и результирующей невязки сети. Базовая эмпирическая формула для расчета процента связей, подлежащих отбрасыванию:

$$n = \frac{n_0 \left(1 - \frac{E_i - E_{i-1}}{E_{i-1}} \right)}{i}, \quad (6)$$

где n – относительное число подлежащих отсечению связей; n_0 – их начальное количество; i – номер итерации; E_{i-1} , E_i – предыдущем и текущем шаге соответственно.

В случае неприемлемого увеличения невязки сети отсекаемые связи восстанавливаются, при этом итерация считается завершенной, однако полученное значение невязки не учитывается в дальнейшем (т. к. оно соответствовало структуре сети, которая не была утверждена).

ВЫВОДЫ

Предложен подход к автоматизации процесса контрастирования (упрощения) нейронной сети с использованием накопленной статистической информации о функционировании нейронов сети.

После проведения контрастирования структура сети является более простой для понимания, что позволяет делать выводы о внутренних структурных особенностях моделируемой системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Царегородцев В.Г. Производство полуэмпирических знаний из таблиц данных с помощью обучаемых искусственных нейронных сетей // Методы нейроинформатики. 1998. С. 176-198.
2. Горбань А.Н. Обучение нейронных сетей. СПб.: «ПараГраф», 1990. 159 с.
3. Hill T. et al. Artificial neural network models for forecasting and decision making // International Journal of Forecasting. 1994. Т. 10. № 1. С. 5-15.
4. Царегородцев В.Г. Простейший способ вычисления показателей значимости первого порядка для сетей обратного распространения // Нейроинформатика и ее приложения: материалы 10 Всероссийского семинара. Красноярск: КГТУ, 2002. С. 153-156.

Поступила в редакцию 14 марта 2016 г.

UDC 004.822

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-666-668

METHODS AND FACILITIES FOR THE AUTOMATIC CONTRAST OF THE NEURAL NETWORK

© T.A. Kalistratov

The aims and methods of staining of neural networks are considered. An automatic method for staining the network based on an assessment of the importance of relations with the use of statistical information on the operation of each neuron network is proposed. The method of automated pre-semantic analysis of the network structure subjected to contrasting is described.

Key words: multilayer perceptron; contrast; clipping insignificant links.

REFERENCES

1. Tsaregorodtsev V.G. Proizvodstvo poluempiricheskikh znaniy iz tablits dannykh s pomoshch'yu obuchaemykh iskusstvennykh neyronnykh setey. *Metody neyroinformatiki*, 1998, pp. 176-198.
2. Gorban' A.N. *Obuchenie neyronnykh setey*. St. Petersburg, Paragraph Publ., 1990. 159 p.
3. Hill T. et al. Artificial neural network models for forecasting and decision making. *International Journal of Forecasting*, 1994, vol. 10, no. 1, pp. 5-15.
4. Tsaregorodtsev V.G. Prosteyshiy sposob vychisleniya pokazateley znachimosti pervogo poryadka dlya setey obratnogo rasprostraneniya. *Materialy 10 Vserossiyskogo seminar "Neyroinformatika i ee prilozheniya"*. Krasnoyarsk, Krasnoyarsk State Technical University, 2002, pp. 153-156.

Received 14 March 2016

Калистратов Тимофей Александрович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра математического моделирования и информационных технологий, e-mail: stubbytim@mail.ru

Kalistratov Timofey Aleksandrovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, Mathematical Modeling and Information Technologies Department, e-mail: stubbytim@mail.ru

УДК 332.14
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-669-673

КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗ ОСНОВНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА (НА ПРИМЕРЕ ТАМБОВСКОЙ ОБЛАСТИ)

© Р.Ю. Кольцов, О.В. Кольцова

В статье проведен анализ степени зависимости и тесноты связи (корреляции) между валовым региональным продуктом и основными показателями развития региона (Тамбовской области). Построены графические и математические модели данной зависимости. Рассчитан прогноз и графически представлена трендовая модель всех показателей на 2018 г. с учетом имеющейся совокупности показателей в динамике.

Ключевые слова: корреляционно-регрессионный анализ; регион; валовой региональный продукт; инфляция; прогноз.

Результатом развития всей национальной экономики России выступает валовой внутренний продукт – показатель, используемый в системе национальных счетов более 100 стран мира, выражающий в рыночных ценах совокупную стоимость товаров и услуг, созданных внутри страны в течение года с использованием факторов производства, принадлежащих как данной стране, так и другим странам [1, с. 83]. От того, растет показатель или снижается, в конкретной стране делается вывод об эффективности развития национальной экономической системы, целесообразности привлечения инвестиций, ее конкурентоспособности в мировой экономике. Данный показатель является агрегированным и исчисляется путем суммирования валового регионального продукта (ВРП) каждого субъекта Российской Федерации. В связи с этим важно знать, какие же факторы влияют на ВРП, через какие показатели можно повысить его значение и достичь положительного развития региональной экономики.

Решение данной задачи можно осуществить посредством проведения корреляционно-регрессионного анализа – анализа, направленного на исследование форм связи, устанавливающих количественные соотношения между случайными величинами изучаемого процесса. В социально-экономическом прогнозировании этот метод применяют для построения условных

прогнозов и прогнозов, основанных на оценке устойчивых причинно-следственных связей [2, с. 102].

В нашем исследовании базой для проведения корреляционно-регрессионного анализа является Тамбовская область. В качестве показателей, влияющих на ВРП (результативный фактор – y), были выбраны:

- средняя годовая численность занятых в экономике, тыс. человек (x_1);
- объем отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам деятельности, млн руб. (x_2);
- продукция сельского хозяйства, млн руб. (x_3);
- оборот розничной торговли, млн руб. (x_4);
- число предприятий и организаций (x_5).

Показатели были взяты в динамике в период с 2009 по 2014 г. [3]. В исследовании не приводятся данные за 2015 г. Это связано с особенностью обработки информации территориальными органами статистики – данные по показателям за прошедшие периоды всегда представляются с разрывом в 1–2 года.

В табл. 1 представлены изучаемые показатели в рассматриваемой динамике.

Данные показатели представлены в текущих ценах, без учета влияния инфляции. На основании данных табл. 2 в табл. 3 приведены скорректированные показатели, «очищенные» от инфляции (индекса потребительских цен).

Таблица 1

Основные показатели развития Тамбовской области в 2009–2014 гг.

Годы	Показатели					
	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2009	136323,9	500,6	56805	37385	89859,4	18770
2010	143902,4	503,6	61224,8	36647	98311,1	19063
2011	173283,1	504,1	92527,9	51962	115034,6	17926
2012	203331,5	507,0	96710	60021	132277,1	17724
2013	235859,7	504,1	103969,7	72290	150033,2	17924
2014	275820,7	502,2	115823,3	93527	167903,4	17908

Таблица 2

Индекс потребительских цен Тамбовской области в 2009–2014 гг.

Годы	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Индекс потребительских цен, %	108,1	108,1	105,5	107,0	107,2	112,2

Таблица 3

Основные показатели развития Тамбовской области в 2009–2014 гг. с учетом инфляционных изменений

Годы	Показатели					
	у	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2009	125281,7	500,6	52203,8	34356,8	82580,8	18770
2010	132246,3	503,6	56265,6	33678,6	90347,9	19063
2011	159247,2	504,1	85033,1	47753,1	105716,8	17926
2012	186861,6	507,0	88876,5	55159,3	121562,7	17724
2013	216755,1	504,1	95548,2	66434,5	137880,5	17924
2014	253479,2	502,2	106441,6	85951,3	154303,2	17908

Таблица 4

Значение индекса корреляции и тесноты связи между результативным и факторным признаками

Показатели	Индекс корреляции	Теснота связи
x_1	0,17	слабая
x_2	0,94	весьма высокая
x_3	0,99	весьма высокая
x_4	0,99	весьма высокая
x_5	-0,73	заметная

В табл. 4 представлен расчет индекса корреляции, отражающий степень (тесноту связи) между результативным (у) и факторным признаками ($x_1...x_5$). Теснота связи определяется по шкале Чеддока (0,1...0,3 – слабая; 0,3...0,5 – умеренная; 0,5...0,7 – заметная; 0,7...0,9 – высокая; 0,9...0,99 – весьма высокая) [4, с. 56].

На рис. 1 отражена зависимость между ВРП и среднегодовой численностью занятых в экономике региона.

Разброс показателей не позволяет построить график, отражающий общую тенденцию взаимосвязи между показателями. Это подтверждает и значение коэффициента корреляции – 0,17, и слабая качественная оценка тесноты связи.

На рис. 2 показана зависимость между ВРП и объемом отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам деятельности. Приведенные данные демонстрируют криволинейную зависимость между переменными X и Y. В качестве трендовой модели здесь удобно взять параболу (квадратичную зависимость). На графике представлены уравнение построенной линии тренда и величина достоверности аппроксимации (R^2), которая показывает степень соответствия трендовой модели исходным данным. Близкое к единице $R^2 = 0,98$ свидетельствует о высокой степени точности выбранной модели зависимости.

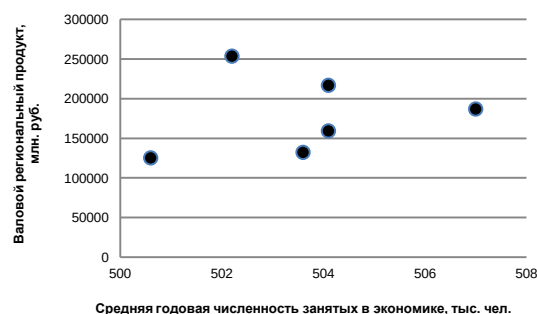


Рис. 1. Зависимость между ВРП и среднегодовой численностью занятых в экономике Тамбовской области за период 2009–2014 гг.

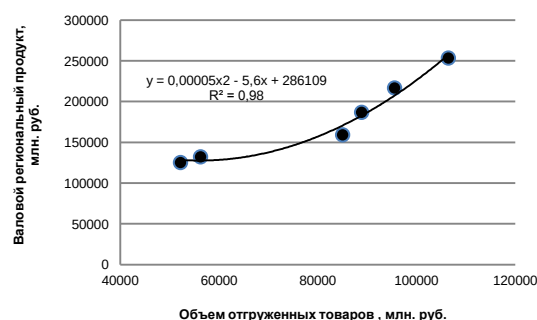


Рис. 2. Зависимость между ВРП и объемом отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам деятельности Тамбовской области в 2009–2014 гг.

Графическая зависимость ВРП от произведенной продукции сельского хозяйства представлена на рис. 3.

Данная зависимость является линейной. Величина достоверности аппроксимации имеет высокое значение, равное 0,99 – модель определена очень точно.

Влияние оборота розничной торговли на ВРП показано на рис. 4. Зависимость также четко линейная, подтверждаемая высоким значением R^2 (0,99).

На рис. 5 зависимость между ВРП и числом предприятий и организаций показывает обратную связь между показателями, что подтверждается и отрицательным значением коэффициента корреляции ($-0,73$). Линейная аппроксимация дает «далекий» от единицы $R^2 = 0,54$. Это связано со значительным разбросом показателя «число предприятий и организаций» относительно построенной линейной модели. Малое количество точек на графике не позволяет выявить более подходящую модель зависимости между показателями.

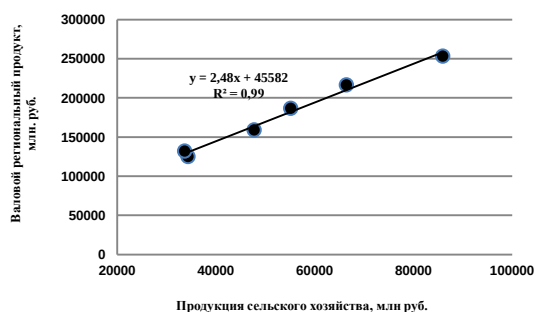


Рис. 3. Зависимость между ВРП и продукцией сельского хозяйства в 2009–2014 гг.

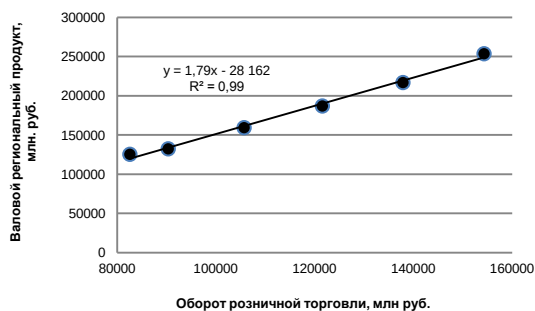


Рис. 4. Зависимость между ВРП и оборотом розничной торговли в 2009–2014 гг.

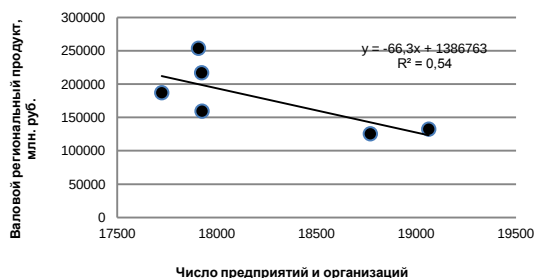


Рис. 5. Зависимость между ВРП и числом предприятий и организаций в 2009–2014 гг.

Далее проведем прогноз каждого из показателей, представленных в исследовании, на 2018 г. Отсутствие данных за 2015 г., безусловно, снижает достоверность полученных результатов, т. к. именно этот год был наиболее кризисным как для экономики России в целом, так и экономической системы Тамбовской области. Поэтому прогнозные значения и построенные линии тренда следует интерпретировать как «идеальные», которые могли быть получены без влияния факторов рецессии. В дальнейших исследованиях можно будет сравнить полученные прогнозные показатели с фактическими.

На рис. 6 представлен прогноз ВРП Тамбовской области. Выбранная модель – линейная. Величина достоверности аппроксимации при этом близка к 1. Прогнозное значение показателя в 2018 г. составляет 350170 млн руб.

Рис. 7 отражает тренд объема отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам деятельности. Если в качестве модели развития выбрать квадратичную зависимость (при этом $R^2 = 0,94$), то к 2018 г. показатель возрастет до 115836 млн руб. (несущественный рост). Производственная сфера в Тамбовской области наиболее остро переживает кризис, начавшийся в 2014 г. Но несмотря на это даже без учета значения 2015 г. можно прогнозировать номинальный рост показателя.

На рис. 8 уравнение регрессии произведенной продукции сельским хозяйством задает параболу. Зна-

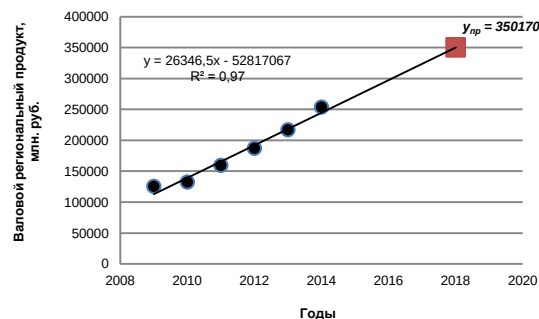


Рис. 6. Прогноз валового регионального продукта Тамбовской области на 2018 г., млн руб.

