

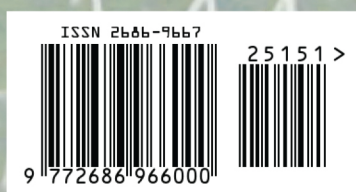
ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 30
№ 151
2025

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 30, № 151,
2025

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Белый список», «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	207
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>А.В. Арутюнов, О.А. Васянин</i>	Существование точки совпадения в критическом случае, когда константа накрывания и константа Липшица совпадают 209
<i>З.Т. Жуковская</i>	О достаточных условиях асимптотической устойчивости положений равновесия разностных уравнений 218
<i>Е.С. Жуковский, Т.В. Жуковская</i>	Некоторые топологические свойства f -квазиметрических пространств 226
<i>Ф.Ф. Майер, М.Г. Тастанов, А.А. Утемисова, Г.Ж. Берденова</i>	Оценки в классе аналитических функций, связанных с овалом Кассини, и некоторые их применения 238
<i>Л.И. Родина, А.Х. Хаммади, А.В. Черникова</i>	Задачи оптимального периодического сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями 255
<i>Р. Сенгупта</i>	О зависимости неподвижной точки от параметра в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах 267
<i>М.И. Сумин</i>	Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством 275

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Лансеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: 8(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>; <https://journals.rcsi.science/2686-9667>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редактор: М.И. Филатова
Редактор английских текстов: Н.А. Михайлова
Технический редактор: Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь: М.В. Борзова
Администраторы сайта: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. 100 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151>

Подписано в печать 24.09.2025. Дата выхода в свет 15.10.2025
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 12,5. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 25210. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Контент доступен под лицензией [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 30, no. 151,
2025**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “White list” and “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:
1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>A.V. Arutyunov, O.A. Vasyanin</i>	Existence of a coincidence point in a critical case when the covering constant and the Lipschitz constant are equal	209
<i>Z.T. Zhukovskaya</i>	On sufficient conditions of the asymptotic stability for equilibria of difference equations	218
<i>E.S. Zhukovskiy, T.V. Zhukovskaya</i>	Some topological properties of f -quasimetric spaces	226
<i>F.F. Maiyer, M.G. Tastanov, A.A. Utemissova, G.Zh. Berdenova</i>	Estimates in the class of analytical functions related to the Cassini oval and some of their applications	238
<i>L.I. Rodina, A.V. Chernikova, A.H. Hammadi</i>	Problems of optimal periodic resource harvesting for population models described by difference equations	255
<i>R. Sengupta</i>	On the dependence of a fixed point on a parameter in (q_1, q_2) -quasimetric spaces	267
<i>M.I. Sumin</i>	Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in a nonlinear optimal control problem with pointwise state equality-constraint	275

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponosov, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>; <https://journals.rcsi.science/2686-9667>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editor: M.I. Filatova

English texts editor: N.A. Mikhailova

Technical editor: Y.A. Biryukova

Technical secretary: M.V. Borzova

Web-site administrators: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova

For citation:

Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics, **30**:151 (2025), 100 p.
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151>

Signed for printing 24.09.2025. Release date 15.10.2025

Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.

Pr. sheet 12,5. Conv. pr. sheet 11,6. Copies printed 1000. Order no. 25210. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. V. Arutyunov, O. A. Vasyanin, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-209-217>

Existence of a coincidence point in a critical case when the covering constant and the Lipschitz constant are equal

Aram V. ARUTYUNOV, Oleg A. VASYANIN¹ Trapeznikov Institute of Control Sciences
of the Russian Academy of Sciences

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University

1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. We consider two mappings acting between metric spaces and such that one of them is covering and the other satisfies the enhanced Lipschitz property. It is assumed here that the covering constant and the Lipschitz constant of these mappings are equal. We prove the result of the existence of a coincidence point of single-valued mappings in the case when the series of iterations of the function that provides execution of the enhanced Lipschitz property converges. We prove the similar result for set-valued mappings. We provide examples of functions for which the series of their iterations converges or diverges.

Keywords: covering mapping, coincidence point, series of iterations

Mathematics Subject Classification: 54H25, 47H04.

For citation: Arutyunov A.V., Vasyanin O.A. Existence of a coincidence point in a critical case when the covering constant and the Lipschitz constant are equal. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 209–217. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-209-217>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Арутюнов А.В., Васянин О.А., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-209-217>

УДК 515.126.4



**Существование точки совпадения
в критическом случае, когда константа накрывания
и константа Липшица совпадают**

Арам Владимирович АРУТЮНОВ, Олег Александрович ВАСЯНИН

¹ ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова»
Российской академии наук

117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

² ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Рассматриваются два отображения, действующие между метрическими пространствами, и такие, что одно из них является накрывающим, а второе удовлетворяет усиленному условию Липшица. При этом предполагается, что константа накрывания и константа Липшица у этих отображений совпадают. Доказывается результат о существовании точки совпадения однозначных отображений в случае, когда ряд из итераций функции, обеспечивающей выполнение усиленного условия Липшица, сходится. Доказывается аналогичный результат для многозначных отображений. Приводятся примеры функций, для которых ряд из их итераций сходится или расходится.

Ключевые слова: накрывающее отображение, точка совпадения, ряд из итераций

Для цитирования: Арутюнов А.В., Васянин О.А. Существование точки совпадения в критическом случае, когда константа накрывания и константа Липшица совпадают // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 209–217.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-209-217>

Introduction

In this paper, we consider the problem of the existence of a coincidence point of α -covering mapping and β -Lipschitz mapping acting between metric spaces $X = (X, \rho_X)$ and $Y = (Y, \rho_Y)$ in a critical case when $\alpha = \beta$. Without loss of generality we will consider only the case $\alpha = \beta = 1$. In case when $\alpha > \beta$ theorems 1 and 2 about the existence of a coincidence point from [1] take place. But in case when $\alpha = \beta$ these theorems do not work. Without making new assumptions about Φ and Ψ a coincidence point may not exist. This is evidenced by the following simple example $X = Y = \mathbb{R}$, $\Phi(x) \equiv x$, $\Psi(x) \equiv x + 1$.

Throughout the following γ and δ denote continuous non-decreasing functions acting from $[0, +\infty)$ to $[0, +\infty)$ with the property $\gamma(t) < t$, $\delta(t) < t$ for all $t > 0$.

Let us make the following assumption on Φ :

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad (0.1)$$

where the function γ is such that the functional series

$$A_\gamma(t) = t + \gamma(t) + \gamma(\gamma(t)) + \dots \quad (0.2)$$

converges. Series (0.2) is called the iteration series corresponding to the function γ .

The main feature of this paper is that we consider mappings Φ and Ψ for which the series (0.2) converges and $\gamma(t) < t$ for all $t > 0$. We show that under these assumptions a coincidence point of Φ and Ψ exists. Some of the constructions below are similar to constructions in [1].

For convenience we denote $\gamma^k(t) := \underbrace{\gamma(\dots(\gamma(t)))}_k$ as the value of k -th iteration of the function γ at the point t , and also $\gamma^0(t) := t$. Then we have $A_\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k(t)$.

Lemma 0.1. *The convergence set of a functional series (0.2) is the whole closed half-line $[0, +\infty)$ or just the point $\{0\}$.*

P r o o f. We show that the situation when A_γ converges at $t_1 > 0$ and at the same time diverges at $t_2 > 0$ is impossible. If $t_1 > t_2$ then we note that $A_\gamma(t_1) \geq A_\gamma(t_2)$. Indeed, since γ is non-decreasing and $t_1 > t_2$, we have term-by-term estimation $\gamma^k(t_1) \geq \gamma^k(t_2)$ for all numbers $k \geq 0$. Hence, due to the assumption $A_\gamma(t_1) < \infty$ and the majorant test of convergence, we have $A_\gamma(t_2) < \infty$, which leads to a contradiction. If $t_1 < t_2$ then we firstly note that the sequence $\gamma^k(t_2) \rightarrow 0$. Indeed, since $\gamma(t) < t$ for all $t > 0$, this sequence is non-increasing, i. e. is monotonic. Since it is bounded below by zero and above by t_2 , there exists a limit $L = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^k(t_2) \geq 0$. If $L > 0$ then we pass to the limit in the obvious equality $\gamma^{k+1}(t_2) = \gamma(\gamma^k(t_2))$ at $k \rightarrow \infty$ and get $L = \gamma(L) < L$ which leads to a contradiction. Hence, $L = 0$. This means that there exists a number $N \geq 1$ such that $\gamma^N(t_2) \leq t_1$. So,

$$A_\gamma(t_2) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma^k(t_2) + \sum_{k \geq N} \gamma^k(t_2) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \gamma^k(t_2) + A_\gamma(t_1) < \infty,$$

which contradicts the assumption of divergence of $A_\gamma(t_2)$. □

Due to Lemma 0.1, we will further simply write that series (0.2) converges for the function γ without specifying the point at which this convergence takes place.

Lemma 0.2. *Let there exist $T > 0 : \gamma(t) \leq \delta(t)$ for all $t \in (0, T)$ and let the series (0.2) converge for the function δ . Then it also converges for the function γ .*

P r o o f. The proof follows obviously from the Weierstrass test of convergence for series. $\square$

Let us now consider a case of single-valued mappings.

1. Case of single-valued mappings

Recall the definition of the coincidence point of two single-valued mappings. A point $\xi \in X$ is called a coincidence point of two single-valued mappings $\Phi : X \rightarrow Y$ and $\Psi : X \rightarrow Y$ if

$$\Phi(\xi) = \Psi(\xi).$$

Let a number $\alpha > 0$ be given. Then a mapping $\Psi : X \rightarrow Y$ is called α -covering if

$$B^Y(\Psi(x), \alpha r) \subset \Psi(B^X(x, r)) \quad \forall x \in X \quad \forall r > 0.$$

(In case when Ψ is set-valued the definition remains the same.)

The following statement takes place.

Theorem 1.1. *Let $X = (X, \rho_X)$ be a complete metric space, $Y = (Y, \rho_Y)$ be a metric space, $\Phi : X \rightarrow Y$ and $\Psi : X \rightarrow Y$ be mappings such that Ψ is 1-covering and continuous and Φ satisfies the inequality (0.1) with a function γ for which the series (0.2) converges. Then Φ and Ψ have a coincidence point.*

P r o o f. We will construct the sequence $\{x_n\} \subset X$ with the property $\Psi(x_{n+1}) = \Phi(x_n)$ for all numbers $n \geq 1$ by induction. We choose the point x_0 arbitrary. Let $r_0 = \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0))$. Since Ψ is 1-covering, $\Psi(B^X(x_0, r_0)) \supset B^Y(\Psi(x_0), r_0) \ni \Phi(x_0)$. So there exists a point $x_1 \in B^X(x_0, r_0) : \Psi(x_1) = \Phi(x_0)$. The point x_1 is built.

Let the points $x_0, \dots, x_j$ be already built. Put $r_j = \rho_Y(\Psi(x_j), \Phi(x_j))$. Since Ψ is 1-covering, $\Psi(B^X(x_j, r_j)) \supset B^Y(\Psi(x_j), r_j) \ni \Phi(x_j)$. So there exists a point $x_{j+1} \in B^X(x_j, r_j) : \Psi(x_{j+1}) = \Phi(x_j)$. The point x_{j+1} is built.

Put $\rho_j = \rho_X(x_j, x_{j-1})$ for $j \geq 1$ and $\rho_0 = \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0))$. Then for each point x_j we have the estimation

$$\begin{aligned} \rho_j = \rho_X(x_j, x_{j-1}) &\leq r_{j-1} = \rho_Y(\Psi(x_{j-1}), \Phi(x_{j-1})) = \rho_Y(\Phi(x_{j-2}), \Phi(x_{j-1})) \\ &\leq \gamma(\rho_X(x_{j-2}, x_{j-1})) = \gamma(\rho_{j-1}) \end{aligned}$$

(if $j > 1$) and the estimation $\rho_1 \leq \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)) = r_0 = \rho_0$ (if $j = 1$). Note that $\rho_j \leq \gamma(\rho_{j-1}) \leq \dots \leq \gamma^{j-1}(\rho_1)$ for any $j \geq 1$. For arbitrary numbers $m < n$ we have the estimation

$$\begin{aligned} \rho_X(x_m, x_n) &\leq \rho_X(x_m, x_{m+1}) + \rho_X(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + \rho_X(x_{n-1}, x_n) \\ &= \rho_{m+1} + \rho_{m+2} + \dots + \rho_n \leq \rho_{m+1} + \gamma(\rho_{m+1}) + \dots + \gamma^{n-m-1}(\rho_{m+1}) \\ &\leq \gamma^m(\rho_1) + \gamma^{m+1}(\rho_1) + \dots + \gamma^{n-1}(\rho_1) \leq A_\gamma(\rho_1). \end{aligned}$$

Here we use the triangle inequality for the metric ρ_X and the fact of convergence of the series (0.2). Due to this estimation we get that the sequence $\{x_n\}$ is fundamental. Since the metric space X is complete, the sequence $\{x_n\}$ converges to some point $\xi \in X$. Passing to the limit in the equation $\Psi(x_n) = \Phi(x_{n-1})$ at $n \rightarrow \infty$, we get $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$. $\square$

Let us now proceed to set-valued case.

2. Case of set-valued mappings

We assume that $X = (X, \rho_X)$ and $Y = (Y, \rho_Y)$ are metric spaces, $\Phi : X \rightrightarrows Y$ and $\Psi : X \rightrightarrows Y$ are set-valued mappings, i. e. $\Phi(x), \Psi(x) \subset Y$ for all $x \in X$ and the sets $\Phi(x), \Psi(x)$ are closed in the space Y in relation to metric ρ_Y .

We assume that the mapping Φ obeys the inequality

$$h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad (2.1)$$

where $h(\cdot, \cdot)$ is the Hausdorff distance defined by the equality

$$h(K_1, K_2) = \inf\{r > 0 : B^Y(K_1, r) \supset K_2, B^Y(K_2, r) \supset K_1\}$$

for arbitrary bounded sets $K_1, K_2 \subset Y$. Here $B^Y(K, r) = \{y \in Y : \text{dist}(y, K) \leq r\}$ is the r -neighbourhood of the set K and $\text{dist}(y, K)$ is the distance between point y and set K . We assume that the mapping Ψ is 1-covering and its graph $\text{gph } \Psi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \Psi(x)\}$ is closed in relation to the metric $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2)$ defined on the Cartesian product $X \times Y$.

Recall the definition of a coincidence point of two set-valued mappings. A point $\xi \in X$ is called a coincidence point of set-valued mappings $\Phi : X \rightrightarrows Y$ and $\Psi : X \rightrightarrows Y$ if

$$\Phi(\xi) \cap \Psi(\xi) \neq \emptyset.$$

Let us formulate and prove the lemma about set-valued mappings.

Lemma 2.1. *Let $X = (X, \rho_X)$ and $Y = (Y, \rho_Y)$ be metric spaces. Let the set-valued mappings $\Phi : X \rightrightarrows Y, \Psi : X \rightrightarrows Y$ be compact-valued and such that Ψ is 1-covering and Φ satisfies (2.1). Then there exist sequences $\{x_n\} \subset X$ and $\{y_n\} \subset Y$ such that*

$$\rho_X(x_1, x_0) \leq \text{dist}(\Phi(x_0), \Psi(x_0)), \quad (2.2)$$

$$y_i \in \Psi(x_i) \cap \Phi(x_{i-1}) \quad \forall i \geq 1, \quad (2.3)$$

$$\rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \gamma(\rho_X(x_{i-1}, x_{i-2})) \quad \forall i \geq 2, \quad (2.4)$$

$$\rho_Y(y_i, y_{i-1}) \leq \gamma(\rho_X(x_{i-1}, x_{i-2})) \quad \forall i \geq 2. \quad (2.5)$$

P r o o f. We will construct these sequences by induction. The point x_0 is taken arbitrary. Let $r_0 = \text{dist}(\Phi(x_0), \Psi(x_0))$, then due to compact-valuing of Φ, Ψ we have $\exists x_1 \in B^X(x_0, r_0) : \Psi(x_1) \cap \Phi(x_0) \neq \emptyset$. We take an arbitrary point $y_1 \in \Psi(x_1) \cap \Phi(x_0)$. Then the points x_1, y_1 satisfying (2.2)–(2.3) are built.

If $x_1 = x_0$ then we put $x_2 = x_3 = \dots = x_1$. Assume that $x_1 \neq x_0$. Put $r_1 = \gamma(\rho_X(x_1, x_0))$, then from (2.1) we have the inequality $h(\Phi(x_0), \Phi(x_1)) \leq r_1$, hence, since Φ is compact-valued, we get $B^Y(\Phi(x_1), r_1) \supset \Phi(x_0) \ni y_1$. It means that $\exists y_2 \in \Phi(x_1) : \rho_Y(y_2, y_1) \leq r_1$, so $y_2 \in B^Y(\Psi(x_1), r_1)$ at $y_1 \in \Psi(x_1)$. Hence, there exists a point $x_2 \in B^X(x_1, r_1) : y_2 \in \Psi(x_2)$. The points x_2, y_2 satisfying (2.2)–(2.4) are built.

Let the points $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_j, y_j$ be already built. If $x_j = x_{j-1}$ then we put $x_{j+1} = x_j$. Assume that $x_j \neq x_{j-1}$. Put $r_j = \gamma(\rho_X(x_j, x_{j-1}))$. Then due to (2.1) we have the inequality $h(\Phi(x_j), \Phi(x_{j-1})) \leq r_j$, and since Φ is compact-valued we get $B^Y(\Phi(x_j), r_j) \supset \Phi(x_{j-1}) \ni y_j$. It means that $\exists y_{j+1} \in \Phi(x_j) : \rho_Y(y_{j+1}, y_j) \leq r_j$, and hence, $y_j \in \Psi(x_j)$, so we conclude that $y_{j+1} \in B^Y(\Psi(x_j), r_j)$, and due to 1-covering of Ψ there exists a point $x_{j+1} \in B^X(x_j, r_j) : y_{j+1} \in \Psi(x_{j+1})$. The points x_{j+1}, y_{j+1} satisfying (2.3)–(2.5) are built. $\square$

Let us formulate and prove a result about the existence of a coincidence point of two set-valued mappings.

Theorem 2.1. *Let $X = (X, \rho_X)$ and $Y = (Y, \rho_Y)$ be metric spaces and the set-valued mappings $\Phi : X \rightrightarrows Y$ and $\Psi : X \rightrightarrows Y$ be compact-valued and such that Ψ is 1-covering and its graph $\text{gph } \Psi$ is closed. Let Φ satisfy the inequality (2.1) with a function γ for which the series (0.2) converges. Let also at least one of the sets $\text{gph } \Phi \subset X \times Y$, $\text{gph } \Psi \subset X \times Y$ be a complete metric space. Then Φ and Ψ have a coincidence point.*

P r o o f. Due to Lemma 2.1, there exist sequences $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ satisfying (2.2)–(2.5). Because of the inequalities (2.4), (2.5) and the convergence of the series (0.2), these sequences are fundamental.

Assume at first that $\text{gph } \Psi$ is complete. Then the sequence $\{(x_n, y_n)\}$ with all its elements lying in $\text{gph } \Psi$ is fundamental due to (2.3). Then we have the convergence $(x_n, y_n) \rightarrow (\xi, y) \in X \times Y$. Due to closeness of $\text{gph } \Psi$ and (2.3), the point $(\xi, y) \in \text{gph } \Psi$, and hence $y \in \Psi(\xi)$. On the other side, $y \in \Phi(\xi)$, as we can pass to the limit in (2.3) at $i \rightarrow \infty$ by taking into account upper semi-continuity of Φ (that immediately follows from (2.1)). We obtain that $y \in \Phi(\xi)$ and $y \in \Psi(\xi)$, which means that y is the coincidence point of Φ and Ψ .

Assume now that $\text{gph } \Phi$ is complete. Then the sequence $\{(x_n, y_{n+1})\}$ with all its elements lying in $\text{gph } \Phi$ because of (2.3) is fundamental. Then we have the convergence $(x_n, y_{n+1}) \rightarrow (\xi, y) \in \text{gph } \Phi$, and hence $y \in \Phi(\xi)$. By passing to the limit in (2.3) at $i \rightarrow \infty$ and taking into account the closeness of $\text{gph } \Psi$ we obtain $y \in \Psi(\xi)$. It means that $y \in \Phi(\xi)$ and $y \in \Psi(\xi)$, i. e. y is the coincidence point of Φ and Ψ . $\square$

3. Examples

Here we provide some examples of functions γ for which the series (0.2) converges.

E x a m p l e 3.1. $\gamma(t) = \beta t$ where the number $\beta \in (0, 1)$. In this case the mapping Φ is Lipschitz with Lipschitz constant $\beta < 1$ and the series $A_\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k t = t/(1 - \beta)$.

E x a m p l e 3.2. $\gamma(t) = t/(1 + t^\beta)$ where the number $\beta \in (0, 1)$. In this case, there exists a right derivative $\gamma'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \gamma(t)/t = \lim_{t \rightarrow 0+0} 1/(1 + t^\beta) = 1$ and hence the mapping Φ is not Lipschitz with any constant $\beta < 1$. Let us show that the series A_γ converges. At first we will prove some statements.

Lemma 3.1. *For any number $\beta \in (0, 1)$ there exist numbers $\alpha > 1$ and $T > 0$ such that*

$$\frac{t}{1 + t^\beta} \leq \frac{t}{(1 + t^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}$$

for all $t \in (0, T)$.

P r o o f. Consider the function $f(t) = t/(1 + t^\beta) - t/(1 + t^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha$. Its derivative

$$f'(t) = t^{\beta-1}((1 + t^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1} t^{\frac{1}{\alpha}} - \beta).$$

Let $\alpha = (1 + 1/\beta)/2$, then we have $\alpha > 1$ and $\alpha\beta = (\beta + 1)/2 < 1$, so $1/\alpha > \beta$ and $t^{\frac{1}{\alpha}-\beta} \rightarrow 0$ at $t \rightarrow 0+0$. Since $(1 + t^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1} \rightarrow 1$ at $t \rightarrow 0+0$, we have $(1 + t^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha-1} t^{\frac{1}{\alpha}-\beta} - \beta \rightarrow -\beta < 0$ at $t \rightarrow 0+0$, so there exists a number $T > 0$: $f'(t) < 0$ for any $t \in (0, T)$.

Since $f(0) = 0$, we can conclude that

$$\frac{t}{1+t^\beta} \leq \frac{t}{(1+t^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha}$$

for arbitrary $t \in (0, T)$, and it ends the proof. $\square$

Lemma 3.2. *The series (0.2) converges for the function $\delta(t) = t/(1+t^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha$ for all $\alpha > 1$.*

P r o o f. We will show that if $\delta(t) = t/(1+t^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha$ then $A_\delta(1) = \zeta(\alpha)$, where ζ denotes the Riemann zeta function. Indeed, we have $\delta^n(1) = 1/(1+n)^\alpha$ for any $n \geq 0$. Let us show it by induction on n . If $n = 0$ then $\delta^0(1) = 1 = 1/(0+1)^\alpha$. Suppose that $\delta^n(1) = 1/(1+n)^\alpha$ for any $n < k$. Then we have at $n = k$

$$\delta^k(1) = \delta(\delta^{k-1}(1)) = \delta\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) = \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\left(1 + \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha} = \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} = \frac{1}{(1+k)^\alpha}.$$

Hence,

$$A_\delta(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \delta^s(1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(1+s)^\alpha} = \zeta(\alpha) < \infty.$$

Due to Lemma 0.1, the convergence of the series A_δ at $t = 1$ implies the convergence of A_δ at any point $t > 0$. $\square$

Lemmas 3.1, 3.2 justify the convergence of the series A_γ for $\gamma(t) = t/(1+t^\beta)$ with arbitrary $\beta \in (0, 1)$.

R e m a r k 3.1. The result about a coincidence point of set-valued mappings for functions $\gamma(t) = t/(1+t^\beta)$ at $\beta \in (0, 1)$ was previously obtained in [2, § 4, Proposition 1].

Now we provide some examples of γ for which the series (0.2) diverges.

E x a m p l e 3.3. Consider the function $\gamma(t) = t/(1+Ct)$ where the constant $C > 0$. It is a straightforward task to ensure that the iteration value $\gamma^k(1) = 1/(1+kC)$ for all numbers $k \geq 0$. So we have

$$\begin{aligned} A_\gamma(1) &= 1 + \frac{1}{1+C} + \dots + \frac{1}{1+nC} + \dots = 1 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{C}} + \dots + \frac{1}{n+\frac{1}{C}} + \dots \right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{1+N} + \dots + \frac{1}{n+N} + \dots \right) = \infty, \end{aligned}$$

where the number $N = [1/C] + 1 > 1/C$ ($[x] = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ is the integer part of the number x). Due to the divergence of the harmonic series, the series A_γ diverges.

E x a m p l e 3.4. Suppose that the function γ satisfies the inequality $\gamma(t) \geq t - Ct^2$ for any $t \in (0, T)$ where $C, T > 0$ are some constants. Then

$$\exists T_1 > 0 : \forall t \in (0, T_1) \Rightarrow \gamma(t) \geq \frac{t}{1+2Ct}.$$

Indeed, we have

$$\gamma(t) \geq t - Ct^2 = \frac{t}{1+2Ct} + \frac{Ct^2(1-2Ct)}{1+2Ct} \geq \frac{t}{1+2Ct} \quad \forall t \in \left(0, \frac{1}{2C}\right),$$

and by choosing $T_1 = \min\{1/2C, T\}$ we get what required. Due to the previous example, the series (0.2) for the function $t/(1+2Ct)$ diverges, and hence due to Lemma 0.2 it diverges for the function γ as well.

Conclusion

In conclusion, let us formulate some questions whose answers are still unknown to the authors.

1. Is there a function γ that does not satisfy the condition

$$\exists T > 0 : \forall t \in (0, T) \Rightarrow \gamma(t - \gamma(t)) \leq \gamma(t) - \gamma(\gamma(t))$$

and such that the series (0.2) for it converges?

2. Will the statements of Theorems 1.1 and 2.1 remain true for coincidence points (but not for fixed points) if we omit the requirement of convergence of the series (0.2)?
3. Let a mapping $\Phi : X \rightarrow Y$ be such that for any function γ the inequality

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

leads to $A_\gamma = \infty$. Does such a Φ exist?

Let a compact-valued mapping $\Phi : X \rightrightarrows Y$ be such that for any function γ the inequality

$$h(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

leads to $A_\gamma = \infty$. Does such a Φ exist?

References

- [1] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады академии наук*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Dokl. Math.*, **76** (2007), 665–668.
- [2] А. В. Арутюнов, “Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения”, *Оптимальное управление*, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Труды МИАН, **291**, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 30–44; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Caristi’s condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **291** (2015), 24–37.

Information about the authors

Aram V. Arutyunov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of Laboratory 45, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS; Professor, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Информация об авторах

Арутюнов Арам Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН; профессор, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: arutyunov@cs.msu.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7326-7492>

Oleg A. Vasyanin, Engineer of Laboratory 45, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS; Student, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation.

E-mail: o.vasyanin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8809>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Васянин Олег Александрович

E-mail: o.vasyanin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.07.2025 г.

Поступила после рецензирования 02.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Васянин Олег Александрович, инженер лаборатории 45, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН; студент, факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: o.vasyanin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8809>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Oleg A. Vasyanin

E-mail: o.vasyanin@gmail.com

Received 15.07.2025

Reviewed 02.09.2025

Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Жуковская З.Т., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225>

УДК 517.962.24



О достаточных условиях асимптотической устойчивости положений равновесия разностных уравнений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные разностные автономные системы первого порядка в вещественных конечномерных пространствах. Исследуется вопрос об устойчивости положений равновесия для таких систем. Для разностного уравнения, порожденного гладким отображением f , классические достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия состоят в следующем. Если спектральный радиус первой производной отображения f в точке равновесия строго меньше единицы, то рассматриваемое положение равновесия является асимптотически устойчивым. В настоящей работе приводятся новые достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия, применимые и к широкому классу отображений, у которых указанный спектральный радиус может быть равен единице. Новые достаточные условия состоят в том, что существует выколота окрестность заданного положения равновесия такая, что отображение, определяющее разностное уравнение, является локально сжимающим в каждой точке этой окрестности. Приведен пример, в котором указанный спектральный радиус равен единице, однако выполняются все предположения полученной теоремы об устойчивости. Показано, что известные достаточные условия устойчивости вытекают из результатов настоящей статьи. Важной особенностью предлагаемых результатов является то, что они применимы и к разностным уравнениям, порожденным непрерывными негладкими отображениями.

Ключевые слова: автономное разностное уравнение, положение равновесия, асимптотическая устойчивость, достаточное условие устойчивости

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00012, <https://rscf.ru/project/24-21-00012/>).

Для цитирования: Жуковская З.Т. О достаточных условиях асимптотической устойчивости положений равновесия разностных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 218–225. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225>

SCIENTIFIC ARTICLE

© Z. T. Zhukovskaya, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225>

On sufficient conditions of the asymptotic stability for equilibria of difference equations

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA

Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The paper considers nonlinear autonomous first-order difference systems in real finite-dimensional spaces. For these systems, we study the asymptotic stability of equilibria. The classical sufficient conditions for asymptotic stability of an equilibrium for difference equation generated by a smooth mapping f are as follows. If the spectral radius of the first derivative of the mapping f at the given equilibrium point is strictly less than one, then this equilibrium point is asymptotically stable. In the present paper, new sufficient conditions for asymptotic stability of the equilibrium are given. The obtained conditions are also applicable to some mappings for which the spectral radius mentioned above is equal to one. These conditions are as follows. There exists a punctured neighborhood of the given equilibrium point such that the mapping defining the difference equation is locally contractive around each point of this neighborhood. We present an example in which the spectral radius mentioned above equals one, however, all the assumptions of the obtained stability theorem are fulfilled. It is shown that the known stability sufficient conditions follow from the obtained results. An important feature of our stability sufficient conditions is that they are applicable to difference equations generated by continuous non-smooth mappings.

Keywords: autonomous difference equation, equilibrium, asymptotic stability, sufficient stability condition

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00012, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00012/>).

Mathematics Subject Classification: 39A30.

For citation: Zhukovskaya Z.T. On sufficient conditions of the asymptotic stability for equilibria of difference equations. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 218–225. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225>

Введение и постановка задачи

Пусть заданы натуральное число n и отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Здесь $\mathbb{R}^n$ — это n -мерное вещественное линейное пространство со стандартной топологией. Зададим последовательность отображений $f^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ по формуле

$$f^0(x) := x, \quad f^{i+1}(x) := f(f^i(x)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (0.1)$$

с начальным условием

$$x_0 = \xi. \quad (0.2)$$

Решением разностного уравнения называется последовательность $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ элементов пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что $x_{i+1} = f(x_i)$ при всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ решением задачи Коши (0.1), (0.2) называется последовательность $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, которая является решением уравнения (0.1) и удовлетворяет соотношению (0.2). Очевидно, что для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ единственным решением задачи Коши (0.1), (0.2) является последовательность $(x_0(\xi), x_1(\xi), x_2(\xi), \dots)$ такая, что

$$x_i(\xi) = f^i(\xi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Теория разностных уравнений имеет многочисленные естественнонаучные приложения при моделировании поведения систем различной природы, когда рассматриваемые величины регистрируются через некоторые промежутки времени (см. [1–3] и др.). Разностные уравнения также имеют математические приложения. Так, например, функциональные уравнения с непрерывным временем можно сводить к уравнениям с дискретным временем, в том числе к системам вида (0.1). Имеется большое многообразие задач, связанных с разностными уравнениями. Эти уравнения рассматриваются в различных пространствах, например, в частично упорядоченных пространствах или специальных нормированных пространствах (см., например, [4, 5]). В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением уравнений в конечномерных пространствах и сосредоточимся на вопросе асимптотической устойчивости положений равновесия. Напомним необходимые определения и утверждения.

Точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ называется положением равновесия уравнения (0.1), если она является неподвижной точкой отображения f , т. е. $\bar{x} = f(\bar{x})$. В этом случае $x_i(\bar{x}) = \bar{x}$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Положение равновесия $\bar{x}$ называется асимптотически устойчивым, если

- (i) оно устойчиво, т. е. для любой окрестности $V \subset \mathbb{R}^n$ точки $\bar{x}$ существует окрестность U этой же точки такая, что $x_i(\xi) \in V$ для любой начальной точки $\xi \in U$;
- (ii) существует окрестность W точки $\bar{x}$ такая, что $x_i(\xi) \rightarrow \bar{x}$ при $i \rightarrow \infty$ для любой начальной точки $\xi \in W$.

Далее положение равновесия $\bar{x}$ разностного уравнения (0.1) будем считать заданным. Для точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых отображение f дифференцируемо, обозначим производную отображения f через $f'(x)$. Для линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим его спектральный радиус через $\rho(A)$.

Известно (см., например, [1, следствие 4.34] или [2, гл. 7, теорема 3]), что если отображение f непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ и

$$\rho(f'(\bar{x})) < 1,$$

то положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво.

Известно, см., например, [6, лемма 5.6.10], что для любого линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что для соответствующей операторной нормы $\|A\| := \max_{|x| \leq 1} |Ax|$ справедливо неравенство

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$

Поэтому приведенные выше достаточные условия асимптотической устойчивости можно переформулировать следующим образом. Пусть отображение f непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$. Если существует норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что для соответствующей операторной нормы справедливо неравенство

$$\|f'(\bar{x})\| < 1,$$

то положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво. Это утверждение приведено, например, в [1, следствие 4.35].

Рассмотрим пример, в котором приведенные достаточные условия асимптотической устойчивости нарушаются. Пусть $n = 1$, $f(x) = x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$ и $\bar{x} = 0$. Тогда $\rho(f'(\bar{x})) = |f'(0)| = 1$. Значит, условие $\rho(f'(\bar{x})) < 1$ нарушается. В то же время непосредственно проверяется, что положение равновесия $\bar{x} = 0$ асимптотически устойчиво.