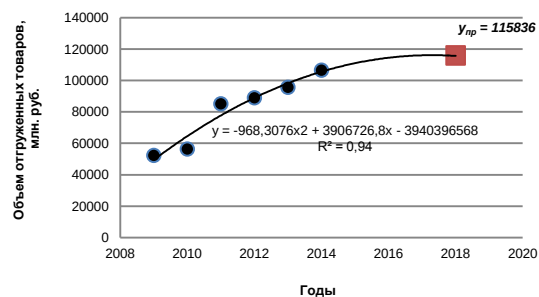


Рис. 7. Прогноз объема отгруженных товаров собственного производства, выполненных работ и услуг собственными силами по видам деятельности Тамбовской области на 2018 г., млн руб.

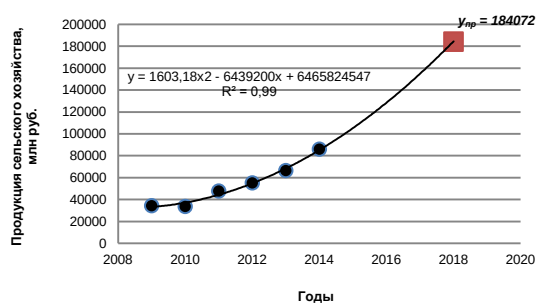


Рис. 8. Прогнозное значение продукции сельского хозяйства Тамбовской области в 2018 г., млн руб.

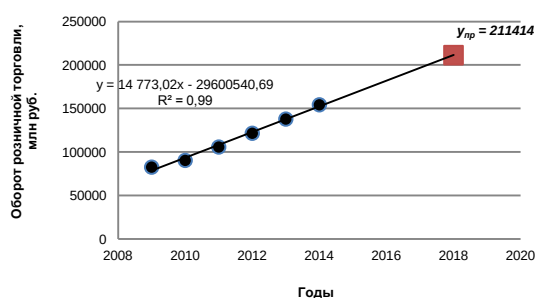


Рис. 9. Прогнозное значение оборота розничной торговли Тамбовской области в 2018 г., млн руб.

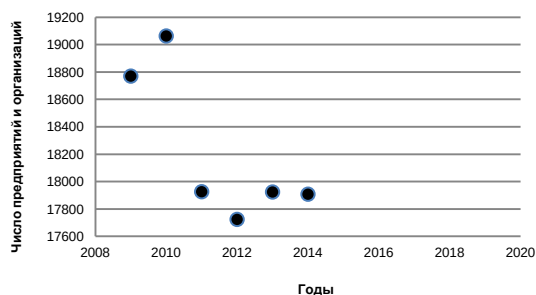


Рис. 10. Динамика числа предприятий и организаций в Тамбовской области, не позволяющая сделать прогноз на 2018 г.

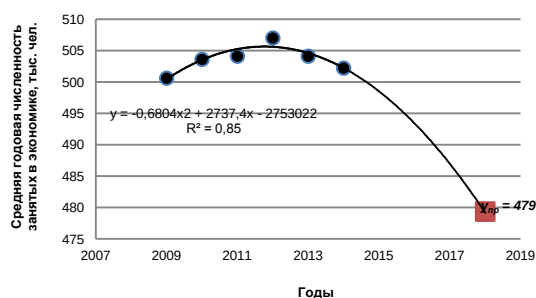


Рис. 11. Прогноз средней годовой численности занятых в экономике в 2018 г., тыс. человек

чение прогнозного показателя составляет 184072 млн руб. и отражает его существенный рост. Действительно, в последние годы денежные вложения в сельскохозяйственную сферу и агропромышленный комплекс Тамбовской области являются значительными, и тенденция роста сохранится в рамках общероссийской политики импортозамещения. Именно поэтому здесь в качестве модели авторами была выбрана квадратичная зависимость, дающая больший прирост по сравнению с линейной зависимостью, которая также хорошо легла бы на точки графика.

Рис. 9 показывает достаточно равномерный рост оборота розничной торговли в динамике, что ожидается и к 2018 г., несмотря на общую тенденцию снижения покупательной способности населения. Это можно связать с расширением объектов розничной торговли, строительства торгово-развлекательных центров и постепенного оживления экономики региона. Модель является линейной ($R^2 = 0,99$), прогнозный показатель ожидается в значении 211414 млн руб.

Прогноз числа предприятий и организаций сделать не представляется возможным из-за существенного разброса показателей по годам (рис. 10). Следует отметить, что после ужесточения требований к сфере малого бизнеса, прежде всего, индивидуальных предпринимателей, их число значительно снизилось. Рост к 2010 г., затем резкое падение в 2011 г. и дальнейшие колебания, действительно, характерны для экономики региона.

На рис. 11 показана линия тренда средней годовой численности занятых в экономике. В качестве модели выбрана квадратичная зависимость. Отмечается понижающаяся тенденция прогнозного значения до 479 тыс. человек. При прогнозируемом росте ВРП снижение занятых в экономике может быть связано с увеличением механизации и автоматизации производства, ростом производительности труда, других факторов.

Таким образом, в работе проведен корреляционно-регрессионный анализ зависимости валового регионального продукта Тамбовской области (отражает развитие всей региональной экономической системы) от ключевых показателей, влияющих на его значение. Выбор показателей не является конечным. В исследовании представлено авторское видение результативного и факторных признаков. Проведенный прогнозный расчет исследуемой совокупности показателей на 2018 г. с учетом представленных значений в динамике является «идеальной моделью», т. к. из-за особенностей обработки официальной статистической информации на момент написания статьи отсутствовали данные за 2015 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлева Г.П. Экономическая теория. Макроэкономика – 1, 2. Метаэкономика. Экономика трансформаций: учебник. М.: Дашков и К°, 2014. 920 с.
2. Бутакова М.М. Экономическое прогнозирование: методы и приемы практических расчетов: учебное пособие. 2-е изд., испр. М.: КНОРУС, 2010. 168 с.
3. Статистический ежегодник, 2015: стат. сб. Тамбов: Тамбовстат, 2015. 404 с.
4. Экономический анализ региональной поляризации: монография / под науч. ред. Б.И. Герасимова. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 116 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2016 г.

UDC 332.14
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-669-673

CORRELATION-REGRESSION ANALYSIS AND BASIC INDICES PREDICTION OF REGION DEVELOPMENT (BASING ON THE EXAMPLE OF TAMBOV OBLAST)

© R.Y. Koltsov, O.V. Koltsova

The article analyzes the degree of dependence and the closeness of the connection (correlation) between the gross regional product and the main indicators of the development of the region (Tambov oblast). Graphical and mathematical models of the dependence are built. Prediction is made and trend model of all indicators for 2018 is graphically presented, taking into account the existing set of indicators in dynamics.

Key words: correlation-regression analysis; region; the region's gross regional product; inflation; prediction.

REFERENCES

1. Zhuravleva G.P. *Ekonomicheskaya teoriya. Makroekonomika – 1, 2. Metaekonomika. Ekonomika transformatsiy: uchebnik*. Moscow, Dashkov i K Publ., 2014. 920 p.
2. Butakova M.M. *Ekonomicheskoe prognozirovanie: metody i priemy prakticheskikh raschetov*. 2-e izd., ispr. Moscow, KNORUS Publ., 2010. 168 p.
3. *Statisticheskiy ezhegodnik, 2015: statisticheskiy sbornik*. Tambov, Tambovstat Publ., 2015. 404 p.
4. Gerasimov B.I. (ed.) *Ekonomicheskii analiz regional'noy polyarizatsii*. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2003. 116 p.

Received 26 March 2016

Кольцов Роман Юрьевич, Тамбовский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: kolt68@mail.ru

Koltsov Roman Yurevich, Tambov Branch of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Tambov, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: kolt68@mail.ru

Кольцова Ольга Владимировна, Тамбовский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат экономических наук, доцент, e-mail: koltsova-ov@bk.ru

Koltsova Olga Vladimirovna, Tambov Branch of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration under the President of Russian Federation, Tambov, Russian Federation, Candidate of Economics, Associate Professor, e-mail: koltsova-ov@bk.ru

УДК 519.177

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-674-678

СТРУКТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ТОПОЛОГИИ

© А.М. Межуев, М.Г. Третьяков, И.И. Пасечников

В работе показана возможность применения спектрального анализа графов при расчете информационных сетей (ИС), в т. ч. мобильных, на основе выявления связи их основных структурных характеристик и собственных значений матрицы смежности. Применительно к тензорной методологии анализа ИС значения спектра графа позволяют определить множество цепей замкнутого типа, что в свою очередь облегчает задачу определения систем координат информационного пространства состояний стационарной ИС.

Ключевые слова: спектральный анализ; матрица смежности; характеристический многочлен; диаметр сети; связность графа; спектр графа.

Описание структурных особенностей информационных сетей (ИС) основывается на методах представления топологии сети, в частности с использованием различного рода матриц (например, соседей, смежности, инцидентности, кратчайших путей), пересекающихся множеств, графов. Структурные характеристики ИС, такие как диаметр сети связи, k -связность, среднее число узлов (реберной) связности и др., определяют размерность, сложность ИС, ее надежность и устойчивость функционирования. Особенность используемых подходов к получению и описанию топологических характеристик состоит не столько в используемых математических способах моделирования, сколько в отсутствии доскональной информативности. В связи с этим представляет интерес спектральный анализ графов и описание на его основе основных структурных характеристик ИС. Кроме того, получение комплекса структурных характеристик с применением единого математического аппарата и за конечное время является актуальной задачей для мобильных ИС. В работах [1–5] представлены результаты спектрального анализа различных графов, причем в трудах [3; 5] авторы, помимо проведения спектрального анализа графов, дают общее представление его применения в области вычислительных систем.

Целью работы является определение возможности представления топологий ИС, в т. ч. мобильных, с использованием спектрального анализа графов и выявление основных зависимостей между структурными характеристиками топологии ИС и спектральными свойствами графа, позволяющих проводить математический анализ ИС.

Топология ИС может быть представлена в неориентированного графа $G(n, m)$, где n – число вершин, m – число ребер. Поэтому рассмотрим полный двудольный граф и получим его спектр. Приведенный на рис. 1 граф является регулярным графом степени 2.

Преобразуем геометрический способ задания графа в матричный вид с использованием матрицы смежности. Начиная с вершины А, проиндексируем вершины: А-1, В-2, С-3, D-4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где значение элемента a_{ij} равно числу ребер из i -й вершины графа в j -ю вершину. Характеристический многочлен матрицы смежности A есть определитель матрицы $A - \lambda E$, где E – единичная матрица [1]. Рассчитаем матрицу $A - \lambda E$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Определитель матрицы $A - \lambda E$ имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - \lambda^3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2$$

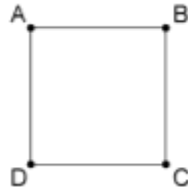


Рис. 1. Полный двудольный граф с регулярностью степени 2

$$P_G(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 4\lambda^2.$$

Приравниваем характеристический многочлен к нулю и решим уравнение относительно λ :

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = 0. \quad (3)$$

Полученные корни $(-2, 0, 0, 2)$ с учетом их кратности называют собственными значениями λ матрицы A [2]. Совокупность всех этих значений образует спектр графа:

$$Sp(G) = [-2, 0, 0, 2]. \quad (4)$$

Связь спектра графа со структурными характеристиками ИС можно представить в виде утверждений [3].

Утверждение 1. Количество составляющих графа (собственных значений) всегда равно количеству вершин в структуре (в данном случае $n = 4$).

Утверждение 2. Все составляющие спектра графа по модулю не превосходят максимальной степени вершины графа, т. е.

$$-r_{\max} \leq \lambda_i \leq r_{\max}, \quad (5)$$

где $r_{\max}$ – максимальная степень вершины (количество ребер, инцидентных вершине), λ_i – собственное значение (для данного графа $r = r_{\max} = 2$).

Утверждение 3. Если спектр имеет вид: $Sp(G) = [d, x, x, \dots, x]$, причем количество элементов $x = -1$ равно d , то граф является полным (т. е. в этом случае для любой пары вершин существует ребро, которое их соединяет), а количество вершин его составляет $d + 1$ [4]. Элементарную проверку данных утверждений проведем на следующем примере. Изменим граф на рис. 1 до полного графа (рис. 2). После проведения аналогичных представленных выше операций его спектр будет иметь вид $Sp(G) = [-1, -1, -1, 3]$.

Утверждение 4. Число ребер m неориентированного графа без петель и кратных ребер (соединяющих одинаковые вершины) определяется полусуммой квадратов всех собственных значений:

$$m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad (6)$$

В соответствии с выражением (6) количество ребер графа со спектром $Sp(G) = [-2, -2, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 4]$ (рис. 3) равно $m = 16$.

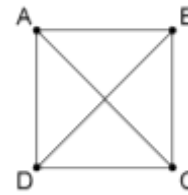


Рис. 2. Полный граф, состоящий из 4 вершин

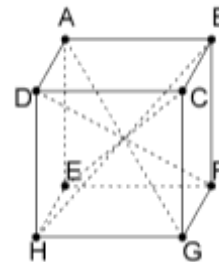


Рис. 3. Регулярный граф степени 4, состоящий из 8 вершин

Представление топологии ИС с использованием матрицы смежности, нахождение с ее помощью спектра графа и на его основе определение множеств циклов (замкнутых контуров), например, из трех узлов, может существенно упростить аналитические методы расчета ИС. Такие треугольники – площади определенной формы – характеризуют в соответствии с полиэдральными сетями Г. Крона [6] (представление сети в виде совокупности n -мерных плоскостей) процессы взаимодействия объектов на более высоком уровне, например, применительно к ИС [7] – проблемы множественного доступа и задачи сетевого уровня с применением тензорной методологии анализа. Тензорная методология анализа ИС, находящихся в стационарном состоянии, позволяет определить точку, соответствующую состоянию ИС в информационном пространстве [7]. В свою очередь, система координат пространства состояний определяется совокупностью линейно-независимых разомкнутых и замкнутых контуров. Нахождение таких совокупностей на основе спектрального анализа графа позволит существенно упростить задачу построения системы координат.

Итак, количество треугольников t в графе можно определить [1–2]:

$$t = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \lambda_i^3. \quad (7)$$

Для графа, изображенного на рис. 3, количество треугольников равно $t = 16$.

Если для спектра графа справедливо следующее неравенство

$$\lambda_1^2 > \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \dots + \lambda_n^2, \quad (8)$$

то граф содержит хотя бы один треугольник.

Особое место при анализе ИС занимает задача обеспечения эффективности информационного обмена в ИС. Ее решение зависит от количества взаимодейст-

вующих соседних узлов. В работе [8] показано, что оптимальное число соседних узлов для ИС с регулярной топологией – 3, для сети со случайной топологией – 7–8. Если обеспечить структурную устойчивость сети [9], то очевидно, что ИС с регулярными топологиями в задачах эффективности передачи данных будут обладать определенной привлекательностью. Степень регулярности графа (число «соседей» вершины регулярного графа) рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \quad (9)$$

Для графа, изображенного на рис. 3, $r = 4$.

Тогда среднее значение степени вершины определяется по формуле [3]:

$$\bar{f} = \frac{2m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2, \quad (10)$$

m – число ребер; n – число вершин. Изменим граф рис. 3), предварительно убрав ребра ВН, СЕ и DF (для пояснения предыдущих результатов) (см. рис. 4). В результате:

$$\bar{f} = \frac{2 \cdot 13}{8} = 3,25. \quad (11)$$

Спектр неориентированного графа обладает следующими свойствами:

- все собственные значения являются действительными числами, а их сумма равна 0;
- все собственные значения графа, ни имеющего ребер, равны нулю;
- степень графа не превосходит число $n - 1$ (n – количество вершин), а наименьшее собственное значение по модулю не превосходит степень графа.

Зная значения коэффициентов характеристического многочлена, можно также получить некоторые структурные свойства ИС. Коэффициент a_i характеристического многочлена зависит от множества всех ориентированных подграфов орграфа G , которые имеют в точности i вершин. Если подграф состоит из четного количества контуров, то он вносит в коэффициент a_i единицу, в противном случае вносит число «–1».

Для регулярного графа среднее значение валентности не превышает наибольшее собственное значение графа.

Значение длины кратчайшего простого цикла нечетной длины в графе равно индексу первого, не равного нулю коэффициента характеристического многочлена среди нечетных по порядку расположения коэффициентов. Из вышесказанного следует, что граф, содержащий, по крайней мере, одно ребро, является двудольным тогда и только тогда, когда его спектр, рассматриваемый как множество точек действительной оси, симметричен по отношению к нулевой точке.

Число внутренней устойчивости $c(G)$ графа G (наибольшее число вершин, ни одна пара из которых не соединена ребром) удовлетворяет неравенству

$$c(G) \leq p_0 + \min(p_-, p_+), \quad (12)$$

где p_- , p_0 , p_+ – собственные значения меньше нуля, равные нулю и больше нуля соответственно.

Проведем анализ характеристического многочлена:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda^1 + a_n. \quad (13)$$

Информация о характере корней может быть получена на основе метода Захса (теоремы Захса), суть которого состоит в разложении графа на подграфы, а именно на циклы из трех вершин (треугольные) или фрагменты в виде простой цепи при $n = 2$. В результате коэффициенты характеристического многочлена можно рассчитать по формулам:

$$a_0 = 1, \quad (14)$$

$$a_n = \sum_{U \in \mathcal{G}_n} (-1)^{p(U)} \cdot 2^{c(U)} (1 \leq n \leq N), \quad (15)$$

где $p(U)$ – число всех компонент в графе Захса; $c(U)$ – число циклических компонент в графе Захса; $\mathcal{G}_n$ – множество всех графов Захса с n вершинами и суммирование проводится по всем графам Захса с n вершинами.

Отсюда имеют место выражения (табл. 1), вскрывающие зависимости между структурой графа, характеристическим многочленом и спектром графа [3].

Пропускная способность (производительность) ИС, как и время доведения пакетов в ИС зависят от диаметра топологии сети (максимальное расстояние, определенное на множестве кратчайших путей между парами вершин). В условиях отсутствия регулярного характера топологии сети представляет интерес нахождение среднего диаметра:

$$\bar{d}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^d l \cdot n_l, \quad (16)$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{d}_i, \quad (17)$$

где n_l – число вершин, находящихся на расстоянии l (число ребер) от любой выделенной вершины графа, n – число узлов. Для полного графа средний диаметр равен 1. Имеет место следующее неравенство:

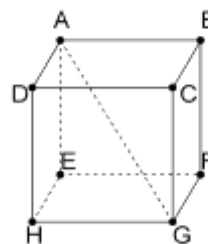


Рис. 4. Граф с 8 вершинами и 13 ребрами

Таблица 1

Следствия теоремы Захса

Формула	Описание	Характеристика топологии (графа)
$a_1 = 0$	Коэффициент при втором члене многочлена всегда равен нулю	Граф связный
$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$	Сумма собственных значений равна нулю при отсутствии петель	Например, граф, характеризующий свойство отсутствия повторных передач в узлах
$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = -2a_2$	Зависимость между спектром графа и коэффициентом при третьем члене характеристического многочлена	Позволяет определить число ребер графа (см. пункт 5)
$\lambda_1^3 + \dots + \lambda_n^3 = -3a_3$	Зависимость между спектром графа и коэффициентом при четвертом члене характеристического многочлена	Позволяет определить число треугольных циклов (см. пункт 6)
$a_2 = -m$	Коэффициент при третьем члене многочлена по модулю равен числу ребер графа	Число ребер графа
$a_3 = -2g_3$	Коэффициент при четвертом члене многочлена равен удвоенному числу трехчленных циклов (треугольников), взятому с противоположным знаком	Число треугольных циклов

$$\frac{d}{2} \leq \bar{d} \leq d. \quad (18)$$

Поэтому при проектировании сетей наибольший интерес представляют сети с минимальным диаметром.

Для p -валентной сети ($p = \lfloor 2m/n \rfloor$) минимальное значение диаметра определяется выражением:

$$d(n, p) \geq \left\lceil \log_{p-1} \frac{n(p-2)+2}{p} \right\rceil = d_{\min}(n, p),$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – ближайшее целое число справа.

Диаметр связного графа G , имеющего b различных собственных значений, удовлетворяет следующему неравенству:

$$d \leq b-1 \quad (19)$$

Особое значение в системах мобильной связи имеет живучесть сети – свойство ее адаптированности к новой ситуации и устойчивости в условиях разрушающих действий [8]. Живучесть для графа характеризуется алгебраической связностью или k -связностью [5]. Граф называется k -вершинно (реберно) связным, если k – наименьшее число вершин (ребер), при удалении которых граф становится несвязным. Выделим некоторые свойства алгебраической связности:

– второе минимальное собственное значение графа (обозначим $a(G)$) равно нулю только тогда, когда граф несвязный;

– для двух непересекающихся по ребрам графов G_1 и G_2 на одном и том же множестве вершин справедливо следующее неравенство:

$$a(G_1 \cup G_2) \geq a(G_1) + a(G_2). \quad (20)$$

Другими словами, введение в граф новых ребер не уменьшает алгебраической связности [3].

Из рассмотренного следует, спектр графа (топологии) ИС позволяет на основе собственных значений матрицы смежности вычислить совокупность структурных характеристик ИС, что является актуальным в условиях ее мобильности. Кроме того, имеется возможность вычисления множества замкнутых и разомкнутых путей, что позволяет существенно облегчить задачу определения систем координат в информационном пространстве состояний стационарной ИС при использовании тензорного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Характеристический многочлен матрицы. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Характеристический_многочлен_матрицы (дата обращения: 21.02.2016).
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1967. 575 с.
3. Андреев А.М., Можаров Г.П., Сюзев В.В. Многопроцессорные вычислительные системы: Теоретический анализ, математические модели и применение: учеб. пособие. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 334 с.
4. Цветкович Д., Дуб М., Захс Х., Королюк В.С. Спектры графов: Теория и применение. Киев: Наук. думка, 1984. 383 с.
5. Андреев А.М., Можаров Г.П. Анализ основных параметров компьютерных систем методом спектральной теории графов // Наука и образование. М., 2011. № 10. URL: <http://www.techmag.edu.ru/doc/232774.html> (дата обращения: 21.02.2016).
6. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972. 542 с.
7. Пасечников И.И. Методология анализа и синтеза предельно нагруженных информационных сетей: монография. М.: Машиностроение-1, 2004. 216 с.
8. Клейнрок Л., Сильвестр Дж. Методы многократного использования пространства в многопролетных пакетных сетях // ТИИЭР. 1987. Т. 75. № 1. С. 187-200.
9. Межуев А.М. Совместное решение задач алгоритмической и структурной адаптации в инфокоммуникационных системах // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. СПб., 2015. Т. 7. № 6. С. 36-43.

Поступила в редакцию 2 апреля 2016 г.

UDC 519.177

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-674-678

STRUCTURAL CHARACTERISTICS OF INFORMATION NETWORK ON THE BASIS OF THE SPECTRAL ANALYSIS OF TOPOLOGY

© A.M. Mezhuev, M.G. Tretyakov, I.I. Pasechnikov

The work shows the possibility of the spectral analysis application of counts when calculating the information networks (IN), including mobile, on the basis of identification of communication of their main structural characteristics and own values of matrix of contiguity. In relation to tensor methodology of the analysis of IN values of a range of the count allow to define a set of chains of the closed type that in turn facilitates a problem of systems of coordinates definition of conditions of stationary IN information space.

Key words: spectral analysis; contiguity matrix; characteristic polynomial; diameter of network; connectivity of count; count's range.

REFERENCES

1. *Kharakteristicheskiy mnogochlen matritsy*. Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki/Kharakteristicheskiy_mnogochlen_matritsy (accessed 21.02.2016).
2. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 575 p.
3. Andreev A.M., Mozharov G.P., Syuzev V.V. *Mnogoprotsessornye vychislitel'nye sistemy: Teoreticheskiy analiz, matematicheskie modeli i primeneniye*. Moscow, Bauman Moscow State Technical University, 2011. 334 p.
4. Tsvetkovich D., Dub M., Zakhs Kh., Korolyuk V.S. *Spektry grafov: Teoriya i primeneniye*. Kiev, Naukova Dumka, 1984. 383 p.
5. Andreev A.M., Mozharov G.P. Analiz osnovnykh parametrov komp'yuternykh sistem metodom spektral'noy teorii grafov. *Nauka i obrazovanie. Elektron. zhurn.*, Moscow, 2011, no. 10. Available at: <http://www.technomag.edu.ru/doc/232774.html> (accessed 21.02.2016).
6. Kron G. *Issledovanie slozhnykh sistem po chastyam – diakoptika*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 542 p.
7. Pasechnikov I.I. *Metodologiya analiza i sinteza predel'no nagruzhennykh informatsionnykh setey*. Moscow, Mashinostroenie-1 Publ., 2004. 216 p.
8. Kleynrok L., Sil'vestr Dzh. *Metody mnogokratnogo ispol'zovaniya prostranstva v mnogoproletnykh paketnykh setyakh. Trudy instituta inzhenerov po elektrotekhnike i elektronike*, 1987, vol. 75, no. 1, pp. 187-200.
9. Mezhuev A.M. *Sovmestnoe reshenie zadach algoritmicheskoy i strukturnoy adaptatsii v infokommunikatsionnykh sistemakh. Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh Zemli*, St. Petersburg, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 36-43.

Received 2 April 2016

Межуев Александр Михайлович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры передающих и приемных радиоустройств, e-mail: multitenzor@mail.ru

Mezhuev Aleksander Mikhaylovich, Military Educational-Scientific Centre of Air Forces “Air Force Academy named after prof. N.E. Zhukovski and Y.A. Gagarin”, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Technics, Associate Professor, Associate Professor of Receivers and Transmitters Department, e-mail: multitenzor@mail.ru

Третьяков Максим Геннадьевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Прикладная информатика» института математики, естественных и информационных технологий, e-mail: maxim815@mail.ru

Tretyakov Maksim Gennadevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Candidate for Master Degree of Preparation Direction “Applied Informatics” of Mathematics, Natural Science and Information Technologies Institute, e-mail: maxim815@mail.ru

Пасечников Иван Иванович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

Pasechnikov Ivan Ivanovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor, Professor of Theoretical and Experimental Physics Department, e-mail: pasechnikov_ivan@mail.ru

УДК 681.5.07
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-679-687

КОНДУКТОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ

© Е.И. Глинкин, А.А. Одиноква

Доказана метрологическая эффективность определения вольтамперных характеристик по диффузионным электрическим параметрам для выбора рациональных постоянно-токовых методов аналитического контроля.

Ключевые слова: кондуктометрические методы; диффузионные ток и напряжение; сопротивление и проводимость; вольтамперные характеристики; аналитический контроль; математические модели; бинарные напряжения; кратные токи; образцовые меры; линейные измерения; виртуальные характеристики.

Постоянно-токовые методы кондуктометрии [1–10] основаны на включении исследуемого вещества в цепь источника постоянного тока. Простота конструкции кондуктометрической ячейки в измерительной цепи позволяет широко использовать постоянно-токовые методы кондуктометрии в различных сферах производства и научно-исследовательских лабораториях. К недостаткам этих методов относятся низкая точность и диапазон измерения из-за нелинейности электрических преобразований, обусловленной диффузионным слоем носителей заряда границы измерительного электрода и исследуемого вещества.

Нелинейные измерения ярко выражены на II участке вольтамперной характеристики (ВАХ), описываемой алгебраической моделью [1, с. 156–163] экспоненциального вида

$$I = I_0 \left(\exp \frac{U}{U_0} - 1 \right) \quad (1)$$

с информативными параметрами I_0, U_0 – диффузионным током и напряжением, а также режимными характеристиками I, U – амплитудой тока и напряжения,

$5 \leq U \leq 27\text{В}$. Низковольтное напряжение, безопасное для человека, выделяет эти постоянно-токовые методы относительно других кондуктометрических измерений, однако нелинейность ВАХ (см. табл. 1, рис. 1а) и взаимозависимость режимных характеристик, двойной электрический слой и неуправляемость диффузионных параметров до настоящего времени тормозят развитие нелинейных измерений, что ограничивает ширину диапазона и точность измерений. Применение традиционных линейных методов на нелинейном II участке ВАХ без учета его нелинейности регламентирует приемлемую точность в узком диапазоне коррекции [1; 6; 9] и требует неоправданно высоких интеллектуальных, материальных и экономических затрат.

Информационные технологии для линеаризации результатов нелинейного II участка ВАХ реализуют современные методы образцовых мер [2; 5; 10], развивающиеся от бинарных напряжений и кратных токов к методам образцов (см. табл. 1, рис. 1–3).

1. МЕТОДЫ БИНАРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Методы бинарных напряжений состава и свойств организуют измерение диффузионного сопротивления (проводимости) исследуемого вещества кондуктометрическим анализом [5–8]. Название методов определяется отношением последовательности прикладываемых к кондуктометрической ячейке напряжений кратных двум $U_2/U_1 = 2$, что позволяет привести к линейному соотношению степенные уравнения и получить в явном виде алгоритмы расчета информативных параметров. Методы [Пат. РФ № 2187098, № 2442530, № 2515534] отличаются простотой реализации последовательных измерений по одному каналу на низких напряжениях $5 \leq U \leq 27\text{В}$ нелинейного II участка ВАХ.