В настоящей работе приведено обобщение известных достаточных условий асимптотической устойчивости положения равновесия $\bar{x}$, которое применимо для широкого класса отображений f и в случае, когда $\rho(f'(\bar{x})) = 1$.

1. Основной результат

Сформулируем достаточные условия асимптотической устойчивости.

Пусть задана некоторая норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $B(x, r)$ открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Теорема 1.1. *Предположим, что отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно в некоторой окрестности $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ заданного положения равновесия $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть для каждой точки $x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$ существует окрестность $W_x \subset \mathbb{R}^n$ точки x такая, что*

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall y \in W_x \setminus \{x\}. \quad (1.1)$$

Тогда положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво.

Доказательству теоремы 1.1 предположим два вспомогательных утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 1.1. Тогда для любого $r > 0$, для которого $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$, имеет место соотношение*

$$|f(x) - \bar{x}| < |x - \bar{x}| \quad \forall x \in B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}. \quad (1.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{x} = 0$. Тогда $f(0) = 0$. Обозначим $W_0 := W_{\bar{x}}$. Возьмем произвольное $r > 0$, для которого $B(0, r) \subset W_0$.

Покажем сначала, что

$$|f(u)| \leq |u| \quad \forall u \in B(0, r). \quad (1.3)$$

При $u = 0$ неравенство в (1.3) очевидно. Зафиксируем произвольное $u \in B(0, r)$, $u \neq 0$. Положим

$$T := \left\{ t \in [0, 1] : |f(u) - f(tu)| \leq (1 - t)|u| \right\}.$$

Множество T непусто, поскольку $1 \in T$. Кроме того, множество T замкнуто, поскольку отображение f непрерывно на $B(0, r)$ и $tu \in B(0, r)$ для каждого $t \in [0, 1]$. Значит, $\min T$ существует.

Покажем, что $\min T = 0$. Предположим противное, т. е. $\min T > 0$. Обозначим $s := \min T$. Поскольку $s \in T$, то

$$|f(u) - f(su)| \leq (1 - s)|u|. \quad (1.4)$$

Кроме того, поскольку $s > 0$, то $su \neq 0$, и значит, существует окрестность W_{su} точки su такая, что

$$|f(su) - f(y)| < |su - y| \quad \forall y \in W_{su} \setminus \{su\}.$$

Для достаточно малого $\delta \in (0, s)$ имеем $(s - \delta)u \in W_{su} \setminus \{su\}$. Поэтому

$$|f(su) - f((s - \delta)u)| < |su - (s - \delta)u| = \delta|u|. \quad (1.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} |f(u) - f((s - \delta)u)| &\leq |f(u) - f(su)| + |f(su) - f((s - \delta)u)| \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} (1 - s)|u| + |f(su) - f((s - \delta)u)| \stackrel{(1.5)}{\leq} (1 - s)|u| + \delta|u| = (1 - (s - \delta))|u|. \end{aligned}$$

Значит, $s - \delta \in T$. Последнее противоречит тому, что $s = \min T$. Полученное противоречие доказывает, что $\min T = 0$.

Из соотношения $\min T = 0$ вытекает, что $0 \in T$. Поэтому $|f(u) - f(0)| \leq |u|$. Поскольку $f(0) = 0$, то получаем, что $|f(u)| \leq |u|$. Соотношение (1.3) доказано.

Возьмем произвольную точку $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$ и покажем, что

$$|f(x)| < |x|.$$

Имеем $x \in W_0 \setminus \{0\}$. Поэтому по предположению леммы существует окрестность $W_x \subset \mathbb{R}^n$ точки x такая, что имеет место (1.1), т. е.

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall y \in W_x \setminus \{x\}.$$

Возьмем $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $\lambda x \in W_x$. Для него имеем

$$|f(x) - f(\lambda x)| < |x - \lambda x| = (1 - \lambda)|x|.$$

Далее, применяя (1.3) при $u = \lambda x$, получаем, что

$$|f(\lambda x)| < \lambda|x|.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(\lambda x)| + |f(\lambda x)| < |x|.$$

Доказательство леммы завершено. $\square$

Лемма 1.2. *Предположим, что отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывно в некоторой окрестности $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ заданного положения равновесия $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть существует $r > 0$, для которого $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$ и имеет место соотношение (1.2). Тогда положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{x} = 0$. Тогда $f(0) = 0$, а условие (1.2) принимает вид

$$|f(x)| < |x| \quad \forall x \in B(0, r) \setminus \{0\}. \quad (1.6)$$

Из последнего неравенства следует, что для любой окрестности нуля V для $\delta \in (0, r)$ такого, что $B(0, \delta) \subset V$, имеет место соотношение

$$x_i(\xi) = f^i(\xi) \in B(0, \delta) \quad \forall \xi \in B(0, \delta).$$

Значит, условие (i) из определения асимптотической устойчивости выполняется.

Покажем, что выполняется (ii) при $W = B(0, r)$.

Для $t \in [0, r)$ положим

$$\gamma(t) := \max_{|x| \leq t} |f(x)|.$$

По построению функция γ является неубывающей и $\gamma(0) = 0$. Кроме того, функция γ непрерывна (см., например, [7, гл. 3, § 1, следствие 23]).

Покажем, что

$$\gamma(t) < t \quad \forall t \in (0, r).$$

Возьмем произвольное $t \in (0, r)$ и точку $x \in \mathbb{R}^n$ такую, что $|x| \leq t$ и $\gamma(t) = |f(x)|$. Из (1.6) следует, что $|f(x)| < |x|$. Поэтому $\gamma(t) = |f(x)| < |x| \leq t$.

Покажем, что

$$\gamma^i(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad i \rightarrow \infty \quad \forall t \in [0, r). \quad (1.7)$$

Зафиксируем произвольное $t \in [0, r)$. Очевидно, что последовательность $\{\gamma^i(t)\}$ является невозрастающей. Поэтому она сходится к некоторой точке $s \in [0, r)$. Последовательность $\{\gamma^{i+1}(t)\}$ сходится к точке $\gamma(s)$ в силу непрерывности функции γ . Очевидно, что пределы последовательностей $\{\gamma^i(t)\}$ и $\{\gamma^{i+1}(t)\}$ совпадают. Значит $\gamma(s) = s$. Следовательно, $s = 0$. Таким образом, доказано, что $\gamma^i(t) \rightarrow s = 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Для произвольного $\xi \in B(0, r)$ имеем

$$|x_1(\xi)| = |f(\xi)| \leq \gamma(|\xi|),$$

$$|x_2(\xi)| = |f(x_1(\xi))| \leq \gamma(|x_1(\xi)|) \leq \gamma(\gamma(|\xi|)) = \gamma^2(|\xi|),$$

$$|x_3(\xi)| = |f(x_2(\xi))| \leq \gamma(|x_2(\xi)|) \leq \gamma(\gamma^2(|\xi|)) = \gamma^3(|\xi|)$$

и т. д. Поэтому имеет место неравенство $|x_i(\xi)| \leq \gamma^i(|\xi|)$, $i = 1, 2, \dots$. Отсюда и из (1.7) получаем, что $x_i(\xi) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. $\square$

Докажем теперь теорему 1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $r > 0$, для которого $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$. Из леммы 1.1 следует, что имеет место соотношение (1.2). Поэтому из леммы 1.2 получаем, что положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво. $\square$

2. Обсуждение и примеры

Обсудим теорему 1.1. Покажем сначала, что из нее вытекают известные достаточные условия асимптотической устойчивости из [1, следствие 4.34] (см. также [2, гл. 7, теорема 3]). Для этого выведем следствие из теоремы 1.1.

Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана норма $|\cdot|$, а $\|\cdot\|$ — это соответствующая ей операторная норма.

Следствие 2.1. *Предположим, что существует окрестность $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ заданного положения равновесия $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ такая, что отображение $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в выколотой окрестности $W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$ и*

$$\|f'(x)\| < 1 \quad \forall x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}.$$

Тогда положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$. Поскольку отображение f дифференцируемо в точке W_x , то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 :$$

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \varepsilon |y - x| \quad \forall y \in B(x, \delta). \quad (2.1)$$

Поскольку $\|f'(x)\| < 1$, то существует положительное число ε такое, что $\varepsilon + \|f'(x)\| < 1$. Выберем $\delta > 0$, отвечающее соотношению (2.1) и такое, что $B(x, \delta) \subset W_{\bar{x}}$.

Для произвольного $y \in B(x, \delta) \setminus \{x\}$ имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| + |f'(x)(y - x)| \\ &\leq \varepsilon |y - x| + \|f'(x)(y - x)\| \leq \varepsilon |y - x| + \|f'(x)\| |y - x| < |y - x|. \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что для окрестности $W_x := B(x, \delta)$ точки x выполняется соотношение (1.1). Поэтому, применяя теорему 1.1, получаем, что положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво. $\square$

Из приведенного следствия 2.1 вытекают достаточные условия асимптотической устойчивости, сформулированные во введении настоящей статьи, а именно [1, следствие 4.34], [2, гл. 7, теорема 3] и [1, следствие 4.35].

Действительно, пусть отображение f непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$. Если $\|f'(\bar{x})\| < 1$, то $\|f'(x)\| < 1$ в некоторой окрестности $W_{\bar{x}}$ точки $\bar{x}$ и, значит, $\bar{x}$ асимптотически устойчиво в силу следствия 2.1.

Если $\rho(f'(\bar{x})) < 1$, то, выбирая с помощью [6, лемма 5.6.10] подходящую норму $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$, мы получаем, что $\|f'(\bar{x})\| < 1$ для соответствующей операторной нормы $\|\cdot\|$. А в этом случае, как было показано в предыдущем абзаце, $\bar{x}$ асимптотически устойчиво в силу следствия 2.1.

Таким образом, теорема 1.1 и следствие 2.1 обобщают известные достаточные условия асимптотической устойчивости. В то же время следствие 2.1 применимо к примеру из введения. А именно, если $n = 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$ и $\bar{x} = 0$, то $\|f'(x)\| = |f'(x)| < 1$ для всех $x \neq \bar{x}$, достаточно близких к $\bar{x}$. Значит, по следствию 2.1 положение равновесия $\bar{x}$ в этом примере устойчиво.

Отметим также, что в отличие от приведенных выше известных достаточных условий асимптотической устойчивости [1, следствие 4.34], [2, гл. 7, теорема 3] и [1, следствие 4.35] теорема 1.1 применима и к разностным уравнениям, порожденным негладкими непрерывными отображениями f .

References

- [1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, 2005.
- [2] В. К. Романко, *Разностные уравнения*, БИНОМ, М., 2015. [V. K. Romanko, *Difference Equations*, BINOM, Moscow, 2015 (In Russian)].
- [3] L. A. Pipes, “Difference equations and their applications”, *Mathematics Magazine*, **32**:5, 231–246.
- [4] Т. В. Жуковская, И. А. Забродский, М. В. Борзова, “Об устойчивости разностных уравнений в частично упорядоченных пространствах”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 386–394. [T. V. Zhukovskaya, I. A. Zabrodskiy, M. V. Borzova, “On stability of difference equations in partially ordered spaces”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 386–394 (In Russian)].
- [5] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, “Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 241–249. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, “Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 241–249 (In Russian)].
- [6] R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2012.
- [7] J. P. Aubin, I. Ekeland, *Nonlinear Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Информация об авторе

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 25.06.2025 г.

Поступила после рецензирования 26.08.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Laboratory 45, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

There is no conflict of interests.

Received 25.06.2025

Reviewed 26.08.2025

Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Жуковский Е.С., Жуковская Т.В., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>

УДК 517.988, 515.124



Некоторые топологические свойства f -квазиметрических пространств

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ¹, Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ²¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

Аннотация. Исследуются свойства f -квазиметрического пространства (X, ρ) . Расстояние ρ в таком пространстве удовлетворяет аксиоме тождества и обобщенному неравенству треугольника: $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ для любых $x, y, z \in X$. Здесь функция f положительна при положительных аргументах, непрерывна в точке $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Симметричность расстояния не предполагается. Стандартно определяется топология на X , порождаемая расстоянием ρ . Исследуются свойства сходящихся последовательностей и секвенциально компактных множеств. Получены условия, при которых сходимость в себе (фундаментальность) необходима для сходимости последовательности. Рассмотрена связь скоростей сходимости фундаментальной последовательности и ее сходимости в себе. Введено понятие секвенциально предкомпактного множества. Получены условия, при которых замыкание секвенциально предкомпактного множества является секвенциально компактным.

Ключевые слова: f -квазиметрическое пространство, расстояние, фундаментальная последовательность, сходящаяся последовательность, секвенциально компактное множество

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>).

Для цитирования: Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Некоторые топологические свойства f -квазиметрических пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 226–237. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>



Some topological properties of f -quasimetric spaces

Evgeny S. ZHUKOVSKIY¹, Tatyana V. ZHUKOVSKAYA²

¹ Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Tambov State Technical University

106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The properties of the f -quasimetric space (X, ρ) are studied. In a space as such, the distance ρ satisfies the identity axiom and the generalized triangle inequality: $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ for any $x, y, z \in X$. Here the function f is positive for positive arguments, continuous at the point $(0, 0)$, and $f(0, 0) = 0$. The symmetry of the distance is not assumed. The topology on X generated by the distance ρ is defined in the standard way. The properties of convergent sequences and sequentially compact sets are studied. Conditions are obtained under which the convergence in itself (mutual convergence) is necessary for the convergence of a sequence. The relationship between the rates of convergence of a fundamental sequence and its convergence in itself is considered. The concept of a sequentially precompact set is introduced. Conditions are obtained under which the closure of a sequentially precompact set is sequentially compact.

Keywords: f -quasimetric space, distance, fundamental sequence, convergent sequence, sequentially compact set

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00272, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00272/>).

Mathematics Subject Classification: 54A20, 54D30, 54E45.

For citation: Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya T.V. Some topological properties of f -quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 226–237. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>

Введение

В связи с естественным развитием математики и ее приложений в последние годы заметно возрос интерес к исследованию пространств с обобщенными метриками, в которых функция расстояния удовлетворяет не всем аксиомам «обычной» метрики (см. [1, 2]). Обобщенные метрики стали широко использоваться в информатике, естественных и др. науках (см. [3, части IV–VII]). Впрочем исследования пространств с обобщенными метриками имеют длительную историю, подобные пространства рассматривались М. Фреше еще до определения метрических пространств. В ряде современных работ исследуются топологические свойства таких пространств (см. [4–6]) в целях получения аналогов принципов неподвижных точек и точек совпадения отображений (см. [7–9]), разработки методов нелинейного, вариационного и многозначного анализа в таких пространствах (см. [10–13]). В процитированных работах рассматривались конкретные классы пространств с несимметричной функцией расстояния, удовлетворяющей обобщенному как линейному неравенству треугольника (называемой (q_1, q_2) -квазиметрикой), так и нелинейному неравенству треугольника (называемой f -квазиметрикой). В [14] были исследованы топологические свойства пространства с расстоянием, которое не обязано удовлетворять какому-либо аналогу неравенства треугольника.

Данная работа продолжает исследование [14] и имеет целью определить, какие дополнительные «хорошие» топологические свойства появляются у квазиметрического пространства в силу выполнения обобщенного неравенства треугольника. Основные темой работы являются вопросы сходимости последовательностей и связанные вопросы о секвенциальных топологических свойствах f -квазиметрических пространств.

1. Определение f -квазиметрического пространства

Будем полагать, что на расширенной полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ задан «естественный» порядок, и значит $r < \infty$ при любом $r \in \mathbb{R}_+$. Обозначим символом $\mathbf{F}$ совокупность всех таких функций $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, что

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2) = 0 &\Leftrightarrow (r_1 = 0 \text{ и } r_2 = 0), \\ f(r_1, r_2) &\rightarrow 0 \text{ при } (r_1, r_2) \rightarrow (0, 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть задано множество X , содержащее не менее двух элементов, и определена *функция расстояния на X* — отображение $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (1.2)$$

Значение $\rho(x, y)$ этого отображения называют *расстоянием от x до y* . Относительно функции расстояния везде далее предполагаем, что существуют $f \in \mathbf{F}$ и $\sigma \in (0, \infty]$ такие, что

$$\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) < \sigma, \rho(y, z) < \sigma \Rightarrow \rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)). \quad (1.3)$$

Соотношение (1.2) называют *аксиомой тождества*, соотношение (1.3) — *f -неравенством треугольника*. При выполнении этих условий отображение ρ называют *f -квазиметрикой*, а пару (X, ρ) — *f -квазиметрическим пространством*. Учитывая соотношение (1.1), без ограничения общности можем полагать, там где это потребуется, что функция f ограничена на прямоугольнике $[0, \sigma) \times [0, \sigma)$.

Если f -квазиметрика удовлетворяет дополнительному условию симметричности

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

то ее называют f -метрикой (опуская приставку «квази»), а пространство (X, ρ) — f -метрическим. Если существует $q_0 \geq 1$, для которого выполнено соотношение

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \leq q_0 \rho(y, x),$$

то говорят, что f -квазиметрика является q_0 -симметрической. Очевидно, f -метрика — это 1-симметрическая f -квазиметрика.

Пусть $u \in X$, $r > 0$. Множество

$$O_X^R(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

называем R -шаром (с центром в точке u радиуса r) в пространстве (X, ρ) .

Определим топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$, полагая множество $U \subset X$ открытым, то есть $U \in \mathcal{T}_X^R$, если для любого $u \in U$ существует $\delta > 0$ такое, что $O_X^R(u, \delta) \subset U$. Определенное таким образом топологическое пространство исследовано в [1] (см. также [6, 7, 9, 10, 14, 15] и имеющуюся там библиографию). Приведем свойства этого пространства, используемые в данной работе.

2. Сходящиеся последовательности

Пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности и аксиоме отделимости T_1 , но может не быть Хаусдорфовым (см. [1, п. 1]). Сходимость в $(X, \mathcal{T}_X)$ последовательности $\{x_i\} \subset X$ к элементу $x \in X$ равносильна сходимости к нулю последовательности расстояний $\rho(x, x_i) \rightarrow 0$ (см. [14, предложение 2 и следствие 1]). Будем называть такую сходимость R -сходимостью и писать $x_i \xrightarrow{R} x$ или $x = \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$. Предел R -сходящейся последовательности $\{x_i\}$ не обязан быть единственным, множество всех пределов последовательности будем обозначать через $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$.

Если для любых $\{x_i\} \subset X$, $x \in X$ из сходимости $x_i \xrightarrow{R} x$ следует «симметричное» соотношение $\rho(x_i, x) \rightarrow 0$, то (X, ρ) называют слабо симметрическим f -квазиметрическим пространством, а ρ — слабо симметрической f -квазиметрикой (см. [1]). В слабо симметрическом пространстве предел сходящейся последовательности единственен. Действительно, для $u, v \in \text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ выполнено $\rho(x_i, u) \rightarrow 0$, $\rho(v, x_i) \rightarrow 0$, и поэтому $\rho(v, u) \leq f(\rho(v, x_i), \rho(x_i, u)) \rightarrow 0$. Это соотношение доказывает, что $v = u$.

Следуя [1, определение 1.7], последовательность $\{x_i\} \subset X$ будем называть R -фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I = I(\varepsilon) \quad \forall j > i > I \quad \rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Предложение 2.1. Пусть для R -фундаментальной в (X, ρ) последовательности $\{x_i\}$ существует R -сходящаяся подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$. Тогда исходная последовательность $\{x_i\}$ тоже R -сходится, и $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n}$.

Доказательство. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и определим $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(\delta, \delta) < \varepsilon$. Пусть $x_{i_n} \xrightarrow{R} x$. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x, x_{i_n}) < \delta \quad \text{и} \quad \exists I \quad \forall j > i > I \quad \rho(x_i, x_j) < \delta.$$

Для всех $i > \max \{i_N, I\}$ имеем

$$\rho(x, x_i) \leq f(\rho(x, x_{i_N}), \rho(x_{i_N}, x_i)) < f(\delta, \delta) < \varepsilon.$$

Итак, доказано, что $x_i \xrightarrow{R} x$ и что $\text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n} \subset \text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$. Противоположное вложение $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i \subset \text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n}$ очевидно следует из определения предела. $\square$

Если в (X, ρ) любая R -фундаментальная последовательность R -сходится, то пространство (X, ρ) будем называть R -полным.

Пример 2.1. Пусть на $X = \mathbb{R}$ расстояние задано формулой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x, \\ 1, & y < x. \end{cases}$$

Топологическое пространство, определяемое этим расстоянием, называют *прямой Зоргенфрея* (см., например, [16]). Расстояние ρ удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника, но не симметрично (и даже не является слабо симметрическим). Пространства, в которых расстояние обладает такими свойствами, называют *квазиметрическими*. Прямая Зоргенфрея не является R -полным пространством, так как R -фундаментальная последовательность $\{x_i = (i-1)/i, i \in \mathbb{N}\}$ не имеет предела x . Действительно, для $x \geq 1$ выполнено $\rho(x, x_i) = 1$, а для $x < 1$ при любом $i > 2/(1-x)$ выполнено $\rho(x, x_i) > (1-x)/2$.

Отметим, что определение (2.1) R -фундаментальной последовательности отличается от определения *фундаментальной последовательности*, предложенного в [7]:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon) \quad \forall i, j > \tilde{I} \quad \rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Следуя [7], будем называть пространство (X, ρ) *полным*, если любая фундаментальная, т. е. удовлетворяющая (2.2), последовательность R -сходится. Очевидно, что R -полное пространство является полным. Обратное не верно. Например, на прямой Зоргенфрея фундаментальной является только последовательность, постоянная начиная с некоторого номера. Действительно, если для элементов произвольной последовательности выполнено $x_i \neq x_j$, то либо $\rho(x_i, x_j) = 1$, либо $\rho(x_j, x_i) = 1$. Таким образом, отличная от постоянной последовательность не может быть фундаментальной. А так как постоянная последовательность очевидно сходится, прямая Зоргенфрея является полным пространством. Но, как отмечено в примере 2.1, это пространство не R -полно.

Отметим, что если пространство слабо симметрическое и R -полное, то соотношения (2.1) и (2.2) становятся равносильными. Действительно, для произвольной последовательности $\{x_i\}$ при выполнении (2.1) существует $x = \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$, т. е. $\rho(x, x_i) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Тогда выполнено $\rho(x_j, x) \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$. Таким образом, $\rho(x_j, x_i) \rightarrow 0$, $i, j \rightarrow \infty$, а значит справедливо соотношение (2.2). Обратное утверждение тривиально: из (2.2) конечно следует (2.1).

В метрических пространствах любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. В f -квазиметрических пространствах могут содержаться R -сходящиеся последовательности, не являющиеся R -фундаментальными (и тем более — фундаментальными). Так, на прямой Зоргенфрея любая непостоянная R -сходящаяся последовательность (например, $x_i = 1/i$, $i \in \mathbb{N}$) не R -фундаментальная. А в слабо симметрическом пространстве любая R -сходящаяся последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Это прямо следует из соотношений $\rho(x, x_i) \rightarrow 0$, $\rho(x_j, x) \rightarrow 0$, $i, j \rightarrow \infty$,

выполненных для последовательности $\{x_i\}$, R -сходящейся к $x \in X$. Из этих соотношений получаем $\rho(x_j, x_i) \rightarrow 0$, $i, j \rightarrow \infty$, поэтому $\{x_i\}$ — фундаментальная последовательность.

Если ρ — «обычная» метрика, то из соотношения (2.2) следует, что для предела x фундаментальной последовательности при всех $j > \tilde{I}(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x, x_j) \leq \varepsilon$. Получим аналог этого неравенства для общих f -квазиметрических пространств.

По функции $f \in \mathbf{F}$ и параметру $\sigma \in (0, \infty]$ (из f -неравенства треугольника (1.3)) определим функцию $g : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ соотношениями

$$g(\varepsilon) = \inf_{\delta \in (0, \sigma)} \sup_{r_1 \in [0, \delta], r_2 \in [0, \varepsilon]} f(r_1, r_2) \text{ при } \varepsilon \in (0, \sigma); \quad g(\varepsilon) = \infty \text{ при } \varepsilon \in [\sigma, \infty]. \quad (2.3)$$

В силу соотношений (2.3) функция g возрастает. А из сходимости $f(r_1, r_2) \rightarrow 0$ при $(r_1, r_2) \rightarrow (0, 0)$ следует, что $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предложение 2.2. Пусть в (X, ρ) задана фундаментальная, т. е. удовлетворяющая соотношению (2.2) последовательность $\{x_i\}$, и пусть $x_i \xrightarrow{R} x$. Тогда для $\tilde{I}(\varepsilon)$ из соотношения (2.2) при любом $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\forall j > \tilde{I}(\varepsilon) \quad \rho(x, x_j) \leq g(\varepsilon). \quad (2.4)$$

Доказательство. Для $\varepsilon \geq \sigma$ доказываемое соотношение (2.4) очевидно.

Пусть $\varepsilon \in (0, \sigma)$. Из R -сходимости последовательности $\{x_i\}$ получаем

$$\forall \delta \in (0, \sigma) \quad \exists J = J(\delta) \quad \forall i > J \quad \rho(x, x_i) < \delta.$$

При $j > \tilde{I}(\varepsilon)$, $i > \max\{J(\delta), \tilde{I}(\varepsilon)\}$ согласно (1.3) имеем

$$\rho(x, x_j) \leq f(\rho(x, x_i), \rho(x_i, x_j)) \leq \sup_{r_1 \in [0, \delta], r_2 \in [0, \varepsilon]} f(r_1, r_2).$$

А так полученное неравенство выполнено при всех $\delta \in (0, \sigma)$, из него получаем требуемое соотношение (2.4). $\square$

Заметим, что в случае метрического пространства, поскольку $\sigma = \infty$, $f(r_1, r_2) = r_1 + r_2$, имеем $g(\varepsilon) = \inf_{\delta \in (0, \sigma)} \delta + \varepsilon = \varepsilon$. Соответственно, при всех $j > \tilde{I}(\varepsilon)$ получаем «привычное» неравенство $\rho(x, x_j) \leq \varepsilon$.

Следствие 2.1. Для пространства (X, ρ) существует такая возрастающая функция $Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любой фундаментальной R -сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset X$, $x_i \xrightarrow{R} x$, для $\tilde{I}(\varepsilon)$ из соотношения (2.2) при любом $\varepsilon \in (0, \sigma)$ выполнено

$$\forall j > Q(\tilde{I}(\varepsilon)) \quad \rho(x, x_j) \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Доказательство. Определим функцию Q .

Пусть $g : [0, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная возрастающая функция, для которой $g(0) = 0$, и мажорирующая функцию g , т. е. удовлетворяющая неравенству $g(\varepsilon) \leq \mathbf{g}(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \sigma)$. Например, такую функцию можно задать следующим образом. Для любого целого l определим $\sigma_l \in (0, \sigma)$ так, что $\sigma_l < \sigma_{l+1}$, $\sigma_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow -\infty$ и $\sigma_l \rightarrow \sigma$ при $l \rightarrow +\infty$. Теперь для любого целого l и любого $\varepsilon \in (\sigma_{l-1}, \sigma_l]$ положим

$$g(\varepsilon) = g(\sigma_l) + \frac{g(\sigma_{l+1}) - g(\sigma_l)}{\sigma_l - \sigma_{l-1}}(\varepsilon - \sigma_{l-1}).$$

Для любого натурального J вычислим $r(J) = \sup\{\rho(x_i, x_j), i, j > J\}$. Если $r(J) < \sigma$, то положим $Q(J) = I(g^{-1}(r(J)))$. Эта функция возрастает, так как является композицией возрастающих функций.

Проверим для определенной здесь функции Q соотношение (2.5).

Согласно (2.2), $r(\tilde{I}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$, поэтому для любого $\varepsilon \in (0, \sigma)$ имеем

$$Q(\tilde{I}(\varepsilon)) = I(g^{-1}(r(\tilde{I}(\varepsilon)))) \leq \tilde{I}(g^{-1}(\varepsilon)).$$

А в силу (2.4), для любого $j > \tilde{I}(g^{-1}(\varepsilon))$ выполнено

$$\rho(x, x_j) \leq g(g^{-1}(\varepsilon)) \leq g(g^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon.$$

Итак, соотношение (2.5) выполнено. □

Заметим, что в случае метрического пространства, функцию Q можно выбирать тождественной, $Q(J) = J$, $J \in \mathbb{N}$.

Напомним, что в пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ множество U замкнуто, если его дополнение открыто, то есть $X \setminus U \in \mathcal{T}_X^R$, и секвенциально замкнуто, если для любой R -сходящейся последовательности $\{u_i\} \subset U$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty}^R u_i \in U$. В силу первой аксиомы счетности свойства замкнутости и секвенциальной замкнутости множества равносильны.

Примером непустого замкнутого множества является множество $\lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ пределов любой R -сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset X$. Действительно, для произвольной сходящейся к некоторому элементу $u \in X$ последовательности $\{u_n\} \subset \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ имеем $\rho(u, u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, при каждом n имеем $\rho(u_n, x_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $\rho(u, x_i) \leq f(\rho(u, u_n), \rho(u_n, x_i)) \rightarrow 0$, и, таким образом, $u \in \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$.

Аналогичным образом в f -квазиметрическом пространстве (X, ρ) можно определить L -шар — множество

$$O_X^L(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$

ввести топологию $\mathcal{T}_X^L$ и соответствующие понятия L -сходимости последовательности $x_i \xrightarrow{L} x$, множества $\lim^L x_i$ ее пределов, L -полноты пространства X . В пространстве $(X, \mathcal{T}_X^L)$ замкнутость и секвенциальная замкнутость также равносильны. В дальнейшем будем рассматривать только пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$. Очевидно, все результаты, представленные далее, остаются справедливыми и для пространства $(X, \mathcal{T}_X^L)$.

3. Компактность и секвенциальная компактность

Напомним, что топологическое пространство *компактно*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие, и *секвенциально компактно*, если из любой последовательности его точек можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для рассматриваемого здесь f -квазиметрического пространства (X, ρ) топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, поэтому если оно компактно, то и секвенциально компактно (см., например, [17, теорема 3.10.31]). Множество A в топологическом пространстве компактно или секвенциально компактно, если соответствующим свойством обладает пространство A с индуцированной топологией. Заметим, что компактное или секвенциально компактное множество в $(X, \mathcal{T}_X^R)$ не обязано быть замкнутым и, что равносильно, секвенциально замкнутым. А замыкание компактного (или секвенциально компактного) множества может быть некомпактным (соответственно, секвенциально некомпактным).

Пример 3.1. Рассмотрим счетное множество X , состоящее из элементов x_i, y_j , $i, j \in \mathbb{N}$ (среди всех элементов нет совпадающих). Положим $\rho(y_j, x_i) = 1/i$, $i, j \in \mathbb{N}$, а для любых других пар $(u, v) \in X^2$ положим $\rho(u, v) = 1$, если $u \neq v$, и $\rho(u, v) = 0$, если $u = v$. Такое расстояние удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника — соотношению (1.3) с $\sigma = \infty$ и $f(r_1, r_2) = r_1 + r_2$, но в отличие от «обычной» метрики не симметрично. По данному расстоянию определим топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$.

В рассматриваемом пространстве последовательность $\{x_i\}$, не являясь фундаментальной, R -сходится, $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i = \{y_j\}$. Это множество R -пределов является последовательностью, у которой не существует сходящейся подпоследовательности. Действительно, для любого j и любого $u \in X$, $u \neq y_j$ выполнено $\rho(u, y_j) = 1$, то есть из последовательности $\{y_j\}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Теперь в рассматриваемом пространстве определим множество $A = \{y_1, x_1, x_2, \dots\}$. Это множество компактно и секвенциально компактно, но не замкнуто. Замыкание множества A — это все пространство X . А оно не является секвенциально компактным и, следовательно, компактным.

Заметим, что если множество A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ секвенциально компактно (или, более того, компактно), то для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset A$ выполнено $A \cap \text{Lim}^R x_i \neq \emptyset$ (это прямо следует из определения секвенциальной компактности). Поэтому имеет место следующее вполне очевидное утверждение.

Предложение 3.1. Пусть в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ для любой R -сходящейся последовательности $\{x_i\}$ множество $\text{Lim}^R x_i \subset X$ состоит ровно из одной точки. Тогда любое секвенциально компактное множество $A \subset X$ замкнуто. В частности, если пространство X слабо симметрическое, то в нем любое секвенциально компактное множество замкнуто.

Так как компактное множество всегда секвенциально компактно, аналогичное предложение справедливо для компактных множеств.

Для установления компактности конкретных f -квазиметрических пространств удобно использовать следующее понятие, предложенное в [14]. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ будем называть O_X^R -компактным, если для любой функции $r : X \rightarrow (0, \infty)$ найдется такое конечное множество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset X$, что

$$X = \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Соответственно, множество A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ будем называть O_X^R -компактным, если для любой определенной на A положительной функции r найдется конечное подмножество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset A$, для которого

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

В [14, следствие 1] показано, что компактность пространства $(X, \mathcal{T}_X^R)$ (или его подмножества) равносильна O_X^R -компактности.

Для f -квазиметрических пространств введем аналоги известных для метрических пространств свойств предкомпактности и секвенциальной предкомпактности множеств.

О п р е д е л е н и е 3.1. Множество $A \subset X$ называют *секвенциально предкомпактным*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь R -сходящуюся к некоторому $a \in X$ подпоследовательность. Назовем множество $A \subset X$ *усиленно секвенциально предкомпактным*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь R -фундаментальную R -сходящуюся подпоследовательность.

Как отмечалось выше, в отличие от метрических и некоторых других классов пространств в f -квазиметрическом пространстве R -сходящаяся последовательность не обязана быть R -фундаментальной. Поэтому усиленно секвенциально предкомпактное множество является секвенциально предкомпактным, но обратное в общем случае неверно. Секвенциально компактное множество, очевидно, является секвенциально предкомпактным, но может не быть усиленно секвенциально предкомпактным (и в силу этого обстоятельства в название рассматриваемого свойства добавлено слово «усиленно»). Для слабо симметрического пространства R -фундаментальность необходима для R -сходимости последовательности. В слабо симметрических пространствах понятия усиленной и «простой» секвенциальной предкомпактности равносильны.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Пусть f -квазиметрическое пространство X является слабо симметрическим. Тогда замыкание в X секвенциально предкомпактного (или, что здесь то же самое, усиленно секвенциально предкомпактного) множества $A \subset X$ является секвенциально компактным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим замыкание $\text{Cl}A$ заданного секвенциально предкомпактного множества A , а в нем выберем любую последовательность $\{x_i\} \subset \text{Cl}A$. Для каждого элемента $x_i \in \text{Cl}A$ существует $a_{ij} \in A$ такой, что $\rho(x_i, a_{ij}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Поскольку X — слабо симметрическое пространство, также выполнено $\rho(a_{ij}, x_i) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Для каждого i определим $j(i)$ так, что $\rho(a_{ij(i)}, x_i) \rightarrow 0$ $i \rightarrow \infty$ (например, можно выбирать $j(i)$, для которого $\rho(a_{ij(i)}, x_i) < 2^{-i}$). Из последовательности $\{a_{ij(i)}\} \subset A$ извлечем сходящуюся к некоторому $x \in \text{Cl}A$ подпоследовательность. Чтобы упростить запись, обозначим ее, как и исходную последовательность, через $\{a_{ij(i)}\}$. Итак, $\rho(x, a_{ij(i)}) \rightarrow 0$. Теперь в силу f -неравенства треугольника, $\rho(x, x_i) \leq f(\rho(x, a_{ij(i)}), \rho(a_{ij(i)}, x_i)) \rightarrow 0$. Таким образом, множество A является секвенциально компактным. $\square$

О п р е д е л е н и е 3.2. Множество $A \subset X$ назовем *предкомпактным*, если для любой функции $r : X \rightarrow (0, \infty)$ найдется такое конечное множество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset X$, что выполнено вложение

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Подчеркнем, что, в отличие от определения [14] O_X^R -компактности, в определении 3.2 центры $x_i, i = \overline{1, n}$, шаров, «покрывающих» множество A , не обязаны ему принадлежать.

П р е д л о ж е н и е 3.3. Пусть f -квазиметрическое пространство X является слабо симметрическим. Тогда замыкание в X предкомпактного множества $A \subset X$ является компактным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть некоторое множество $A \subset X$ предкомпактно. Обозначим его замыкание через $\text{Cl}A$. Множество $B = A \setminus \text{Cl}A$ открыто. Поэтому для любого $b \in B$ существует такое положительное число $\bar{r}(b)$, что $O_X^R(b, \bar{r}(b)) \subset B$.

Рассмотрим любую функцию $r : X \rightarrow (0, \infty)$. Без ограничения общности будем полагать, что $r(b) < \bar{r}(b)$ при любом $b \in B$. Докажем, что существует конечный набор точек $x_i \in \text{Cl}A$, $i = \overline{1, n}$, для которого имеет место вложение

$$\text{Cl}A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)). \quad (3.1)$$

При каждом $x \in X$ определим $\epsilon(x) > 0$ так, что выполнены неравенства

$$\forall x \in X \quad \epsilon(x) < 2^{-1}r(x) \quad \text{и} \quad f(\epsilon(x), \epsilon(x)) < r(x).$$

В силу предкомпактности множества A существует такой конечный набор точек $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, что выполнены вложения

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, \epsilon(x_i)) \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Этот набор $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ принадлежит множеству $\text{Cl}A$. Действительно, если какая-то из точек x_j этого набора принадлежит его дополнению — открытому множеству B , то соответствующий шар $O_X^R(x_i, r(x_i)) \subset O_X^R(x_j, \bar{r}(x_j)) \subset B$ не пересекается с множеством $\text{Cl}A$.

Выберем произвольную точку $\bar{a} \in \text{Cl}A$. Для этой точки существует последовательность $\{a_j\} \subset A$ такая, что $\rho(\bar{a}, a_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. А так как X является слабо симметрическим пространством, имеем еще и сходимост $\rho(a_j, \bar{a}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Бесконечное количество членов последовательности $\{a_j\} \subset A$ должно содержаться в одном из шаров (которых конечное количество), покрывающих множество A . Для сокращения обозначений будем полагать, что $\{a_j\} \subset O_X^R(x_1, \epsilon(x_1))$.

В рассматриваемой последовательности выберем элемент a_{j_0} , отвечающий условию $\rho(a_{j_0}, \bar{a}) < \epsilon(\bar{a})$. Для этого элемента имеем

$$\rho(x_1, \bar{a}) \leq f(\rho(x_1, a_{j_0}), \rho(a_{j_0}, \bar{a})) \leq f(\epsilon(x_1), \epsilon(x_1)) < r(x).$$

Итак, $\bar{a} \in O_X^R(x_1, \epsilon(x_1))$ и, таким образом, соотношение (3.1) выполнено. А значит доказано, что множество $\text{Cl}A$ предкомпактного множества A является O_X^R -компактным, а поэтому и компактным. $\square$

В заключение отметим, что если в f -неравенстве треугольника (1.3) $\sigma = \infty$, а функция f ограничена на $[0, \varsigma) \times [0, \varsigma)$ при любом $\varsigma > 0$, то из компактности множества A в пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ очевидно следует его *ограниченность*, т. е. для некоторых $a \in A$ и $r = r(a)$ выполнено $A \subset O_X^R(a, r)$. Действительно, так как существует конечное покрытие компактного множества A шарами $O_X^R(a_i, 1)$, $i = \overline{1, n}$, можно принять a любым и положить $r = \max_{i=\overline{1, n}} \sup_{\varsigma \in [0, 1]} f(\rho(a, a_i), \varsigma)$.

References

- [1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokoutsievskii, K. V. Storozhuk, “Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics”, *Topology Appl.*, **221** (2017), 178–194.
- [2] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -Quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.

- [3] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [4] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады Академии наук*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [5] А. В. Грешнов, “Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке”, *Вестник российских университетов. Математика*, **30**:149 (2025), 15–27. [A. V. Greshnov, “About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 15–27 (In Russian)].
- [6] Е. С. Жуковский, “Геометрические прогрессии в пространствах с расстоянием, приложения к неподвижным точкам и точкам совпадения отображений”, *Матем. сб.*, **214**:2 (2023), 112–142; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Geometric progressions in distance spaces; applications to fixed points and coincidence points”, *Sb. Math.*, **214**:2 (2023), 246–272.
- [7] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f -квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Math. J.*, **59**:6 (2018), 1063–1072.
- [8] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -Quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.
- [9] Т. Н. Фоменко, “Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f -квазиметрическом пространстве”, *Матем. заметки*, **110**:4 (2021), 598–609; англ. пер.: T. N. Fomenko, “The existence of zeros of multivalued functionals, coincidence points, and fixed points in f -quasimetric spaces”, *Math. Notes*, **110**:4 (2021), 583–591.
- [10] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, К. В. Сторожук, “Структура множества точек локального минимума функций в различных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:3 (2019), 518–526; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, K. V. Storozhuk, “The structure of the set of local minima of functions in various spaces”, *Siberian Math. J.*, **60**:3 (2019), 398–404.
- [11] Р. Сенгупта, “Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:143 (2023), 268–276. [R. Sengupta, “Ekeland variational principle for quasimetric spaces”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 268–276 (In Russian)].
- [12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах и точки совпадения”, *Доклады Академии наук*, **476**:2 (2017), 129–132; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Coincidence points of multivalued mappings in (q_1, q_2) -quasimetric spaces”, *Doklady Mathematics*, **96**:2 (2017), 438–441.
- [13] В. Мерчела, “Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 27–36. [W. Merchela, “Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 27–36 (In Russian)].
- [14] Е. С. Жуковский, “Некоторые топологические свойства пространств с расстоянием”, *Матем. заметки*, **117**:2 (2025), 223–237; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Topological properties of spaces with a distance”, *Math. Notes*, **117**:2 (2025), 248–258.
- [15] А. В. Грешнов, “Некоторые проблемы регулярности f -квазиметрик”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 355–361. [A. V. Greshnov, “Some problems of regularity of f -quasimetrics”, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **15** (2018), 355–361 (In Russian)].
- [16] D. Doitchinov, “On completeness in quasi-metric spaces”, *Topology Appl.*, **30**:2 (1988), 127–148.
- [17] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; англ. ориг.: R. Engelking, *General Topology*, State Scientific Publishing House, Warsaw, 1977.

Информация об авторах

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования»; профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковский Евгений Семенович
 E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 16.07.2025 г.

Поступила после рецензирования 04.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the authors

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”; Professor of Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Tatiana V. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Evgeny S. Zhukovskiy
 E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 16.07.2025

Reviewed 04.09.2025

Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Берденова Г.Ж., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254>

УДК 517.54



Оценки в классе аналитических функций, связанных с овалом Кассини, и некоторые их применения

Федор Федорович МАЙЕР, Мейрамбек Габдуалиевич ТАСТАНОВ,
Анар Алтаевна УТЕМИСОВА, Гульнар Жалгасовна БЕРДЕНОВА
НАО «Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы»

110000, Республика Казахстан, г. Костанай, ул. А. Байтурсынова, 47

Аннотация. Вводится и исследуется класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ аналитических в открытом единичном круге E функций $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, подчиненных функции $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1 - \lambda)z/(1 - \lambda z^2)$, $0 \leq \lambda < 1$. С геометрической точки зрения это означает, что множество значений функции $\varphi(z)$ содержится в области $\varphi_\lambda(E)$, ограниченной овалом Кассини. Исследованы свойства мажоранты подчинения $\varphi_\lambda(z)$. На основе этого, опираясь на метод подчиненности аналитических функций, в классе $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ установлены точные оценки $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, в частном случае приводящие к одному из классических результатов. Рассмотрено применение данных оценок для исследования экстремальных свойств некоторых классов аналитических в E функций $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$. В частности, получены теоремы роста, покрытия и радиусы выпуклости одного класса звездообразных функций, который построен с использованием функции $\varphi_\lambda(z)$ и обобщает известный подкласс звездообразных функций Р. Сингха. Также даны приложения полученных результатов к исследованию некоторых классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций, связанных с функцией $\varphi_\lambda(z)$. В частности, в этих классах установлены теоремы роста и найдены радиусы звездообразности.

Все полученные результаты являются точными, представляют собой как новые оригинальные результаты, так и некоторые обобщения известных результатов.

Ключевые слова: оценки аналитических функций, звездообразные функции, почти звездообразные функции, радиусы выпуклости, радиусы звездообразности

Для цитирования: Майер Ф.Ф., Тастанов М.Г., Утемисова А.А., Берденова Г.Ж. Оценки в классе аналитических функций, связанных с овалом Кассини, и некоторые их применения // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 238–254. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254>

SCIENTIFIC ARTICLE

© F. F. Maiyer, M. G. Tastanov, A. A. Utemissova, G. Zh. Berdenova, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254>

Estimates in the class of analytical functions related to the Cassini oval and some of their applications

Fedor F. MAIYER, Meirambek G. TASTANOV,

Anar A. UTEMISSOVA, Gulnar Zh. BERDENOVA

NJSC "Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly"

47 A. Baitursynov St., Kostanay 110000, Republic of Kazakhstan

Abstract. In this article, we introduce and study a class $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ of functions $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, analytic in the open unit disk E , subordinate to the function $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1 - \lambda)z/(1 - \lambda z^2)$, $0 \leq \lambda < 1$. From a geometric point of view, this means that the set of values of the function $\varphi(z)$ is contained within the region $\varphi_\lambda(E)$ bounded by the Cassini oval. The properties of the subordination majorant are investigated $\varphi_\lambda(z)$. Based on this, relying on the method of subordination of analytical functions, in the class $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, precise estimates are established for $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$, and $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$, leading to one of the classical results in a particular case. The application of these estimates to the study of extreme properties of some classes of analytical functions $f(z)$ of the form $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$ is considered. In particular, theorems of growth, covering, and radii of convexity are established for one class of starlike functions which is constructed by using the function $\varphi_\lambda(z)$ and generalizes the well-known subclass of starlike functions of R. Singh. Applications of the obtained results to the study of some classes of close-to-starlike and doubly close-to-starlike functions related to the function $\varphi_\lambda(z)$ are also given. In particular, in these classes, growth theorems are established and radii of starlikeness are found.

All obtained results are accurate, represent new original results as well as some generalizations of known results.

Keywords: estimates of analytical functions, starlike functions, close-to-starlike functions, radii of convexity, radii of starlikeness

Mathematics Subject Classification: 30C80, 30C45.

For citation: Maiyer F.F., Tastanov M.G., Utemissova A.A., Berdenova G.Zh. Estimates in the class of analytical functions related to the Cassini oval and some of their applications. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 238–254. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-238-254>

Введение

Будем рассматривать аналитические в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функции $\varphi(z)$ с разложением вида $\varphi(z) = 1 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, класс которых обозначим через $\mathcal{A}_n$, а также аналитические в E нормированные функции $f(z)$ вида $f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$, $n \geq 1$, $z \in E$, класс которых обозначим через $\mathcal{N}_n$. Пусть $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$, $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1$.

Через $\mathcal{P}$ будем обозначать класс функций $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}$ с положительной вещественной частью $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$, $z \in E$, и пусть $\mathcal{P}_n$ — подкласс класса $\mathcal{P}$, функции которого принадлежат классу $\mathcal{A}_n$. При этом $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1$.

Напомним, что аналитическая в E функция $\varphi(z)$ называется подчиненной однолистной в E функции $\varphi_0(z)$, что обозначают в виде $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$. При этом функция $\varphi_0(z)$ называется мажорантой подчинения.

В статье [1, § 9] изложены основные идеи и результаты применения принципа подчиненности к достаточным условиям однолистности. Развивая эту методологию, в [2] был предложен унифицированный способ определения подклассов класса S^0 выпуклых и класса S^* звездообразных функций с помощью условия подчиненности, то есть

$$S^0(\varphi_0) = \left\{ f \in \mathcal{N} : 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_0(z) \right\}, \quad S^*(\varphi_0) = \left\{ f \in \mathcal{N} : z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_0(z) \right\}.$$

Здесь $\varphi_0(z)$ — это однолистная аналитическая в круге E функция, которая удовлетворяет условиям $\operatorname{Re} \varphi_0(z) > 0$, $\operatorname{Im} \varphi'_0(0) = 0$, $\varphi'_0(0) > 0$ и отображает круг E на область, симметричную относительно вещественной оси и звездообразную относительно точки $\varphi_0(0) = 1$. В унифицированных классах $S^*(\varphi_0)$ и $S^0(\varphi_0)$ в [2] были получены теоремы роста (искажения), покрытия и оценки коэффициентов.

Если $\varphi_0(z) = (1 + (1 - 2\alpha)z)/(1 - z)$, $0 \leq \alpha < 1$, то получаем классы S^0_α и S^*_α функций, выпуклых и звездообразных порядка α . При $\alpha = 0$ получаем классы S^0 и S^* .

Статья [2] дала толчок введению новых подклассов класса S^* . Например, в [3–5] исследовались, соответственно, классы функций $S^*_{\operatorname{arsinh}} = S^*(1 + \operatorname{arsinh}(z))$, $S^*_{\sin} = S^*(1 + \sin z)$ и $S^*_\varphi = S^*(1 + ze^z)$.

Подклассы класса $\mathcal{P}$ также удобно задавать в унифицированном виде

$$\mathcal{P}(\varphi_0) = \{\varphi(z) \in \mathcal{P} : \varphi(z) \prec \varphi_0(z)\},$$

где функция $\varphi_0(z)$ удовлетворяет условиям $\varphi_0(0) = 1$ и $\operatorname{Re} \varphi_0(z) > 0$, $z \in E$.

Решение экстремальных задач в классе $\mathcal{N}$ часто опирается на различные оценки функций класса $\mathcal{P}(\varphi_0)$. При этом существенное значение имеют оценки функционалов

$$\max_{|z| \leq r} (\min) \operatorname{Re} \varphi(z), \quad \max_{|z| \leq r} (\min) |\varphi(z)|, \quad \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \quad (0.1)$$

при $0 \leq r < 1$. Поэтому нахождение оценок $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $|\varphi(z)|$ и $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ представляет собой как самостоятельный интерес, так и служит базой для дальнейших исследований.

В классах $\mathcal{P}(\frac{1+z}{1-z})$ и $\mathcal{P}(1+z)$ точные оценки данных функционалов были получены в [6, 7], их обобщения для классов $\mathcal{P}(\frac{1+z}{1-cz})$ и $\mathcal{P}_n(\frac{1+z}{1-cz})$, где $-1 < c \leq 1$, получены в [8, 9], а для класса $\mathcal{P}_n((\frac{1+z}{1-cz})^\gamma)$, где $0 < \gamma \leq 1$, — в [10].

В настоящей статье на основе подчиненности вводится новый класс аналитических функций, множество значений которых содержится в области, ограниченной овалом Касини. В данном классе найдены точные оценки функционалов (0.1) и даны некоторые их применения.

1. Предварительные сведения

О п р е д е л е н и е 1.1. [11, р. 356]. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ — функции, аналитические в круге E . Функцию $\varphi(z)$ называют *подчиненной* функции $\varphi_0(z)$ и обозначают $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, если существует аналитическая в круге E функция $\omega(z)$, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, такая, что $\varphi(z) = \varphi_0(\omega(z))$. В случае, когда функция $\varphi_0(z)$ является однолистной E , подчиненность $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ равносильна тому, что $\varphi(E) \subset \varphi_0(E)$ и $\varphi(0) = \varphi_0(0)$.

Если $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, то из подчиненности $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$ следует, что $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ для всех r , $0 \leq r < 1$. Используя геометрические свойства области $\varphi_0(|z| \leq r^n)$, из условия $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_0(|z| \leq r^n)$ можно получить оценки $\operatorname{Re} \varphi(z)$, $\operatorname{Im} \varphi(z)$ и $|\varphi(z)|$ в круге $|z| \leq r$ при $0 \leq r < 1$.

Основой для получения оценок $|z\varphi'(z)/\varphi(z)|$ является следующее утверждение.

Лемма 1.1. [11, р. 323]. Если функция $\omega(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, является аналитической в круге E и $|\omega(z)| < 1$ в E , то имеют место точные оценки

$$|\omega(z)| \leq |z|^n, \quad (1.1)$$

$$\frac{|\omega'(z)|}{1 - |\omega(z)|^2} \leq \frac{n|z|^{n-1}}{1 - |z|^{2n}}. \quad (1.2)$$

Также нам потребуется следующее утверждение, являющееся эффективным примером применения метода дифференциальной подчиненности.

Лемма 1.2. [12]. Пусть функция $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, является аналитической в круге E , а $\varphi_0(z)$ однолистка в E и звездообразна относительно точки $w = c_0$. Тогда если $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$, то

$$\int_0^z (\varphi(t) - c_0) \frac{dt}{t} \prec \frac{1}{n} \int_0^z (\varphi_0(t) - c_0) \frac{dt}{t}.$$

2. Основной результат. Класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ и свойства его функций

2.1. Свойства функции $\varphi_\lambda(z)$

В статье [13] при исследовании обобщенных типично-вещественных функций рассматривалась однолистная функция

$$k_{p,q}(z) = \frac{z}{(1-pz)(1-qz)}, \quad -1 \leq p, q \leq 1,$$

которая сводится к функции Кебе $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ при $p = q = 1$. Другим частным случаем функции $k_{p,q}(z)$ является функция

$$k_{p,-p}(z) = \frac{z}{1-p^2 z^2} = \frac{z}{1-\lambda z^2} := h_\lambda(z), \quad 0 \leq \lambda = p^2 \leq 1. \quad (2.1)$$

Как следует из [13] (подробнее в [14]), при увеличении λ от 0 до 1 область $h_\lambda(E)$ трансформируется из круга $|w| < 1$ в выпуклую область, которая переходит в невыпуклую односвязную область, ограниченную овалом Кассини. При $\lambda \rightarrow 1$ область $h_\lambda(E)$ преобразуется в плоскость с двумя разрезами по мнимой оси от точек $\pm i/2$ до ∞ .

Введем функцию

$$\varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}, \quad 0 \leq \lambda < 1. \quad (2.2)$$

Очевидно, что $\varphi_\lambda(z) = 1 + (1-\lambda)h_\lambda(z)$, $0 \leq \lambda < 1$.

Непосредственно из формулы (2.2) вытекает

С в о й с т в о 2.1. Функция $\varphi_\lambda(z)$ из (2.2) удовлетворяет условиям

$$\varphi_\lambda(\bar{z}) = \overline{\varphi_\lambda(z)}, \quad \varphi_\lambda(-z) - 1 = -(\varphi_\lambda(z) - 1), \quad z \in E.$$

Таким образом, при любом r , $0 \leq r < 1$, область $\varphi_\lambda(|z| < r)$ является симметричной относительно вещественной оси и симметричной относительно точки $w = 1$. Таким образом, область $\varphi_\lambda(E)$ является двояко симметричной относительно прямых $\text{Im } w = 0$ и $\text{Re } w = 1$.

С в о й с т в о 2.2. Функция $\varphi_\lambda(z)$ является звездообразной в E относительно точки $w = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для функции $h_\lambda(z) = \frac{z}{1-\lambda z^2}$ имеем

$$\text{Re} \left(z \frac{h'_\lambda(z)}{h_\lambda(z)} \right) = \text{Re} (1 + \lambda z^2) > 0, \quad z \in E.$$

Поэтому $h_\lambda(z) \in S^*$. Значит, и функция $\varphi_\lambda(z)$ является звездообразной в круге E . $\square$

С в о й с т в о 2.3. Для функции $\varphi_\lambda(z)$ из (2.2) для всех r , $0 \leq r < 1$, имеют место равенства

$$\min_{|z| \leq r} |\varphi_\lambda(z)| = \min_{|z| \leq r} \text{Re } \varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(-r), \quad \max_{|z| \leq r} |\varphi_\lambda(z)| = \max_{|z| \leq r} \text{Re } \varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(r), \quad (2.3)$$

$$\max_{|z| \leq r} |\varphi_\lambda(z) - 1| = |\varphi_\lambda(\pm r) - 1|. \quad (2.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.2) в круге $|z| \leq r$ имеем

$$|\varphi_\lambda(z)| \leq 1 + \left| \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2} \right| \leq 1 + \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = \varphi_\lambda(r).$$

С другой стороны,

$$\text{Re } \varphi_\lambda(z) \geq 1 - \left| \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2} \right| \geq 1 - \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = \varphi_\lambda(-r).$$

Поэтому

$$\varphi_\lambda(-r) \leq \text{Re } \varphi_\lambda(z) \leq |\varphi_\lambda(z)| \leq \varphi_\lambda(r).$$

Поскольку здесь знак равенства достигается в точке $z = -r$ (слева) и в точке $z = r$ (справа), то это доказывает равенства (2.3). Аналогично предыдущему получаем оценку

$$|\varphi_\lambda(z) - 1| = \left| \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2} \right| \leq \frac{(1-\lambda)r}{1-\lambda r^2} = |\varphi_\lambda(\pm r) - 1|,$$

которая достигается в точках $z = \pm r$. Отсюда вытекает (2.4). $\square$

2.2. Класс $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ и оценки аналитических функций

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что функция $\varphi(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, если функция $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и удовлетворяет условию

$$\varphi(z) \prec \varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}, \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Теорема 2.1. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0 \leq \lambda < 1$. Тогда в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq 1 + \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (2.5)$$

$$1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \leq |\varphi(z)| \leq 1 + \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (2.6)$$

$$|\varphi(z) - 1| \leq \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (2.7)$$

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq m(r), \quad m(r) = \frac{(1-\lambda)nr^n}{1-(1-\lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (2.8)$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = \varphi_\lambda(z^n)$, где $\varphi_\lambda(z)$ — функция из (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\varphi(z) \in \mathcal{A}_n$ и $\varphi(z) \prec \varphi_\lambda(z)$, то для всех r , $0 \leq r < 1$, выполнено $\varphi(|z| \leq r) \subset \varphi_\lambda(|z| \leq r^n)$. Поэтому из равенств (2.3), (2.4) в круге $|z| \leq r$ получаем оценки (2.5)–(2.7).

Для доказательства оценки (2.8) обозначим $\Phi(z) = \ln \varphi(z)$, $\Phi_\lambda(z) = \ln \varphi_\lambda(z)$. Так как $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, то $\Phi(z) \prec \Phi_\lambda(z)$ и $\Phi(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \dots$. Поэтому по определению подчиненности функций существует функция $\omega(z) = b_n z^n + b_{n+1} z^{n+1} + \dots$, $n \geq 1$, такая, что $|\omega(z)| < 1$ и $\Phi(z) = \Phi_\lambda(\omega(z))$. Отсюда

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \equiv \Phi'(z) = \Phi'_\lambda(\omega(z))\omega'(z). \quad (2.9)$$

Используя формулу (2.2), находим

$$\Phi'_\lambda(z) = (1-\lambda) \frac{1+\lambda z^2}{1-\lambda z^2} \frac{1}{1+(1-\lambda)z - \lambda z^2}.$$

Отсюда

$$|\Phi'_\lambda(z)| \leq (1-\lambda) \frac{1+\lambda|z|^2}{1-\lambda|z|^2} \frac{1}{1-(1-\lambda)|z| - \lambda|z|^2}.$$

Поэтому в силу (2.9) имеем

$$\left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq (1-\lambda) \frac{1+\lambda|\omega(z)|^2}{1-\lambda|\omega(z)|^2} \frac{1}{1-(1-\lambda)|\omega(z)| - \lambda|\omega(z)|^2} |\omega'(z)|.$$

Отсюда на основе неравенства (1.2) получаем

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{(1-\lambda)nr^n}{1-r^{2n}} \frac{1+\lambda|\omega(z)|^2}{1-\lambda|\omega(z)|^2} \frac{1-|\omega(z)|^2}{1-(1-\lambda)|\omega(z)| - \lambda|\omega(z)|^2}.$$

Таким образом,

$$\left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{(1-\lambda)nr^n}{1-r^{2n}} H(x), \quad (2.10)$$

где $x = |\omega(z)| \in [0; 1)$ и

$$H(x) = \frac{1+\lambda x^2}{1-\lambda x^2} \frac{1-x^2}{1-(1-\lambda)x-\lambda x^2}.$$

Функция

$$H_0(x) = \frac{1-x^2}{1-(1-\lambda)x-\lambda x^2}$$

является возрастающей на $[0; 1]$, так как

$$H'_0(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-(1-\lambda)x-\lambda x^2)^2} \geq 0, \quad x \in [0; 1].$$

Поскольку и функция $\frac{1+\lambda x^2}{1-\lambda x^2}$ является возрастающей на $[0; 1]$, то функция $H(x)$ возрастает на $[0; 1]$. Поэтому с учетом того, что в силу оценки (1.1) $x = |\omega(z)| \leq r^n$, находим:

$$H(x) \leq H(r^n) = \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} \frac{1-r^{2n}}{1-(1-\lambda)r^n-\lambda r^{2n}}.$$

На основе данного неравенства и оценки (2.10) получаем оценку (2.8).

Точность оценок (2.5)–(2.8) следует из того, что для функции

$$\varphi(z) = \varphi_\lambda(z^n) = 1 + \frac{(1-\lambda)z^n}{1-\lambda z^{2n}}$$

в оценках (2.5)–(2.8) достигается знак равенства (в левых оценках (2.5), (2.6) и в оценке (2.8) — в точке $z = \sqrt[n]{-1} r$, в правых оценках (2.5), (2.6) — в точке $z = r$, в оценке (2.7) — в точках $z = \sqrt[n]{-1} r$ и $z = r$). $\square$

Следствие 2.1. Пусть $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$ при $\lambda = 0$, то есть функция $\varphi(z)$ из $\mathcal{A}_n$ удовлетворяет условию $|\varphi(z) - 1| < 1$, $z \in E$. Тогда в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$1 - r^n \leq \operatorname{Re} \varphi(z) \leq |\varphi(z)| \leq 1 + r^n, \quad |\varphi(z) - 1| \leq r^n, \quad \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{nr^n}{1 - r^n},$$

которые достигаются для функции $\varphi(z) = 1 + z^n$.

При $n = 1$ из следствия 2.1 вытекают оценки, полученные в [7].

3. Некоторые приложения

3.1. Свойства звездообразных функций обобщенного класса Р. Сингха

В статьях [15, 16] исследовался класс S_U^* звездообразных функций $f(z) \in \mathcal{N}$, удовлетворяющих условию

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad z \in E. \quad (3.1)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $S_n^*(\varphi_\lambda)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \in \mathcal{N}_n$ и $z \frac{f'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0 \leq \lambda < 1$.

Поскольку в силу оценки (2.8) из условия $\varphi(z) = z f'(z)/f(z) \prec \varphi_\lambda(z)$ следует, что

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} < 1,$$

то $S_n^*(\varphi_\lambda) \subset S_U^* \subset S^*$.

Теорема 3.1. Пусть $f(z) \in S_n^*(\varphi_\lambda)$, $0 \leq \lambda < 1$. Тогда

$$\ln \frac{f(z)}{z} \prec \psi_0(z) = \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}z}{1-\sqrt{\lambda}z}$$

и в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, имеют место точные оценки

$$1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \leq \operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq 1 + \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (3.2)$$

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (3.3)$$

$$\left| \operatorname{Re} \ln \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n}, \quad (3.4)$$

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \equiv \left| \operatorname{Im} \ln \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{\lambda}r^n}{1-\lambda r^{2n}}, \quad (3.5)$$

$$r \exp \left\{ -\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n} \right\} \leq |f(z)| \leq r \exp \left\{ \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n} \right\}. \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \right) \exp \left\{ -\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n} \right\} \\ \leq |f'(z)| \leq \left(1 + \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} \right) \exp \left\{ \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varphi(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} \prec \varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}$, то оценки (3.2), (3.3) вытекают из оценок (2.5)–(2.7). Из условия $z f'(z)/f(z) \prec \varphi_\lambda(z)$ в силу леммы 1.2 получаем

$$\ln \frac{f(z)}{z} = \int_0^z \left(t \frac{f'(t)}{f(t)} - 1 \right) \frac{dt}{t} \prec \frac{1}{n} \int_0^z \frac{1-\lambda}{1-\lambda t^2} dt = \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}z}{1-\sqrt{\lambda}z} := \psi_0(z).$$

Поскольку $\psi(z) = \ln \frac{f(z)}{z} \prec \psi_0(z)$, то для всех r , $0 \leq r < 1$, имеет место соотношение $\psi(|z| \leq r) \subset \psi_0(|z| \leq r^n)$. Так как функция $\varphi_\lambda(z) - 1 = \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}$ является звездобразной, то функция $\psi_0(z) = \int_0^z (\varphi_\lambda(t) - 1) \frac{dt}{t}$ является выпуклой. Поскольку $\psi_0(|z| \leq r^n)$ — выпуклая область, симметричная относительно осей координат, то отсюда вытекают следующие равенства

$$\max_{|z| \leq r} |\operatorname{Re} \psi(z)| = \psi_0(r^n) = \frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}r^n}{1-\sqrt{\lambda}r^n},$$

$$\max_{|z| \leq r} |\operatorname{Im} \psi(z)| = \psi_0(ir^n) = \arctan \frac{2\sqrt{\lambda}r^n}{1 - \lambda r^{2n}}.$$

Отсюда следуют оценки (3.4) и (3.5). Оценка (3.6) вытекают из оценки (3.4).

Для доказательства оценки (3.7) перепишем оценку (3.2) в виде

$$\left(1 - \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}}\right) \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq |f'(z)| \leq \left(1 + \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}}\right) \left| \frac{f(z)}{z} \right|.$$

Отсюда, используя оценку (3.6), приходим к оценке (3.7).

Все оценки точные и достигаются для функции

$$f_0(z) = z \exp \left\{ \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda}z^n}{1 - \sqrt{\lambda}z^n} \right\}.$$

□

Полагая в левой оценке (3.6) $r = 1$, получаем теорему покрытия класса $S_n^*(\varphi_\lambda)$.

Следствие 3.1. Для любой функции $f(z) \in S_n^*(\varphi_\lambda)$ образ круга E при отображении $w = f(z)$ содержит круг $|w| < \exp \left\{ -\frac{1-\lambda}{2\sqrt{\lambda}n} \ln \frac{1+\sqrt{\lambda}}{1-\sqrt{\lambda}} \right\}$.

Теорема 3.2. Радиус выпуклости r_0 класса $S_n^*(\varphi_\lambda)$ определяется как единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$1 - \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}} - \frac{(1 - \lambda)nr^n}{1 - (1 - \lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1 + \lambda r^{2n}}{1 - \lambda r^{2n}} = 0. \quad (3.8)$$

Доказательство. Положим $\varphi(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)}$. Тогда

$$1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} = z \frac{f''(z)}{f(z)} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \varphi(z) + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq \operatorname{Re} \varphi(z) - \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|.$$

Поскольку $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, то, применяя левую оценку (2.5) и оценку (2.8), в круге $|z| \leq r$ находим

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 1 - \left(\frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}} + \frac{(1 - \lambda)nr^n}{1 - (1 - \lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1 + \lambda r^{2n}}{1 - \lambda r^{2n}} \right) := 1 - g(r).$$

Поскольку функция $g(r)$ возрастает на $[0; 1)$ от 0 до $+\infty$, то уравнение $1 - g(r) = 0$, а значит и уравнение (3.8) на $(0; 1)$ имеет единственный корень r_0 . Поэтому в круге $|z| \leq r_0$ выполняется условие выпуклости $1 + \operatorname{Re} \left(z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right) \geq 0$. Следовательно, функция $f(z)$ является выпуклой в этом круге.