Прикладывают напряжение U_i к измерительной ячейке (см. табл. 1, рис. 1) и определяют силу тока I_i по падению напряжения на образцовом сопротивлении, где $i = \overline{1, 2}$ – число измерений. Изменяют напряжение кратно двум $U_{i+1} = 2U_i$ и измеряют второй ток I_{i+1} . По двум напряжениям U_i, U_{i+1} и токам I_i, I_{i+1} с помощью вольтамперной характеристики (ВАХ) находят диффузионное сопротивление R_0 (или проводимость $Y_0 = 1/R_0$) исследуемого вещества. Алгоритмы расчета информативных параметров определяют из системы уравнений, получаемых из модели ВАХ (1):

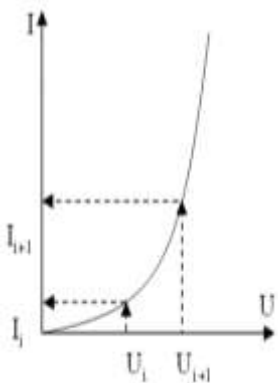
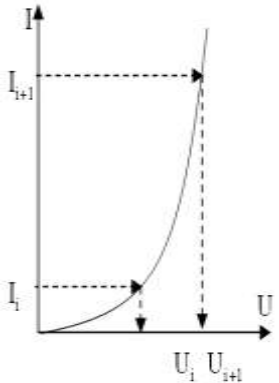
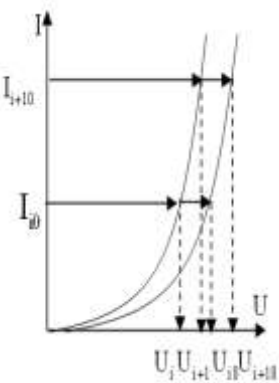
$$\begin{cases} I_i = I_0 [\exp(U_i/U_0) - 1] \\ I_{i+1} = I_0 [\exp(U_{i+1}/U_0) - 1] \end{cases} \quad (2)$$

Решают систему (2) стандартным образом, поделив второе уравнение на первое с учетом бинарности напряжений

$$\frac{I_{i+1}}{I_i} = \frac{e^{2U_i/U_0} - 1}{e^{U_i/U_0} - 1} = e^{U_i/U_0} + 1,$$

Таблица 1

Методы образцовых мер

I	1. Бинарных напряжений	2. Кратных токов	3. Образцовых мер
а)			
б)	$I = I_0 \left(e^{U/U_0} - 1 \right)$ $I_i = I_0 \left(e^{U_i/U_0} - 1 \right)$ $U_i = U_0 \ln(I_i/I_0 + 1)$ $U_{i+1} = 2U_i, i = \overline{1, 2}$ $\{I_0, U_0\} \{I_i, U_i\}$ $R_0 = U_0/I_0 = 1/Y_0$	$I = I_0 \left(e^{U/U_0} - 1 \right)$ $I_i = I_0 \left(e^{U_i/U_0} - 1 \right)$ $U_i = U_0 \ln(I_i/I_0 + 1)$ $I_{i+1} = nI_i, n \geq 3$ $\{I_0, U_0\} \{I_i, U_i\}, i = \overline{1, 2}$ $R_0 = U_0/I_0 = 1/Y_0$	$\begin{cases} I_i = I_{0i} \left(e^{U_i/U_{0i}} - 1 \right) \\ I_{i0} = I_0 \left(e^{U_{i0}/U_0} - 1 \right) \end{cases}$ $\{I_{0i}, U_{0i}\} \{I_{i0}, U_{i0}, I_0, U_0\}$ $R_{0i} = R_0 U_i / U_{i0}$

откуда следует экспоненциальное уравнение

$$\frac{I_{i+1}}{I_i} - 1 = e^{U_i/U_0}.$$

После логарифмирования находим алгоритм расчета диффузионного напряжения в явном виде

$$U_0 = \frac{U_i}{\ln(I_{i+1}/I_i - 1)}. \quad (3)$$

Второй информативный параметр находят из обратной выражению (2) системы уравнений

$$\begin{cases} U_i = U_0 \ln(I_i/I_0 + 1) \\ U_{i+1} = U_0 \ln(I_{i+1}/I_0 + 1). \end{cases} \quad (4)$$

После деления уравнений (4), с учетом кратности двум напряжениям, получим логарифмическое уравнение

$$2\ln(I_i/I_0 + 1) = \ln(I_{i+1}/I_0 + 1),$$

а после экспоненцирования – квадратное

$$(I_i/I_0 + 1)^2 = I_{i+1}/I_0 + 1. \quad (5)$$

При кратности напряжений больше двух получают n -мерные или дробной степени уравнение, что приводит к алгоритмам неявного вида, требующим итерационных вычислений или разложения в ряд Тейлора для линеаризации степенных полиномов, из-за чего появляются дополнительные методические и инструментальные погрешности.

Для бинарной кратности напряжений квадратное уравнение (5) приводится к линейному за счет сокращения единиц

$$(I_i/I_0)^2 + 2I_i/I_0 + 1 = I_{i+1}/I_0 + 1$$

и понижения степени искомого параметра I_0 :

$$I_i^2/I_0 + 2I_i = I_{i+1}.$$

Несложные математические преобразования приводят к алгоритму вычисления диффузионного тока I_0 в явном виде

$$I_0 = \left(\frac{I_i}{I_{i+1}/I_i - 2} \right). \quad (6)$$

Представим алгоритмы (3) и (6) информативных параметров системой уравнений

$$\begin{cases} U_0 = U_i / \ln m \\ I_0 = I_i / (m-1), \end{cases} \quad (7)$$

где принято сокращение

$$m = \frac{I_{i+1}}{I_i} - 1. \quad (7a)$$

Уникальным свойством, отражающим однозначно характер вольтамперной характеристики (1), обладает диффузионное сопротивление R_0 (или проводимость $Y_0 = \frac{1}{R_0}$), которое является информативным параметром, кодом в цифровом эквиваленте состава и свойств веществ:

$$R_0 = U_0 / I_0 = f(N). \quad (7b)$$

Диффузионное сопротивление R_0 определяют по математической модели ВАХ (1) из системы уравнений (7) по алгоритму

$$R_0 = R_i \frac{m-1}{\ln m}. \quad (8)$$

Диффузионное сопротивление R_0 не зависит от приложенного напряжения U , но является информативным кодом вещества. Мгновенное электрическое сопротивление R_i зависит от режимных характеристик, например, от силы тока, как видно из выражения (8)

$$R_i = R_0 \cdot \eta_I, \quad (9)$$

где η_I – нелинейность по току

$$\eta_I = \ln m / (m-1). \quad (10)$$

Качественный анализ соотношения (9) показывает, что линейное преобразование выполняется при постоянной единичной нелинейности для максимального предельного сопротивления:

$$\begin{cases} \text{opt} R_i = R_0 \\ \text{opt} \eta_I = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Закономерности (11) выполняются, когда

$$\eta_I = \frac{\ln m}{m-1} \cong \frac{m}{m-1} = \frac{1}{1-1/m} = 1,$$

что возможно для $m \gg 1$ при $1/m \rightarrow 0$.

При этом, как следует из выражения (7a),

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{\frac{I_{i+1}}{I_i} - 1} = \frac{I_i}{I_{i+1} - I_i},$$

что соответствует условиям:

$$\text{а) } I_{i+1} \gg I_i \rightarrow 0; \quad (12)$$

$$\text{б) } I_i \ll I_{i+1} \rightarrow \infty.$$

Условия (12) не противоречат друг другу, а подтверждают закономерность:

$$m I_0 \gg I_0,$$

где $m \geq 2, \infty$, – кратность оптимальных линейных измерений диффузионных параметров I_0 и U_0 , Y_0 и R_0 , соответствующих виртуальным компенсационным измерениям предельных электрических характеристик тока и напряжения, проводимости и сопротивления.

Адекватность методов бинарных напряжений физике эксперимента подтверждается аппроксимацией экспериментальной ВАХ аналитической моделью по диффузионным параметрам, рассчитанным по оптимальным алгоритмам за счет измерения двух токов при кратным двум напряжениям с погрешностью не более 0,1 %. К недостаткам методов напряжений относятся низкая их гибкость и универсальность, ограничивающих точность и диапазон измерений, из-за фиксированной кратности двоичного кода. Указанные недостатки устраняют методы кратных токов за счет замены двоичного кода позиционным линейным.

2. МЕТОДЫ КРАТНЫХ ТОКОВ

Методы кратных токов [6; 9; 10], в отличие от методов бинарных напряжений, устанавливают минимальный ток I_i , при котором возможно изменение падения напряжения U_i на образце с заданной погрешностью (см. табл. 1, рис. 2). Ток изменяют по линейному закону $I_{i+1} = n I_i$ и измеряют следующее напряжение $U_{i+1}(I_{i+1})$. По двум токам и напряжениям находят диффузионное сопротивление R_0 (проводимость Y_0) вещества. Методы кратных токов [Пат. РФ № 2211748, № 2240545] отличает гибкость алгоритма и универсальность счисления режимных характеристик для определения информативных параметров. Информативные параметры I_0 и U_0 определяют из системы уравнений, полученных из экспоненциальной модели (1) ВАХ:

$$\begin{cases} I_i = I_0 \left(e^{U_i/U_0} - 1 \right) \\ I_{i+1} = I_0 \left(e^{U_{i+1}/U_0} - 1 \right) \end{cases} \quad (13)$$

Приводим систему уравнений (13) к виду, удобному для логарифмирования

$$\begin{cases} I_i/I_0 + 1 = e^{U_i/U_0} \\ I_{i+1}/I_0 + 1 = e^{U_{i+1}/U_0}, \end{cases}$$

и поделив второе уравнение на первое, получим выражение:

$$\frac{I_{i+1} + I_0}{I_i + I_0} = e^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}}.$$

После логарифмирования и несложных преобразований получим алгоритм расчета диффузионного напряжения:

$$U_0 = \frac{U_{i+1} - U_i}{\ln \frac{I_{i+1} + I_0}{I_i + I_0}}. \quad (14)$$

Для определения диффузионного тока найдем I_0 из второго уравнения системы (13) и подставим в него выражение (14):

$$I_0 = \frac{I_{i+1}}{\left(\frac{I_{i+1} + I_0}{I_i + I_0} \right)^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}} - 1}. \quad (15)$$

Зависимость (15) относительно тока I_0 получена в неявном виде и имеет решение только при численном моделировании по итерационному алгоритму, поэтому приведем ее для пошагового исчисления к виду:

$$I_{0,k+1} = \frac{I_{i+1}}{\left(\frac{I_{i+1} + I_{0,k}}{I_i + I_{0,k}} \right)^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}} - 1}. \quad (16)$$

По соотношениям (16) и (14) рассчитаем величину тока I_0 и напряжения U_0 . Для определения диффузионного тока, представленного в неявном виде (16), введем критерий оценки адекватности последующего $I_{0,k+1}$ с предыдущим значением $I_{0,k}$ ($k = \overline{1, m}$ – число итераций):

$$\frac{I_{0,k+1} - I_{0,k}}{I_{0,k} + 1} \leq \varepsilon_0, \quad (17)$$

где $\varepsilon_0 = 0,0001$ – допустимая погрешность.

По найденному значению диффузионного тока I_0 из формул (16) и (17) определяют по алгоритму (14) напряжение U_0 и по формуле (76) – сопротивление R_0 .

Для оценки точности метода кратных токов определим нелинейность электрического сопротивления R_i ($i = \overline{1, n}$) относительно диффузионного R_0 . Найдем величину отклонения от точности электрофизических

характеристик, а для наглядности рассуждения введем обозначения для кратных токов $I_{i+1}/I_i = n$, считая $\frac{I_{i+1} + I_0}{I_i + I_0} = m$, и перепишем алгоритмы (14) и (15) с учетом принятых обозначений:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{U_{i+1} - U_i}{\ln m} \\ I_0 = \frac{I_{i+1}}{m^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}} - 1} \end{cases}$$

Согласно закону Ома рассчитаем R_0 , поделив первое уравнение системы на второе:

$$R_0 = \frac{U_{i+1} - U_i}{I_{i+1} \ln m} \left(m^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}} - 1 \right).$$

После несложных преобразований с учетом $R_{i+1} = U_{i+1}/I_{i+1}$, получим

$$R_{i+1} = R_0 \cdot \eta_U, \quad (18)$$

где η_U – нелинейность (отклонение от точности) на всем диапазоне эксперимента:

$$\eta_U = \frac{\ln m \left(m^{\frac{U_{i+1} - U_i}{U_0}} - 1 \right)^{-1}}{1 - U_i/U_{i+1}}. \quad (19)$$

Из выражения (19) следует, что нелинейность сопротивления R_{i+1} является сложной функцией от характеристик напряжения U_i , U_{i+1} и тока I_i , I_{i+1} . В то же время, как видно из соотношения (18), оптимальным значением сопротивления R_{i+1} служит диффузионное сопротивление R_0 при постоянном единичном значении нелинейности η_U , или закономерности

$$\begin{cases} \text{opt } R_{i+1} = R_0 \\ \text{opt } \eta_U = 1 \end{cases}. \quad (20)$$

Методы кратных токов отличается от бинарных напряжений гибкостью алгоритма и универсальностьчисления режимных характеристик для определения информативных параметров за счет реализации линейного позиционного кода. Повышение метрологической эффективности методов достигается введением нормируемых мер в виде образцовых веществ и процессов с эквивалентными параметрами и характеристиками в виде амплитуд и длительностей сигналов, топологических и математических соотношений.

3. МЕТОДЫ ОБРАЗЦОВЫХ МЕР

Методы образцовых мер [3, с. 204-219] повышают точность измерений посредством исключения случай-

ной погрешности за счет коррекции температурного, временного и параметрического дрейфа по тождественным эквивалентам. Сущность тождественности по эквивалентам соответствует дифференциальным измерениям по двум параллельным каналам при оценке исследуемого сигнала относительно образца. Иницируют мостовые измерения, компенсирующие одинаковые дрейфы сигналов в измерительной диагонали за счет условия равновесия моста [2, с. 56-58]. Образцовыми мерами могут служить амплитудные пороги напряжения и тока, времяимпульсные параметры широты и частоты, число – и кодоимпульсные соотношения [Пат. РФ № 2125258, № 2240545, № 2249798].