Для доказательства точности радиуса выпуклости r_0 рассмотрим экстремальную функцию $f_0(z)$, которую определим из уравнения $z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} = \varphi_\lambda(z^n)$. Тогда

$$1 + z \frac{f''_0(z)}{f'_0(z)} = 1 + \frac{(1 - \lambda)z^n}{1 - \lambda z^{2n}} + \frac{(1 - \lambda)nz^n}{1 + (1 - \lambda)z^n - \lambda z^{2n}} \frac{1 + \lambda z^{2n}}{1 - \lambda z^{2n}}$$

и в точке $z = \sqrt[n]{-1} r$, где $r = r_0$, в условии выпуклости достигается знак равенства:

$$\operatorname{Re} \left(1 + z \frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} \right) \Big|_{z=\sqrt[n]{-1}r} = 1 - \frac{(1-\lambda)r^n}{1-\lambda r^{2n}} - \frac{(1-\lambda)nr^n}{1-(1-\lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1+\lambda r^{2n}}{1-\lambda r^{2n}} = 0.$$

□

При $\lambda = 0$ из уравнения (3.8) находим

$$r_0 = \left(\frac{1}{2} \left(2 + n - \sqrt{n(4+n)} \right) \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.9)$$

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ и учитывая, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda} r^n}{1 - \sqrt{\lambda} r^n} = 2r^n, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan \frac{2\sqrt{\lambda} r^n}{1 - \lambda r^{2n}} = 2r^n.$$

из теорем 3.1, 3.2 и следствия 3.1 получаем

Следствие 3.2. Пусть функция $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$ удовлетворяет условию (3.1). Тогда в круге $|z| \leq r$ имеют место точные оценки

$$r \exp \left(-\frac{r^n}{n} \right) \leq |f(z)| \leq r \exp \left(\frac{r^n}{n} \right), \quad \left| \arg \left(\frac{f(z)}{z} \right) \right| \leq \frac{r^n}{n},$$

$$(1 - r^n) \exp \left(-\frac{r^n}{n} \right) \leq |f'(z)| \leq (1 + r^n) \exp \left(\frac{r^n}{n} \right),$$

область $f(E)$ содержит круг $|w| < \exp(-\frac{1}{n})$, а радиус выпуклости r_0 класса функций $f(z)$ из $\mathcal{N}_n$, удовлетворяющих условию (3.1), определяется по формуле (3.9).

При $n = 1$ из следствия 3.2 вытекают оценки для $|f(z)|$ и $|f'(z)|$ из [15] и значение радиуса выпуклости $r_0 = (3 - \sqrt{5})/2$ класса S_u^* из [16].

3.2. Теоремы роста и радиусы звездообразности некоторых классов почти звездообразных и дважды почти звездообразных функций

О п р е д е л е н и е 3.2. [17] Говорят, что функция $f(z)$ из $\mathcal{N}$ принадлежит классу K^* почти звездообразных функций, тогда и только тогда, когда существует звездообразная функция $g(z)$ такая, что в круге E выполняется условие

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0. \quad (3.10)$$

Если же в условии (3.10) функция $g(z)$ является почти звездообразной, то функция $f(z)$ называется *дважды почти звездообразной функцией*.

Класс дважды почти звездообразных функций обозначим через CK^* .

Таким образом, $f(z) \in CK^*$ тогда и только тогда, когда для некоторой звездообразной функции $h(z)$ выполняются условия

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{g(z)} > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{g(z)}{h(z)} > 0, \quad z \in E. \quad (3.11)$$

Классы K^* , CK^* и некоторые их подклассы изучались в работах [6, 7, 17–19] и других. При этом, наряду с общим случаем, исследовались и случаи, когда вместо условий вида $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ использовались другие условия, обеспечивающие принадлежность значений $\varphi(z)$ при $z \in E$ полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$, либо в качестве $g(z)$ в (3.10) или $h(z)$ в (3.11) использовались функции некоторых подклассов класса S^* или конкретные звездообразные функции.

О п р е д е л е н и е 3.3. Будем говорить, что при некоторых фиксированных η и γ , $0 < \gamma \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, функция $f(z)$ принадлежит классу $K_n^*(\eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда $f(z) \in \mathcal{A}_n$ и выполняется условие

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{h_\eta(z)} \right)^{1/\gamma} > 0,$$

где функция $h_\eta(z)$ определена по формуле (2.1).

О п р е д е л е н и е 3.4. Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит классу $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда существует функция $g(z) \in K_n^*(\eta, \gamma)$ такая, что выполняется условие $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, $0 \leq \lambda < 1$.

Таким образом, $f(z) \in CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(z)}{g(z)} \prec \varphi_\lambda(z) = 1 + \frac{(1-\lambda)z}{1-\lambda z^2}, \quad \operatorname{Re} \left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z) \right)^{\frac{1}{\gamma}} > 0. \quad (3.12)$$

Пусть $\lambda \rightarrow 1$. Тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 1} \varphi_\lambda(z) \equiv 1$ в круге E . В силу этого, в пределе при $\lambda \rightarrow 1$ из подчиненности $\frac{f(z)}{g(z)} \prec \varphi_\lambda(z)$ вытекает, что $f(z) \equiv g(z)$ в круге E . Первое из условий в (3.12) становится тривиальным, и класс $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций $K_n^*(\eta, \gamma)$.

Пусть теперь $\gamma \rightarrow 0$. Поскольку второе из условий в (3.12) можно записать в виде

$$\left| \arg \left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z) \right) \right| < \gamma \frac{\pi}{2}, \quad z \in E,$$

то с учетом того, что $((1-\eta z^2)g(z)/z)|_{z=0} = 1$, получаем, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\frac{1-\eta z^2}{z} g(z) \right) \equiv 1, \quad z \in E.$$

Поэтому в пределе при $\gamma \rightarrow 0$ из второго условия в (3.12) вытекает, что

$$g(z) \equiv h_\eta(z) = \frac{z}{1-\eta z^2},$$

и класс $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ преобразуется в класс почти звездообразных функций

$$\widehat{K}_n^*(\lambda, \eta) := CK_n^*(\lambda, \eta, 0) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \frac{1-\eta z^2}{z} f(z) \prec \varphi_\lambda(z) \right\}.$$

Заметим, что $K_n^*(\lambda, \eta) \subset CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma) \subset CK^*$ и $\widehat{K}_n^*(\lambda, \eta) \subset CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma) \subset CK^*$.

Теорема 3.3. Пусть $f(z) \in CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$, $k = n$ при $\eta = 0$ и $k = \min\{2; n\}$ при $0 < \eta \leq 1$. Тогда в круге $|z| \leq r$, $0 \leq r < 1$, справедлива точная оценка

$$\frac{r}{1 + \eta r^2} \left(1 - \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}}\right) \left(\frac{1 - r^k}{1 + r^k}\right)^\gamma \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1 - \eta r^2} \left(1 + \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}}\right) \left(\frac{1 + r^k}{1 - r^k}\right)^\gamma, \quad (3.13)$$

и радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ порядка α класса $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ определяется как единственный на интервале $(0; 1)$ корень уравнения

$$\frac{1 - \eta r^2}{1 + \eta r^2} - \frac{(1 - \lambda)nr^n}{1 - (1 - \lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1 + \lambda r^{2n}}{1 - \lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1 - r^{2k}} - \alpha = 0. \quad (3.14)$$

Доказательство. Обозначим $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $\psi(z) = \frac{g(z)}{h_\eta(z)}$, где $h_\eta(z) = \frac{z}{1 - \eta z^2}$. Тогда $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$. Так как $g(z) \in \mathcal{N}_n$, $h_\eta(z) \in \mathcal{N}_2$ при $0 < \eta \leq 1$ и $h_\eta(z) \in \mathcal{N}_1$ при $\eta = 0$, то $\psi(z) \in \mathcal{A}_k$, где $k = n$ при $\eta = 0$ и $k = \min\{2; n\}$ при $0 < \eta \leq 1$. Поскольку $\operatorname{Re} \psi^{1/\gamma}(z) > 0$, то $\psi(z) \prec ((1+z)/(1-z))^\gamma$, откуда в круге $|z| \leq r$ получаем оценку

$$\left(\frac{1 - r^k}{1 + r^k}\right)^\gamma \leq |\psi(z)| \leq \left(\frac{1 + r^k}{1 - r^k}\right)^\gamma.$$

Кроме того,

$$\frac{r}{1 + \eta r^2} \leq |h_\eta(z)| \leq \frac{r}{1 - \eta r^2}.$$

Применяя данные оценки и оценку (2.6) для функции $\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, в силу равенства $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$ приходим к оценке (3.13).

Из равенства $f(z) = \varphi(z)\psi(z)h_\eta(z)$ находим

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \eta z^2}{1 - \eta z^2} + z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)},$$

откуда в круге $|z| \leq r$ имеем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \min_{|z| \leq r} \operatorname{Re} \frac{1 + \lambda z^2}{1 - \lambda z^2} - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| - \max_{|z| \leq r} \left| z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right|. \quad (3.15)$$

Поскольку $\operatorname{Re} \psi^{1/\gamma}(z) > 0$, то функция $u(z) = \psi^{1/\gamma}(z) \in \mathcal{P}_k$, где $k = n$ при $\eta = 0$, и $k = \min\{2, n\}$ при $0 < \eta \leq 1$. Поэтому, согласно [7], $|zu'(z)/u(z)| \leq 2kr^k/(1 - r^{2k})$. Так как $z\psi'(z)/\psi(z) = \gamma zu'(z)/u(z)$, получаем

$$\left| z \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} \right| \leq \frac{2\gamma k r^k}{1 - r^{2k}}.$$

В круге $|z| \leq r$ выполнено еще и неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{1 + \eta z^2}{1 - \eta z^2} \geq \frac{1 - \eta r^2}{1 + \eta r^2},$$

В силу этих неравенств, применяя оценку (2.8) к функции $\varphi(z) \in \mathcal{P}_n(\varphi_\lambda)$, из (3.15) получаем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \frac{1 - \eta r^2}{1 + \eta r^2} - \frac{(1 - \lambda)nr^n}{1 - (1 - \lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1 + \lambda r^{2n}}{1 - \lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1 - r^{2k}}.$$

Пусть $r = r^*(\alpha)$ — корень уравнения (3.14). Тогда в круге $|z| \leq r$ выполняется условие $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$, которое обеспечивает звездообразность порядка α функции $f(z)$.

Как и при доказательстве теоремы 3.2 нетрудно доказать, что уравнение (3.14) имеет единственный корень $r = r^*(\alpha)$, причем $r^*(\alpha) \in (0; 1)$.

Покажем, что полученные оценка (3.13) и радиус звездообразности $r^*(\alpha)$ порядка α класса $CK_n^*(\lambda, \eta, \gamma)$ являются точными. Для этого рассмотрим функции

$$f_0(z) = \frac{z}{1 - \eta z^2} \left(1 + \frac{(1 - \lambda)z^n}{1 - \lambda z^{2n}} \right) \left(\frac{1 + z^k}{1 - z^k} \right)^\gamma, \quad (3.16)$$

$$f_1(z) = \frac{z}{1 - \eta z^2} \left(1 + \frac{(1 - \lambda)i^{2-n}z^n}{1 - \lambda i^{2(2-n)}z^{2n}} \right) \left(\frac{1 + i^{2-k}z^k}{1 - i^{2-k}z^k} \right)^\gamma. \quad (3.17)$$

Пусть $\eta = 0$. Тогда $k = n$ и

$$f_0(z) = z \left(1 + \frac{(1 - \lambda)z^n}{1 - \lambda z^{2n}} \right) \left(\frac{1 + z^n}{1 - z^n} \right)^\gamma,$$

$$z \frac{f'_0(z)}{f_0(z)} = 1 + \frac{(1 - \lambda)nz^n}{1 + (1 - \lambda)z^n - \lambda z^{2n}} \frac{1 + \lambda z^{2n}}{1 - \lambda z^{2n}} + \frac{2\gamma n z^n}{1 - z^{2n}}.$$

Поэтому для функции $f_0(z)$ равенство в оценке (3.13) достигается в точках $z = \sqrt[n]{-1}r$ и $z = r$, соответственно, слева и справа, а радиус звездообразности порядка α — в точке $z = \sqrt[n]{-1}r$.

Пусть $0 < \eta \leq 1$. Тогда $k = \min\{2; n\}$.

Правая оценка в (3.13) достигается для функции $f_0(z)$ из (3.16) в точке $z = r$.

Пусть $z = ir$. Тогда $z^2 = -r^2$ и для любого $n = 1, 2, \dots$ имеем $i^{2-n}z^n = -r^n$, $i^{2(2-n)}z^{2n} = r^{2n}$. Поэтому левая оценка в (3.13) достигается для функции $f_1(z)$ из (3.17) в точке $z = ir$, так как

$$f_1(ir) = \frac{ir}{1 + \eta r^2} \left(1 - \frac{(1 - \lambda)r^n}{1 - \lambda r^{2n}} \right) \left(\frac{1 - r^k}{1 + r^k} \right)^\gamma.$$

Для функции $f_1(z)$ имеем

$$z \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} = \frac{1 + \eta z^2}{1 - \eta z^2} + \frac{(1 - \lambda)ni^{2-n}z^n}{1 + (1 - \lambda)i^{2-n}z^n - \lambda i^{2(2-n)}z^{2n}} \frac{1 + \lambda i^{2(2-n)}z^{2n}}{1 - \lambda i^{2(2-n)}z^{2n}} + \frac{2\gamma k i^{2-k}z^k}{(1 + i^{2-k}z^k)(1 - i^{2-k}z^k)}.$$

Поэтому в точке $z = ir$, где $r = r^*(\alpha)$ — корень уравнения (3.14), имеем

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{f'_1(z)}{f_1(z)} \right) \Big|_{z=ir} = \frac{1 - \eta r^2}{1 + \eta r^2} - \frac{(1 - \lambda)nr^n}{1 - (1 - \lambda)r^n - \lambda r^{2n}} \frac{1 + \lambda r^{2n}}{1 - \lambda r^{2n}} - \frac{2\gamma k r^k}{1 - r^{2k}} = \alpha.$$

Итак, в условии $\operatorname{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) \geq \alpha$ звездообразности порядка α достигается знак равенства. Следовательно, радиус звездообразности порядка α увеличить нельзя. $\square$

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 3.3.

1) Пусть $\lambda \rightarrow 1$, $\gamma = 1$. Тогда $f(z) \equiv g(z)$ и получаем класс

$$K_n^*(\eta, 1) := CK_n^*(1, \eta, 1) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - \eta z^2)f(z)}{z} \right) > 0 \right\},$$

для которого

$$\frac{r}{1+\eta r^2} \left(\frac{1-r^k}{1+r^k} \right) \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-\eta r^2} \left(\frac{1+r^k}{1-r^k} \right)$$

и $r^*(\alpha)$ определяется из уравнения

$$(1-\eta r^2)(1-r^{2k}) - 2kr^k(1+\eta r^2) - \alpha(1+\eta r^2)(1-r^{2k}) = 0.$$

Полагая $\eta = 0$, $\alpha = 0$, из данного уравнения получаем радиус звездообразности $r^* = (\sqrt{n^2+1} - n)^{1/n}$ класса $K_n^*(0, 1) = \{f(z) \in \mathcal{N}_n : \operatorname{Re}(f(z)/z) > 0\}$ из [6].

Пусть $n = 1$. Тогда $k = 1$ и уравнение (3.14) приобретает вид

$$(1-\eta r^2)(1-r^2) - 2r(1+\eta r^2) - \alpha(1+\eta r^2)(1-r^2) = 0.$$

Из этого уравнения при $\eta = 1$ выводится радиус звездообразности порядка α класса $\mathcal{K}_3 = K_n^*(1, 1) = \{f(z) \in \mathcal{N} : \operatorname{Re}((1-z^2)f(z)/z) > 0\}$, полученный в [18].

Если дополнительно предполагать, что $f(z)$ принимает вещественные значения при $z \in (-1; 1)$, то класс $K_1^*(1, 1)$ совпадает с классом T типично вещественных функций [20]. Поэтому при $n = 1$, $\eta = 1$, $k = 1$, $\alpha = 0$ получаем теорему роста класса T

$$\frac{r}{1+r^2} \left(\frac{1-r}{1+r} \right) \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

и радиус звездообразности $r^* = (\sqrt{5} + 1 - \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)})/2$ класса T из [21, 22].

2) Пусть $\lambda = 0$, $\eta = 0$, $\gamma = 1$, $k = n$. Тогда имеем класс

$$CK_n^*(0, 0, 1) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \frac{g(z)}{z} > 0 \right\},$$

для которого

$$r \frac{(1-r^n)^2}{1+r^n} \leq |f(z)| \leq r \frac{(1+r^n)^2}{1-r^n}$$

и

$$r^*(\alpha) = \left(\frac{2(1-\alpha)}{3n + \sqrt{9n^2 + 4(n+1-\alpha)(1-\alpha)}} \right)^{1/n}.$$

При $n = 1$ отсюда вытекает радиус $r^*(\alpha)$ класса $\mathcal{F}_3 = CK_1^*(0, 0, 1)$ из [19].

3) Пусть $\lambda = 0$, $\eta = 1$, $\gamma = 1$, $k = \min\{2; n\}$. В этом случае получаем класс

$$CK_n^*(0, 1, 1) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1, \operatorname{Re} \left(\frac{1-z^2}{z} g(z) \right) > 0 \right\},$$

для которого

$$\frac{r(1-r^n)}{1+r^2} \frac{1-r^k}{1+r^k} \leq |f(z)| \leq \frac{r(1+r^n)}{1-r^2} \frac{1+r^k}{1-r^k}$$

и $r^*(\alpha)$ определяется из уравнения

$$\frac{1-r^2}{1+r^2} - \frac{nr^n}{1-r^n} - \frac{2kr^k}{1-r^{2k}} - \alpha = 0.$$

Отсюда при $n = 1$ с учетом того, что $k = 1$, вытекает результат статьи [18] о радиусе звездообразности порядка α класса $\mathcal{F}_2 = CK_1^*(0, 1, 1)$.

4) Пусть $\lambda = 0$, $\eta = 0$, $\gamma \rightarrow 0$, $k = n$. Тогда получаем класс

$$CK_n^*(0, 0, 0) = \left\{ f(z) \in \mathcal{N}_n : \left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1 \right\},$$

для которого

$$r(1 - r^n) \leq |f(z)| \leq r(1 + r^n)$$

и

$$r^*(\alpha) = \left(\frac{1 - \alpha}{n + 1 - \alpha} \right)^{1/n}.$$

При $n = 1$ отсюда вытекает радиус звездообразности $r^* = 1/2$ класса $CK_1^*(0, 0, 0)$ из [7].

4. Заключение

В настоящей статье введен новый класс ограниченных аналитических функций, множества значений которых принадлежат области, ограниченной овалом Кассини. В данном классе получен набор точных оценок функционалов (0.1), что позволяет достаточно полно исследовать ряд новых классов нормированных функций. В частном случае, когда овал Кассини совпадает с кругом, мы приходим к ряду известных результатов.

References

- [1] Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, “Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций”, *УМН*, **30**:4(184) (1975), 3–60; англ. пер.: F. G. Avkhadiev, L. A. Aksent'ev, “The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht”, *Russian Mathematical Surveys*, **30**:4 (1975), 1–64.
- [2] W. Ma, D. Minda, “A unified treatment of some special classes of univalent functions”, *Proceedings of the Conference on Complex Analysis*, eds. Z. Li, F. Ren, L. Yang, S. Zhang, International Press, New York, 1994, 157–169.
- [3] S. Kumar, K. Arora, “Starlike functions associated with a petal shaped domain”, 2020, 1–15, arXiv: [pdf/2010.10072](https://arxiv.org/abs/2010.10072).
- [4] N. E. Cho, V. Kumar, S. S. Kumar, V. Ravichandran, “Radius problems for starlike functions associated with the sine function”, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **45**:1 (2019), 213–232.
- [5] S. S. Kumar, K. Gangania, “A cardioid domain and starlike functions”, 2020, 1–28, arXiv: [pdf/2008.06833](https://arxiv.org/abs/2008.06833).
- [6] T. H. MacGregor, “The radius of univalence of certain analytic functions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**:3 (1963), 514–520.
- [7] T. H. MacGregor, “The radius of univalence of certain analytic functions. II”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**:3 (1963), 521–524.
- [8] R. M. Goel, “A class of close-to-convex functions”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **18**:1 (1968), 104–116.
- [9] D. B. Shaffer, “Distortion theorems for a special class of analytic functions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **39**:2 (1973), 281–287.
- [10] Ф. Ф. Майер, М. Г. Тастанов, А. А. Утемисова, “Об одном подклассе почти выпуклых функций, связанных со звездообразными функциями порядка $1/2$ ”, *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*, 2025, № 94, 5–23. [F. F. Maiyer, M. G. Tastanov, A. A. Utemisova, “On a subclass of close-to-convex functions related to starlike functions of order $1/2$ ”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika = Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, **94** (2025), 5–23 (In Russian)].

- [11] G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*. V. 26, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Soc., Providence–Rhode Island, 1969, 676 pp.
- [12] T. J. Suffridge, “Some remarks on convex maps of the unit disk”, *Duke Math. J.*, **37**(4) (1970), 775–777.
- [13] S. Kanasa, A. Tatarczak, “Generalized typically real functions”, *Filomat*, **30**:7 (2016), 1697–1710.
- [14] О. А. Кувшинов, “О геометрии овала Кассини, его мере невыпуклости и ε -слое”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **60** (2022), 34–57. [O. A. Kuvshinov, “About the geometry of the Cassini oval, its non-convexity degree and ε -offset layer”, *Izvestija Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **60** (2022), 34–57 (In Russian)].
- [15] R. Singh, “On a class of star-like functions”, *Compositio Mathematica*, **19**:1 (1968), 78–82.
- [16] V. Singh, R. M. Goel, “On radii of convexity and starlikeness of some classes of functions”, *J. Math. Soc. Japan*, **23**(2) (1971), 323–339.
- [17] M. O. Reade, “The coefficients of close-to-convex functions”, *Duke Math. J.*, **23**:3 (1956), 459–462.
- [18] K. Khatter, S. K. Lee, V. Ravichandran, “Radius of starlikeness for classes of analytic functions”, 2020, 1–15, arXiv: [pdf/2006.11744](https://arxiv.org/abs/2006.11744).
- [19] R. M. Ali, N. K. Jain, V. Ravichandran, “On the radius constants for classes of analytic functions”, 2012, 1–16, arXiv: [pdf/1207.4529](https://arxiv.org/abs/1207.4529).
- [20] W. Rogosinski, “Über positive harmonische entwicklungen und typisch-reelle potenzreihen”, *Math. Zeitschr.*, **35**:1 (1932), 93–121.
- [21] С. А. Гельфер, “Типично вещественные функции”, *Матем. сб.*, **64**(106):2 (1964), 171–184. [S. A. Gel’fer, “Typically real functions”, *Sb. Math.*, **64**(106):2 (1964), 171–184 (In Russian)].
- [22] R. J. Libera, “Some radius of convexity problems”, *Duke Math. J.*, **31**:1 (1964), 143–158.

Информация об авторах

Майер Федор Федорович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: maiyer@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2278-2723>

Тастанов Мейрамбек Габдуалиевич, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: tastao@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1926-8958>

Утемисова Анар Алтаевна, кандидат педагогических наук, заведующая кафедрой математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: anar_utemisova@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5143-0260>

Information about the authors

Fedor F. Maiyer, Candidate of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: maiyer@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2278-2723>

Meyrambek G. Tastanov, Candidate of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: tastao@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1926-8958>

Anar A. Utemisova, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: anar_utemisova@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5143-0260>

Берденова Гульнар Жалгасовна, магистр, старший преподаватель кафедры математики и физики, Костанайский региональный университет им. Ахмета Байтурсынулы, г. Костанай, Республика Казахстан. E-mail: gulnar.berdenova.72@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5182-3553>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Утемисова Анар Алтаевна

E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Поступила в редакцию 10.07.2025 г.

Поступила после рецензирования 11.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Gulnar Zh. Berdenova, Master, Senior Lecturer of the Mathematics and Physics Department, Kostanay Regional University named after Akhmet Baitursynuly, Kostanay, Republic of Kazakhstan. E-mail: gulnar.berdenova.72@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-5182-3553>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Anar A. Utemissova

E-mail: anar_utemisova@mail.ru

Received 10.07.2025

Reviewed 11.09.2025

Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., Хаммади А.Х., Черникова А.В., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

УДК 517.935



Задачи оптимального периодического сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями

Людмила Ивановна РОДИНА^{1,2}, Алаа Хуссейн ХАММАДИ³,Анастасия Владимировна ЧЕРНИКОВА¹¹ ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

³ Университет Аль-Кадисия

58001, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29

Аннотация. Рассматриваются модели однородных или структурированных (по виду, возрасту или иному признаку) популяций, динамика которых при отсутствии эксплуатации задана системой разностных уравнений $x(k+1) = F(k, x(k))$, где $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$, $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ — численность i -го вида или возрастного класса популяции в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$; $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные функции, которые определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Предполагается, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ популяция подвержена промысловому воздействию $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Тогда исследуется модель эксплуатируемой популяции, заданной системой разностных уравнений

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Исследуется задача оптимального сбора возобновляемого ресурса на неограниченном промежутке времени при периодическом режиме эксплуатации, при котором достигаются наибольшие значения характеристик сбора. Первая из таких характеристик — средняя временная выгода, заданная пределом при $k \rightarrow \infty$ среднего арифметического стоимости ресурса за k сборов. Другая — эффективность сбора, равная пределу при $k \rightarrow \infty$ отношения стоимости ресурса, полученной за k сборов, к сумме приложенных для этого управлений (усилий сбора). Результаты работы проиллюстрированы на примерах однородной эксплуатируемой популяции, заданной дискретным логистическим уравнением, и структурированной популяции, состоящей из двух видов.

Ключевые слова: модель подверженной промыслу популяции, оптимальная эксплуатация, периодический сбор возобновляемого ресурса, средняя временная выгода, эффективность сбора ресурса

Для цитирования: Родина Л.И., Хаммади А.Х., Черникова А.В. Задачи оптимального периодического сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 255–266. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, A. H. Hammadi, A. V. Chernikova, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

Problems of optimal periodic resource harvesting for population models described by difference equations

Lyudmila I. RODINA^{1,2}, Alaa H. HAMMADI³,Anastasia V. CHERNIKOVA¹¹ Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

² National University of Science and Technology "MISIS"

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

³ University of Al-Qadisiyah

29 Babilon St., Al Diwaniyah 58001, Iraq

Abstract. We consider models of homogeneous or structured (by type, age, or other characteristic) populations, the dynamics of which, in the absence of exploitation, is given by a system of difference equations $x(k+1) = F(k, x(k))$, where $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$, $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ is the amount of the i -th type or age class of the population at a time $k = 0, 1, 2, \dots$; $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ are real functions that are defined and continuous on the set $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

It is assumed that at times $k = 1, 2, \dots$ the population is exposed to harvesting $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Then the model of the exploited population is investigated, given by a system of difference equations

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

where $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$, $X_i(k)$ and $(1 - u_i(k))X_i(k)$ is the amount of the resource of the i type before and after harvesting at the time k respectively, $i = 1, \dots, n$.

The problem of optimal harvesting of a renewable resources for an unlimited period of time under periodic operation mode, in which the highest values of collection characteristics are achieved, is investigated. The first of these characteristics is the average time profit given by the limit at $k \rightarrow \infty$ of the arithmetic mean of the cost of the resource over k harvesting. Another characteristic is the harvesting efficiency equal to the limit at $k \rightarrow \infty$ of the ratio of the cost of the resource gathered in k harvestings to the amount of applied control (collection efforts). The results of the work are illustrated by examples of a homogeneous exploited population, given by a discrete logistic equation, and a structured population of two species.

Keywords: model of a population subject to harvesting, optimal exploitation, periodic harvesting of a renewable resource, average time profit, resource harvesting efficiency

Mathematics Subject Classification: 39A05, 39A23, 49N20, 93C55.

For citation: Rodina L.I., Chernikova A.V., Hammadi A.H. Problems of optimal periodic resource harvesting for population models described by difference equations. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 255–266. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

Введение

Многие виды животных и растений имеют сезонный характер размножения. В этой связи представляет интерес исследование динамических режимов и устойчивости решений систем, описывающих такие популяции [1, 2]. В условиях промыслового воздействия является актуальной задача описания оптимальных режимов сбора возобновляемого ресурса, при которых часть популяции сохраняется для дальнейшего восстановления. При этом рассматриваемые популяции могут быть заданы различными детерминированными или стохастическими моделями [3–5]. Так, в работе [6] для дискретного аналога модели Базыкина–Людвига, описывающего популяции животных с сезонным характером размножения, изучены локальные последствия эффекта Олли. Исследование оптимальных режимов промысла при циклическом изменении лимитирующих популяционный рост факторов внешней среды проведено в работе [7] для модели популяции, заданной функцией Риккера.

К одной из задач оптимальной добычи возобновляемого ресурса относится задача нахождения наибольших значений характеристик сбора — эффективности и дохода, в том числе в долгосрочной перспективе. Например, в работе [8] исследован периодический импульсный сбор, доставляющий максимум дисконтированного дохода. Авторами работы [9] для популяции, распределенной на торе, доказано существование доли отбора, доставляющей максимум среднего временного дохода при периодическом промысле. На примере модели взаимодействия двух видов типа «хищник–жертва» (энтомофаг и насекомое-вредитель соответственно), рассмотренной в [10], исследуются вопросы существования решений задачи импульсного управления и их непрерывной зависимости от параметров управления (внесения биопрепарата-энтомофага). Для моделей популяций, динамика которых определена дифференциальными и разностными уравнениями, в работах [11, 12] построены управляющие воздействия, доставляющие заданные и наибольшие значения средней временной выгоды и эффективности сбора. В работе [13] доказано существование предела и получена оценка средней временной выгоды, выполненная с вероятностью единица, для модели эксплуатируемой популяции, определенной разностными уравнениями со случайными параметрами.

Настоящая работа является продолжением публикаций [11, 12, 14], в которых положено начало исследования различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь для модели популяции, динамика которой задана системой разностных уравнений, описан периодический режим сбора, при котором средняя временная выгода и эффективность достигают наибольших значений. Решение данной задачи проиллюстрировано на примерах однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением, и структурированной популяции, описывающей взаимодействие двух возрастных классов типа «симбиоз».

1. Оптимальное управление при периодическом режиме сбора ресурса

Рассмотрим модель популяции, состоящей из n видов или возрастных классов. В случае $n = 1$ популяция содержит один вид, ее называют однородной; при $n \geq 2$ популяцию называют структурированной. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ численность i -го вида или возрастного класса популяции в момент времени $k = 1, 2, \dots$. При отсутствии эксплуатации динамика всех видов $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ задана системой разностных

уравнений

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные функции, которые определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. В данной работе предполагаем, что функции $F_i(k, x)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$, то есть $F_i(k + \tau, x) = F_i(k, x)$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$, которую будем интерпретировать как управление для достижения лучшего результата сбора. Также рассмотрим множество всех управлений

$$U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}.$$

Обозначим через $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$. Исследуем модель популяции, подверженной промыслу, динамика которой задана системой разностных уравнений

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$. Отметим, что

$$X(k) = X(k, u(k), X_1) = (X_1(k, u(k), X_1), \dots, X_n(k, u(k), X_1))$$

является решением системы (1.1), удовлетворяющим начальному условию $X(1) = X_1$.

Пусть $C_i(k) \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида ресурса, тогда сумма $\sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j)$ равна общей стоимости ресурса, собранного в момент j . Предполагаем, что функции $C_i(k)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$, то есть $C_i(k + \tau) = C_i(k)$, $i = 1, \dots, n$. В работах [12, 14] исследуется характеристика сбора возобновляемого ресурса, которая называется *средней временной выгодой* и определяется функцией

$$H_*(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j).$$

Если существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j)$, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H(\bar{u}, X(1))$.

Исследуем также другую характеристику сбора возобновляемого ресурса — *эффективность*, которая рассмотрена в работе [12] и задана функцией

$$E_*(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}.$$

Если существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}$, то эффективность сбора ресурса будем обозначать через $E(\bar{u}, X(1))$.

Исследуем периодический режим сбора ресурса с периодом $\tau \geq 2$, то есть рассмотрим периодические управляющие функции $u_i(k + \tau) = u_i(k)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, n$. Если уравнение (1.1) имеет периодическое решение $X(k + \tau) = X(k)$, то обозначим через

$V = V(x(1), \dots, x(\tau))$ область притяжения цикла $X(u(1), \dots, u(\tau)) = (X(1), \dots, X(\tau))$. Рассмотрим множество $U(\tau) \subset U$ периодических управлений с периодом τ , при которых уравнение (1.1) имеет периодическое решение с тем же периодом. Обозначим k -ю итерацию функции F через F^k , то есть $F^1 = F$, $F^k = F(F^{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$

Напомним следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [15, с. 7]). Точка $\beta^1(u)$ называется *периодической точкой периода $\tau \geq 2$* для системы (1.1), если

$$F^\tau(\beta^1(u)) = \beta^1(u) \quad \text{и} \quad F^m(\beta^1(u)) \neq \beta^1(u)$$

при $m = 1, \dots, \tau - 1$.

Если $\tau \geq 2$, то каждая из точек $\beta^m(u) = F^m(\beta^1(u))$, $m = 1, \dots, \tau$, также является периодической точкой периода τ , то есть точки $\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B = B(u(1), \dots, u(\tau)) = \{\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)\}$ периода τ .

О п р е д е л е н и е 1.2. (см. [15, с. 9]). Областью притяжения $V = V(\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u))$ цикла B называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$F(V) \subset V \quad \text{и} \quad \bigcap_{k \geq 1} F^k(V) = B.$$

П р е д л о ж е н и е 1.1. Предположим, что при периодическом режиме эксплуатации $u_i(j + \tau) = u_i(j)$ уравнение (1.1) имеет периодическое решение $X_i(j + \tau) = X_i(j)$, $i = 1, \dots, n$, с периодом $\tau \geq 2$. Тогда для любой начальной точки $X_1 \in V$ выполнены равенства

$$H(\bar{u}, X(1)) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \beta_i^j(u) u_i(j), \quad (1.2)$$

$$E(\bar{u}, X(1)) = \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \beta_i^j(u) u_i(j) \left(\sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея доказательства данного предложения схожа с идеей доказательств [12, утверждение 2] и [14, утверждение 2] в случае, когда управляющие воздействия стационарны. Для полноты изложения приведем его.

Поскольку система (1.1) обладает циклом B , для каждой начальной точки $X_1 \in V$ траектория решения $X(k, u(k), X_1)$ данной системы распадается на τ последовательностей, сходящихся к точкам $\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)$ соответственно (см. [15, с. 9]). Это означает, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} X_i(m + p\tau, u(m + p\tau), X_1) = \beta_i^m(u), \quad m = 1, 2, \dots, \tau, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $Y(j) = \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)$. Поскольку $u_i(k + \tau) = u_i(k)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} Y(m + p\tau) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i(m + p\tau) X_i(m + p\tau, u(m + p\tau), X_1) u_i(m + p\tau) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(m) \beta_i^m(u) u_i(m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, X(1)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p\tau} \sum_{j=1}^{p\tau} Y(j) \\ &= \frac{1}{\tau} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\tau} Y(m + p\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(m) \beta_i^m(u) u_i(m). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.2) выполнено для любой точки $X_1 \in V$.

Найдем значение эффективности сбора ресурса при периодическом режиме эксплуатации $u_i(j + \tau) = u_i(j)$, $j = 1, 2, \dots$:

$$E(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j)} = \frac{\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)}{\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j)}.$$

Таким образом, получили равенства (1.2) и (1.3), выполненные для любой начальной точки $X_1 \in V$. $\square$

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{n\tau}$. Рассмотрим функцию

$$D(x) \doteq \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) (F_i(j, x(j)) - x_i(j))$$

и множество

$$G \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^{n\tau} : x(1) \leq F(\tau, x(\tau)) \neq 0; x(k) \leq F(k-1, x(k-1)) \neq 0, k = 2, \dots, \tau\}.$$

Неравенство вида $x \leq y$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ всюду в статье будем понимать как совокупность неравенств $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1.1. *Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G} \subseteq G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$ таких, что $(X(1), \dots, X(\tau)) \in \tilde{G}$, выполнено неравенство*

$$H(\bar{u}, X(1)) \leq H(\bar{u}^*, x^*(1)) = D(x^*),$$

где $\bar{u}^* \in U(\tau)$ — периодическое управление такое, что

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))}, \quad k = 2, \dots, \tau. \quad (1.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\tilde{X}(k) \doteq (1 - u(k))X(k)$ видовой состав популяции после сбора в момент времени $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\tilde{X}(k+1) = (1 - u(k+1))F(k, \tilde{X}(k)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Пусть $z(u(1), \dots, u(\tau)) \doteq \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)$. Найдем наибольшее значение этой функции при условии, что $X(k+\tau) = X(k)$ и $u(k+\tau) = u(k)$, $k = 1, 2, \dots$. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 z(u(1), \dots, u(\tau)) &= \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \\
 &= \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n C_i(j) F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1)) u_i(j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) u_i(j+1) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) (1 - u_i(j+1)) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) \tilde{X}_i(j+1) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) (F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \tilde{X}_i(j)). \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $z(u(1), \dots, u(\tau)) = \tau \cdot D(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))$. Следовательно, наибольшее значение функции $z(u(1), \dots, u(\tau))$ совпадает с наибольшим значением $\tau \cdot D(x(1), \dots, x(\tau))$ и достигается при $(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau)) = x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G}$. Поэтому

$$\tilde{X}(1) = \tilde{X}(\tau+1) = (1 - u(\tau+1)) F(\tau, \tilde{X}(\tau)) = (1 - u^*(1)) F(\tau, x^*(\tau)) = x^*(1),$$

$$\tilde{X}(k) = (1 - u^*(k)) F(k-1, \tilde{X}(k-1)) = (1 - u^*(k)) F(k-1, x^*(k-1)) = x^*(k), \quad k = 2, \dots, \tau.$$

Отсюда получаем выражение для периодического управления, заданного (1.4).

Таким образом, по предложению 1.1 максимальное значение функции $H(\bar{u}, X(1))$ равно (1.2). $\square$

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{\tau}$. Для оценки эффективности сбора возобновляемого ресурса рассмотрим функцию

$$E(x) \doteq \tau D(x) \left(\tau n - \sum_{i=1}^n \frac{x_i(1)}{F_i(\tau, x(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{x_i(j)}{F_i(j-1, x(j-1))} \right)^{-1}$$

и множество $\tilde{G} \subseteq G$.

Теорема 1.2. *Предположим, что функция $E(x)$ достигает наибольшего значения $E(x^*)$ в точке $x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G} \subseteq G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$ таких, что $(X(1), \dots, X(\tau)) \in \tilde{G}$, выполнено неравенство*

$$E(\bar{u}, X(1)) \leq E(\bar{u}^*, x^*(1)) = E(x^*),$$

где $\bar{u}^* \in U(\tau)$ — периодическое управление такое, что

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))}, \quad k = 2, \dots, \tau. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть

$$v(u(1), \dots, u(\tau)) \doteq \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \left(\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}.$$

Из (1.6) следует

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) = \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \left(F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \tilde{X}_i(j) \right).$$

Учитывая, что $X(k + \tau) = X(k)$, $u(k + \tau) = u(k)$, $k = 1, 2, \dots$, и принимая во внимание (1.5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n u_i(j) &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j+1) = \tau n - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{(1 - u_i(j+1)) F_i(j, \tilde{X}_i(j))}{F_i(j, \tilde{X}_i(j))} \\ &= \tau n - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j+1)}{F_i(j, \tilde{X}_i(j))} = \tau n - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(1)}{F_i(\tau, \tilde{X}_i(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j)}{F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1))}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$v(u(1), \dots, u(\tau)) = \frac{\tau \cdot D(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))}{\tau n - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(1)}{F_i(\tau, \tilde{X}_i(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j)}{F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1))}}.$$

Следовательно $v(u(1), \dots, u(\tau)) = E(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))$. Наибольшее значение функции $v(u(1), \dots, u(\tau))$ совпадает с наибольшим значением $E(x(1), \dots, x(\tau))$ и достигается при $(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau)) = x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G}$ и управлениях, заданных (1.7).

Значит, по предложению 1.1 максимальное значение функции $E(\bar{u}, X(1))$ равно (1.4). $\square$

2. Примеры построения оптимальных режимов эксплуатации популяций

Пример 2.1. Найдем оптимальные режимы промысла однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = a(k)x(k)(1-x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $x \in [0, 1]$ — численность популяции, $a(k) > 0$ — коэффициент собственной скорости роста. Предполагаем, что коэффициент $a(k)$ периодический с периодом 2; пусть $a(k) = 1.5$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $a(k) = 3$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Тогда развитие однородной популяции можно описать периодическими функциями

$$F(1, x(1)) = 1.5x(1)(1-x(1)), \quad F(2, x(2)) = 3x(2)(1-x(2)).$$

Будем считать, что агрегированная стоимость условной единицы однородной популяции равна $C(1) = 1$ и $C(2) = 2$. Функция

$$\begin{aligned} D(x(1), x(2)) &= \frac{1}{2} \left(F(1, x(1)) - x(1) + F(2, x(2)) - x(2) \right) \\ &= 0.25x(1)(1-3x(1)) + x(2)(2-3x(2)) \end{aligned}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 0.3418, на множестве

$$G = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x(1) \leq F(2, x(2)) \neq 0, x(2) \leq F(1, x(1)) \neq 0\},$$

при $x^*(1) \approx 0.2702$, $x^*(2) \approx 0.2958$ и управлениях $u^*(1) \approx 0.5676$, $u^*(2) = 0$ (рис. 1 а).
Функции

$$E(x(1), x(2)) = 2D(x(1), x(2)) \left(2 - \frac{x(1)}{F(2, x(2))} - \frac{x(2)}{F(1, x(1))} \right)^{-1}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 2.0465, на множестве $\tilde{G} \subseteq G$ таком, что

$$\tilde{G} = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : D(x(1), x(2)) \geq 0.5, x(1) \leq F(2, x(2)) \neq 0, x(2) \leq F(1, x(1)) \neq 0\},$$

при $x^*(1) \approx 0.5305$, $x^*(2) \approx 0.3736$ и управлениях $u^*(1) \approx 0.2443$, $u^*(2) = 0$ (рис. 1 б).

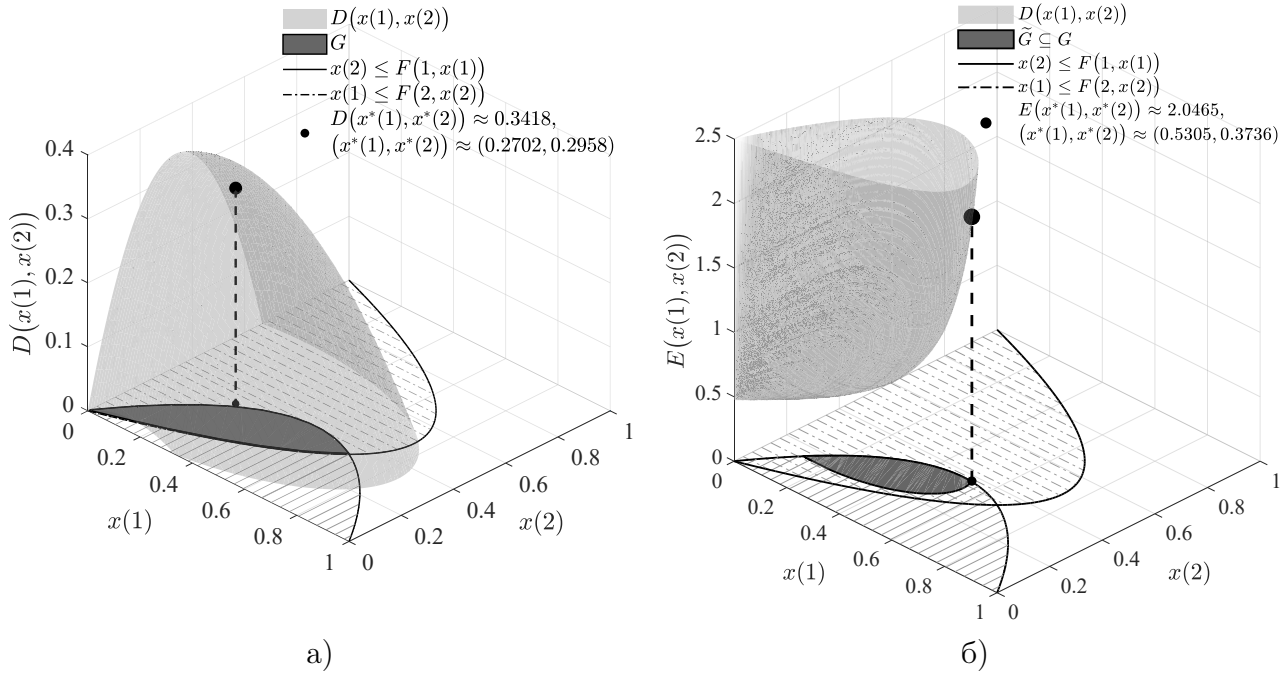


Рис. 1. Функции $D(x(1), x(2))$, $E(x(1), x(2))$ и наибольшие значения характеристик сбора ресурса для популяции, заданной логистическим уравнением (2.1): а) наибольшее значение функции $D(x(1), x(2))$ (светло-серая поверхность) достигается на границе множества G (темно-серая область) при $(x^*(1), x^*(2)) \approx (0.2702, 0.2958)$ (черная точка на поверхности) и управлениях $u^*(1) \approx 0.5676$, $u^*(2) = 0$; б) наибольшее значение функции $E(x(1), x(2))$ (светло-серая поверхность) достигается на множестве $\tilde{G} \subseteq G$ (темно-серая область) при $D(x(1), x(2)) = 0.5$ в точке $(x(1), x(2)) \approx (0.5305, 0.3736)$ (черная точка на поверхности) и управлениях $u(1) \approx 0.2443$, $u(2) = 0$.

Пример 2.2. Найдем оптимальные управляющие воздействия, при которых функция $D(x)$ достигает наибольшего значения. Рассмотрим модель двухвозрастной популяции, динамика которой описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = b(k)x_1(k) + x_1(k)x_2(k) - 2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + \frac{1}{4}x_1(k)x_2(k) - 3x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k) \in [0, 1]$ и $x_2(k) \in [0, 1]$ — численность младшего и старшего возрастного класса соответственно в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$, $b(k) > 0$ — периодический (с периодом 2) коэффициент собственной скорости роста младшего возрастного класса. Пусть $b(k) = 2$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $b(k) = 4$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Развитие двухвозрастной популяции можно описать периодическими функциями

$$F(1) = (F_1(1, x(1)), F_2(1, x(1))), \quad F(2) = (F_1(2, x(2)), F_2(2, x(2))),$$

где $x(1) = (x_1(1), x_2(1))$, $x(2) = (x_1(2), x_2(2))$,

$$\begin{aligned} F_1(1, x(1)) &= 2x_1(1) + x_1(1)x_2(1) - 2x_1^2(1), & F_1(2, x(2)) &= 4x_1(2) + x_1(2)x_2(2) - 2x_1^2(2), \\ F_2(1, x(1)) &= 4x_2(1) + \frac{1}{4}x_1(1)x_2(1) - 3x_2^2(1), & F_2(2, x(2)) &= 4x_2(2) + \frac{1}{4}x_1(2)x_2(2) - 3x_2^2(2). \end{aligned}$$

Пусть $C_1(k) = 1$ для всех $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$, $C_1(k) = 2$ для всех $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$ и $C_2(k) = 4$ для любого $k = 0, 1, 2, \dots$. Функция

$$\begin{aligned} D(x(1), x(2)) &= 0.5x_1(1)(1 - 2x_1(1)) + 6x_2(1)(1 - x_2(1)) + x_1(2)(3 - 2x_1(2)) \\ &\quad + 6x_2(2)(1 - x_2(2)) + x_1(1)x_2(1) + 1.5x_1(2)x_2(2) \end{aligned}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 5.0243, на множестве G при $x_1^*(1) \approx 0.5217$, $x_2^*(1) \approx 0.5434$, $x_1^*(2) \approx 0.7826$, $x_2^*(2) \approx 0.6229$ и управлениях $u_1^*(1) \approx 0.7819$, $u_2^*(1) \approx 0.6250$, $u_1^*(2) = 0$, $u_2^*(2) \approx 0.5415$.

References

- [1] A. S. Ackleh, S. R. J. Jang, “A discrete two-stage population model: continuous versus seasonal reproduction”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **13**:4 (2007), 261–274.
- [2] К. В. Шлюфман, Г. П. Неверова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром”, *Нелинейная динамика*, **13**:3 (2017), 363–380. [K. V. Shlufman, G. P. Neverova, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of the Ricker model with periodic Malthusian parameter”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **13**:3 (2017), 363–380 (In Russian)].
- [3] M. Fan, K. Wang, “Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients”, *Mathematical Biosciences*, **152**:2 (1998), 165–178.
- [4] L. Dong, L. Chen, L. Sun, “Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **8**:2 (2007), 572–578.
- [5] M. Liu, “Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients”, *Journal of Nonlinear Science*, **32**:23 (2022), 23.
- [6] Г. П. Неверова, Р. Г. Хлебопрос, Е. Я. Фрисман, “Влияние эффекта Олли на динамику популяций с сезонным характером размножения”, *Биофизика сложных систем*, **62**:6 (2017), 1174–1184; англ. пер.: G. P. Neverova, R. G. Khlebopros, E. Y. Frisman, “The Allee effect in population dynamics with a seasonal reproduction pattern”, *Biophysics*, **62**:6 (2017), 967–976.
- [7] Е. В. Ашихмина, Ю. Г. Израильский, “Оптимизации промысла популяций при циклическом изменении лимитирующих рост численности факторов среды”, *Информатика и системы управления*, **2(20)** (2009), 11–18. [E. V. Ashikhmina, Yu. G. Izraily, “Harvest optimization for population, when environment conditions limiting population growth change cyclically”, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **2(20)**:2 (2009), 11–18 (In Russian)].
- [8] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, “On optimal harvesting in age-structured populations”, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance, **22**, eds. H. Dawid, K. F. Doerner, G. Feichtinger, P. M. Kort, A. Seidl, 2016, 149–166.

- [9] А. А. Давыдов, Д. А. Мельник, “Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором”, Труды Института математики и механики УрО РАН, **27**, 2021, 99–107; англ. пер.: A. A. Davydov, D. A. Melnik, “Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse harvesting”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315**:suppl. 1 (2021), S81–S88.
- [10] Е. О. Бурлаков, В. А. Ярема, “О задачах импульсного управления, возникающих при разработке автоматизированных систем контроля численности вредителей в тепличных комплексах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:148 (2024), 381–390. [E. O. Burlakov, V. A. Yarema, “On impulse control problems arising in automatization of pests control in greenhouses”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:148 (2024), 381–390 (In Russian)].
- [11] L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “Problems of optimal resource harvesting for infinite time horizon”, *Journal of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 609–623.
- [12] Л. И. Родина, А. В. Черникова, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **29**:1 (2023), 167–179. [L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **29**:1 (2023), 167–179 (In Russian)].
- [13] А. В. Черникова, “О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 386–404. [A. V. Chernikova, “About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 386–404 (In Russian)].
- [14] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].
- [15] А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко, *Динамика одномерных отображений*, Наукова думка, Киев, 1989, 216 с. [A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, V. V. Fedorenko, *Dynamics of One-Dimensional Maps*, Naukova Dumka, Kiev, 1989 (In Russian), 216 pp.]

Информация об авторах

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики. Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Хаммади Алаа Хуссейн, кандидат физико-математических наук, преподаватель, Университет Аль-Кадисия, г. Аль-Дивания, Ирак. E-mail: alaa.hammadi@qu.edu.iq
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1740-1145>

Information about the authors

Lyudmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Alaa H. Hammadi, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer, University of Al-Qadisiyah, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: alaa.hammadi@qu.edu.iq
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1740-1145>

Черникова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация.
E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Родина Людмила Ивановна
E-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила в редакцию 25.04.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2025 г.
Принята к публикации 12.09.2025 г.

Anastasia V. Chernikova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Lyudmila I. Rodina
E-mail: LRodina67@mail.ru

Received 25.04.2025
Reviewed 02.09.2025
Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Сенгупта Р., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

УДК 515.126.4



О зависимости неподвижной точки от параметра в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах

Ричик СЕНГУПТА

АНО «Институт искусственного интеллекта»

123317, Российская Федерация, г. Москва, Деловой комплекс «Империя», Пресненская набережная, 6

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В статье исследуется вопрос о непрерывной зависимости неподвижных точек сжимающих отображений, действующих в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах, от параметра. Рассматривается уравнение вида $x = F(x, p)$. В нем $x \in X$ — это неизвестная, принадлежащая полному (q_1, q_2) -квазиметрическому пространству X , p — это параметр, лежащий в заданном топологическом пространстве P , а $F : X \times P \rightarrow X$ — это заданное отображение. Предполагается, что это отображение является сжимающим по переменной x . С использованием известных условий существования и единственности неподвижной точки сжимающих отображений полных (q_1, q_2) -квазиметрических пространств, получены достаточные условия, при которых отображение, которое каждому $p \in P$ ставит в соответствие решение $x(p)$ рассматриваемого уравнения, является непрерывным. Получено следствие, гарантирующее непрерывность отображения $x(p)$ в случае, когда X является полным метрическим пространством. Кроме того, рассмотрен случай, когда топологическое пространство P является (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством. Получены достаточные условия липшицевости отображения $x(p)$, получена оценка константы Липшица этого отображения. Выведено следствие этого результата для случая, когда X является полным метрическим пространством, а пространство параметров P является метрическим.

Ключевые слова: квазиметрические пространства, непрерывная зависимость от параметра, решение неявных уравнений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

Для цитирования: Сенгупта Р. О зависимости неподвижной точки от параметра в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 267–274. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

SCIENTIFIC ARTICLE

© R. Sengupta, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

On the dependence of a fixed point on a parameter in (q_1, q_2) -quasimetric spaces

R. SENGUPTA

Artificial Intelligence Research Institute

6 Presnenskaya embankment, Business Complex “Empire”, Moscow 123317, Russian Federation

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In the paper, we investigate the problem of continuous dependence of fixed points of contractive mappings in (q_1, q_2) -quasimetric spaces on a parameter. We study equations of the form $x = F(x, p)$ where $x \in X$ is the unknown variable in a complete (q_1, q_2) -quasimetric space X , the parameter p lies in a given topological space P , and $F : X \times P \rightarrow X$ is a prescribed mapping. It is assumed that F is contractive in the variable x .

Using the classical existence and uniqueness results for fixed points of contractive mappings in complete (q_1, q_2) -quasimetric spaces, we derive sufficient conditions ensuring that the mapping assigning to each parameter $p \in P$ the corresponding solution $x(p)$ of the equation is continuous. As a corollary, we establish continuity of $x(p)$ in the case where X is a complete metric space.

We further consider the situation where the parameter space P itself carries the structure of a (q_1, q_2) -quasimetric space. In this context, sufficient conditions are obtained guaranteeing that the solution map $x(p)$ is Lipschitz continuous, together with an explicit estimate for its Lipschitz constant. As a consequence, we present a corollary for the case when X is a complete metric space and P is a metric space.

Keywords: quasimetric spaces, continuous dependence on a parameter, solution of implicit equations

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, <https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/>).

Mathematics Subject Classification: 54A05, 54H25.

For citation: Sengupta R. On the dependence of a fixed point on a parameter in (q_1, q_2) -quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 267–274. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

Введение

Одним из фундаментальных результатов теории неподвижных точек является принцип сжимающих отображений (см., например, [1, с. 82]). Эта теорема утверждает, что для любого сжимающего отображения F полного метрического пространства в себя существует единственное решение уравнения $x = F(x)$. Принцип сжимающих отображений имеет многочисленные обобщения. Так, например, в [2] это утверждение было доказано для отображений некоторого широкого класса пространств, содержащего в себе все полные метрические пространства. Напомним, какие пространства рассматривались в [2].

Пусть задано непустое множество X и функция $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Здесь $\mathbb{R}_+$ — это множество неотрицательных чисел. Как известно, функция ρ_X называется метрикой, а пара (X, ρ_X) — метрическим пространством, если выполнены следующие условия:

- 1) $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho_X(x, z) \leq \rho_X(x, y) + \rho_X(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Функцию ρ_X называют квазиметрикой, а пару (X, ρ_X) — квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы тождества и неравенство треугольника (см., например, [2]).

Пусть заданы числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Рассмотрим еще одну аксиому для функции ρ_X

- 3') $\rho_X(x, z) \leq q_1 \rho_X(x, y) + q_2 \rho_X(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ ((q_1, q_2) — обобщенное неравенство треугольника).

Функцию ρ_X называют (q_1, q_2) -квазиметрикой, а пару (X, ρ_X) — (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы 1) и 3') (см., например, [2, с. 527], [3, с. 34]). Очевидно, что $(1, 1)$ -квазиметрика является квазиметрикой, а $(1, 1)$ -квазиметрическое пространство является квазиметрическим пространством.

Для (q_1, q_2) -квазиметрических пространств в [2] был доказан следующий аналог принципа сжимающих отображений. Пусть (X, ρ_X) — это полное (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, отображение $F : X \rightarrow X$ является замкнутым и сжимающим, т. е. существует константа $0 \leq \beta < 1$, такая, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\rho_X(F(x_1), F(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2).$$

Тогда уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение.

В настоящей работе рассматривается более общее уравнение

$$x = F(x, p)$$

с параметром p , лежащим в заданном топологическом пространстве P , в предположении, что при каждом $p \in P$ отображение $F(\cdot, p)$ является сжимающим отображением полного (q_1, q_2) -квазиметрического пространства X в себя. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить условия, при которых решение этого уравнения $x(p)$ непрерывно. Кроме того, предполагая, что топологическое пространство P является (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, мы получим достаточные условия липшицевости отображения $x(p)$.

Результаты, связанные с поиском неподвижных точек отображений и решений неявных уравнений в метрических пространствах, имеют широкий спектр применений в различных областях анализа, включая оптимизацию (см., например, [4]), оптимальное управление (см., например, [5]), теорию дифференциальных включений (см., например, [5]), теорию точек совпадения (см., например, [6–9]) и математическую экономику (см., например, [10]). Существует множество обобщений и модификаций вариационных принципов, которые позволяют получить вышеупомянутые результаты (см., например, [11, 12]).

1. Предварительные сведения

Пусть заданы числа $q_1, q_2 \geq 1$. Пусть (X, ρ_X) — это (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Напомним ряд определений, связанных с этим понятием.

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется *сходящейся* к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_X(x, x_i) < \varepsilon$ для любого $i > N$. В отличие от метрических пространств, (q_1, q_2) -квазиметрические пространства могут быть нехаусдорфовы. Поэтому сходящаяся последовательность может иметь более одного предела (см., например, [2, 13]).

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_X(x_j, x_i) < \varepsilon$ для любых $i > j > N$. В отличие от метрических пространств, в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах из сходимости последовательности не следует ее фундаментальность (см., например, [2]).

Пространство (X, ρ_X) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Отображение $F : X \rightarrow X$ называется *сжимающим* с константой $0 \leq \beta < 1$, если для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\rho_X(F(x_1), F(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2).$$

Пусть заданы числа $\tilde{q}_1 \geq 1$, $\tilde{q}_2 \geq 1$, $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрическое пространство (Y, ρ_Y) и отображение $F : X \rightarrow Y$. Обозначим график отображения F через $\text{grh}(F)$, т. е.

$$\text{grh}(F) := \{(x, F(x)) : x \in X\}.$$

Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ и точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ таких, что $x_i \rightarrow x_0$, $y_i \rightarrow y_0$ и $(x_i, y_i) \in \text{grh}(F)$ для любого i , выполняется $(x_0, y_0) \in \text{grh}(F)$. В отличие от метрических пространств, в квазиметрических пространствах график сжимающего отображения может не быть замкнутым (см., например, [2]).

Пусть P — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Отображение $F : P \rightarrow X$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности $p_n \in P$ и любой точки $p \in P$, если $p_n \rightarrow p$ (в топологическом пространстве P), то $F(p_n) \rightarrow F(p)$.

2. Основные результаты

Пусть заданы числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Пусть (X, ρ_X) — это (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, P — это топологическое пространство, $F : X \times P \rightarrow X$ — это заданное отображение.

Рассмотрим уравнение

$$x = F(x, p) \tag{2.1}$$

с неизвестным $x \in X$ и параметром $p \in P$. Приведем достаточные условия существования решения $x(p)$, зависящего от параметра $p \in P$ непрерывно.

Теорема 2.1. *Предположим, что (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) полно, а в топологическом пространстве P выполняется первая аксиома счетности. Пусть отображение $F : X \times P \rightarrow X$ удовлетворяет следующим предположениям:*

- 1) *существует неотрицательное число $\beta < 1/q_2$ такое, что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β , т. е.*

$$\rho_X(F(x_1, p), F(x_2, p)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall p \in P; \quad (2.2)$$

- 2) *для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является замкнутым;*
- 3) *для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является непрерывным.*

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P .

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $p \in P$. Из предположений доказываемой теоремы следует, что выполняются все условия принципа сжимающих отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах из [2, с. 15]. Из него следует, что уравнение $x = F(x, p)$ имеет единственное решение $x(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in P$ отображение $x(\cdot)$ определено на всем пространстве P . Покажем, что это отображение непрерывно.

Зафиксируем произвольную точку $p \in P$ и произвольную сходящуюся к ней последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset P$. Из определения отображения $x(\cdot)$ следует, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) = \rho_X(F(x(p), p), F(x(p_n), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Применяя обобщенное неравенство треугольника к правой части этого равенства получаем неравенство

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n)) + q_2 \rho_X(F(x(p), p_n), F(x(p_n), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, из первого предположения доказываемой теоремы следует неравенство

$$\rho_X(F(x(p), p_n), F(x(p_n), p_n)) \leq \beta \rho_X(x(p), x(p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Из последних двух неравенств следует, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n)) + q_2 \beta \rho_X(x(p), x(p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$(1 - q_2 \beta) \rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\beta < 1/q_2$, то $1 - q_2 \beta > 0$. Поэтому, разделив последнее неравенство на $1 - q_2 \beta$, получаем, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq \frac{q_1}{1 - q_2 \beta} \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$.

По предположению доказываемой теоремы отображение $F(x(p), \cdot)$ непрерывно на пространстве P . Отсюда, поскольку $p_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$, правая часть в полученном выше неравенстве стремится к нулю. Следовательно, $x(p_n) \rightarrow x(p)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, в силу произвольности выбора точки $p \in P$ и сходящейся к ней последовательности p_n отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P . $\square$

Если (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, то оно является полным (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством с $q_1 = q_2 = 1$. В этом случае, для любого сжимающего отображения его константа сжатия β удовлетворяет соотношению $\beta < 1 = 1/q_2$. Наконец, как известно, любое сжимающее отображение метрического пространства X в себя является замкнутым и, более того, непрерывным. Таким образом, из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, (P, ρ_P) — это метрическое пространство. Предположим, что

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1$, такое что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β ;
- 2) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является непрерывным.

Тогда для каждого $p \in P$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $x(p)$, причем отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P .

В близких предположениях это утверждение доказано, например, в [7, гл. I, § 1.1, (A4)].

Далее будем предполагать, что заданы числа $\tilde{q}_1 \geq 1$ и $\tilde{q}_2 \geq 1$. Пусть теперь топологическое пространство P является $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрическим пространством с $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрикой ρ_P . Приведем достаточные условия липшицевости функции решения $x(p)$ для уравнения (2.1).

Теорема 2.2. Предположим, что (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) полно. Пусть отображение $F : X \times P \rightarrow X$ удовлетворяет следующим предположениям:

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1/q_2$ такое, что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β , т. е. имеет место (2.2);
- 2) для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является замкнутым;
- 3) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является липшицевым с константой Липшица $L > 0$, т. е.

$$\rho_X(F(x, p_1), F(x, p_2)) \leq L \rho_P(p_1, p_2) \quad \forall p_1, p_2 \in P.$$

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и для любых $p_1, p_2 \in P$ имеет место неравенство

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq \frac{q_1 L}{1 - q_2 \beta} \rho_P(p_1, p_2). \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя рассуждения, приведенные в начале доказательства теоремы 2.1, из принципа сжимающих отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах [2, с. 15] получаем, что уравнение (2.1) имеет единственное решение $x(p)$ при каждом $p \in P$. Перейдем к доказательству липшицевости отображения $x(\cdot)$.

Зафиксируем две произвольные точки $p_1, p_2 \in P$. Из определения отображения $x(\cdot)$ вытекают равенства $x(p_1) = F(x(p_1), p_1)$ и $x(p_2) = F(x(p_2), p_2)$. Поэтому

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) = \rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_2), p_2)).$$

Применяя обобщенное неравенство треугольника к правой части этого равенства, получаем, что

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_1), p_2)) + q_2 \rho_X(F(x(p_1), p_2), F(x(p_2), p_2)). \quad (2.4)$$

Из липшицевости отображения $F(x(p_1), \cdot)$ с константой Липшица L следует, что имеет место неравенство

$$\rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_1), p_2)) \leq L \rho_P(p_1, p_2).$$

А так как отображение $F(\cdot, p_2)$ является сжимающим с константой сжатия β , получаем, что имеет место неравенство

$$\rho_X(F(x(p_1), p_2), F(x(p_2), p_2)) \leq \beta \rho_X(x(p_1), x(p_2)).$$

Из последних двух неравенств и соотношения (2.4) следует, что

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 L \rho_P(p_1, p_2) + q_2 \beta \rho_X(x(p_1), x(p_2)).$$

Следовательно,

$$(1 - q_2 \beta) \rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 L \rho_P(p_1, p_2).$$

Из этого неравенства, поскольку по предположению 1) доказываемой теоремы имеет место соотношение $1 - q_2 \beta > 0$, получаем (2.3) $\square$

Как отмечалось выше, если (X, ρ_X) является полным метрическим пространством, то оно является полным (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством с $q_1 = q_2 = 1$; константа сжатия $\beta < 1$ сжимающего отображения удовлетворяет соотношению $\beta < 1 = 1/q_2$; а само сжимающее отображение метрического пространства X в себя является замкнутым. Таким образом, из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, (P, ρ_P) — это метрическое пространство. Предположим, что

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1$, такое что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β ;
- 2) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является липшицевым с константой Липшица $L > 0$.