Методы образцовых мер иллюстрируют способ [Пат. РФ № 2240545] измерения комплекса диффузионных параметров ВАХ по двум порогам токов относительно эквивалента с нормированными характеристиками (см. табл. I, рис. 3), который компенсирует пороги амплитуд и учитывает их параметрический дрейф. Сущность способа заключается в последовательном задании порогов амплитуд токов I_{i0} и $I_{i+1,0}$ на исследуемом веществе и образце с измеряемой и нормированной ВАХ. Регистрируют амплитуды напряжения на исследуемом веществе U_i , U_{i+1} , и образце U_{i0} , $U_{i+1,0}$, по которым определяют диффузионное сопротивление относительно нормированных параметров.

При заданных порогах справедливости системы уравнений для исследуемого вещества

$$\begin{cases} I_{i0} = I_0 \left(e^{U_i/U_0} - 1 \right) \\ I_{i+1,0} = I_0 \left(e^{U_{i+1}/U_0} - 1 \right) \end{cases} \quad (21a)$$

и образца:

$$\begin{cases} I_{i0} = I_{\vartheta} \left(e^{U_{i0}/U_{\vartheta}} - 1 \right) \\ I_{i+1,0} = I_{\vartheta} \left(e^{U_{i+1,0}/U_{\vartheta}} - 1 \right) \end{cases} \quad (21b)$$

Из систем (21) следует система алгоритмов определения диффузионного напряжения вещества U_0 и образца U_{ϑ} :

$$\begin{cases} U_0 = (U_{i+1} - U_i) / \ln(I_{i+1,0}/I_{i0}) \\ U_{\vartheta} = (U_{i+1,0} - U_{i0}) / \ln(I_{i+1,0}/I_{i0}) \end{cases} \quad (22)$$

которые зависят от задаваемых порогов обратно пропорционально отношениям их логарифмов. Поделим уравнения системы (22) и получим алгоритм определения диффузионного напряжения U_0 исследуемого вещества относительно U_{ϑ} образца

$$U_0 = U_{\vartheta} \frac{U_{i+1} - U_i}{U_{i+1,0} - U_{i0}}, \quad (23)$$

с компенсацией заданных порогов и дрейфа.

Аналогично из инверсных выражений (22) системам уравнений для исследуемого вещества

$$\begin{cases} U_i = U_0 \ln \left(\frac{I_{i0}}{I_0} + 1 \right) \\ U_{i+1} = U_0 \ln \left(\frac{I_{i+1,0}}{I_0} + 1 \right) \end{cases} \quad (24)$$

и образца

$$\begin{cases} U_{i0} = U_{\vartheta} \ln \left(\frac{I_{i0}}{I_{\vartheta}} + 1 \right) \\ U_{i+1,0} = U_{\vartheta} \ln \left(\frac{I_{i+1,0}}{I_{\vartheta}} + 1 \right) \end{cases} \quad (24a)$$

рассчитывают диффузионные токи I_0 и I_{ϑ} .

Поделив второе уравнение системы (24) на первое, получают логарифмическое уравнение:

$$k \ln(I_{i0}/I_0 + 1) = \ln(I_{i+1,0}/I_0 + 1),$$

где $k = U_{i+1}/U_i$ – отношение напряжений.

После его экспоненцирования находят степенное уравнение:

$$\left(1 + \frac{I_{i0}}{I_0} \right)^k = 1 + I_{i+1,0}/I_0,$$

которое линеаризуют по биному Ньютона:

$$1 + k \frac{I_{i0}}{I_0} + \frac{k(k-1)}{2} \left(\frac{I_{i0}}{I_0} \right)^2 = 1 + I_{i+1,0}/I_0.$$

Сокращая единицы и понижая степень, после приведения подобных членов, выражают алгоритм расчета диффузионного тока исследуемого вещества:

$$I_0 = \frac{I_{i0} k(k-1)}{2(I_{i+1,0}/I_{i0} - k)}, \quad (25)$$

и по аналогии образца

$$I_0 = \frac{I_{i0} k(k_0-1)}{2(I_{i+1,0}/I_{i0} - k_0)}. \quad (25a)$$

Поделим выражения (25) и получим алгоритм определения диффузионного тока I_0 исследуемого вещества относительно нормированного значения I_{ϑ} образца

$$I_0 = I_{\vartheta} \frac{k}{k_0}$$

или в явной форме от напряжений

$$I_0 = I_{\vartheta} \frac{U_{i+1} U_{i0}}{U_i U_{i+1,0}}, \quad (25b)$$

в котором также как и в (23) скомпенсированы пороги амплитуд токов и их дрейфы.

Следовательно, методы образцовых мер повышают метрологическую эффективность за счет компенсации значений заданных режимов, а также температурного, временного и параметрического дрейфа за счет тождественности эквивалентам исследуемых веществ. Повышают линейность и оперативность измерений комплекса параметров и электрических характеристик линейные методы ВАХ на постоянном токе.

4. ЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

Линейные измерения [1; 5; 10] организуют на I участке ВАХ с низким напряжением (табл. 2, рис. 4–6) на активных преобразователях с избыточным коэффициентом усиления, инициирующих линейные преобразования по линейной статической модели

$$I = Y_0 U, \quad (26)$$

полученной из выражения (1) при разложении экспоненты в ряд Тейлора [6]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

для первых двух членов

$$e^{U/U_0} - 1 = 1 + U/U_0 - 1 = U/U_0,$$

где $Y_0 = I_0/U_0$ – диффузионная проводимость.

Линейные измерения являются логическим развитием нелинейных постоянно токовых методов кондуктометрии на базе информационных технологий по линейным математическим моделям и алгоритмам расчета информативных параметров по образцовым мерам, их рационально классифицировать на линейные методы избыточности усиления, нормировки координат и виртуальных характеристик [2, с. 8-14].

Методы избыточности усиления [1, с. 143-155] достигают линейности преобразования сигнала нормированием на коэффициент усиления k амплитуды напряжения $\Delta U = U/k$ при гальванической развязке выходного сигнала U от входного ΔU за счет создания виртуальной земли из-за избыточности архитектуры интерфейсов ввода-вывода [2, с. 71-73]. Избыточность параметров (крутизны усиления), дифференциация структур (линеаризация оператора) и интеграция ассоциативных связей (нормирование по эквивалентам, адаптация по диапазону) оптимизируют алгоритмы математического обеспечения и повышают эффективность метрологических средств [Пат. РФ № 2374633, № 2375704, № 2552603]. При этом повышается в k раз оперативность экспресс-анализа благодаря пропорциональному сокращению времени эксперимента $\Delta t = t/k$.

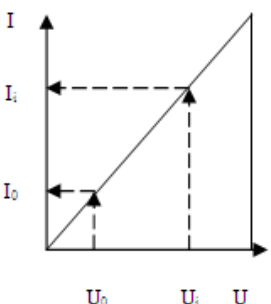
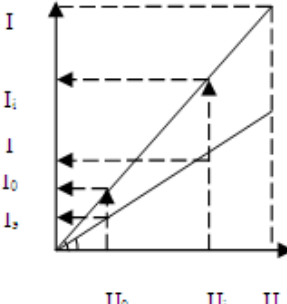
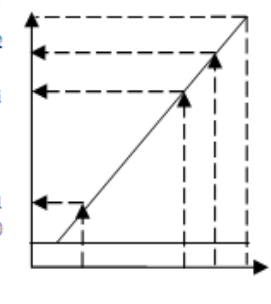
Избыточность усиления нормируется ВАХ (1) до линейной статической зависимости (26) тока I от напряжения U с углом наклона $\tan \alpha = I_0/U_0$, пропорциональным диффузионной электропроводимости Y_0 (табл. 2I, рис. 4). Из модели (26) справедлива линейная пропорциональность между диффузионными параметрами I_0 , U_0 и режимными характеристиками тока I и напряжения U

$$Y_0 = \frac{I_0}{U_0} = \frac{I}{U} = Y, \quad (27)$$

что отождествляет диффузионную Y_0 и статистическую Y проводимости, а также диктует правила комплексного измерения линейных характеристик.

Таблица 2

Линейные методы контроля

II	4. Избыточность усиления	5. Нормировка координат	6. Виртуальность характеристик
а) В А Х			
б) М О	$I = Y_0 U$ $Y_0 = I_0/U_0$ $Y_i = I_i/U_i$ $Y_0 = Y_i, i = 1$ $U = -kE$	$\begin{cases} I = Y_0 U \\ I_i = Y_0 U_i \end{cases}$ $Y_0 = Y_i I / I_i$ $I_0 = I_i I / I_i$ $U_0 = I_0 / Y_0$	$Y_i = Y_0 (1 + U_i / U_0), i = 1, 2$ $U_i = U_0 (Y_i / Y_0 - 1)$ $Y_0 = \frac{U_2 Y_1 - U_1 Y_2}{U_2 - U_1}$ $U_0 = \frac{U_2 - U_1}{m - 1}, m = Y_2 / Y_1$ $I_0 = \frac{U_2 - m U_1}{Y_2 - Y_1}$

Кондуктометрическую ячейку включают в цепь отрицательной обратной связи операционного усилителя с избыточным коэффициентом усиления для линейных преобразований [1, с. 145-150]. Ячейка состоит из последовательного соединения исследуемого вещества сопротивлением R и образцового резистора сопротивлением R_3 , выход делителя подключен к инверсному входу усилителя, охваченного отрицательной обратной связью через образцовый резистор, а вход активного делителя напряжения нагружен на источник питания напряжением E . Сущность методов избыточности усиления определяется линейным участком ВАХ, для измерения угла наклона которого прикладывают на вход активного делителя питания E и регистрируют на выходе усилителя напряжение

$$U = -kE, \quad (28)$$

где $k = R_3/R$ – коэффициент усиления активного делителя, а знак «–» отражает инверсию выходного напряжения относительно питания на входе ячейки. Зная сопротивление R_3 , вычисляют ток ячейки

$$I = U/R_3 = E/R,$$

искомые статическую и диффузионную проводимости

$$Y = I/E = Y_0. \quad (29)$$

К достоинствам методов избыточного усиления относятся оперативность и простота определения комплекса характеристик $Y_0 = Y$ по одному измерению амплитуды тока $I_i = I_0$ и напряжения $U_i = E$ за счет линейного преобразования (27). Недостатками являются ненормированность измерений и сложность определения взаимосвязанных информативных параметров – диффузионного тока и напряжения. Устраняют указанные недостатки нормируемые меры, регламентирующие заданные параметры и характеристики при помощи образцовых веществ и сигналов следующих методов.

Методы нормировки координат [1; 4; 6] обусловлены принципом симметрии линейных преобразований амплитуды, времени и кода относительно соответствующих эталонных мер (см. табл. II, рис. 5). Линейные преобразования разнородных величин достигаются в относительных единицах отсчета на интервале $\overline{0,1}$ при делении исследуемых значений на максимальную меру, соответствующую информативному параметру [Пат. РФ № 2374633].

Для исследуемого вещества с параметрами I_0, U_0, Y_0 и образца с нормированными значениями I_3, U_3, Y_3 , из модели (26) следует система уравнений

$$\begin{cases} I/I_0 = U/U_0 \\ I_i/I_3 = U_i/U_3 \end{cases}, \quad (30)$$

из которой при тождественных характеристиках, например напряжениях $U = U_i$, организован также линейный алгоритм определения исследуемой проводимости $Y_0 = I_0/U_0$ относительно нормированного параметра

$$Y_3 = I_3/U_3; Y_0 = Y_3 I/I_i, \quad (30a)$$

и алгоритм определения диффузионного тока I_0 относительно эквивалента I_3 образца

$$I_0 = I_3 I/I_i, \quad (30b)$$

при допущении тождественности диффузионных напряжений $U_0 \cong U_3$. Принятое допущение для практических измерений регламентирует приемлемую для производства точность определения комплекса диффузионных параметров с погрешностью не выше 20 %, что недопустимо при прецизионных измерениях и лабораторных исследованиях. Повышают точность аналитического контроля параметров методы виртуальных характеристик за счет бинарных измерений по первообразной ВАХ производной от нее вольт-сименсной характеристики (ВСХ).

5. МЕТОДЫ ВИРТУАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Методы виртуальных характеристик систематизируют в информационную технологию аналитического контроля закономерности дифференциального исчисления экспоненциальных функций: подобия экспонент между собой и прямых от их производных [Пат. РФ № 2374633, № 2375704 № 2504759]. Это позволяет тождественные преобразования производных функций по измерениям их первообразной ВАХ, используя их линейные математические модели в явном виде для определения информативных параметров по линейным алгоритмам без итераций.

Проиллюстрируем методы виртуальных характеристик при моделировании вольт-сименсной характеристики (табл. 2, рис. 6) для измерений ВАХ с линейной аппроксимацией за счет избыточности параметров или структуры преобразования. Организуют, например, метод бинарных напряжений (табл. 1, рис. 1) ВАХ, но при этом моделируют ВСХ линейного вида (табл. 2, рис. 4–6) по ее математической модели

$$Y = Y_0(1 + U/U_0). \quad (31)$$

Для двух напряжений $U_i (i = \overline{1,2})$ и токов I_i регистрируют по линейным соотношениям $I_i/U_i = Y_i$ проводимости и определяют информативные параметры U_0, Y_0 ВСХ, которые находят по модели (31) из системы уравнений

$$Y_i = Y_0(1 + U_i/U_0), i = \overline{1,2}. \quad (31a)$$

Поделив второе уравнение системы (31a) на первое, получают соотношение

$$\frac{Y_2}{Y_1} = m = \frac{1 + U_2/U_0}{1 + U_1/U_0},$$

а затем уравнение

$$m + mU_1/U_0 = 1 + U_2/U_0,$$

и после приведение подобных – алгоритм определения диффузионного напряжения

$$U_0 = \frac{U_2 - U_1}{Y_2/Y_1 - 1}. \quad (31б)$$

Алгоритм проводимости Y_0 вычисляют из инверсной модели (31) системы уравнений

$$U_i = U_0(Y_i/Y_0 - 1), i = \overline{1, 2}. \quad (31в)$$

После делений уравнений (31в)

$$\frac{U_2}{U_1} = k = \frac{Y_2 - Y_0}{Y_1 - Y_0},$$

и несложных преобразований

$$kY_1 - kY_0 = Y_2 - Y_0,$$

рассчитывают алгоритм определения диффузионной проводимости

$$Y_0 = \frac{U_2 Y_1 - U_1 Y_2}{U_2 - U_1}. \quad (31г)$$

Из зависимостей (31б) и (31г) при перемножении находят алгоритм определения диффузионного тока

$$I_0 = \frac{U_2 - mU_1}{Y_2 - Y_1}. \quad (32)$$

ВСХ аппроксимируют по модели (31) и алгоритмам (31б), (31г), а по информативным параметрам (32), (31б) и модели (26) моделируют оптимальную ВАХ. Используя оптимальные статические характеристики проводимости $Y(U)$ и тока $I(U)$ для заданных напряжений U_j с помощью моделей (31) и (26) измеряют действительные значения проводимости Y_j и тока I_j в адап-

тивном диапазоне $U_1 \leq U_j \leq U_2$ с заданной точностью, регламентируемой нормируемой погрешностью образцовых мер.