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и для любых $p_1, p_2 \in P$ имеет место неравенство

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq \frac{L}{1 - \beta} \rho_P(p_1, p_2).$$

References

- [1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

- [2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Dokl. RAS*, **469**:5 (2016), 434–437.
- [3] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, Р. Сенгупта, “О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:125 (2019), 33–38. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, R. Sengupta, “On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:125 (2019), 33–38 (In Russian)].
- [4] A. V. Arutyunov, B. D. Gel'man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.
- [5] A. V. Arutyunov, V. A. de Oliveira, F. L. Pereira, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the solvability of implicit differential inclusions”, *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.
- [6] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.
- [7] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer–Verlag, New York, 2003.
- [8] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, “Stability Theorems for Estimating the Distance to a Set of Coincidence Points”, *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.
- [9] М. В. Борзова, Е. С. Жуковский, Н. Ю. Черникова, “Одна оценка неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1255–1260. [M. V. Borzova, E. S. Zhukovskiy, N. Yu. Chernikova, “One estimate of fixed points and coincidence points of mappings of metric spaces”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1255–1260 (In Russian)].
- [10] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, N. G. Pavlova, “Equilibrium price as a coincidence point of two mappings”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:2 (2013), 158–169.
- [11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [12] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.
- [13] R. Sengupta, “On fixed points of contraction maps acting in (q_1, q_2) -quasimetric spaces and geometric properties of these spaces”, *Eurasian Math. J.*, **8**:3 (2017), 70–76.

Информация об авторе

Сенгупта Ричик, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт искусственного интеллекта, г. Москва; научный сотрудник Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 30.05.2025 г.

Поступила после рецензирования 05.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Richik Sengupta, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Research Scientist, Artificial Intelligence Research Institute, Moscow; Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.

E-mail: r.sengupta@skoltech.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

There is no conflict of interests.

Received 30.05.2025

Reviewed 05.09.2025

Accepted for press 12.09.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Сумин М.И., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304>

УДК 517.9



Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается регуляризация принципа Лагранжа (ПЛ) и теоремы Куна–Таккера (ТКТ) в недифференциальной форме в нелинейной (невыпуклой) задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением-равенством. Существование решения задачи априори не предполагается. Ограничение-равенство содержит аддитивно входящий в него параметр, что обеспечивает возможность применения для исследования задачи «нелинейного варианта» метода возмущений. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ТКТ — устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП) в рассматриваемой задаче. Их можно трактовать как ОМП-образующие (регуляризующие) операторы, ставящие в соответствие каждому набору исходных данных задачи субминималь (минималь) ее отвечающего этому набору регулярного модифицированного функционала Лагранжа (МФЛ), двойственная переменная в котором генерируется в соответствии с процедурой стабилизации по Тихонову двойственной задачи. Конструкция МФЛ полностью определяется видом «нелинейных» субдифференциалов (проксимальный субградиент, субдифференциал Фреше) полунепрерывной снизу функции значений как функции параметра задачи. Регуляризованные ПЛ и ТКТ «преодолевают» свойства некорректности классических аналогов, составляя тем самым теоретическую основу для создания устойчивых методов решения нелинейных задач оптимального управления. В частном случае, когда задача регулярна в смысле существования в ней обобщенного вектора Куна–Таккера, а ее исходные данные аффинным образом зависят от управления, предельный переход в соотношениях регуляризованной ТКТ ведет к условиям оптимальности в форме соответствующих недифференциальной ТКТ и принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: нелинейное оптимальное управление, поточечное фазовое ограничение-равенство, обобщенная минимизирующая последовательность, метод возмущений, субдифференциалы нелинейного анализа, регуляризация, двойственность, принцип Лагранжа

Благодарности: Результаты, представленные в разделах 1–4, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>); результаты, представленные в разделе 5, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области (проект № 2-ФП-2023).

Для цитирования: Сумин М.И. Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 275–304. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304>

SCIENTIFIC ARTICLE

© M. I. Sumin, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304>

Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in a nonlinear optimal control problem with pointwise state equality-constraint

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The regularization of the Lagrange principle (LP) and the Kuhn–Tucker theorem (KTT) in a non-differential form is considered in a nonlinear (non-convex) optimal control problem for a system of ordinary differential equations with a pointwise state equality constraint. The existence of a solution to the problem is not assumed a priori. The equality constraint contains an additive parameter, which makes it possible to use the “nonlinear version” of the perturbation method to study the problem. The main purpose of the regularized LP and KTT is to stably generate generalized minimizing sequences (GMS) in the problem under consideration. They can be interpreted as GMS-forming (regularizing) operators that associate with each set of initial data of the problem a subminimal (minimal) of its regular augmented Lagrangian (AL) functional corresponding to this set, the dual variable in which is generated in accordance with the Tikhonov stabilization procedure of the dual problem. The construction of the AL is completely determined by the form of the “nonlinear” subdifferentials (proximal subgradient, Frechet subdifferential) of the lower semicontinuous function of values as a function of the problem parameter. Regularized LP and KTT “overcome” the properties of ill-posedness of classical analogs, thus giving a theoretical basis for creating stable methods for solving nonlinear optimal control problems. In the particular case when the problem is regular in the sense of the existence of a generalized Kuhn-Tucker vector in it, and its initial data depend affinely on the control, the limit transition in the relations of the regularized KTT leads to optimality conditions in the form of the corresponding non-differential KTT and Pontryagin’s maximum principle.

Keywords: nonlinear optimal control, pointwise state equality constraint, generalized minimizing sequence, perturbation method, subdifferentials of nonlinear analysis, regularization, duality, Lagrange principle

Acknowledgements: The results of Introduction and Sections 1-4 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, <https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/>). The results of Section 5 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region (project no. 2-ФП-2023).

Mathematics Subject Classification: 49K15 47A52 49N15 90C46.

For citation: Sumin M.I. Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in a nonlinear optimal control problem with pointwise state equality-constraint. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 275–304. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304>

Введение

С формальной точки зрения «математическая природа» задач на экстремум при наличии ограничений и, в частности, задач оптимального управления, такова, что, в целом, всю их совокупность мы можем рассматривать как типичный класс некорректных задач [1]. Различные примеры задач на условный экстремум, в которых нарушается хотя бы одно из трех условий корректности по Адамару [2], хорошо известны [1, 3]. Вместе с тем, на каждого конкретного представителя этого важного класса математических задач, в зависимости от содержательного смысла задачи и точки зрения исследователя, с «равным успехом», можно одновременно смотреть с двух существенно различных позиций.

При первом подходе, который можно считать традиционным и привычным для *теории экстремальных задач* [4, 5], исходные данные задач на экстремум с ограничениями (функции, функционалы, операторы, участвующие в задании критерия качества, ограничений типа равенства и неравенства и т. п.) трактуются как «жестко» заданные (фиксированные) математические «объекты». Такой подход лежит в основе этой теории, ядро которой составляют различные результаты, связанные с правилом множителей Лагранжа — принципом Лагранжа (ПЛ), его регулярным вариантом — теоремой Куна–Таккера (ТКТ) и принципом максимума Понтрягина (ПМП) [4, 5].

Однако, с другой стороны, совершенно естественным является и то, что в задачах на условный экстремум «особый упор» делается на связь оптимизационной теории с проблемами ее приложений. В отличие от первого, такой подход в *теории условной оптимизации* допускает, что исходные данные экстремальной задачи могут содержать погрешности [1]. Более того, требование точного знания исходных данных при постановке конкретных задач условной оптимизации, возникающих в современных естественнонаучных приложениях, часто противоречит физической сути этих задач. Это объясняется тем, что исходные данные многих подобных задач связаны с результатами того или иного физического эксперимента, проведение которого сопряжено с неизбежными погрешностями [3, 6, 7].

При выводе необходимых (и достаточных) условий оптимальности в теории экстремальных задач мы находимся в рамках первого подхода и не задумываемся о том корректна или нет данная экстремальная задача, ибо при получении условий оптимальности приходится опираться на иные факты [4, 5]. В то же время, в рамках второго подхода к задачам условной оптимизации возникает серьезная теоретическая проблема, связанная с естественным в этом случае желанием ответить на следующий вопрос. Как увязать обязательное требование точного задания исходных данных при получении классических условий оптимальности (КУО) с естественным желанием использовать последние и при решении задач условной оптимизации в отсутствие этого требования? Отвечая на него, мы неизбежно приходим к проблеме регуляризации задач условной оптимизации и, в частности, регуляризации КУО. Последнее связано с хорошо известными проблемами некорректности как самих задач условной оптимизации [1], в целом, так и соответствующих им КУО [8–10]. Одновременно следует учитывать и то, что установление факта корректности или некорректности экстремальной задачи «далеко не всегда является легким делом».

Можно утверждать, что КУО имеют самое непосредственное отношение сразу к двум важным направлениям математической теории. С одной стороны, они являются основой всей теории экстремальных задач [4, 5], с другой же, составляют базовый инструментарий теории некорректных задач [3, 7]. Тем самым мы оказываемся в естественной ситуации возможного разумного сопряжения привычных методов теории экстремальных задач

с методами, развитыми в рамках теории некорректных задач. В настоящей статье автор продолжает линию работ, в которых возможность указанного сопряжения реализуется в форме регуляризации КУО [8–10]. С точки зрения теории некорректных задач КУО в регуляризованном виде можно трактовать как устойчивые к ошибкам исходных данных, т. е. регуляризирующие, алгоритмы для решения большого числа некорректных задач на условный экстремум [8–10], что лишний раз говорит в пользу универсальности тех идей, что лежат в основе теории ПЛ.

Хорошо известно, что в теории оптимального управления получение КУО во многих задачах сопряжено с преодолением трудностей существенного характера. К таким, по традиции считающимися сложными, относятся задачи с операторными (т. е. задаваемыми операторами с бесконечномерными образами) ограничениями. Традиционно к подобным сложным задачам с операторными ограничениями, в первую очередь, относятся задачи с поточечными фазовыми ограничениями, со смешанными ограничениями типа равенства и неравенства [4, 11, 12]. Рассматриваемая ниже в статье нелинейная задача оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством является одной из таких сложных задач. Получение условий оптимальности в задачах с таким ограничением, относящимся к классу так называемых нерегулярных смешанных ограничений (см., например, [11, 12]), как справедливо замечено в [11, с. 92], чрезвычайно сложно, см. также по этому поводу [12, гл. 4, с. 125]. В то же время, специфика рассматриваемой задачи такова, что факт ее некорректности устанавливается достаточно легко. Два последних обстоятельства наводят на мысль, что при исследовании этой задачи целесообразно одновременно опереться как на традиционные для теории экстремальных задач методы, так и, принимая в расчет ее некорректность, использовать методы теории регуляризации.

Данную статью следует рассматривать как непосредственное продолжение статей [13, 14], в которых на основе «нелинейной версии» метода возмущений (о методе возмущений в задаче выпуклого программирования см. в [5, п. 3.3.2]) рассматривалась регуляризация ПЛ в задаче нелинейного программирования с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве. В отличие от [13, 14], ниже в статье, непосредственно опирающейся на результаты [14] (см. также [13]), рассматривается регуляризация КУО в нелинейной задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида с операторным ограничением-равенством в форме поточечного фазового ограничения-равенства. Разрешимость рассматриваемой ниже задачи априори не предполагается. Как и в [13, 14], она является параметрической, а ее параметр аддитивно входит в ограничение-равенство.

Остановим внимание на базовых моментах статьи. Прежде всего, отметим, что в ее основе лежит, как и во всей теории некорректных задач, секвенциальный подход. В соответствии с ним основным (искомым) объектом в статье является не оптимальный элемент, как это обычно бывает в привычной теории оптимального управления [4, 5], а обобщенная минимизирующая последовательность (ОМП) допустимых управлений (см. раздел 1.3). Понятие ОМП порождает центральное для всей статьи понятие ОМП-образующего оператора (см. определение 1.1) [14, 15] и совпадает с хорошо известным в оптимальном управлении понятием минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [16, гл. III]. В математическом программировании это понятие выступает под названием обобщенного оптимального плана [17]. Существенным здесь является то, что ассоциированная с понятием ОМП (см. раздел 1.3) функция значений $\beta : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ рассматриваемой

параметрической задачи как функция параметра, принадлежащего гильбертовому пространству H образов задающего ограничение-равенство оператора (в качестве H в статье используется пространство суммируемых с квадратом функций (см. раздел 1.3)) и аддитивно входящего в ограничение, является полунепрерывной снизу (см. лемму 1.1). Это открывает возможность применимости при исследовании задачи так называемого метода возмущений, а именно, его «нелинейной» версии, опирающейся на известные конструкции негладкого (нелинейного) анализа [18–20], и объясняет одновременно наличие соответствующего словосочетания в названии статьи. В качестве указанных известных конструкций негладкого анализа ниже используются проксимальный субградиент и субдифференциал Фреше полунепрерывной снизу функции β (см. раздел 2.1), важнейшим характеристическим свойством которых является их непустота в точках плотного в $\text{dom } \beta$ множества [18–20] (см. раздел 2.2). Здесь же отметим, что принадлежность функции β к указанному функциональному классу полунепрерывных снизу функций является характеристическим свойством функций значений, ассоциированных именно с понятием ОМП.

Далее, проксимальный субградиент и субдифференциал Фреше функции значений β естественным образом порождают соответствующие модифицированные функции Лагранжа (МФЛ) в рассматриваемой задаче (см. раздел 2.3), приводят к определению модифицированной двойственной задачи (см. раздел 2.4), а также и к центральному для статьи определению соответствующего обобщенного вектора Куна–Таккера (см. раздел 2.5). Все эти конструкции и «переходы» позволяют, в конечном итоге, организовать процедуру регуляризации КУО в рассматриваемой задаче. В зависимости от «субдифференциального устройства» при конкретном значении параметра $p \in H$ функция значений β может либо обладать обобщенным вектором Куна–Таккера (случай **А**)), либо такого вектора у нее нет (случай **Б**)) (см. раздел 2.5). В обоих случаях при условии лишь конечности значения β в точке p (т. е., когда задача имеет смысл) в задаче устойчиво конструируются ОМП из субэкстремалей (экстремалей) регулярной МФЛ (см. раздел 3). При этом в случае **А**) двойственная переменная генерируется в соответствии с процедурой стабилизации по Тихонову [1, 3] двойственной задачи и сходится к ее минимальному по норме решению. В случае же **Б**) устойчиво генерируемая из субэкстремалей ОМП является неограниченной, а сама эта процедура приобретает черты метода штрафов. Заметим, что экстремали МФЛ в обоих случаях берутся, когда соответствующий экстремум достигается.

Как результат, указанное конструирование приводит в конечном итоге в разделе 4 в случае **А**) к формулировке регуляризованной ТКТ (теорема 4.1) в недифференциальной форме, а учет одновременно обоих случаев порождает и аналогичный регуляризованный ПЛ (теорема 4.2) в задаче с поточечным фазовым ограничением-равенством. Основное предназначение обеих теорем — устойчивое генерирование ОМП в рассматриваемой нелинейной задаче. Их можно трактовать так же как ОМП-образующие (регуляризующие) операторы (см. определение 1.4), ставящие в соответствие каждому набору исходных данных задачи субминималь (минималь) ее соответствующего этому набору регулярной МФЛ, двойственная переменная в которой генерируется в соответствии с указанными в этих теоремах процедурами в двойственных задачах.

Описанная выше процедура, связанная с конструированием ОМП в нелинейной задаче с поточечным ограничением-равенством, подобна той, которая реализуется в аналогичных, но выпуклых задачах [8–10]. Однако, в отличие от выпуклых задач, для которых конструируемые ОМП в том или ином смысле (слабо, сильно) сходятся к их оптимальным

элементам, в случае нелинейной задачи в общей ситуации мы не можем говорить о сходимости конструируемых ОМП к оптимальным элементам, так как и самих оптимальных элементов может в таких задачах не существовать. В то же время, указанное устойчивое конструирование ОМП оказывается возможным в любой задаче, для которой ее обобщенное значение при выбранном фиксированном значении параметра конечно. При этом функция значений в этой фиксированной точке может и не быть субдифференцируемой в смысле негладкого анализа.

В заключительной части статьи (раздел 5) показывается, как регуляризованная ТКТ может быть использована для получения «обычных» условий оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления. Это реализуется в случае «аффинной» зависимости интегранта функционала качества и правой части управляемой системы от управляющей переменной, которая гарантирует как существование оптимального элемента в исходной точной задаче, так и существование экстремалей в соответствующей задаче минимизации МФЛ. В этом частном случае в результате предельного перехода в соотношениях регуляризованной ТКТ (при стремлении к бесконечности номеров элементов ОМП теоремы 4.1) сначала доказывается соответствующая ТКТ (теорема 5.1), а затем, как следствие, и соответствующий ПМП (теорема 5.2), представляющие собою КУО в исходной нелинейной регулярной задаче оптимального управления.

Заметим, наконец, что регуляризация ПЛ в регулярном случае была рассмотрена ранее применительно к нелинейной задаче оптимального управления в работе [21]. В свою очередь, в [22] аналогичные вопросы были рассмотрены для регулярной нелинейной задачи условной оптимизации с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств.

Ниже используются следующие стандартные обозначения для функциональных пространств и соответствующих норм элементов: $L_{p,k}(Y)$ — пространство k -мерных суммируемых на множестве Y с p -й степенью функций с нормой $\|\cdot\|_{p,k,Y}$, $p \in [1, +\infty]$; $C_k(Y)$ — пространство k -мерных на множестве Y функций с нормой $\|\cdot\|_Y^{(0)}$. Кроме того, в статье компактность множества понимается в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, (см., например, [23, раздел 19.3], в подобной ситуации часто используется также термин предкомпактность), $\text{dom } f \equiv \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ и $\text{epi } f \equiv \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}^1 : f(x) \leq \alpha\}$ — эффективное множество и надграфик функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, $\text{cl } X$ и $\text{conv } X$ — замыкание и выпуклая оболочка множества X , соответственно.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления, вспомогательные конструкции и утверждения

Начинаем с постановки нелинейной задачи оптимального управления с операторным ограничением в форме поточечного фазового ограничения-равенства.

1.1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Рассмотрим параметрическую задачу оптимального управления с фиксированным временем $T > 0$ и с аддитивно зависящим от параметра поточечным фазовым ограничением-равенством

$$(OC_p) \quad I_0(u) \equiv \int_0^T F(t, x[u](t), u(t)) dt + G(x[u](T)) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

$$I(u)(t) \equiv H(t, x[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0, T],$$

где $x[u](t)$, $t \in [0, T]$, — абсолютно-непрерывное решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Здесь и ниже: $p \in L_{2,1}(X)$ — параметр, $\mathcal{U} \equiv \{u \in L_{2,m}(0, T) : u(t) \in U \text{ при п. в. } t \in (0, T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное замкнутое множество, $X \subset [0, T]$, $X = \text{cl } \overset{\circ}{X}$ — замкнутое множество с непустой внутренностью (без изолированных точек).

Будем считать, что функции $F : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^1$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ измеримы в смысле Лебега и удовлетворяют условию Липшица по $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ с независимой от t постоянной $L_M > 0$ на множестве $S_M^n \times S_M^m$ при п. в. $t \in [0, T]$, $S_M^l \equiv \{y \in \mathbb{R}^l : |y| < M\}$. Будем считать также, что для любого управления $u \in \mathcal{U}$ существует глобальное абсолютно-непрерывное решение $x[u](t)$, $0 \leq t \leq T$ системы (1.1), причем все эти решения равномерно по $u \in \mathcal{U}$ ограничены в $C_n[0, T]$. Как известно, такая ограниченность семейства $\{x[u] : u \in \mathcal{U}\}$ реализуется, если, например, φ имеет линейный порядок роста по x .

З а м е ч а н и е 1.1. Задача оптимального управления (OC_p) формально записывается в компактной форме задачи нелинейного программирования $I_0(u) \rightarrow \inf$, $I(u) = p$, $u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T)$. Если мы определяем, в какое пространство вкладываются элементы $I(u)$, то получаем «полноценную» задачу математического (нелинейного) программирования. В качестве пространства образов оператора $I(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C_1(X)$, $L_{\infty,1}(X)$, $L_{q,1}(X)$, $1 \leq q < \infty$ и еще некоторые другие. То, какое из них «более подходящее», зависит от свойств исходных данных задачи (OC_p) и «целей регуляризации» КУО. Фазовое ограничение-равенство $I(u) \equiv I(u)(\cdot) \equiv H(\cdot, x[u](\cdot)) = p(\cdot)$ понимается как равенство почти всюду в X : $H(t, x[u](t)) = p(t)$ при п. в. $t \in X$. Ниже мы будем смотреть на это равенство как на равенство в $L_{2,1}(X)$. При этом в качестве «важного бонуса» мы получаем возможность оперировать с «хорошими» субдифференциальными в смысле негладкого (нелинейного) анализа свойствами функции значений параметрической задачи (OC_p) как функции в гильбертовом пространстве $L_{2,1}(X)$. Возможные неустойчивость и невыполнимость КУО [8–10] в подобных ситуациях характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (OC_p) .

З а м е ч а н и е 1.2. С одной стороны, задача (OC_p) по своей постановке является типичной задачей оптимального управления с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством. Наличие операторного ограничения-равенства, в данном случае, поточечного фазового ограничения-равенства, составляет, как уже было сказано выше, «главную сложность» задачи (OC_p) как задачи оптимального управления. С другой же стороны, на задачу (OC_p) естественно смотреть и как на типичного представителя теории некорректных задач. В частности, если, например, взять $I_0(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$, то это обычная для теории некорректных задач ситуация, когда идет речь о поиске минимального по норме решения операторного уравнения $I(u) = p$, $u \in \mathcal{U}$ с оператором $I : \mathcal{U} \rightarrow L_{2,1}(X)$, имеющем при сделанных выше предположениях об исходных данных задачи (OC_p) компактный в $L_{2,1}(X)$ образ. Такой двоякий взгляд на постановку задачи (OC_p) объясняет, почему для ее анализа и решения мы опираемся ниже как на привычные для теории оптимального управления методы, так и на методы, которые принято применять в теории некорректных задач.

З а м е ч а н и е 1.3. Ниже нас будет интересовать также частный случай задачи (OC_p) , в котором: $F(t, x, u) \equiv F_1(t, x) + \langle F_2(t, x), u \rangle$, $\varphi(t, x, u) \equiv \varphi_1(t, x) + \varphi_2(t, x)u$, U — выпуклое замкнутое ограниченное множество. Здесь: $F_1 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $F_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — измеримые в смысле Лебега функции, удовлетворяющие условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ с независимой от t постоянной $\bar{L}_M > 0$ на множестве S_M^n при п. в. $t \in [0, T]$; $\varphi_1 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — измеримые в смысле Лебега векторная и матричная (n строк, m столбцов) функции, удовлетворяющие условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ с независимой от t постоянной $\hat{L}_M > 0$ на множестве S_M^n при п. в. $t \in [0, T]$. Кроме того, ниже мы будем иметь дело с задачей, в которой функции F и φ берутся такими же, как в указанном частном случае задачи (OC_p) , но с функционалом качества

$$I_0^l(u) \equiv \int_0^T F_1(t, x[u](t))dt + \int_0^T \langle F_2(t, x[u](t)), u(t) \rangle dt + G(x[u](T)) + l|u - \tilde{u}|_{w,2,m}^2, \quad u \in \mathcal{U},$$

где $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ — некоторое управление, $l \in [0, 1]$ — число, $|\cdot|_{w,2,m}$ — так называемая слабая норма в $L_{2,m}(0, T)$ (как известно, слабая сходимость в $L_{2,m}(0, T)$ эквивалентна сходимости в слабой норме $|\cdot|_{w,2,m}$ [16, теорема I.3.11]).

1.2. Точная и возмущенная задачи оптимального управления. Так как задача (OC_p) является, вообще говоря, некорректной и мы собираемся использовать для ее анализа соответствующие методы, введем в рассмотрение точную задачу (OC_p^0) , а также возмущенные задачи (OC_p^δ) при $\delta > 0$, $\delta \geq 0$ — числовой параметр, характеризующий степень возмущения исходных данных точной задачи, при этом по традиции считаем $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Задача (OC_p^δ) при $\delta \geq 0$ получается из задачи (OC_p) , если вместо набора исходных данных $f \equiv (F, G, H, \varphi, x_0)$ подставить соответственно набор возмущенных исходных данных $f^\delta \equiv (F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$. Отклонение возмущенного набора $f^\delta \equiv (F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$ при $\delta > 0$ от точного $f^0 \equiv (F^0, G^0, H^0, \varphi^0, x_0^0)$ задаются при $M > 0$ следующими оценками:

$$\begin{aligned} |F^\delta(t, x, u) - F^0(t, x, u)| &\leq L_F(M)\delta \quad \forall (x, u) \in S_M^{n+m} \quad \text{при п. в. } t \in (0, T), \\ |G^\delta(x) - G^0(x)| &\leq L_G(M)\delta \quad \forall x \in S_M^n, \\ |H^\delta(t, x) - H^0(t, x)| &\leq L_H(M)\delta \quad \forall x \in S_M^n \quad \text{при п. в. } t \in (0, T), \\ |\varphi^\delta(t, x, u) - \varphi^0(t, x, u)| &\leq L_\varphi(M)\delta \quad \forall (x, u) \in S_M^{n+m} \quad \text{при п. в. } t \in (0, T), \\ |x_0^\delta - x_0^0| &\leq L_{x_0}\delta, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где постоянные $L_F(M)$, $L_G(M)$, $L_H(M)$, $L_\varphi(M)$, L_{x_0} не зависят от δ .

1.3. Обобщенные нижняя грань и минимизирующая последовательность, функция значений. Центральным объектом в данной статье, к устойчивому построению которого мы будем стремиться, является обобщенная минимизирующая последовательность (ОМП) в задаче (OC_p^0) . Напомним, что ОМП в задаче (OC_p^0) называется последовательность $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $I_0^0(u^i) \leq \beta(p) + \gamma^i$, $u^i \in \mathcal{U}_p^{0,\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел γ^i , ϵ^i , $i = 1, 2, \dots$. Здесь: $\mathcal{U}_p^{\delta,\epsilon} \equiv \{u \in \mathcal{U} : \|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X} \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$, $\delta \geq 0$, $\mathcal{U}_p^{0,0} \equiv \mathcal{U}_p^0$, $\beta(p)$ — обобщенная нижняя грань (обобщенное значение) задачи (OC_p^0)

$$\beta(p) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \beta_\epsilon(p), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{u \in \mathcal{U}_p^{0,\epsilon}} I_0^0(u), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv +\infty, \quad \text{если } \mathcal{U}_p^{0,\epsilon} = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p) \leq \beta_0(p)$, где $\beta_0(p) \equiv \inf_{u \in \mathcal{U}_p^0} I_0^0(u)$ — классическое значение задачи (OC_p^0) . Справедлива следующая важная для дальнейших построений

Лемма 1.1. *Функция значений $\beta : L_{2,1}(X) \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу.*

Лемма доказывается точно так же, как и в случае выпуклой задачи в [24, лемма 1.2].

З а м е ч а н и е 1.4. Известно [16], что каждую ОМП в задаче (OC_p) можно «замкнуть», получив «в пределе» обобщенное управление в смысле [16, 25]. Однако ниже в работе все результаты для задачи (OC_p^0) общего вида формулируются только в терминах ОМП. Это связано, в частности, с некорректностью задачи (OC_p^0) , а в некорректных задачах, как известно [3, 7], основным является именно секвенциальный подход.

1.4. ОМП-образующий оператор. Определим ОМП-образующий оператор [14, 21] для задачи (OC_p^0) (определение ОМП-образующего оператора для выпуклых задач см. в [15]). Обсуждение взаимосвязи этого понятия с классическим понятием регуляризующего оператора [3] в случае задачи поиска нормального решения линейного операторного уравнения первого рода см. в [26].

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k , $k = 1, 2, \dots$, вообще говоря, многозначный оператор $R_p(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} , удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $R_p(f^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \mathcal{W}_p^{\delta^k} \subset \mathcal{U}$, называется ОМП-образующим в задаче (OC_p^0) , если любая последовательность $u^{\delta^k} \in \mathcal{W}_p^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \dots$, есть ОМП в этой задаче.

1.5. Нелинейная задача оптимального управления как задача нелинейного программирования. С формальной точки зрения, задача (OC_p^δ) , $\delta \in [0, \delta_0]$, которой соответствует набор исходных данных $(F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$, может быть записана в компактном виде параметрической задачи нелинейного программирования с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом функций $L_{2,1}(X)$

$$(P_p^\delta) = (OC_p^\delta) \quad I_0^\delta(u) \rightarrow \inf, \quad I^\delta(u) = p, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

где $p \in L_{2,1}(X)$ — параметр.

Получим оценки отклонения значений пары возмущенных функционала и оператора (I_0^δ, I^δ) задачи (P_p^δ) при $\delta > 0$ от соответствующих точных значений, т. е. пары (I_0^0, I^0) . С этой целью приведем сначала некоторые элементарные оценки, предположив для определенности, что $|\varphi^\delta(t, x, u)| \leq S(1 + |x|) \forall t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n, u \in U$, причем $S > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, т. е. предположив, что правая часть системы имеет линейный порядок роста по x . В таком случае стандартное применение классического неравенства Гронуолла [5, п. 2.5.3, с. 189] приводит к равномерной по δ , $u \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$, ограниченности решений нелинейной управляемой системы

$$|x^\delta[u](t)| \leq K \quad \forall \delta \in [0, \delta_0], u \in \mathcal{U}, t \in [0, T]$$

и, как следствие, опять же с помощью неравенства Гронуолла, к оценке

$$|x^\delta[v](t) - x^\delta[u](t)| \leq K_1 \int_0^T |v(t) - u(t)| dt \quad (1.3)$$

с независимой от $t \in [0, T]$, $u, v \in \mathcal{U}$, $\delta \in [0, \delta_0]$ постоянной $K_1 > 0$.

Благодаря оценке (1.3) и условиям на исходные данные $(F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$ функционал I_0^δ и оператор I^δ непрерывны на $\mathcal{U}$. Кроме того, благодаря ограниченности множества $\{x^\delta[u] : u \in \mathcal{U}\} \subset C_n[0, T]$ оно и равномерно непрерывно, т. е. это компакт в $C_n[0, T]$. По этой причине образ оператора $I^\delta : \mathcal{U} \rightarrow L_{2,1}(X)$ является компактным в $L_{2,1}(X)$. Дальнейшие достаточно очевидные выкладки, также опирающиеся на неравенство Гроуолла, приводят нас к нужным оценкам для отклонений значений функционала и оператора

$$|I_0^\delta(u) - I_0^0(u)| \leq \hat{C}_1 \delta, \quad \|I^\delta(u) - I^0(u)\|_{2,1,X} \leq \hat{C}_2 \delta, \quad (1.4)$$

в которых постоянные $\hat{C}_1, \hat{C}_2 > 0$ следует считать не зависящими от $u \in \mathcal{U}$ и δ . Кроме того, с учетом оценки (1.3) можно утверждать, что

$$|I_0^\delta(u) - I_0^\delta(v)| \leq \hat{C}_3 \|u - v\|_{2,m,(0,T)}, \quad \|I^\delta(u) - I^\delta(v)\|_{2,1,X} \leq \hat{C}_4 \|u - v\|_{2,m,(0,T)}, \quad (1.5)$$

где постоянные $\hat{C}_3, \hat{C}_4 > 0$ также не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Полученные выше оценки (1.4) отклонения возмущенных данных (I_0^δ, I^δ) задачи нелинейного программирования $(P_p^\delta) = (OC_p^\delta)$ при $\delta > 0$ от точных (I_0^0, I^0) в совокупности с оценками (1.5), говорящими, что эти исходные данные удовлетворяют условию Липшица, позволяют нам применить для исследования задачи (P_p^δ) , а тем самым и задачи (OC_p^δ) , результаты работы [14]. При этом роль функционала f^δ , оператора g^δ , множества $\mathcal{D}$, метрического пространства Z и гильбертова пространства H цитированной работы играют соответственно функционал I_0^δ , оператор I^δ , множество $\mathcal{U}$, гильбертово пространство $L_{2,m}(0, T)$ и также гильбертово пространство $L_{2,1}(X)$.

2. Модифицированные функции Лагранжа, модифицированная двойственная задача, обобщенный вектор Куна–Таккера

В данном разделе напомним, прежде всего, необходимые результаты, связанные со свойствами субдифференцируемости в смысле нелинейного (невыпуклого) анализа полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве. Их необходимость объясняется, во-первых, неестественностью использования понятия субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа применительно к невыпуклой полунепрерывной снизу функции значений, и, во-вторых, наличием соответствующих результатов о плотности субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве в смысле нелинейного анализа [18–20]. Одновременно, эти понятия субдифференцируемости приведут нас естественным образом к конструкциям так называемых модифицированных функций Лагранжа (МФЛ), к соответствующим модифицированным двойственным задачам, а также к понятию обобщенного вектора Куна–Таккера задачи $(P_p^0) = (OC_p^0)$.

2.1. Субдифференциалы полунепрерывных снизу функций. Ниже нам будут нужны два понятия субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций — понятия проксимального субградиента и субдифференциала Фреше.

Введем прежде всего понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции на основе понятия проксимальной нормали [18, 19].

О п р е д е л е н и е 2.1. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \leq M \|s - \bar{s}\|^2 \quad \forall s \in S$.

Множество всех таких векторов ζ , представляющее собой конус, обозначается через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и называется проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \text{dom } f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{\text{epi } f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначается через $\partial^P f(\bar{x})$ и называется проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

Лемма 2.1 (см. [18, 19]). Пусть $f : H \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \text{dom } f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \leq f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \|x' - \bar{x}\| < \delta\}.$$

Определим далее понятие нормали Фреше к замкнутому множеству в банаховом пространстве, а также соответствующее понятие субдифференциала полунепрерывной снизу функции [20].

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть Ω — непустое множество банахова пространства $\mathcal{X}$. Пусть $x \in \text{cl } \Omega$ и $u \xrightarrow{\Omega} x$ означает, что $u \rightarrow x$ с $u \in \Omega$. Тогда непустое множество

$$\hat{N}(x; \Omega) \equiv \{x^* \in \mathcal{X}^* : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \leq 0\}$$

называется нормальным конусом Фреше к Ω в x и обозначается $\hat{N}(x; \Omega)$. При $x \notin \text{cl } \Omega$ полагается $\hat{N}(x; \Omega) = \emptyset$.

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $\bar{x} \in \text{dom } f$. Множество

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) \equiv \{x^* \in \mathcal{X}^* : (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\}$$

называется субдифференциалом Фреше функции f в точке $\bar{x}$. При этом полагается $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \emptyset$ в случае $x \notin \text{dom } f$.

Лемма 2.2 (см. [20]). Пусть $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $x \in \text{dom } f$, $\epsilon > 0$. Тогда $x^* \in \hat{\partial} f(x)$ в том и только в том случае, если существует окрестность $\mathcal{X}_\epsilon$ точки x такая, что

$$f(x) - \langle x^*, x \rangle \leq f(x') - \langle x^*, x' \rangle + \epsilon \|x' - x\| \quad \forall x' \in \mathcal{X}_\epsilon.$$

2.2. Плотность субдифференцируемости. Важнейшим свойством полунепрерывных снизу функций $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является то, что как множество $\partial^P f(x)$, так и множество $\hat{\partial} f(x)$ заведомо не пусто для всех точек x из плотного в $\text{dom } f$ множества в случае гильбертова пространства $\mathcal{X}$ [19, теорема 3.1, с. 39], [20, следствие 2.29, с. 209].

2.3. Модифицированные функции Лагранжа (МФЛ). Следуя [13, 14], можно утверждать, что для задачи (OC_p^0) с полунепрерывной снизу функцией значений $\beta : L_{2,1}(X) \rightarrow \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ являются естественными две конструкции МФЛ в зависимости от субдифференциальных свойств β в фиксированной индивидуальной точке $p \in \text{dom } \beta$.

2.3.1. Первая МФЛ. Если точка $p \in \text{dom } \beta$ такова, что $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P \beta(p)$, то, как следствие, для задачи (OC_p^0) естественной (см. [13, 14]) является конструкция МФЛ вида

$$L_{p,c}^{0,2}(u, \zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle \zeta, I_0^0(u) - p \rangle + c \|I_0^0(u) - p\|_{2,1,X}^2, \quad u \in \mathcal{U}$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$ (этому коэффициенту можно и удобно придать смысл коэффициента штрафа), зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \partial^P \beta(p)$.

Действительно, в этом случае из леммы 2.1 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки p и элемента ζ) такие, что

$$\beta(p) - \langle \zeta, p \rangle \leq \beta(p') - \langle \zeta, p' \rangle + R \|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall p' \in S_\delta(p). \quad (2.1)$$

Так как в силу ограниченности множества $\mathcal{U}$ эффективное множество $\text{dom } \beta$ ограничено и функция β ограничена на множестве $\text{dom } \beta$, то в силу неравенства (2.1) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p, \zeta) > 0$

$$\beta(p) - \langle \zeta, p \rangle \leq \beta(p') - \langle \zeta, p' \rangle + c \|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall p' \in L_{2,1}(X) \quad (2.2)$$

или

$$\beta(p) - \langle \zeta, p \rangle < \beta(p') - \langle \zeta, p' \rangle + \hat{c} \|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall p' \in L_{2,1}(X), \quad p' \neq p, \quad \hat{c} > c,$$

откуда в силу строгого неравенства $\hat{c} > c$, полунепрерывности снизу функции значений β и ограниченности множества $\text{dom } \beta$ следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p') - \langle \zeta, p' \rangle + \hat{c} \|p' - p\|_{2,1,X}^2 \rightarrow \inf, \quad p' \in L_{2,1}(X)$$

является лишь любая последовательность p^k , $k = 1, 2, \dots$, сходящаяся к точке p такая, что $\beta(p^k) \rightarrow \beta(p)$, $k \rightarrow \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда следует естественность конструкции МФЛ $L_{p,c}^{0,2}(u, \zeta)$, $u \in \mathcal{U}$, так как в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,\hat{c}}^2(u, \zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle \zeta, I_0^0(u) - p \rangle + \hat{c} \|I_0^0(u) - p\|_{2,1,X}^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U} \quad (2.3)$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k , $k = 1, 2, \dots$ такая, что $I_0^0(u^k) \rightarrow \beta(p)$, $I_0^0(u^k) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} (I_0^0(u) - \langle \zeta, I_0^0(u) - p \rangle + \hat{c} \|I_0^0(u) - p\|_{2,1,X}^2) = \beta(p).$$

Покажем это. Пусть $\bar{u}^k$, $k = 1, 2, \dots$ — минимизирующая последовательность в задаче минимизации (2.3). Тогда благодаря ограниченности $\mathcal{U}$, ограниченности значений функционала I_0^0 и компактности области значений оператора I^0 без ограничения общности считаем, что $I_0^0(\bar{u}^k) \rightarrow \bar{I}_0^0$, $I^0(\bar{u}^k) \rightarrow \bar{p}$, $k \rightarrow \infty$, где $\bar{I}_0^0 \in \mathbb{R}^1$, $\bar{p} \in L_{2,1}(X)$ — некоторые элементы. Тогда рассмотрим два возможных случая.

Во-первых, если $\bar{p} = p$, но $\bar{I}_0^0 \neq \beta(p)$, то в силу последних предельных соотношений, с учетом определения величины $\beta(p)$, можем записать при $k \rightarrow \infty$

$$I_0^0(\bar{u}^k) - \langle -\zeta, I_0^0(\bar{u}^k) - p \rangle + \hat{c} \|I_0^0(\bar{u}^k) - p\|_{2,1,X}^2 \rightarrow \bar{I}_0^0 > \beta(p).$$

Во-вторых, если же $p \neq \bar{p}$, то в силу тех же предельных соотношений, определения обобщенной нижней грани $\beta(\bar{p})$ и соотношений (2.2), можем записать $\bar{I}_0^0 \geq \beta(\bar{p})$ и, одновременно, при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I_0^0(\bar{u}^k) + \langle -\zeta, I^0(\bar{u}^k) - p \rangle + \hat{c} \|I^0(\bar{u}^k) - p\|_{2,1,X}^2 &\rightarrow \bar{I}_0^0 + \langle -\zeta, \bar{p} - p \rangle + \hat{c} \|\bar{p} - p\|_{2,1,X}^2 \\ &\geq \beta(\bar{p}) + \langle -\zeta, \bar{p} - p \rangle + \hat{c} \|\bar{p} - p\|_{2,1,X}^2 > \beta(p). \end{aligned}$$

Полученные в обоих случаях строгие неравенства вступают в противоречие с предположением о том, что последовательность $\bar{u}^k$, $k = 1, 2, \dots$ — минимизирующая, так как для последовательности u^k , $k = 1, 2, \dots$ указанного выше вида ($I_0^0(u^k) \rightarrow \beta(p)$, $I^0(u^k) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$) мы можем записать

$$I_0^0(u^k) + \langle -\zeta, I^0(u^k) - p \rangle + \hat{c} \|I^0(u^k) - p\|_{2,1,X}^2 \rightarrow \beta(p).$$

З а м е ч а н и е 2.1. Если наряду с функцией β у нас имеется функция $\tilde{\beta}$, обладающая всеми теми же свойствами, что и β , причем $\tilde{\beta}(p) = \beta(p)$, $\tilde{\beta}(p') \geq \beta(p')$ при $p' \neq p$, множество $\text{dom } \tilde{\beta}$ ограничено, функция $\tilde{\beta}$ ограничена на $\text{dom } \tilde{\beta}$, то в силу леммы 2.1 можно утверждать, что из неравенства (2.2) с некоторыми $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ и $c > 0$ вытекает также и неравенство, с тем же $c > 0$,

$$\tilde{\beta}(p) - \langle \zeta, p \rangle = \beta(p) - \langle \zeta, p \rangle \leq \tilde{\beta}(p') - \langle \zeta, p' \rangle + c \|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall p' \in L_{2,1}(X),$$

при этом $\zeta \in \partial^P \tilde{\beta}(p)$. Описанная выше в данном замечании ситуация реализуется, например, тогда, когда наряду с задачей (OC_p^0) мы имеем «близкую» задачу $(\widetilde{OC}_p^0)$

$$(\widetilde{OC}_p^0) \quad \tilde{I}_0^0(u) \rightarrow \inf, \quad I^0(u) = p, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

с ограниченным на $\mathcal{U}$ функционалом $\tilde{I}_0^0$, с теми же свойствами, что и у функционала I_0^0 , причем таким, что для ее функции значений $\tilde{\beta}$ выполняются все описанные выше в замечании соотношения и свойства. При этом в задаче минимизации МФЛ с $\hat{c} > c$

$$\tilde{L}_{p,\hat{c}}^2(u, \zeta) \equiv \tilde{I}_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + \hat{c} \|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2 \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k , $k = 1, 2, \dots$ такая, что выполняются предельные соотношения $\tilde{I}_0^0(u^k) \rightarrow \beta(p)$, $I^0(u^k) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} (\tilde{I}_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + \hat{c} \|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2) = \beta(p).$$

2.3.2. Вторая МФЛ. Если точка $p \in \text{dom } \beta$ такова, что $\hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, то, как следствие, для задачи (OC_p^0) естественной (см. [13]) является конструкция МФЛ вида

$$L_{p,c}^{0,1}(u, \zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + c \|I^0(u) - p\|_{2,1,X}, \quad u \in \mathcal{U}$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$, зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$. Как и в случае первой МФЛ, такая естественность объясняется тем обстоятельством, что, как показано в [13, 14], в этом случае коэффициент $c > 0$ можно без ограничения общности считать столь большим, что в задаче минимизации МФЛ

$$I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + c \|I^0(u) - p\|_{2,1,X} \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U} \quad (2.4)$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k , $k = 1, 2, \dots$ такая, что $I_0^0(u^k) \rightarrow \beta(p)$, $I^0(u^k) \rightarrow p$, $k \rightarrow \infty$ и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} (I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + c \|I^0(u) - p\|_{2,1,X}) = \beta(p).$$

2.3.3. Комбинированная МФЛ. Далее, следуя [13, 14], введем, с учетом конструкций МФЛ задач (2.3), (2.4), комбинированную (смешанную) МФЛ задачи (OC_p^δ)

$$\begin{aligned} L_{p,c}^\delta(u, \lambda) &\equiv \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,1}(u, \lambda) + \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,2}(u, \lambda) \\ &\equiv I_0^\delta(u) + \langle \lambda, I^\delta(u) - p \rangle + c\psi(\|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X}), \quad u \in \mathcal{U}, \quad \lambda \in L_{2,1}(X), \quad (\lambda = -\zeta), \end{aligned}$$

где $c \geq 0$, а «штрафная» функция $\psi : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, определяется формулой $\psi(t) \equiv l_1 t + l_2 t^2$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, в которой весовые множители $l_1, l_2 \in \{0, 1\}$ — фиксированные числа.

О других подходах к построению МФЛ, а также об их истории см. в [27–29].

2.4. Модифицированная двойственная задача. Определим, в свою очередь, и модифицированную двойственную задачу

$$V_{p,c}^\delta(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in L_{2,1}(X), \quad V_{p,c}^\delta(\lambda) \equiv \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^\delta(u, \lambda).$$

Условия на исходные данные задачи (OC_p^0) таковы, что вогнутая функция $V_{p,c}^\delta(\lambda)$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c > 0$ для любой точки $\lambda \in L_{2,1}(X)$ и ограниченной на любом множестве вида $\{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\| < M\}$, $M > 0$, а значит и локально липшицевой (см. [30, определение 2.3]) на $\text{dom } V_{p,c}^\delta = L_{2,1}(X)$ [30, теорема 2.1, следствие 2.3]). Кроме того, выполняется оценка

$$|V_{p,c}^\delta(\lambda) - V_{p,c}^0(\lambda)| \leq C\delta(1 + \|\lambda\|_{2,1,X} + |c|) \quad \forall \lambda \in L_{2,1}(X), \quad (2.5)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированном $p \in L_{2,1}(X)$ лишь от $\sup_{u \in \mathcal{U}} \|u\|_{2,m,(0,T)}$. Приведем также выражение для супердифференциала $\partial V_{p,c}^\delta$ вогнутой функции значений $V_{p,c}^\delta$ при условии компактности образа оператора $I^\delta : \mathcal{U} \rightarrow L_{2,1}(X)$. Здесь под супердифференциалом вогнутой функции $V_{p,c}^\delta$ понимается субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) с обратным знаком выпуклой функции $-V_{p,c}^\delta$. Утверждение формулируемой ниже леммы является следствием утверждения, доказательство которого см. в [31, лемма 2].

Лемма 2.3. Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) $\partial V_{p,c}^\delta(\lambda)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, вогнутой функции $V_{p,c}^\delta$ в точке $\lambda \in L_{2,1}(X)$ при любом $c \in \mathbb{R}^1$ выражается формулой

$$\begin{aligned} \partial V_{p,c}^\delta(\lambda) &= \partial_C V_{p,c}^\delta(\lambda) = \text{cl conv} \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} (I^\delta(u^i) - p) : u^i \in \mathcal{U}, \right. \\ &\quad \left. L_{p,c}^\delta(u^i, \lambda) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^\delta(u, \lambda), \quad i \rightarrow \infty \right\} \equiv \text{cl conv } Q_{p,c}^\delta(\lambda), \end{aligned}$$

где $\partial_C V_{p,c}^\delta(\lambda)$ — обобщенный градиент Кларка функции $V_{p,c}^\delta$ в точке λ , $\text{cl conv } A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A .

2.5. Обобщенный вектор Куна–Таккера. Введем также соответствующее понятие обобщенного вектора Куна–Таккера задачи (OC_p^0) . Возможны две и только две ситуации для этой задачи:

Случай А) в задаче существует обобщенный вектор Куна–Таккера, т. е. вектор $\lambda \in L_{2,1}(X)$, для которого $\beta(p) \leq \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^0(u, \lambda)$ при некотором $c > 0$;

Случай Б) в задаче не существует обобщенного вектора Куна–Таккера в указанном смысле.

В соответствии со сказанным в разделах 2.2, 2.3 можно утверждать, что:

I. Множество тех $p \in \text{dom } \beta$, для которых задача (OC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера, является всюду плотным в $\text{dom } \beta$.

II. Обобщенный вектор Куна–Таккера в задаче (OC_p^0) заведомо существует тогда, когда имеет место, по крайней мере, одно из следующих двух условий: 1. $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$; 2. $\hat{\partial} \beta(p) \neq \emptyset$. При этом напомним, что $\partial^P \beta(p) \subset \hat{\partial} \beta(p)$.

Можно утверждать (см. [14]), что существование вектора Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле эквивалентно тому, что при некотором $c > 0$ целевая функция $V_{p,c}^0(\lambda)$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$, модифицированной двойственной задачи

$$V_{p,c}^0(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in L_{2,1}(X)$$

достигает значения $\beta(p)$ в некоторой точке $\lambda^0 \in L_{2,1}(X)$.

2.6. Задача минимизации МФЛ. Ниже при построении ОМП и при формулировке регуляризованных ПЛ и ПМП центральную роль будет играть задача минимизации при $\lambda \in L_{2,1}(X)$, $c > 0$, МФЛ

$$\begin{aligned} L_{p,c}^\delta(u, \lambda) = & \int_0^T F_1^\delta(t, x^\delta[u](t)) dt + \int_0^T F_2^\delta(t, x^\delta[u](t)) dt + G^\delta(x^\delta[u](T)) \\ & + \int_X \lambda(t) (H^\delta(t, x^\delta[u](t)) - p(t)) dt \\ & + c \left(l_1 \left(\int_X (H^\delta(t, x^\delta[u](t)) - p(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + l_2 \int_X (H^\delta(t, x^\delta[u](t)) - p(t))^2 dt \right) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (2.6) \end{aligned}$$

где $x^\delta[u](t)$, $0 \leq t \leq T$, — решение системы

$$\dot{x} = \varphi^\delta(t, x, u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n.$$

Эта задача является обычной нелинейной (вообще говоря, не выпуклой) простейшей (т. е., без ограничений типа равенства и неравенства) задачей оптимального управления.

3. Устойчивое построение ОМП в нелинейной задаче оптимального управления

Далее нашей главной целью будет построение ОМП в исходной задаче $(P_p^0) = (OC_p^0)$. Заметим, что ввиду ограниченности множества $\mathcal{U}$ значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно тогда и только тогда, когда в ней существует ОМП. В основе устойчивого построения ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0) лежит процедура основанной на двойственности регуляризации в нелинейных задачах на условный экстремум [13, 14]. Такое построение мы организуем в двух указанных выше существенно разных ситуациях. Первая из них предполагает, что задача (OC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера (случай А)).

Во второй ситуации построение ОМП в исходной задаче проводится в отсутствие предположения о существовании вектора Куна–Таккера (случай **Б**)).

В первом случае (случай **А**)) нашей основной целью будет построение при достаточно большом фиксированном $c > 0$ максимизирующей последовательности в модифицированной двойственной задаче

$$V_{p,c}^0(\lambda) \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\|_{2,1,X} \leq c\} \quad (3.1)$$

и параллельное этому процессу построение ОМП в исходной задаче (OC_p^0) , в котором центральная роль принадлежит задаче минимизации модифицированного функционала Лагранжа (2.6). Задача (3.1) представляет собою типичную некорректную задачу вогнутой оптимизации общего вида. В то же время, эта задача разрешима, так как непрерывный вогнутый функционал $V_{p,c}^0$ достигает максимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве Λ_c гильбертова пространства $L_{2,1}(X)$. Минимальное по норме решение задачи (3.1) в этом случае будет являться ее вектором Куна–Таккера. Его поиск организуется на основе стандартной процедуры стабилизации (регуляризации) по Тихонову для вогнутой задачи (3.1). Как известно, такая стандартная процедура связана с нахождением точки максимума в задаче максимизации сильно вогнутого функционала $R_{p,c}^{\delta,\alpha}(\lambda) \equiv V_{p,c}^{\delta}(\lambda) - \alpha \|\lambda\|_{2,1,X}^2$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$, $\delta \geq 0$, $\alpha > 0$. Для нахождения точки максимума в задаче (3.1) рассматривается задача

$$R_{p,c}^{\delta,\alpha}(\lambda) \rightarrow \max, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\|_{2,1,X} \leq c\}, \quad (3.2)$$

единственное решение которой (оно, очевидно, существует) обозначается через $\lambda_{p,c}^{\delta,\alpha}$. Одновременно предполагается, что выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Процедура стабилизации (регуляризации) по Тихонову (3.2), (3.3), с учетом оценки (2.5), является устойчивой процедурой поиска точки максимума в модифицированной двойственной задаче (3.1). Регуляризирующая процедура (3.2), (3.3) конструктивно порождает ОМП $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots$ в задаче (OC_p^0) , т. е. $I_0^0(u^i) \rightarrow \beta(p)$, $u^i \in \mathcal{U}_p^{0,\epsilon^i}$, $\epsilon^i \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. При этом подчеркнем, что в случае **А**) величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому положительному числу. При этом хотя бы один из двух весовых множителей l_1, l_2 должен быть не равен нулю.

Во втором случае (случай **Б**)) для построения ОМП в задаче (OC_p^0) штрафной коэффициент c мы будем с необходимостью стремиться к $+\infty$ согласованно со стремлением к нулю величины δ . В этой ситуации применяемый в случае **А**) метод двойственной регуляризации, по сути дела, трансформируется в метод штрафов, при этом штрафной коэффициент c играет одновременно и роль соответствующего параметра регуляризации, а ОМП в исходной задаче конструируется из субминималей (минималей) задачи (2.6) при указанном согласованном поведении параметров δ, c . В этом случае процесс построения ОМП в задаче (OC_p^0) при определенных предположениях в заметной степени приобретает вид привычного метода регуляризации Тихонова для нелинейных некорректных задач [7] (см. [14]). В случае **Б**) оба весовых множителя l_1, l_2 должны быть не равны нулю.

Случай А). Итак, предполагаем, что задача (OC_p^0) обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле и хотя бы один из весовых коэффициентов l_1, l_2 больше

нуля. Будем опираться в этом случае на соответствующие результаты [13, 14]. Рассматриваем задачу (3.2) при произвольном достаточно большом фиксированном $c > 0$. Замкнутое выпуклое множество всех точек λ , доставляющих равное $\beta(p)$ максимальное значение функции $V_{p,c}^0$ на $L_{2,1}(X)$, обозначим через $K_{p,c}$. Пусть далее $c > 0$ столь велико, что $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$.

3.1. Точки максимума целевой функции модифицированной двойственной задачи и ОМП в исходной задаче условной минимизации. Как показано в [13, раздел 3, с. 958], имеет место следующее предложение о связи точек максимума функции $V_{p,c}^0$, в которых принимается значение $\beta(p)$, с ОМП в исходной задаче (OC_p^0) .

Предложение 3.1. Пусть $\tilde{c} > c$. Если $\lambda \in K_{p,c}$, то для любой минимизирующей в задаче

$$L_{p,\tilde{c}}^0(z, \lambda) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}$$

последовательности $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots$, справедливы предельные соотношения

$$L_{p,\tilde{c}}^0(u^i, \lambda) \rightarrow \beta(p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,\tilde{c}}^0(u, \lambda), \quad I_0^0(u^i) \rightarrow \beta(p), \quad I^0(u^i) - p \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

что говорит о том, что каждая из указанных последовательностей $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots$ является ОМП в задаче (OC_p^0) .

Доказательство. Так как $\lambda \in K_{p,c} \subset L_{2,1}(X)$, то $\beta(p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^0(u, \lambda)$, а, следовательно, и $\beta(p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,\tilde{c}}^0(u, \lambda)$, так как любая ОМП в задаче (OC_p^0) является минимизирующей последовательностью как для функционала $L_{p,c}^0(u, \lambda)$, $u \in \mathcal{U}$, так и для функционала $L_{p,\tilde{c}}^0(u, \lambda)$, $u \in \mathcal{U}$. Предположим, что существует такая последовательность

$$u^i \in \mathcal{U}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad L_{p,\tilde{c}}^0(u^i, \lambda) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,\tilde{c}}^0(u, \lambda) = \beta(p), \quad i \rightarrow \infty,$$

что (образ оператора $I^0 : \mathcal{U} \rightarrow L_{2,1}(X)$ есть компакт)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (I^0(u^i) - p) = \tilde{I} \neq 0. \quad (3.5)$$

Но тогда можем записать

$$\begin{aligned} L_{p,\tilde{c}}^0(u^i, \lambda) &= I_0^0(u^i) + \langle \lambda, I^0(u^i) - p \rangle + \tilde{c}\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \\ &= I_0^0(u^i) + \langle \lambda, I^0(u^i) - p \rangle + c\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) + (\tilde{c} - c)\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \\ &= L_{p,c}^0(u^i, \lambda) + (\tilde{c} - c)\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \rightarrow \beta(p), \quad i \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда ввиду соотношений (3.5) получаем, что $\limsup_{i \rightarrow \infty} L_{p,c}^0(u^i, \lambda) < \beta(p)$, что, в свою очередь, влечет строгое неравенство $\inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^0(u, \lambda) < \beta(p)$, которое противоречит равенству $\inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^0(u, \lambda) = V_{p,c}^0(\lambda) = \beta(p)$. Таким образом, предложение доказано. $\square$

3.2. Аппроксимация минимальной по норме точки максимума модифицированной двойственной задачи (3.1) посредством ее стабилизация по Тихонову. В силу оценки (2.5), условия согласования (3.3) и теоремы о сходимости метода стабилизации Тихонова (см., например, [1, гл. 9, § 4, теорема 2]) можно утверждать, что справедливо следующее предложение об аппроксимации минимального по норме решения в вогнутой задаче максимизации общего вида (3.1).

Предложение 3.2. Если $K_{p,c} \cap \Lambda_c = \emptyset$, то

$$\|\lambda_{p,c}^{\delta,\alpha(\delta)} - \lambda_{p,c}^0\| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (3.6)$$

где $\lambda_{p,c}^0$ — минимальное по норме решение задачи (3.1). Если же $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$, то точка $\lambda_{p,c}^0$ в предельном соотношении (3.6) одновременно является и минимальной по норме точкой во множестве $K_{p,c}$.

Замечание 3.1. Если в задаче (3.2) вместо стабилизатора $\|\lambda\|_{2,1,X}^2$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$ взять $\|\lambda - \tilde{\lambda}\|_{2,1,X}^2$ с некоторым $\tilde{\lambda} \in L_{2,1}(X)$, то в условиях предложения 3.2 в случае $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$ точка $\lambda_{p,c}^0$ одновременно доставляет минимум функционалу $\|\lambda - \tilde{\lambda}\|_{2,1,X}^2$, $\lambda \in K_{p,c}$. Таким образом, за счет выбора точки $\tilde{\lambda}$ предельный элемент $\lambda_{p,c}^0$ можно считать равным любому фиксированному наперед выбранному элементу из $K_{p,c} \cap \Lambda_c$.

3.3. Построение ОМП в исходной нелинейной задаче оптимального управления в случае А). Итак, пусть $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$. Пусть далее δ^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Рассмотрим в этом случае последовательность $u_\kappa^{c,\delta^s,i}$, $i = 1, 2, \dots$, являющуюся минимизирующей для функционала $L_{p,c+\kappa}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}(u, \lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$, $u \in \mathcal{U}$, $s = 1, 2, \dots$, где $\kappa > 0$ не зависящая от $s = 1, 2, \dots$ постоянная. Примем при этом обозначение $u_0^{c,\delta^s,i} \equiv u^{c,\delta^s,i}$ при $\kappa = 0$. Тогда можем записать неравенства

$$\begin{aligned} I_0^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i}) + \langle \lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, I^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i}) - p \rangle + (c + \kappa)\psi(\|I^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i}) - p\|_{2,1,X}) \\ \leq V_{p,c+\kappa}^{\delta^s}(\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) + \epsilon^{c,\delta^s,i}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \epsilon^{c,\delta^s,i} \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу ограниченности множества Λ_c и оценок (1.4), (2.5), а также выбора подпоследовательности $i(c, s)$, $s = 1, 2, \dots$ последовательности $i = 1, 2, \dots$ такой, что $\epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)} \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, из (3.7) выводим, обозначив $u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)} \equiv u_\kappa^s$, что

$$\begin{aligned} I_0^0(u_\kappa^s) + \langle \lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}, I^0(u_\kappa^s) - p \rangle + (c + \kappa)\psi(\|I^0(u_\kappa^s) - p\|_{2,1,X}) \\ \leq V_{p,c+\kappa}^0(\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) + \epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)} + \gamma^s, \quad s = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\gamma^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. В свою очередь, из этой оценки в силу предельного соотношения (3.6) и непрерывности функционала $V_{p,c+\kappa}^0$ (см. раздел 2.4) получаем

$$\begin{aligned} I_0^0(u_\kappa^s) + \langle \lambda_{p,c}^0, I^0(u_\kappa^s) - p \rangle + (c + \kappa)\psi(\|I^0(u_\kappa^s) - p\|_{2,1,X}) \\ \leq V_{p,c+\kappa}^0(\lambda_{p,c}^0) + \tilde{\gamma}^s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad \tilde{\gamma}^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Последнее неравенство говорит о том, что последовательность $u_\kappa^s \equiv u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s = 1, 2, \dots$ является минимизирующей в задаче

$$L_{p,c+\kappa}^0(u, \lambda_{p,c}^0) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Но такой последовательностью в силу включения $\lambda_{p,c}^0 \in K_{p,c}$, строгого неравенства $\kappa > 0$ и предложения 3.1 может быть лишь последовательность с указанными свойствами (3.4) при $\tilde{c} = c + \kappa$. Таким образом, сконструированная выше последовательность элементов $u_\kappa^s \equiv u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s = 1, 2, \dots$, будет представлять собой ОМП в задаче (OC_p^0) .

Итак, в общей ситуации для построения ОМП в задаче (OC_p^0) в случае **А**) требуется в регуляризованном процессе максимизации модифицированной двойственной задачи решать задачу минимизации МФЛ при двух значениях штрафного коэффициента c : c и $c + \kappa$. В то же время, как показано в [13], во многих важных частных случаях, когда известна дополнительная информация о субдифференциальных свойствах функции значений β в конкретной точке $p \in \text{dom } \beta$, ОМП в задаче (OC_p^0) будет построенная выше последовательность $u_\kappa^s \equiv u_\kappa^{c, \delta^s, i(c^s, s)}$, $s = 1, 2, \dots$ при $\kappa = 0$: $u_0^s \equiv u^s$, $s = 1, 2, \dots$. В частности, такими важными частными случаями являются следующие (см. [13]).

1. Множество $\partial^P \beta(p)$ является одноточечным, что, в силу включения $\partial^P \beta(p) \subset \hat{\partial} \beta(p)$, имеет место, в частности, тогда, когда $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$ и одноточечным является множество $\hat{\partial} \beta(p)$.

2. Проксимальный субградиент $\partial^P \beta(p)$ содержит минимальный по норме элемент. Это будет заведомо так, если, например, $\partial^P \beta(p)$ замкнутое множество.

По аналогии с [14, теорема 3.1] может быть сформулирована и соответствующая теорема сходимости описанной выше процедуры двойственной регуляризации для решения исходной нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) в случае **А**).

Случай Б). Пусть теперь задача (OC_p^0) при условии $\beta(p) < +\infty$ такова, что нам неизвестно, обладает ли она вектором Куна-Таккера в указанном обобщенном смысле (случай **А**)) или, другими словами, нам неизвестно, имеет ли функция $V_{p,c}^0$ при некотором $c > 0$ точку максимума на $L_{2,1}(X)$, в которой принимает значение $\beta(p)$. Тем не менее, предельное соотношение $\lambda_{p,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)} \rightarrow \lambda_{p,c}^0$, $s \rightarrow \infty$, где $\lambda_{p,c}^0$ — минимальное по норме решение задачи (3.1), имеет место в силу предложения 3.2 при каждом фиксированном $c > 0$ также и в этом случае (см. (3.6), когда $K_{p,c} \cap \Lambda_c = \emptyset$). Будем, однако, теперь стремить δ к нулю согласованно со стремлением штрафного коэффициента c к $+\infty$. В этом случае метод двойственной регуляризации сопрягается (объединяется), по сути дела, с методом штрафов, так как слагаемое $c\psi(\|g^\delta(z) - p\|_{2,1,X})$ в МФЛ имеет вид именно штрафного слагаемого с коэффициентом штрафа c . В дальнейших построениях в случае **Б**) считаем, что (при $\beta(p) < +\infty$) оба весовых множителя l_1, l_2 в штрафной функции ψ положительны, т. е. $l_1 = l_2 = 1$, и выполняется условие согласования

$$c^s \delta^s \rightarrow 0, \quad c^s \rightarrow \infty, \quad \delta^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Одновременно, мы будем далее предполагать, что в МФЛ с коэффициентом штрафа c^s двойственная переменная λ , как и в задаче (3.2), удовлетворяет неравенству $\|\lambda\|_{2,1,X} \leq c^s$.

3.4. Построение ОМП в исходной нелинейной задаче оптимального управления в случае Б). Итак, рассматриваем по аналогии с соотношениями (3.7) при $c = c^s$, $\kappa = 0$ последовательность $u^{c^s, \delta^s, i}$, $i = 1, 2, \dots$, являющуюся минимизирующей для функционала $L_{p,c^s}^{\delta^s}(u, \lambda^s)$, $u \in \mathcal{U}$ с $\lambda^s \in \Lambda_{c^s}$. Тогда подобно (3.7) можем записать

$$\begin{aligned} I_0^{\delta^s}(u^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}) + \langle \lambda^s, I^{\delta^s}(u^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}) - p \rangle + c^s \psi(\|I^{\delta^s}(u^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}) - p\|_{2,1,X}) \\ \leq V_{p,c^s}^{\delta^s}(\lambda^s) + \epsilon^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При этом номер $i(c^s, s)$ выбираем так, что $\epsilon^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)} \leq \gamma^s$, $s \rightarrow \infty$, где γ^s , $s = 1, 2, \dots$ — некоторая произвольным образом заданная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел.

Подчеркнем, что в качестве последовательности $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1, 2, \dots$, в (3.9) годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\| \leq c^s$. Например, в целях согласования процессов построения ОМП в случаях **А)** и **Б)**, можно воспользоваться «двойственными точками» $\lambda_{p,c}^{s,\alpha(c^s)}$ с достаточно большими c и в случае **Б)**. В качестве другого возможного варианта можно взять последовательность, все элементы которой совпадают с некоторым заданным фиксированным элементом $\lambda \in L_{2,1}(X)$.