Следовательно, линейные методы, в отличие от известных постоянно токовых измерений, повышают метрологическую эффективность за счет избыточности усиления и нормировки координат виртуальных статических характеристик, что позволяет по их оптимальным аппроксимациям с помощью информативных параметров регистрировать действительные характеристики состава и свойств веществ в адаптивном диапазоне с регламентированной априори точностью, определяемой нормируемой погрешностью образцовых мер. Развивает постоянно токовые кондуктометрические измерения автоматизация методов аналитического контроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глинкин Е.И. Техника творчества. Тамбов: ТГТУ, 2010. 168 с.
2. Глинкин Е.И., Глинкин М.Е. Технология АЦП. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. 140 с.
3. Чичёв С.И., Калинин В.Ф., Глинкин Е.И. Методология проектирования цифровой подстанции. М.: Спектр, 2014. 228 с.
4. Глинкин Е.И., Глинкин М.Е. Калибровка по нормированной влажности // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 2. С. 488-492.
5. Глинкин Е.И., Глинкин М.Е. Метрологические средства // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 3. С. 515-520.
6. Глинкин Е.И., Одиноква А.А. Информационные технологии кондуктометрии // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 2. С. 674-678.
7. Власова Е.В., Глинкин Е.И. Выбор эффективных метрологических средств аналитического контроля глюкозы крови // Вестник ТГТУ. Тамбов, 2014. Т. 20. № 4. С. 720-725.
8. Власова Е.В., Глинкин Е.И. Повышение эффективности компьютерных анализаторов концентрации глюкозы крови // Измерительная техника. 2014. № 12. С. 57-61.
9. Глинкин Е.И., Власова Е.В., Одиноква А.А. Методы анализа вольтамперных характеристик // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 4. С. 902-909.
10. Глинкин Е.И. Закономерности методов измерения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 1784-1789.

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 г.

UDC 681.5.07
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2--679-687

CONDUCTOMETRIC CONTROL METHODS

© E.I. Glinkin, A.A. Odinkova

Metrological efficiency of volt-ampere characteristics definition in diffusive electric parameters for a choice of rational constant and current methods of analytical control is proved.

Key words: conductometric methods; diffusive current and tension; resistance and conductivity; volt-ampere characteristics; analytical control; mathematical models; binary tension; multiple currents; model measures; linear measurements; virtual characteristics.

REFERENCES

1. Glinkin E.I. *Tekhnika tvorchestva*. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2010. 168 p.
2. Glinkin E.I., Glinkin M.E. *Tekhnologiya ATsP*. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2008. 140 p.
3. Chichev S.I., Kalinin V.F., Glinkin E.I. *Metodologiya proektirovaniya tsifrovoy podstantsii*. Moscow, Spektr Publ., 2014. 228 p.
4. Glinkin E.I., Glinkin M.E. Kalibrovka po normirovannoy vlazhnosti. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 488-492.
5. Glinkin E.I., Glinkin M.E. Metrologicheskie sredstva. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2009, vol. 14, no. 3, pp. 515-520.
6. Glinkin E.I., Odinkova A.A. Informatsionnye tekhnologii konduktometrii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 674-678.
7. Vlasova E.V., Glinkin E.I. Vybory effektivnykh metrologicheskikh sredstv analiticheskogo kontrolya glyukozy krovi. *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, Tambov, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 720-725.
8. Vlasova E.V., Glinkin E.I. Povyshenie effektivnosti komp'yuternykh analizatorov kontsentratsii glyukozy krovi. *Izmeritel'naya tekhnika*, 2014, no. 12, pp. 57-61.
9. Glinkin E.I., Vlasova E.V., Odinkova A.A. Metody analiza vol'tampernykh kharakteristik. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 902-909.
10. Glinkin E.I. Zakonomernosti metodov izmereniya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 1784-1789.

Received 11 February 2016

Глинкин Евгений Иванович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры биомедицинской техники, заслуженный изобретатель Российской Федерации, e-mail: bmt@nnn.tstu.ru

Glinkin Evgeniy Ivanovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor of Bio-medical Technics Department, Honored Inventor of Russian Federation, e-mail: bmt@nnn.tstu.ru

Одиноква Александра Александровна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра «Биомедицинская техника», e-mail: odinokovasashkka6310@rambler.ru

Odinkova Aleksandra Aleksandrovna, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Post-graduate Student, "Biomedical Technics" Department, e-mail: odinokovasashkka6310@rambler.ru

УДК 681.5.07

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-688-695

ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ МОДЕЛЕЙ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

© Е.И. Глинкин

Доказана тождественность математических моделей вольтамперных характеристик (ВАХ) в интегральной и дифференциальной, комплексной и операторной, разностной и алгебраической формах, обусловленных избыточностью представления из-за адекватности физике натурного эксперимента для систематизации закономерностей в технологию проектирования компьютерных анализаторов состава и свойств веществ.

Ключевые слова: физические и математические модели; вольтамперные характеристики; схемы замещения; статистические полиномы; автоматический контроль; предельные параметры; дифференциальное и интегральное исчисление; комплексные переменные; операторная форма; избыточность и тождественность.

Аналитический контроль развивает статистический анализ узкоспециализированных тестеров с жесткой структурой, регламентируемой фиксированной градуировочной характеристикой множества ненормированных переменных измерения и искоемых величин среднестатистического фантома до коммуникабельных компьютерных анализаторов с гибкой архитектурой ассоциативной матричной логики. Избыточность и гибкость адресного пространства архитектуры инициируют универсальное математическое обеспечение и высокоэффективные метрологические средства из-за гибкой калибровочной характеристики с информативными параметрами, оптимизируемыми по известным образцам нормируемых мер границ адаптивного диапазона для оценки действительных значений реального объекта и конкретного субъекта [1–6].

1. НЕАДЕКВАТНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ВАХ

Жесткая градуировочная характеристика тестера диктуется статистической аппроксимацией множества случайных измерений субъективной структурой степенного полинома с приближенными коэффициентами, не отражающими физику явления и, соответственно, адекватность натурному эксперименту [1, с. 31–36]. Аппроксимация множества случайных измерений приводит к субъективному выбору нерациональной структуры степенного полинома (линейной или параболической, гиперболической или степенной), а также заведомо приближенных коэффициентов градуировочной характеристики среднестатистического фантома [2, с. 18–35]. Субъективность статистического анализа служит платой за незнание объективной математической модели, адекватной физике натурного эксперимента, а также из-за отсутствия нормированных мер известных образцов границ исследуемого диапазона [6, с. 204–210]. Замена множества моделей степенного полинома счисления статистической моделью, аналогичной математическому оператору исчисления, не позволяет заменить градуировку на калибровку. Это обусловлено неопределенными коэффициентами ста-

тистического анализа, не позволяющими их оптимизацию по нормированным мерам субъективной системы координат, неадекватной определенному информационному процессу, т. к. отсутствуют закономерности физики явления, отражающие физическую сущность и техническое противоречие натурного эксперимента [4, с. 123–130].

Следовательно, создание высокоэффективных метрологических средств коммуникабельных компьютерных анализаторов требует универсальное математическое обеспечение, которое невозможно без тождественных математических моделей, адекватных физике информационных процессов, отражающих сущность и техническое противоречие натурного эксперимента для оценки действительных характеристик аналитического контроля.

Тождественность математических моделей обеспечивает автоматический контроль за счет программно управляемой структурной и параметрической оптимизации гибких калибровочных характеристик по нормируемым мерам известных образцов границ диапазона статистических, динамических и кинетических информационных процессов [7–10]. Согласование совместных и совокупных измерений разнородных величин не возможно без автоматического выбора как оптимальной структуры, так и оптимальных параметров калибровочных характеристик, гибкость которых определяется избыточностью алгоритмов оптимизации, реализуемой программным управлением банком тождественных математических моделей [5, с. 178–192]. При этом избыточная структура калибровочной характеристики автоматически выбирает оптимальную желаемому эквиваленту тождественную модель, предельные параметры которой оптимизируются к адаптивному диапазону контроля нормированными мерами известных образцов [6, с. 210–220].

Физические аналогии электрофизических и физико-химических процессов, гидравлики и электрики, электродиффузии и тепломассопереноса подтверждают тождественность математических моделей статики, динамики и кинетики как по структуре, так и по параметрам, благодаря их адекватности физике явления

натурного эксперимента [1–10]. По принципам аналогии в технике физическую модель представляют схемой замещения с последовательным преобразованием в адекватную физике функциональную схему [3, с. 126–132]. Электрические схемы по правилам Кирхгофа или методом узловых потенциалов трансформируют в систему уравнений для анализа и синтеза математической модели в различных формах представления операторов исчисления и счисления [6, с. 184–203]. Согласование с информационными процессами организуют операторами исчисления математической модели в интегральной или дифференциальной, комплексной или операторной, разностной или алгебраической форме, адекватной физике натурного эксперимента [8–9]. Согласно технологии производства выбирают операторы счисления для представления цифрового образа в нормальной дизъюнктивной или конъюнктивной форме, в базисах ИЛИ-НЕ или И-НЕ [2, с. 122–155]. Из математической модели рассчитывают характеристики преобразования (статические, динамические, кинетические) [5, с. 187–191] и метрологические оценки (нелинейность и дрейф, погрешность и диапазон) [4, с. 130–135], по которым выявляют физические закономерности (метрологической и технологической, экономической и эргономической эффективности) [3, с. 74–83] реализации инновации (ИКР способа или устройства, вещества или штамма) [3, с. 95–102] для создания адаптивных структур калибровочных характеристик [7–10] и алгоритмов оптимизации их параметров [6, с. 210–220].

Следовательно, избыточность математических моделей и форм их представления инициирует выявление объективных физических закономерностей анализа и синтеза схем и программ, алгоритмов и характеристик для их систематизации в технологию проектирования коммуникабельных компьютерных анализаторов с перспективными инновациями, согласованных между собой избыточных матричных структур схемотехники и ассоциативной адресации мнемотехники, универсальных алгоритмов научно-технического творчества и высокоэффективных метрологических средств гуманитарно-правовой культуры.

Избыточность форм представления математических моделей дифференцирует технические задачи до уровня физических противоречий и интегрирует субъективные правила ремесленничества в объективную технологию мастерства для развития научно-технического творчества инноваций в культуру воспитания высоко нравственной Личности – новатора. При этом классические статистические методы итерационного анализа псевдоноваций поступательно совершенствуются в целенаправленный синтез инноваций за счет замещения субъективной квалитметрии оптимальным поиском по объективным закономерностям. Классические итерационные методы синтезируют из прототипа – псевдоновацию или фантом с постулированием недостатков, декларирующих совокупность несовершенных признаков аналогов в процессе анализа мощным математическим аппаратом электротехники и микроэлектроники, но без учета признаков-эквивалентов: характеристик и мер, оценок и критериев. После проектирования псевдоновации при эксплуатации известные недостатки объясняют несовершенными признаками фантома и низкими метрологическими и технологическими, экономическими и эргономическими характеристиками, которые необходимо принять как факт, как

осознанную необходимость, требующих повседневную дань энергетических и материальных, интеллектуальных и психологических ресурсов [8; 10].

Оптимальные методы проектирования аккумулируют закономерности физических явлений в технологию творчества по целенаправленным алгоритмам качественного анализа несовершенных характеристик прототипа для синтеза по их тождественности эквивалентам идеального конечного результата (ИКР) [3, с. 108–120] с желаемыми, оптимальными характеристиками или количественной оценки экстремума производной исследуемой функции. Оптимальные технологии проектирования решают или прямую задачу нахождения оптимальных закономерностей или обратную задачу оптимальной стратегии синтеза желаемого ИКР при реализации физических закономерностей. В отличие от стандартных методов итерационного перебора несовершенных технических решений – аналогов, в технологии оптимального проектирования априори известно желаемое решение – эквивалент, отождествляемый с прототипом для выявления технического противоречия и его решения по физическим закономерностям [6, с. 204–220].

Следовательно, избыточность форм моделей дифференцирует технические противоречия до физических закономерностей, при выполнении которых устраняются недостатки прототипа и реализуется ИКР – инновация за счет тождественности несовершенных признаков аналогов желаемым эквивалентам.

Анализ научно-технической и патентно-лицензионной литературы отражает интенсивное развитие инноваций стационарных и нестационарных процессов, что обусловлено высоким теоретическим уровнем изучения динамических характеристик в электро- и радиотехнике, гидравлике и теплофизике [2, с. 213–240]. Избыточность тождественных форм представления амплитуды и фазы сигналов во времени и частоте инициирует инновации в электро-, радио-, телеизмерениях при автоматическом контроле в области машиностроения и химического производства, энергетики и гидротехники, образования и культуры. [6, с. 170–203] От статистики и динамики неоправданно отстают развитие кинетики и, как следствие, низкий уровень изобретений аналитического контроля и автоматизации электро- и гидродиффузии, тепло- и массопереноса. Измерение и контроль концентрации эритроцитов и глюкозы крови, уровня кислотности и степени насыщения растворов, электрофизических и биохимических характеристик тормозится статистическим анализом кинетических процессов за счет аппроксимации степенными полиномами из-за отсутствия избыточности форм представления математических моделей вольтамперной (ВАХ) и вольтсименной (ВСХ) характеристик, адекватных кинетике физических процессов натурного эксперимента [7; 9].

Следовательно, интенсификация инноваций диффузионных процессов требует замену статистических моделей степенных полиномов без знания физики явления, банком данных избыточных форм представления математических моделей ВАХ и ВСХ, адекватных кинетике физических процессов натурного эксперимента для организации автоматического контроля действительных характеристик состава и свойств веществ, материалов и продуктов производства.

2. ВОЛЬТАМПЕРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Показана тождественность физических моделей по принципам аналогии физических процессов и электрических схем замещения, которые тождественны математическим моделям по законам Кирхгофа: непрерывности тока и сохранения энергии в замкнутом контуре электролитической ячейки.

Нелинейность диффузии ячейки обусловлена электрохимическим потенциалом ионов двойного слоя (диполя), возникающим на границе электрода ячейки с исследуемым веществом, компенсирующим в равновесном состоянии (термодинамическом равновесии) ток диффузии, возникающий из-за разницы концентрации носителей заряда [3, с. 156-159].

Физическая модель термодинамического равновесия приведена на рис. 1, где ток I_0 диффузии отрицательных ионов электролита компенсирует положительный заряд ионов решетки электрода, потерявших свободные электроны из-за их высокой разницы в металле электрода и электролите.

Диффузионный ток $I_0 = dn/dx$ (разность концентрации dn ионов на расстоянии dx) уравнивается диффузионным напряжением U_0 электрохимического потенциала ионов двойного слоя.

Измерительная схема замещения физической модели (рис. 1) границы электрод-электролит соответствует нелинейному делителю напряжения [3, с. 160-162] из последовательно соединения диода D проводимостью $Y = dI/dU$ и образцового резистора сопротивлением R_s (рис. 2а). При подключении кондуктометрической ячейки в измерительную цепь к источнику напряжения E , измерительной схеме (рис. 2а) тождественна граф-схема (рис. 2б).

Веса графов определяются проводимостью Y диода D и диффузионным током I_0 резистора R_s , а узлы граф-схемы соответствуют потенциалам E , U_0 , 0 по аналогии с измерительной схемой.

Анализ схемы методом узловых потенциалов согласно первому правилу Кирхгофа приводит к дифференциальному уравнению

$$U_0 \frac{di}{du} - i = I_0, \quad (1)$$

т. к. для узла U_0 при $i(u=0) = I_0$ справедливо тождество

$$U_0(Y) = E \cdot Y + I_0,$$

где $EY = i$ – ток через диод D .

Решением дифференциального уравнения (1) служит экспоненциальная алгебраическая модель вольт-амперной характеристики [3, с. 161].

Искомое решение можно представить в виде суммы $i(u)$

$$i(u) = i_1(u) + i_2(u) \quad (1a)$$

частного $i_1(u)$ и общего $i_2(u) = i$ решений однородного уравнения

$$U_0 \frac{di}{du} - i = 0. \quad (1б)$$

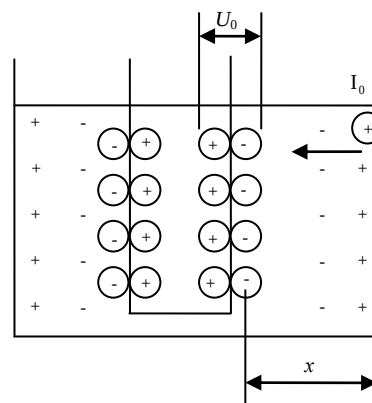


Рис. 1. Физическая модель

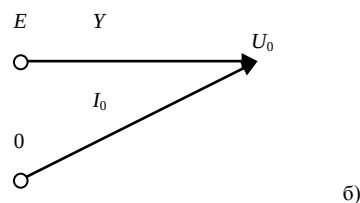
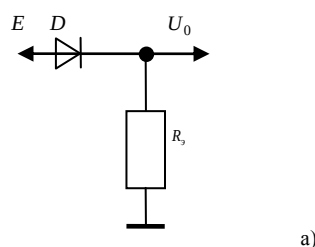


Рис. 2. Схемы замещения: а) структурная; б) граф-схема

Решают дифференциальное уравнение (1б) разделением переменных

$$\frac{di}{i} = \frac{du}{U_0},$$

и интегрированием по частям

$$\int_A^i \frac{di}{i} = \int_0^u \frac{du}{U_0},$$

тока в диапазоне $\{A, i\}$, а напряжения $\{0, u\}$.

После интегрирования подставим пределы

$$\ln i = \frac{u}{U_0} + \ln A$$

и получим логарифмическое уравнение

$$\ln(i/A) = (u - 0)/U_0,$$

после экспоненцирования которого, находим общее решение

$$i_2(u) = A \exp(u/U_0). \quad (1\epsilon)$$

Из выражения (1а) определим частное решение $i_1(u)$, если предположить $u = -\infty$

$$i(-\infty) = i_1(u) + A \exp(-\infty/U_0),$$

т. е.

$$i(-\infty) = i_1(u).$$

Вычислим значение амплитуды A для известного $i_1(u)$ при нулевом напряжении $u = 0$

$$i(0) = i(-\infty) + A \exp(0/U_0),$$

откуда следует

$$A = i(0) - i(-\infty).$$

Подставляя вычисленные значения (1ε), $i_1(u)$ и A в уравнение (1а), находим математическую модель вольтамперной характеристики (ВАХ) в общем виде

$$i(u) = i(-\infty) + [i(0) - i(-\infty)] \exp(u/U_0). \quad (1\zeta)$$

Выражение (1ζ) справедливо для любого значения амплитуд тока i и напряжения u , поэтому является обобщенной математической моделью кинетики электродиффузии ионов тока при электродинамическом равновесии с электрохимическим потенциалом U_0 (диффузионном напряжении) на границе электрода с электролитом, которым является раствор глюкозы в крови.

Из прямой зависимости (1ζ) после приведения подобных членов и логарифмирования несложно получить инверсную обобщенную математическую модель ВАХ

$$u = U_0 \ln \frac{i(u) - i(-\infty)}{i(0) - i(-\infty)}, \quad (1\delta)$$

удобную для преобразования графика ВАХ в функциональные координаты для анализа допусков переключения при автоматическом мониторинге нелинейных процессов.

Следовательно, физическая модель ВАХ отражает нелинейность диффузии электролитической ячейки при термодинамическом равновесии ионного тока концентрации и электрохимического потенциала границы электрода и исследуемого вещества ячейки. Физическая модель ВАХ тождественна по принципам аналогии электрическим нелинейным делителям (напряжения, тока, мощности) на принципиальных диодно-транзисторных схемах и функциональных граф-схемах. Схемы замещения физической модели по законам Кирхгофа тождественны математическим моделям ВАХ в дифференциальной и интегральной форме.

3. ПАРАМЕТРЫ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Анализ ВАХ показывает, что при отрицательном напряжении $u = -\infty$ ток $i(-\infty) = I_0$ – в пределе стремится к диффузионному (обратному, темновому) току I_0 , а в начале системы координат при $u = 0$ ток $i(0) = 0$ – отсутствует. При этом обобщенные модели (1ζ) и (1δ) принимают знакомый классический вид ВАХ [5, с. 183-187] в прямом представлении $i(u) = I$

$$I = I_0 \left(\exp \frac{U}{U_0} - 1 \right). \quad (2)$$

и в инверсном выражении

$$U = U_0 \ln(I/I_0 + 1), \quad (2a)$$

для $u(i) = U$. Это следует из моделей ВАХ, например, (1ζ)

$$i(u) = -I_0 + (0 + I_0) \exp(u/U_0) = I_0 \left(\exp \frac{U}{U_0} - 1 \right),$$

аналогично из модели (1δ)

$$u = U_0 \ln \frac{i(u) - (-I_0)}{i(0) - (-I_0)} = U_0 \ln \frac{I + I_0}{I_0}.$$

Физический смысл параметра I_0 ВАХ следует из модели (2) для отрицательного напряжения $U = -\infty$

$$\lim_{U \rightarrow -\infty} I = I_0 \left(\exp \frac{-\infty}{U_0} - 1 \right) = -I_0,$$

т. е. I_0 – диффузионный ток, к которому стремится ток при обратном напряжении на бесконечности. Это соответствует закономерности тождественности параметров [7; 10]: диффузионному току – предельного тока I

$$\lim_{U \rightarrow -\infty} I = -I_0. \quad (2б)$$

Инверсная ВАХ (2а) поясняет физический смысл параметра U_0

$$\lim_{I \rightarrow -(2/3)I_0} U = U_0 \ln \left[\frac{I_0(e^{-1} - 1)}{I_0} + 1 \right] = U_0 \ln e^{-1} = -U_0,$$

т. к. в пределе для $U = U_0$ следует

$$\lim_{U \rightarrow U_0} I = I_0 \left(\exp \frac{-U_0}{U_0} - 1 \right) \approx -\frac{2}{3} I_0.$$

Из пределов амплитуд напряжения и тока очевидно, что U_0 – диффузионное напряжение (обратное на-

пряжение, электрохимический потенциал) на границе электрода и электролита, которое соответствует обратному напряжению для обратного тока $I = -(2/3) I_0$. Отсюда следует закономерность тождественности диффузионному напряжению обратного напряжения при токе, равному $-(2/3) I_0$:

$$\begin{aligned} \text{opt} U &= -U_0. \\ I \rightarrow -(2/3) I_0 \end{aligned} \quad (2\text{в})$$

Следовательно, однозначно определяют ВАХ – предельные параметры: диффузионный ток I_0 и напряжение U_0 , которые в пределе интегрируют множество переменных тока I и напряжения U . Необходимо отметить тождественность математических моделей ВАХ в дифференциальной форме (1) и в алгебраическом представлении как в обобщенном виде (1с), так и в классическом отображении (2), которые адекватны физике натурального эксперимента и кинетике процесса на границе электрода с электролитом, например, раствора глюкозы в крови.

4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Тождественность математических моделей позволяет напрямую, «в лоб» получить классическое выражение ВАХ [7–8] из решения дифференциального уравнения (1). Для этого разделим переменные интегрирования по току и напряжению

$$\frac{di}{i + I_0} = \frac{du}{U_0}. \quad (3)$$

Проинтегрируем правую часть уравнения (3) по току $i = \{0, i\}$, левую часть – по напряжению $u = \{0, u\}$

$$\int_0^i \frac{di}{i + I_0} = \int_0^u \frac{du}{U_0},$$

получим логарифмическое уравнение

$$\ln(i + I_0) - \ln I_0 = (u - 0)/U_0.$$

После тождественных преобразований находим инверсную математическую модель ВАХ

$$u = U_0 \ln \left(\frac{i + I_0}{I_0} \right), \quad (3\text{а})$$

тождественную выражению (2а).

Экспоненцирование модели (3а) приводит к прямому представлению ВАХ

$$i = I_0 \left(e^{u/U_0} - 1 \right), \quad (3\text{б})$$

тождественному характеристике (2).

Решением дифференциального уравнения (1), кроме алгебраических операторов в обобщенной (1с, 1д) и

классической (2, 2а) форме, являются также математические модели с операторами интегрирования [8]. При этом предполагают ток i – медленно изменяющимся сигналом, тогда уравнение (1) можно представить в виде независимых от приращения di тока переменных

$$U_0 \frac{di}{du} = i + I_0,$$

или после разделения переменных дифференцирования

$$di = \frac{i + I_0}{U_0} du. \quad (4)$$

Проинтегрируем дифференциальное уравнение по частям

$$\int_0^i di = \int_0^u \frac{i + I_0}{U_0} du,$$

а после интегрирования по току находим еще одну интегральную модель ВАХ, но в интегральном исчислении

$$i = \frac{1}{U_0} \int_0^u (i + I_0) du. \quad (4\text{а})$$

Следовательно, решение дифференциального представления ВАХ иллюстрируют интегральные модели в алгебраической форме и интегральном исчислении, которые тождественны между собой и адекватны физике натурального эксперимента. Тождественность математических моделей позволяет находить более простые и рациональные методы вычисления математических моделей в интегральном представлении как в обобщенной, так и в классической форме, что расширяет банк данных и повышает функциональную избыточность, инициирующих организацию автоматического контроля.

Тождественность операторов счисления и исчисления позволяет дифференциальную форму модели ВАХ (1) выразить разностным уравнением [2, с. 38-52] после замены $\Delta i = i_{k+1} - i_k$, а $\Delta u = u_{k+1} - u_k$:

$$U_0 \frac{i_{k+1} - i_k}{u_{k+1} - u_k} - i_k = I_0, \quad (5)$$

где $k = \{0, l - 1\}$ – шаг итерации сканирования ВАХ. Освободимся в (5) от знаменателя

$$U_0 (i_{k+1} - i_k) = (i_k + I_0) (u_{k+1} - u_k),$$

а после приведения подобных членов, находим математическую модель ВАХ в разностной форме

$$i_{k+1} = i_k + (i_k + I_0) (u_{k+1} - u_k) / U_0, \quad (5\text{а})$$

тождественную дифференциальному представлению (1).

Следовательно, тождественность операторов счисления и исчисления позволяет разработчику и пользователю выбирать модель ВАХ в интегральном или дифференциальном представлении в непрерывной или разностной форме, а также рациональный алгоритм вычисления для проведения математического моделирования кинетических процессов аналоговой и импульсной, цифровой и микропроцессорной техники.

5. ОПЕРАТОРНЫЕ МОДЕЛИ

Доказана тождественность математических моделей ВАХ в комплексных переменных и операторной форме наподобие представления ИДХ в амплитудно-частотной системе координат [1, с. 87-91]. Математические модели ВАХ в комплексных переменных $j\omega$ и операторах s Лапласа [8] строят по аналогии с моделями импульсных динамических характеристик (ИДХ). ИДХ в дифференциальной форме

$$T \frac{du}{dt} + u = E \quad (6)$$

соответствуют в комплексных переменных $j\omega$ представления амплитуды напряжения u и производной по времени du/dt в виде

$$u = U_m e^{j\omega t} \quad \text{и} \quad du/dt = j\omega U_m e^{j\omega t} = j\omega u, \quad (6a)$$

где ω – циклическая частота; $j = \sqrt{-1}$ – корень квадратный мнимой единицы.

Подставим зависимости (6a) в уравнение (6) и получим математическую модель ИДХ в комплексной форме

$$u = E / (j\omega / \omega_0 + 1), \quad (6b)$$

при замене периода T на инверсную частоту $\omega_0 = 1/T$.

Модель в комплексных переменных (6b) представляют в операторной форме при введении оператора Лапласа $s = j\omega$:

$$u = E / (sT + 1). \quad (6c)$$

По аналогии с ИДХ [5, с. 187-191] дифференциальным уравнением первого порядка (6) иллюстрируют математическую модель ВАХ

$$U_0 \frac{di}{du} - i = I_0, \quad (7)$$

для которой в комплексной форме $j\omega$ по аналогии с (6a) тождественна экспоненциальная зависимость амплитуды тока i и производной по напряжению di/du :

$$i = I_m e^{j\omega u} \quad \text{и} \quad di/du = j\omega I_m e^{j\omega u} = j\omega i, \quad (7a)$$

где ω – волновая площадь, обратная напряжению $u = 1/\omega$; $j = \sqrt{-1}$ – корень квадратный мнимой единицы.

После подстановки замен (7a) в дифференциальную модель (7)

$$U_0 j\omega i - i = I_0,$$

приведения подобных членов

$$i(j\omega U_0 - 1) = I_0,$$

находим математическую модель ВАХ в комплексной форме

$$i = I_0 / (j\omega U_0 - 1). \quad (7b)$$

Модель в комплексных переменных (7b) преобразуют в операторную форму ВАХ за счет введения оператора $p = j\omega$ Лапласа:

$$i = I_0 / (pU_0 - 1) \quad (7c)$$

с аналогичной ИДХ структурой (6c).

Дифференциальные модели в комплексных переменных (7b) и операторной форме (7c) отражают амплитудно-волновые характеристики (АВХ), инверсные ВАХ из-за обратного соотношения напряжения $u = 1/\omega$ к площади ω . Обратную зависимость ВАХ и АВХ также подтверждают инверсные операторы исчисления

$$R_0 \frac{di}{du} - 1 = 1 / (pU_0 - 1), \quad (7d)$$

которые следуют из тождества моделей (7) и (7c) при замене $R_0 = U_0/I_0$.