Обозначим $u^s \equiv u^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}$. В силу ограниченности $\mathcal{U}$, оценки $\|\lambda^s\| \leq c^s$, условия согласования (3.8) и оценок (1.4), (2.5) из (3.9) следует

$$I_0^0(z^s) + \langle \lambda^s, I^0(u^s) - p \rangle + c^s \psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}) \leq V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s, \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^s \equiv & |I_0^{\delta^s}(u^s) - I_0^0(u^s)| + |\langle \lambda^s, I^{\delta^s}(u^s) - I^0(u^s) \rangle| \\ & + c^s |\psi(\|I^{\delta^s}(u^s) - p\|_{2,1,X}) - \psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X})| \\ & + |V_{p,c^s}^{\delta^s}(\lambda^s) - V_{p,c^s}^0(\lambda^s)| \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда, во-первых, из неравенства (3.10) в силу неравенств ($\|\lambda^s\|_{2,1,X} \leq c^s$)

$$\langle \lambda^s, I^0(u^s) - p \rangle + c^s \psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}) \geq 0, \quad V_{p,c^s}^0(\lambda^s) \leq \beta(p)$$

следует, что

$$I^0(u^s) \leq \beta(p) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s. \quad (3.11)$$

Во-вторых, из того же неравенства (3.10), так как $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \leq c^s$, одновременно следует, что

$$I_0^0(u^s) + c^s l_2 \|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 \leq V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s \quad (3.12)$$

или ($l_2 = 1$)

$$l_2 \|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 \leq (V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s - I_0^0(u^s))/c^s. \quad (3.13)$$

Поэтому из (3.11), (3.13) получаем для последовательности $u^s \equiv u^{c^s, \delta^s, i(c^s, s)}$, $s = 1, 2, \dots$ соотношения

$$I_0^0(u^s) \rightarrow \beta(p), \quad u^s \in \mathcal{U}^{0, \zeta^s}, \quad \zeta^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty \quad (3.14)$$

с

$$\zeta^s = \sqrt{(V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s - I_0^0(u^s))/c^s},$$

говорящие о том, что построенная выше последовательность u^s , $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче (OC_p^0) . Одновременно, из (3.12) получаем, так как $V_{p,c^s}^0(\lambda) \leq \beta(p) \quad \forall \lambda \in L_{2,1}(X)$ и $I_0^0(u^s) \geq \beta(p) - \chi^s$ (см. (3.14)),

$$\begin{aligned} c^s l_2 \|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 & \leq V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s - I_0^0(u^s) \\ & \leq \beta(p) + \gamma^s + \tilde{\gamma}^s - \beta(p) + \chi^s = \gamma^s + \tilde{\gamma}^s + \chi^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где χ^s , $s = 1, 2, \dots$ — некоторая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Отсюда, с учетом (3.14), следует, что $V_{p,c^s}^0(\lambda^s) \rightarrow \beta(p)$, $s \rightarrow \infty$. И, наконец, последнее предельное соотношение, оценка (3.10), предельное соотношение в (3.14), а также оценка (3.15) приводят и к предельному соотношению

$$\langle \lambda^s, I^0(u^s) - p \rangle + c^s l_1 \|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

По аналогии с [14, теорема 3.2] может быть сформулирована и соответствующая теорема сходимости описанной выше процедуры двойственной регуляризации для решения исходной нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) в случае **Б)**.

4. Регуляризованные ТКТ и ПЛ в нелинейной задаче оптимального управления

Описанное выше устойчивое построение ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0) в случаях **А)** и **Б)**, а также соответствующие теоремы сходимости (см. теоремы 3.1, 3.2 в [14]) предполагают конечность значения $\beta(p)$, т. е., другими словами, существование ОМП в рассматриваемой задаче. Другими словами, в этом случае описанные выше процедуры, а также соответствующие теоремы сходимости (см. теоремы 3.1, 3.2 в [14]) можно трактовать так же, как необходимые условия существования ОМП в задаче (OC_p^0) . Формулируемые ниже регуляризованная ТКТ и регуляризованный ПЛ помимо содержащихся в них утверждений, связанных с необходимыми условиями существования ОМП, содержат так же и соответствующие достаточные условия существования ОМП в рассматриваемой задаче. По этой причине ниже в данном разделе теорему, «обслуживающую» регулярный случай **А)**, мы называем регуляризованной ТКТ, а теорему, «обслуживающую» как случай **А)**, так и случай **Б)** (например, в отсутствие информации о регулярности задачи) — регуляризованным ПЛ.

4.1. Регуляризованная ТКТ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления. Сформулированная в теореме 3.3 в [14] регуляризованная ТКТ может быть переформулирована в терминах нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) . Характерным свойством этой теоремы является «устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных». Это понимается в том смысле, что в утверждении теоремы указывается множество допустимых элементов в каждой возмущенной задаче, которое состоит из таких элементов, что при стремлении к нулю ошибки задания исходных данных δ^s , $s = 1, 2, \dots$, они, взятые произвольным образом из указанного множества и последовательно при $\delta^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, составляют ОМП в задаче (OC_p^0) . Это обстоятельство позволило «связать» естественным образом формулировку регуляризованной ТКТ с понятием ОМП-образующего оператора, введенным в определении 1.1.

С целью переформулировки теоремы 3.3 в [14] обозначим через $U_p^{c,\kappa,\gamma,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{U}$, $\kappa \geq 0$, множество всех элементов $u^\gamma \in \mathcal{U}$, удовлетворяющих неравенству

$$L_{p,c+\kappa}^\delta(u^\gamma, \lambda) \leq L_{p,c+\kappa}^\delta(u, \lambda) + \gamma \quad \forall u \in \mathcal{U},$$

т. е. множество всех γ -оптимальных элементов в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,c+\kappa}^\delta(u, \lambda) \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Примем также обозначение $U_p^{c,0,\gamma,\delta}[\lambda] \equiv U_p^{c,\gamma,\delta}[\lambda]$.

Теорема 4.1. Пусть задача (OC_p^0) обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, δ^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $(l_1, l_2) \neq 0$. Тогда:

1. Найдутся достаточно большое $c > 0$ и ограниченная последовательность двойственной переменной $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1, 2, \dots$, такие, что для последовательности u^s , $s = 1, 2, \dots$, элементы которой при $\kappa > 0$ удовлетворяют соотношениям

$$u^s \in U_p^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}, \quad \epsilon^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

справедливы предельные соотношения

$$I_0^0(u^s) \rightarrow \beta(p), \quad V_{p,c}^0(\lambda^s) \rightarrow \beta(p), \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

$$I^0(u^s) - p \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V_{p,c+\kappa}^0(\lambda^s) \rightarrow \beta(p), \quad s \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Элементы u^s в (4.1) произвольным образом выбираются из множеств $U_p^{c^s, \kappa, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$, а МФЛ $L_{p,c+\kappa}^{\delta^s}(u, \lambda^s)$, $u \in \mathcal{U}$ берется при $(l_1, l_2) \neq 0$.

Другими словами, в этом случае оператор $R_p(\cdot, \delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $f^{\delta^s} \equiv (F^{\delta^s}, G^{\delta^s}, H^{\delta^s}, \varphi^{\delta^s}, x_0^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $R_p(f^{\delta^s}, \delta^s) \equiv U_p^{c, \kappa, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$, где $\epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, является ОМП-образующим в задаче (OC_p^0) .

2. И наоборот, если при некотором достаточно большом $c > 0$ существует ограниченная последовательность двойственной переменной $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1, 2, \dots$, такая, что элементы последовательности u^s , $s = 1, 2, \dots$, удовлетворяют при $\kappa \geq 0$ соотношениям (4.1) и предельному соотношению (4.3), то выполняется и первое предельное соотношение (4.2), т. е. последовательность u^s , $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче (OC_p^0) . При этом одновременно выполняется и предельное соотношение (4.4).

З а м е ч а н и е 4.1. В качестве указанной в первом утверждении теоремы последовательности λ^s , $s = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $\lambda_{p,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}$, $s = 1, 2, \dots$, вырабатываемая процедурой двойственной регуляризации (см. выше раздел 3, а также [14, теорема 3.1]), элементы которой максимизируют на множестве $L_{2,1}(X)$ сильно вогнутый функционал $R_{p,c}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}$ при условии согласования $\delta^s/\alpha(\delta^s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$. При этом $\lambda^s \rightarrow \lambda_{p,c}^0$, $s \rightarrow \infty$, где $\lambda_{p,c}^0$ — минимальный по норме во множестве $K_{p,c}$ обобщенный вектор Куна–Таккера задачи (OC_p^0) .

З а м е ч а н и е 4.2. Подчеркнем, что в сформулированной теореме, несмотря на нелинейность задачи (OC_p^0) , речь идет одновременно как о необходимых, так и о достаточных условиях для построения ОМП. Это является следствием регуляризации ПЛ именно в недифференциальной форме.

З а м е ч а н и е 4.3. Можно показать (см. [13, раздел 3]), что если функция значений β обладает в точке p дополнительными субдифференциальными свойствами, например, такими как 1) множество $\partial^P \beta(p)$ является одноточечным; 2) проксимальный субградиент $\partial^P \beta(p)$ содержит минимальный по норме элемент, то величину κ в утверждении 1. теоремы можно считать равной нулю.

З а м е ч а н и е 4.4. Если в рамках теоремы 4.1 в задаче минимизации $L_{p,c+\kappa}^{\delta^s}(u, \lambda^s) \rightarrow \inf$, $u \in \mathcal{U}$, минимальное значения достигается, то в качестве элементов u^s , $s = 1, 2, \dots$ конструируемой ОМП могут быть естественно взяты непосредственно точки минимума в этой задаче минимизации МФЛ. Обсудим условия, при которых эта задача заведомо разрешима. Стандартные рассуждения позволяют легко такие условия сформулировать. Они предполагают, например, что интегрант F^δ и правая часть φ^δ управляемой системы устроены «аффинно» по u

$$F^\delta(t, x, u) \equiv F_1^\delta(t, x) + \langle F_2^\delta(t, x), u \rangle, \quad \varphi^\delta(t, x, u) \equiv \varphi_1^\delta(t, x) + \varphi_2^\delta(t, x)u,$$

где F_1^δ , F_2^δ , φ_1^δ , φ_2^δ «устроены» так же, как и F_1 , F_2 , φ_1 , φ_2 из замечания 1.3, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество. В этом случае при каждом $s = 1, 2, \dots$ указанная задача минимизации МФЛ разрешима.

4.2. Регуляризованный ПЛ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления. В данном разделе переформулируем регуляризованный ПЛ теоремы 3.4 в [14] в терминах задачи (OC_p^0) настоящей работы. Здесь словосочетание «регуляризованный ПЛ» применяется благодаря тому, что формулируемый результат охватывает одновременно как случай **А**), так и случай **Б**). Как и в предыдущей ситуации, связанной с теоремой 4.1, его характерным свойством является «устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных», а понятие ОМП-образующего оператора, введенное в определении 1.1, естественным образом встроено в формулировку теоремы. Прежде чем формулировать указанный результат, напомним, что ввиду ограниченности множества $\mathcal{U}$ значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно тогда и только тогда, когда в ней существует ОМП.

Теорема 4.2. Пусть значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно, δ^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $(l_1, l_2) \neq 0$. Тогда справедливы следующие два утверждения.

1. Пусть задача (OC_p^0) обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле. Тогда справедливы все утверждения теоремы 4.1, которые в совокупности можно трактовать как регуляризованную ТКТ для нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) .

2. Пусть в задаче (OC_p^0) не существует обобщенного вектора Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, c^s , $s = 1, 2, \dots$ — произвольная фиксированная сходящаяся к $+\infty$ последовательность чисел такая, что $c^s \delta^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, оба штрафных коэффициента l_1, l_2 являются положительными. Тогда имеют место следующие два утверждения:

2.1. Если $\beta(p) < +\infty$, то найдется последовательность двойственной переменной λ^s , $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \leq c^s$, $s = 1, 2, \dots$, такая, что для последовательности $z^s \in \mathcal{U}$, $s = 1, 2, \dots$, элементы которой удовлетворяют при $l_1 = l_2 = 1$ соотношениям

$$u^s \in \mathcal{U}_p^{c^s, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}, \quad \epsilon^s \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

справедливы предельные соотношения

$$I^{\delta^s}(u^s) - p \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

$$\langle \lambda^s, I^{\delta^s}(u^s) - p \rangle + c^s \psi(\|I^{\delta^s}(u^s) - p\|_{2,1,X}) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (4.7)$$

$$I^0(u^s) \rightarrow \beta(p), \quad s \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V_{p, c^s}^0(\lambda^s) \rightarrow \beta(p), \quad s \rightarrow \infty. \quad (4.9)$$

Элементы u^s в (4.5) произвольным образом выбираются из множеств $\mathcal{U}_p^{c^s, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$ (определение множества $\mathcal{U}_p^{c, \epsilon, \delta}[\lambda] \subset \mathcal{U}$ см. перед формулировкой теоремы 4.1).

Другими словами, в этом случае оператор $R_p(\cdot, \delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $f^{\delta^s} \equiv (F^{\delta^s}, G^{\delta^s}, H^{\delta^s}, \varphi^{\delta^s}, x_0^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $R_p(f^{\delta^s}, \delta^s) \equiv \mathcal{U}_p^{c^s, \epsilon^s, \delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$ с $\epsilon^s \rightarrow 0$, $s \rightarrow \infty$, является ОМП-образующим в задаче (OC_p^0) .

2.2. Если существует последовательность двойственной переменной λ^s , $s = 1, 2, \dots$, такая, что $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \leq c^s$, $s = 1, 2, \dots$, и для последовательности u^s , $s = 1, 2, \dots$, элементы которой удовлетворяют включениям (4.5), выполняются предельные соотношения (4.6), (4.7), то выполняются и предельные соотношения (4.8), (4.9).

З а м е ч а н и е 4.5. В качестве последовательности λ^s , $s = 1, 2, \dots$, в утверждении **2.1** сформулированной теоремы годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \leq c^s$. Например, в качестве такой последовательности может быть взята последовательность элементов $\lambda_{p,c^k}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}$, $s = 1, 2, \dots$, максимизирующих на множестве Λ_{c^k} сильно вогнутый функционал $R_{p,c^k}^{\delta^s, \alpha(\delta^s)}$ (см. утверждение **1**. теоремы **4.1**) с достаточно большими номерами при каждом фиксированном достаточно большом c^k , $c^k \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$.

З а м е ч а н и е 4.6. Если в рамках теоремы **4.2** в задаче минимизации $L_{p,c^s}^{\delta^s}(u, \lambda^s) \rightarrow \min$, $u \in \mathcal{U}$ минимальное значение достигается, то в качестве элементов u^s , $s = 1, 2, \dots$, конструируемых ОМП могут быть естественно взяты непосредственно точки минимума в этой задаче минимизации МФЛ.

4.3. О возможности применения теорем 4.1, 4.2. Для применения теорем **4.1**, **4.2** не требуется существования (обычного) оптимального управления. Приведем соответствующий иллюстративный пример задачи (OC_p) , попадающей в сферу действия обеих этих теорем.

П р и м е р 4.1. Рассматриваем задачу оптимального управления с известной в теории конструкцией функционала качества и с параметром $p \in L_{2,1}(0, 1)$ в ограничении-равенстве

$$\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \rightarrow \inf, \quad x(t) = p(t) \quad \text{при п. в. } t \in [0, 1],$$

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U \quad \text{при п. в. } t \in (0, 1), \quad U = \{-1, 1\}.$$

Легко заметить, что в этой задаче, в силу специфики функционала, при $p = 0$ имеют место равенства $\beta(0) = -1$, но $\beta_0(0) = +\infty$, т. е. $\beta(0) < \beta_0(0)$ (если же взять $U = [-1, +1]$, то $\beta(0) = -1$, $\beta_0(0) = 0$). Легко заметить также и то, что ни при каком управлении $u \in \mathcal{U}$ в ней при $p = 0$ обобщенная нижняя грань $\beta(0)$ не достигается (она достигается на обобщенном управлении $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$, где δ_s — сосредоточенная в s мера Дирака). Одновременно, в силу той же специфики функционала задачи можно заметить, что проксимальный субградиент $\partial^P \beta(0) \neq \emptyset$ и, стало быть, с формальной точки зрения эта задача при $p = 0$ входит в сферу действия как теоремы **4.1**, так и теоремы **4.2**.

Далее, предлагаемая в теоремах **4.1**, **4.2** и основанная на двойственности устойчивая процедура построения ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0) , как это обычно и бывает с двойственными алгоритмами, состоит из двух параллельных и неразрывно связанных процедур. Назначение первой из них состоит в том чтобы выделить определенную совокупность значений двойственной переменной λ^s , $s = 1, 2, \dots$. Например, в регулярном случае такую совокупность значений выделяет устойчивый алгоритм максимизации в вогнутой модифицированной двойственной задаче. Он представляет собою обычный алгоритм стабилизации по Тихонову для приближения к решению этой двойственной задачи или, другими словами, к соответствующему обобщенному вектору Куна–Таккера задачи (OC_p^0) . В свою очередь, вторая процедура предлагает составлять искомую ОМП из субэкстремалей (экстремалей) нелинейной МФЛ, в которую в качестве двойственной переменной подставляются выделяемые первой процедурой двойственные значения. Основным смыслом теорем **4.1**, **4.2** состоит в том, что они показывают, что обе процедуры, взятые

в совокупности, действительно порождают конкретную ОМП в исходной задаче (OC_p^0) . Причем для того чтобы «сработала» хотя бы одна из этих теорем, достаточно выполнения условия $\beta(p) < +\infty$, т. е. достаточно лишь, чтобы в задаче существовали ОМП. По этой причине описанные в теоремах 4.1, 4.2 процедуры могут составлять теоретическую основу для конструирования устойчивых алгоритмов решения нелинейных практических задач оптимального управления. Однако, в реальности, создание таких алгоритмов для решения тех или иных практических нелинейных экстремальных задач представляет собою, безусловно, сложную проблему, успех в решении которой сильно зависит от той или иной специфики конкретной экстремальной задачи. Описанная ситуация является хорошо известной специалистам, которые имеют дело с решением сложных нелинейных задач.

5. ПЛ и ПМП в нелинейной задаче оптимального управления

Посредством предельного перехода в соотношениях регуляризованной ТКТ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления (OC_p^0) (теорема 4.1) перекинем мостик к обычной ТКТ в недифференциальной форме для этой задачи, а, как следствие, и к соответствующему ПМП для нее. Основным при этом будет предположение об «аффинном» по u устройстве интегранта F и правой части φ управляемой системы. Так как условия оптимальности предполагают наличие оптимального элемента, то такое «устройство» задачи как раз и будет гарантировать его существование в задаче частного вида, о котором идет речь в замечании 1.3.

Итак, основной целью данного раздела является получение условий оптимальности в задаче (OC_p^0) частного вида, входящей при $\delta = 0$ в семейство зависящих от $\delta \in [0, \delta_0]$ задач

$$(SOC_p^\delta) \quad I_0^\delta(u) \equiv \int_0^T F_1^\delta(t, x^\delta[u](t)) dt + \int_0^T \langle F_2^\delta(t, x^\delta[u](t)), u(t) \rangle dt + G^\delta(x^\delta[u](T)) \rightarrow \inf,$$

$$I^\delta(u)(t) \equiv H^\delta(t, x^\delta[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0, T], \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

где $x^\delta[u](t)$, $t \in [0, T]$ — абсолютно-непрерывное решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\dot{x} = \varphi_1^\delta(t, x) + \varphi_2^\delta(t, x)u(t), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Здесь функции F_1^δ , F_2^δ , φ_1^δ , φ_2^δ «устроены» соответственно так же, как и функции F_1 , F_2 , φ_1 , φ_2 из замечания 1.3, а $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество.

Если $\beta(p) < +\infty$, т. е. $\mathcal{U}_p^0 \equiv \{u \in \mathcal{U} : I^0(u) - p = 0\} \neq \emptyset$, то задача (SOC_p^0) разрешима. Это доказывается с помощью стандартных рассуждений, основанных на слабой компактности множества $\mathcal{U}$ и компактности в $C_n[0, T]$ множества траекторий $\{x^0[u] : u \in \mathcal{U}\}$. При этом можно говорить, что справедливо равенство $\beta(p) = \beta_0(p)$. Обозначим через $\mathcal{U}_p^* \subset \mathcal{U}_p^0$ совокупность всех оптимальных управлений в задаче (SOC_p^0) и зафиксируем произвольно выбранный элемент $u^* \in \mathcal{U}_p^*$. Получим условия оптимальности этого элемента с помощью предельного перехода в соотношениях теоремы 4.1. Основные предположения при этом: 1) $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$, т. е. задача (SOC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера; 2) весовой множитель l_1 равен нулю. Напомним, что точки $p \in \text{dom } \beta$, для которых $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$, лежат всюду плотно в $\text{dom } \beta$, см. раздел 2.2.

Для того чтобы записать условия оптимальности для выбранного элемента $u^* \in \mathcal{U}_p^*$, рассмотрим далее семейство специальных задач $(SOC_p^{\delta,l})$ с добавком

$$(SOC_p^{\delta,l}) \quad I_0^{\delta,l}(u) \equiv I_0^\delta(u) + l|u - u^*|_{w,2,m} \rightarrow \inf,$$

$$I^\delta(u)(t) \equiv H^\delta(t, x^\delta[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0, T], \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

где $x^\delta[u](t)$, $t \in [0, T]$ — решение системы (5.1), $|\cdot|_{w,2,m}$ — так называемая слабая норма в $L_{2,m}(0, T)$ (как известно, слабая сходимость в $L_{2,m}(0, T)$ эквивалентна сходимости в слабой норме $|\cdot|_{w,2,m}$ [16, теорема I.3.11]), $l \in (0, 1]$ — положительное число. Можно заметить, что задача $(SOC_p^{0,l})$, как и задача (SOC_p^0) , разрешима при любом $l \in [0, 1]$. Главным интересующим нас свойством этого семейства задач с добавком является то, что любая ОМП для задачи $(SOC_p^{0,l})$ при $l > 0$ слабо в $L_{2,m}(0, T)$ сходится к u^* . Функцию значений в задаче $(SOC_{p'}^{0,l})$, $p' \in L_{2,1}(X)$ (она определяется так же, как и функция β в задаче $(SOC_{p'}^0)$, $p' \in L_{2,1}(X)$), обозначим через β^l . Очевидно $\beta^l(p') \geq \beta(p') \quad \forall p' \in L_{2,1}(X)$, $\text{dom } \beta = \text{dom } \beta^l$ и $\beta^l(p) = \beta(p)$ при $l > 0$.

Далее заметим, что, так как по предположению $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ ($\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$), то с учетом определения $\partial^P \beta(p)$ и леммы 2.1 можно утверждать, что $\zeta \in \partial^P \beta^l(p)$ и при всех $l \in (0, 1]$, см. замечание 2.1. Более того, одновременно элемент $-\zeta$ является вектором Куна–Таккера специальной задачи с добавком $(SOC_p^{0,l})$ при каждом $l \in (0, 1]$ для некоторого фиксированного значения штрафного коэффициента $c > 0$, которое без ограничения общности, с учетом опять же замечания 2.1, можно считать не зависящим от $l \in (0, 1]$ в силу ограниченности множества $\mathcal{U}$ и вытекающей из этого равномерной по $l \in (0, 1]$ ограниченности эффективного множества $\text{dom } \beta^l$ и функции β^l на нем (на $\text{dom } \beta^l$).

Таким образом, опираясь на теорему 4.1, с учетом замечания 4.4, можно записать неравенство при каждом $l \in (0, 1]$ со штрафным коэффициентом c , не зависящим от l

$$L_{p,c}^{\delta^s,l}(u^{*,l,s}, -\zeta) \leq L_{p,c}^{\delta^s,l}(u, -\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad (5.2)$$

где ($l_1 = 0$)

$$L_{p,c}^{\delta,l}(u, -\zeta) \equiv I_0^{\delta,l}(u) - \langle \zeta, I^\delta(u) - p \rangle + c\|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X}^2 + l|u - u^*|_{w,2,m}^2, \quad u \in \mathcal{U},$$

$u^{*,l,s} \in \mathcal{U}$ — оптимальный элемент в задаче

$$L_{p,c}^{\delta^s,l}(u, -\zeta) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{U}$$

и при этом имеют место предельные соотношения

$$I_0^{0,l}(u^{*,l,s}) \rightarrow \beta(p), \quad I^0(u^{*,l,s}) - p \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Последние предельные соотношения (5.3) означают, что последовательность $u^{*,l,s}$, $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче $(SOC_p^{0,l})$, т. е. слабо сходится к u^* . Данное обстоятельство позволяет вывести в результате предельного перехода в неравенстве (5.2) следующее неравенство

$$L_{p,c}^{0,l}(u^*, -\zeta) \leq L_{p,c}^{0,l}(u, -\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

или

$$\begin{aligned} I_0^0(u^*) - \langle \zeta, I^0(u^*) - p \rangle + c\|I^0(u^*) - p\|_{2,1,X}^2 \\ \leq I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + c\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2 + l|u - u^*|_{w,2,m}^2 \quad \forall u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Предельный переход при $l \rightarrow 0$ в последнем неравенстве приводит к неравенству

$$L_{p,c}^0(u^*, -\zeta) \leq L_{p,c}^0(u, -\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{U},$$

которое естественно интерпретировать как регулярный недифференциальный ПЛ для элемента u^* в задаче (SOC_p^0) и в котором в качестве ζ может быть взят любой элемент из $\partial^P \beta(p)$ со своим $c > 0$ (оно, вообще говоря, зависит от ζ). Таким образом, может быть сформулирован следующий регулярный ПЛ (т. е. ТКТ) в недифференциальной форме в задаче (SOC_p^0) .

Теорема 5.1. Пусть $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$, $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ — произвольно выбранный фиксированный элемент. В этом случае справедливы следующие два утверждения.

1. Если $u^* \in \mathcal{U}_p^*$ — произвольно выбранный оптимальный элемент в задаче (SOC_p^0) , то найдется достаточно большое число $c > 0$, зависящее, вообще говоря, от ζ , такое, что

$$L_{p,c}^0(u^*, -\zeta) \leq L_{p,c}^0(u, -\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

2. Если $\hat{u} \in \mathcal{U}_p^0$ такой элемент, что при некотором $c > 0$ имеет место неравенство

$$L_{p,c}^0(\hat{u}, -\zeta) \leq L_{p,c}^0(u, -\zeta) \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad (5.4)$$

то $\mathcal{U}_p^* \neq \emptyset$ и $\hat{u} \in \mathcal{U}_p^*$.

Доказательство. Первое утверждение доказано выше посредством рассуждений, проведенных перед формулировкой теоремы. Доказываем второе утверждение. Подставляя произвольный элемент $u \in \mathcal{U}_p^0$ в неравенство (5.4), получаем $I_0^0(\hat{u}) \leq I_0^0(u) \quad \forall u \in \mathcal{U}_p^0$, т. е. $\mathcal{U}_p^* \neq \emptyset$ и $\hat{u} \in \mathcal{U}_p^*$. $\square$

Из этого недифференциального ПЛ при дополнительных предположениях дифференцируемости по фазовой переменной x исходных данных задачи (SOC_p^0) мы выведем далее ПМП для управления u^* в «простейшей» (т. е. без фазового ограничения-равенства) задаче оптимального управления

$$L_{p,c}^0(u, -\zeta) \rightarrow \min, \quad u \in \mathcal{U}. \quad (5.5)$$

С этой целью сделаем необходимые дополнительные предположения относительно исходных данных задачи (SOC_p^0) . Считаем, что в дополнение к уже сделанным выполняются следующие предположения: 1) функция F^0 обладает измеримым по $(t, x, u) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и непрерывным по $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ при п. в. $t \in [0, T]$ градиентом $\nabla_x F^0(\cdot, \cdot, \cdot)$; 2) функция G^0 имеет непрерывный по $x \in \mathbb{R}^n$ градиент $\nabla_x G^0(\cdot)$; 3) функция H^0 имеет измеримый по $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ и непрерывный по $x \in \mathbb{R}^n$ при п. в. $t \in [0, T]$ градиент $\nabla_x H^0(\cdot, \cdot, \cdot)$; 4) векторная функция φ^0 обладает измеримым по $(t, x, u) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и непрерывным по $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ при п. в. $t \in [0, T]$ якобианом $\nabla_x \varphi^0(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Далее, прежде всего, заметим, что ($l_1 = 0$)

$$\begin{aligned} L_{p,c}^0(u, \zeta) &= \int_0^T F_1^0(t, x^0[u](t)) dt + \int_0^T F_2^0(t, x^0[u](t)) dt + G^0(x^0[u](T)) \\ &\quad - \int_0^T \chi_X(t) \zeta(t) (H^0(t, x^0[u](t)) - p(t)) dt + c \int_0^T \chi_X(t) (H^0(t, x^0[u](t)) - p(t))^2 dt, \end{aligned}$$

где $x^0[u](t)$, $0 \leq t \leq T$ — решение системы (5.1) при $\delta = 0$, χ_X — характеристическая функция множества $X \subset [0, T]$.

Введем функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}^0(t, x, u, \psi) = \langle \psi, \varphi_2^0(t, x)u \rangle - F_1^0(t, x) - \langle F_2^0(t, x), u \rangle + \chi_X(t)\zeta(t)(H^0(t, x) - p(t)) - c\chi_X(t)(H^0(t, x) - p(t))^2$. Задача оптимального управления (5.5) является хорошо изученной оптимизационной задачей (см., например, [5]) с точки зрения получения в ней необходимых условий оптимальности в форме ПМП. Таким образом, с учетом сделанных дополнительных предположений, можем сформулировать следующий результат.

Теорема 5.2. Пусть $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ — произвольно выбранный фиксированный элемент и выполняются сформулированные выше дополнительные предположения, связанные со свойствами градиентов функций F^0 , G^0 , H^0 , и якобиана векторной функции φ^0 . Пусть $u^* \in \mathcal{U}_p^*$ — произвольно выбранный оптимальный элемент в задаче (SOC_p^0) . Тогда выполняется соотношение максимума

$$\mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), u^*(t), \psi^0[u^*](t)) = \max_{v \in U} \mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), v, \psi^0[u^*](t)) \quad \text{при п. в. } t \in [0, T], \quad (5.6)$$

где через $\psi^0[u^*](t)$, $t \in [0, T]$, обозначено решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), u^*(t), \psi), \quad \psi(T) = -\nabla_x G^0(x^0[u^*](T)).$$

З а м е ч а н и е 5.1. Можно заметить, что ввиду наличия множителя $(H^0(t, x) - p(t))^2$ в слагаемом $c\chi_X(t)(H^0(t, x) - p(t))^2$ и равенства $H^0(t, x^0[u^*](t)) - p(t) = 0$ при п. в. $t \in X$ решение $\psi^0[u^*](t)$, $t \in [0, T]$, сопряженной задачи, как и сама сопряженная задача, не зависят от штрафного коэффициента $c > 0$.

Итак, если $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P \beta(p)$, то в соответствии с теоремой 5.2 каждое управление $u^* \in \mathcal{U}_p^*$ удовлетворяет регулярному ПМП (5.6).

References

- [1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization methods: In 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].
- [2] Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978; франц. ориг.: J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.
- [3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington–New York, 1977.
- [4] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1979.
- [5] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.: V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.
- [6] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987. [*Ill-posed Problems in the Natural Science*, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, MSU Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].
- [7] А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, Наука, М., 1995; англ. пер.: A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Taylor and Francis, London, 1998.

- [8] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51:9** (2011), 1594–1615; англ. пер.: М. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51:9** (2011), 1489–1509.
- [9] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25:1** (2019), 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25:1** (2019), 279–296 (In Russian)].
- [10] М. И. Сумин, “Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26:134** (2021), 151–171. [M. I. Sumin, “Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26:134** (2021), 151–171 (In Russian)].
- [11] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997; англ. пер.: A. V. Arutyunov, *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.
- [12] А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский, *Принцип максимума в оптимальном управлении*, Центр прикладных исследований мехмата МГУ, М., 2004. [A. A. Milyutin, A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovsky, *The Maximum Principle in Optimal Control*, Center for Applied Research of the Faculty of Mechanics and Mathematics of MSU, Moscow, 2004 (In Russian)].
- [13] М. И. Сумин, “Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзава в регулярной задаче нелинейного программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55:6** (2015), 947–977; англ. пер.: М. I. Sumin, “Stable sequential Kuhn–Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **55:6** (2015), 935–961.
- [14] М. И. Сумин, “Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейных задачах на условный экстремум”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **64:12** (2024), 2312–2331; англ. пер.: М. I. Sumin, “Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in nonlinear constrained optimization problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **64:12** (2024), 2823–2844.
- [15] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **26:2** (2020), 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **26:2** (2020), 252–269 (In Russian)].
- [16] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.: J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.
- [17] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Duality Theory in Mathematical Programming and Its Applications*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].
- [18] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*, CRM Proceedings & Lecture Notes, **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [19] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **178**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [20] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **330**, Springer, Berlin, 2006.
- [21] М. И. Сумин, “Метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа и регуляризация правила множителей Лагранжа в нелинейном оптимальном управлении”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **28:3** (2022), 202–221. [M. I. Sumin, “Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **28:3** (2022), 202–221 (In Russian)].
- [22] М. И. Сумин, “О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27:140** (2022), 351–374. [M. I. Sumin, “On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in

- a nonlinear problem for constrained extremum”, *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 351–374 (In Russian)].
- [23] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional analysis*, Nauka Publ., M., 1980 (In Russian)].
- [24] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].
- [25] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Наука, М., 1974; англ. ориг.: L. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia, 1969.
- [26] М. И. Сумин, “О некорректных задачах, экстремальных функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, “On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles”, *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].
- [27] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, 1-е изд., Радио и связь, М., 1987; англ. ориг.: D.-P. Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic Press, New York–London–Paris–San Diego–San Francisco–Sao Paulo–Sydney–Tokyo–Toronto, 1982.
- [28] М. Мину, *Математическое программирование. Теория и алгоритмы*, 1-е изд., Наука, М., 1990; англ. ориг.: M. Minoux, *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1986.
- [29] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации*, Наука, М., 1989. [E. G. Gol’shtein, N. V. Tret’yakov, *Augmented Lagrangians: Theory and Optimization Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].
- [30] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.: J.-P. Aubin, *L’analyse non lineaire et ses motivations economiques*, Masson, Paris–New York, 1984.
- [31] М. И. Сумин, “Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.: M. I. Sumin, “Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3700-6428>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 25.08.2025 г.

Поступила после рецензирования 09.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
 E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3700-6428>

There is no conflict of interests.

Received 25.08.2025

Reviewed 09.09.2025

Accepted for press 12.09.2025

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\mathcal{U}_1^{(0)} \rightarrow \mathcal{U}_2^{(0)}$$

none

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

of the entries in $\mathbb{Z}$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \alpha + 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_n$$

$$L(E, \varphi, K) \quad \sigma = -\tau$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$|R|, |III|, |VE|$$

$$\pi \approx \frac{1}{11}$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_{H^2}}$$

$$(E, \rho, 4)$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu$$

$$\det(X, \Theta_X) \neq 0$$

$$K_0(X) \text{ Ind } \mathbb{Z}/p$$