Следовательно, модели ВАХ в дифференциальной форме тождественны инверсным моделям АВХ в комплексных переменных и операторной форме по аналогии АЧХ, инверсным амплитудно-временным ИДХ.

ВЫВОДЫ

Интенсификация инноваций диффузионных процессов требует замену статистических моделей степенных полиномов без знания физики явления банком данных избыточных форм представления математических моделей вольтамперных характеристик (ВАХ), адекватных кинетике физических процессов натурального эксперимента для организации автоматического контроля действительных характеристик состава и свойств веществ, материалов и продуктов производства. Создание высокоэффективных метрологических средств коммуникабельных компьютерных анализаторов требует универсального математического обеспечения, которое невозможно без тождественных математических моделей, адекватных физике информационных процессов, отражающих сущность и техническое противоречие натурального эксперимента для оценки действительных характеристик аналитического контроля.

Тождественность математических моделей обеспечивает автоматический контроль за счет программно управляемой структурной и параметрической оптимизации гибких калибровочных характеристик по нормируемым мерам известных образцов границ диапазона статических, динамических и кинетических информа-

ционных процессов. Избыточность форм моделей дифференцирует технические противоречия до физических закономерностей, при выполнении которых устраняются недостатки прототипа и реализуется ИКР – инновация за счет тождественности несовершенных признаков аналогов желаемым эквивалентам.

Физическая модель ВАХ отражает нелинейность диффузии электролитической ячейки при термодинамическом равновесии ионного тока концентрации и электрохимического потенциала границы электрода и исследуемого вещества ячейки. Физическая модель ВАХ тождественна по принципам аналогии электрическим нелинейным делителям (напряжения, тока, мощности) на принципиальных диодно-транзисторных схемах и функциональных граф-схемах. Схемы замещения физической модели по законам Кирхгофа тождественны математическим моделям ВАХ в дифференциальной и интегральной форме. Однозначно определяют ВАХ – предельные параметры: диффузионный ток и напряжение, которые в пределе интегрируют множество переменных тока и напряжения. Необходимо отметить тождественность математических моделей ВАХ в дифференциальной форме и в алгебраическом представлении как в обобщенном виде, так и в классическом отображении, которые адекватны физике натурального эксперимента и кинетике процесса на границе электрода с электролитом, например, раствора глюкозы в крови.

Решение дифференциального представления ВАХ иллюстрируют интегральные модели в алгебраической форме и интегральном исчислении, которые тождественны между собой и адекватны физике натурального эксперимента. Тождественность математических моделей позволяет находить более простые и рациональные методы вычисления математических моделей в интегральном представлении как в обобщенной, так и в классической форме, что расширяет банк данных и повышает функциональную избыточность, инициирующих организацию автоматического контроля.

Тождественность операторов счисления и исчисления позволяет разработчику и пользователю выбирать модель ВАХ в интегральном или дифференциальном представлении в непрерывной или разностной форме, а также рациональный алгоритм вычисления для прове-

дения математического моделирования кинетических процессов аналоговой и импульсной, цифровой и микропроцессорной техники. Модели ВАХ в дифференциальной форме тождественны инверсные модели АВХ в комплексных переменных и операторной форме по аналогии АЧХ, инверсным амплитудно-временным ИДХ.

Избыточность математических моделей и форм их представления инициирует выявление объективных физических закономерностей анализа и синтеза схем и программ, алгоритмов и характеристик для их систематизации в технологию проектирования коммуникабельных компьютерных анализаторов с перспективными инновациями, согласованных избыточных матричных структур схемотехники и ассоциативной адресации мнемотехники, универсальных алгоритмов научно-технического творчества и высокоэффективных метрологических средств гуманитарно-правовой культуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метрология, стандартизация и сертификация / под ред. В.В. Алексеева. М.: Академия, 2008. 384 с.
2. Гликин Е.И., Герасимов Б.И. Микропроцессорные аналитические приборы. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.
3. Гликин Е.И. Техника творчества. Тамбов: ТГТУ, 2010. 168 с.
4. Чичёв С.И., Калинин В.Ф., Гликин Е.И. Информационно-измерительная система центра управления электрических сетей. М.: Машиностроение, 2009. 176 с.
5. Чичёв С.И., Калинин В.Ф., Гликин Е.И. Инфокоммуникационные сети магистральных электрических сетей центра. М.: Спектр, 2013. 200 с.
6. Чичёв С.И., Калинин В.Ф., Гликин Е.И. Методология проектирования цифровой подстанции. М.: Спектр, 2014. 228 с.
7. Гликин Е.И., Одиноква А.А. Информационные технологии кондуктометрии // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 2. С. 674-678.
8. Гликин Е.И., Наумова А.В., Одиноква А.А. Технология проектирования динамических характеристик // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2925-2933.
9. Гликин Е.И. Адекватность инноваций // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2014. Т. 19. Вып. 3. С. 869-875.
10. Гликин Е.И. Закономерности методов измерения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 6. С. 1784-1789.

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 г.

UDC 681.5.07
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-688-695

MODELS IDENTITY OF VOLTAGE-CURRENT CHARACTERISTIC

© E.I. Glinkin

Identity of mathematical models of voltage-current characteristics (VCC) in the integrated and differential, complex and operator, differential and algebraic forms caused by redundancy of representation because of adequacy to physics of natural experiment for systematization of regularities in technology of computer analyzers design of structure and properties of substances is proved.

Key words: physical and mathematical models, voltage-current characteristics, equivalent circuits, statistical polynoms, automatic control, limit parameters, differential and integrated calculation, complex variables, operator form, redundancy and identity.

REFERENCES

1. Alekseev V.V. (ed.) *Metrologiya, standartizatsiya i sertifikatsiya*. Moscow, Academia Publ., 2008. 384 p.
2. Glinkin E.I., Gerasimov B.I. *Mikroprotsessornye analiticheskie pribory*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 248 p.
3. Glinkin E.I. *Tekhnika tvorchestva*. Tambov, Tambov State Technical University Publ., 2010. 168 p.
4. Chichev S.I., Kalinin V.F., Glinkin E.I. *Informatsionno-izmeritel'naya sistema tsentra upravleniya elektricheskikh setey*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2009. 176 p.
5. Chichev S.I., Kalinin V.F., Glinkin E.I. *Infokommunikatsionnye seti magistral'nykh elektricheskikh setey tsentra*. Moscow, Spektr Publ., 2013. 200 p.
6. Chichev S.I., Kalinin V.F., Glinkin E.I. *Metodologiya proektirovaniya tsifrovoy podstantsii*. Moscow, Spektr Publ., 2014. 228 p.
7. Glinkin E.I., Odinkova A.A. Informatsionnye tekhnologii konduktometrii. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 674-678.
8. Glinkin E.I., Naumova A.V., Odinkova A.A. Tekhnologiya proektirovaniya dinamicheskikh kharakteristik. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2925-2933.
9. Glinkin E.I. Adekvatnost' innovatsiy. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 869-875.
10. Glinkin E.I. Zakonomernosti metodov izmereniya. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, Tambov, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 1784-1789.

Received 11 February 2016

Гликин Евгений Иванович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры биомедицинской техники, заслуженный изобретатель Российской Федерации, e-mail: bmt@nnn.tstu.ru; glinkinei@rambler.ru

Glinkin Evgeniy Ivanovich, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation, Doctor of Technics, Professor of Biomedical Engineering Department, Honored Inventor of Russian Federation, e-mail: bmt@nnn.tstu.ru; glinkinei@rambler.ru

УДК 5-05

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-696-698

ПРОФЕССОРУ Ф.А. ШУКУРОВУ – 70 ЛЕТ

Исполняется 70 лет известному ученому Республики Таджикистан, заведующему кафедрой нормальной физиологии Таджикского государственного медицинского университета им. Абуали ибни Сино, доктору медицинских наук, профессору Фирузу Абдуфаттоевичу Шукурову.

Ключевые слова: Фируз Абдуфаттоевич Шукуров; юбилей; нормальная физиология.



Блажен, кто сможет на земном пути
Сокровища познаний припасти.

Муслихиддин Саади

Эти прекрасные слова великого персидского и таджикского поэта Муслихиддина Саади можно отнести к известному ученому Республики Таджикистан, заведующему кафедрой нормальной физиологии Таджикского государственного медицинского университета им. Абуали ибни Сино, доктору медицинских наук, профессору Фирузу Абдуфаттоевичу Шукурову, который отмечает свой юбилейный день рождения, ему исполняется 70 лет!

Фируз Абдуфаттоевич Шукуров после окончания в 1971 г. с отличием Таджикского государственного медицинского института им. Абуали ибни Сино всю свою

профессиональную деятельность посвятил физиологии, пройдя последовательно все ступени в преподавании данной дисциплины: от ординатора кафедры нормальной физиологии, аспиранта, ассистента, доцента до заведующего кафедрой. Фируз Абдуфаттоевич является академиком Российской экологической академии, академиком Международной академии высшей школы, вице-президентом Союза физиологических обществ стран СНГ, председателем общества физиологов Республики Таджикистан. Фируз Абдуфаттоевич Почетный профессор Карагандинского государственного медицинского университета и Липецкого педагогического университета. В 1979 г. успешно защищает кандидатскую диссертацию на тему: «Характеристика сердечной деятельности в процессе адаптации человека к высокогорью», а в 1995 г., под руководством академика АМН РФ Н.А. Агаджаняна, докторскую диссер-

тацию на тему: «Физиологическое обоснование критериев оценки и прогнозирования индивидуальной адаптации человека к высокогорью». Является автором более 150 научных работ по проблемам оценки, прогнозирования эффективности адаптации человека к высокогорью, уровней здоровья и повышения устойчивости организма к действиям стресса, ряда учебно-методических пособий на двух языках, 20 рационализаторских предложений. Под его руководством защищены 1 докторская и 10 кандидатских диссертаций.

С 1996 г. по настоящее время Ф.А. Шукуров является руководителем комплексных программ научных исследований по проблемам здоровья молодежи Республики Таджикистан, способом повышения функционального резерва, оценки и прогнозирования стрессоустойчивости организма. Ф.А. Шукуров очень ответственный, коммуникабельный и общительный человек, который постоянно совершенствуется и ищет путь к новизне. В настоящее время кафедрой нормальной физиологии, которой он руководит, заключены договоры о научно-педагогическом сотрудничестве с НИИ нормальной физиологии им. П.К. Анохина РАМН, Липецким государственным педагогическим университетом, Воронежской государственной медицинской академией им. Н.Н. Бурденко, Волгоградским государственным университетом и Медицинским институтом Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина.

Фируз Абдуфаттоевич Шукуров имеет глубокие профессиональные знания, широкий кругозор, постоянно работает над совершенствованием преподавания физиологии. Им была разработана и издана на трех языках «Тетрадь для проведения самостоятельной работы и лабораторных занятий по курсу нормальной физиологии», в которой впервые разработаны 7 уровней заданий различных сложностей по всему курсу нормальной физиологии. Он активно участвует в оптимизации учебно-методической работы кафедры, являясь составителем ряда учебно-методических пособий: «Тесты для контроля знаний по курсу нормальной физиологии», «Физиология в схемах и рисунках», «Физиология человека» (учебник) и «Основы нормальной физиологии» (физиологический словарь на трех языках), рабочих программ и методических разработок.

В настоящее время Фируз Абдуфаттоевич находится на вершине своих творческих возможностей. Его опыт преподавания физиологии используется и развивается в странах СНГ.

Шукуров Фируз Абдуфаттоевич – необыкновенно творческая личность, постоянно находится в поиске инновационных методов преподавания и обучения для формирования мотивации студентов к изучению фи-

зиологии, примером того является организованная на кафедре аудио-видео конференция и ежегодно проводятся различные учебно-развлекательные игры, такие как КВН по физиологии функциональных систем организма. Студенты очень любят, уважают и высоко ценят его как грамотного, целеустремленного и начитанного педагога, который может передавать свои знания студентам. Под его руководством ежегодно студенты выступают с научными докладами: на конференциях ТГМУ; на III–IV Международных конференциях Российского университета дружбы народов; на III съезде физиологов СНГ (г. Ялта) и на Второй Международной междисциплинарной конференции «Современные проблемы системной регуляции физиологических функций» (Бодрум, Турция).

Ф.А. Шукуров Указом Президиума Верховного Совета СССР от 1971 г. награжден медалью «За трудовое отличие»; на основе решения коллегии (приказа) Министерства образования Республики Таджикистан от 2000 г. награжден знаком «Отличник народного образования Таджикистана»; Указом Президента Республики Таджикистан от 2010 г. награжден медалью «Хизмати Шонста».

Ф.А. Шукуров проявил себя как добросовестный, ответственный, стремительный, инициативный, коммуникабельный человек, который всегда готов поделиться своими знаниями и опытом.

Глубокая эрудиция, целеустремленность, настойчивость, интеллигентность, самоотверженность, принципиальность и преданность выбранному пути снискали Ф.А. Шукурову глубокое уважение, признательность, любовь студентов, учеников и соратников.

Да будет жизнь твоя для всех других – отрадой,
Дари себя другим как гроздь винограда...
И так, живи для всех – не думай о себе
И жребий твой блеснет как высшая награда!

Носыр Хисрав

О.А. Степичева,
доктор экономических наук, профессор,
директор Медицинского института
Тамбовского государственного университета
им. Г.Р. Державина

А.В. Гулин,
доктор медицинских наук, профессор,
заведующий кафедрой биохимии и фармакологии
Медицинского института
Тамбовского государственного университета
им. Г.Р. Державина

Директорат Медицинского института Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина, редакция журнала сердечно поздравляют Фируза Абдуфаттоевича Шукурова с юбилейным днем рождения и желают ему крепкого здоровья, оптимизма, неиссякаемой жизненной энергии и дальнейших творческих успехов.

UDC 5-05

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-696-698

PROFESSOR F.A. SHUKUROV – 70TH ANNIVERSARY

© O.A. Stepicheva, A.V. Gulin

A well-known scientist of Republic of Tajikistan, Head of Hominal Physiology Department of Tajik State Medical University, Doctor of Medicine, Professor Firuz Abdufattoevich Shukurov is celebrating his 70th anniversary.

Key words: Firuz Abdufattoevich Shukurov; anniversary; hominal physiology.

Received 2 April 2016

Степичева Ольга Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор экономических наук, профессор, директор Медицинского института, e-mail: medical@tsutmb.ru

Stepicheva Olga Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Economics, Professor, Head of Medical University, e-mail: medical@tsutmb.ru

Гулин Александр Владимирович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор медицинских наук, профессор, зав. кафедрой биохимии и фармакологии, e-mail: gulin49@yandex.ru

Gulin Aleksander Vladimirovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, Russian Federation, Doctor of Medicine, Professor, Head of Biochemistry and Pharmacology Department, e-mail: gulin49@yandex.ru