ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

ISSN 2686-9667

25150 >

9 772686 966000

Том 30
№ 150
2025

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 30, № 150, 2025

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Белый список», «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: 8(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/; https://journals.rcsi.science/2686-9667

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редактор: М.И. Филатова
Редактор английских текстов: Н.А. Михайлова
Технический редактор: Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь: М.В. Борзова
Администраторы сайта: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. 112 с. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150

Подписано в печать 10.06.2025. Дата выхода в свет 26.06.2025
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 14,0. Усл. печ. л. 13,0. Тираж 1000 экз. Заказ № 25111. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 30, no. 150, 2025

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "White list" and "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:
1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Derzhavin Tambov State University” (ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics/; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/; https://journals.rcsi.science/2686-9667

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editor: M.I. Filatova
English texts editor: N.A. Mikhailova
Technical editor: Y.A. Biryukova
Technical secretary: M.V. Borzova
Web-site administrators: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova

For citation:
Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics, **30**:150 (2025), 112 p. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150

Signed for printing 10.06.2025. Release date 26.06.2025
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 14,0. Conv. pr. sheet 13,0. Copies printed 1000. Order no. 25111. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

УДК 517.977.56

О динамическом восстановлении возмущения системы уравнений с распределенными параметрами

Марина Сергеевна БЛИЗОРУКОВА, Вячеслав Иванович МАКСИМОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620077, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

Аннотация. Рассматривается задача динамического восстановления возмущений, действующих на нелинейную систему, состоящую из двух взаимосвязанных уравнений параболического вида. В предположении, что в дискретные моменты времени измеряется (с ошибкой) решение системы, указывается алгоритм решения указанной задачи. Алгоритм, основанный на идеологии теории управления с обратной связью, является устойчивым к информационным помехам и погрешностям вычислений. Приводится оценка скорости сходимости алгоритма.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, динамическое восстановление возмущения

Благодарности: Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1549).

Для цитирования: *Близорукова М.С., Максимов В.И.* О динамическом восстановлении возмущения системы уравнений с распределенными параметрами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 97–109. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

On dynamic reconstruction of a disturbances in distributed parameter systems

Marina S. BLIZORUKOVA, Vyacheslav I. MAKSIMOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620077, Russian Federation

Abstract. The problem of dynamic reconstruction of disturbances acting on a nonlinear system composed of two coupled parabolic-type equations is under consideration. Assuming that a solution of the system is measured (with errors) at discrete times, an algorithm for solving the problem is proposed. The algorithm, based on the principles of feedback control theory, is shown to be robust with respect to informational noises and computational inaccuracies. An estimate of the convergence rate of the algorithm is provided.

Keywords: distributed parameter system, dynamic disturbance reconstruction

Acknowledgements: The work was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement no. 075-02-2025-1549).

Mathematics Subject Classification: 33R30, 35Q93, 93B30.

For citation: Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On dynamic reconstruction of a disturbances in distributed parameter systems. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 97–109. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-97-109

Введение

Исследуется задача восстановления распределенных входных воздействий (возмущений) системы уравнений с распределенными параметрами по результатам неточных измерений решения. Предполагается, что на заданном конечном временном интервале рассматривается нелинейная система, состоящая из двух взаимосвязанных уравнений параболического типа. На систему действует неизвестное возмущение. Необходимо построить алгоритм восстановления этого возмущения. При этом в дискретные (достаточно частые) моменты времени решение системы измеряется с ошибкой. Точное восстановление соответствующего возмущения, вообще говоря, невозможно в силу погрешности измерений. Поэтому мы предполагаем построить некоторую его аппроксимацию. Потребуем, чтобы аппроксимация была сколь угодно близка к восстанавливаемому входу при условии достаточной малости измерительных ошибок и расстояния между моментами измерений решения. Описанная задача относится к классу обратных задач динамики управляемых систем и, в более общем контексте, вкладывается в проблематику теории некорректных задач. Суть развиваемой в данной работе методики состоит в том, что алгоритм восстановления представляется в виде алгоритма управления некоторой вспомогательной динамической системой — моделью. Управление в модели адаптируется к результатам текущих наблюдений таким образом, что его реализация во времени «аппроксимирует» неизвестный вход.

1. Постановка задачи

Задана система дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&x_t(t,\eta) - D_1\Delta x(t,\eta) + k_1 x(t,\eta)y(t,\eta) = 0, \quad (t,\eta)\in Q,\\
&y_t(t,\eta) - D_2\Delta y(t,\eta) + k_2 x(t,\eta)y(t,\eta) = v(t,\eta) + f(t,\eta), \quad (t,\eta)\in Q,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

с краевыми

$$\partial_\nu x(t,s) = 0, \quad \partial_\nu y(t,s) = 0, \quad (t,s)\in\Sigma,$$

и начальными

$$x(0,\eta) = x_0(\eta), \quad y(0,\eta) = y_0(\eta), \quad \eta\in\Omega,$$

условиями. Здесь $Q = T\times\Omega$, $\Sigma = T\times\partial\Omega$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $T = [0,\vartheta]$, $\vartheta > 0$, $v(t,\eta)$, $(t,\eta)\in Q$ — возмущающее воздействие, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ — константы, ∂_ν — производная по внешней нормали к границе области Ω.

Функции $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ описывают концентрацию двух субстанций, D_1, D_2 и k_1, k_2 — коэффициенты диффузии и реакции. Ниже полагаем, что $x_0 = x_0(\eta) \in H^1(\Omega)$, $y_0 = y_0(\eta) \in H^1(\Omega)$ — неотрицательные функции, возмущение $v(t)$ при п. в. $t\in T$ принадлежит множеству

$$P = \{v\in L_2(\Omega) : v_1(\eta) \leq v(\eta) \leq v_2(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta\in\Omega\},$$

где $v_1, v_2 \in L_\infty(\Omega)$, $v_1(\eta) \leq v_2(\eta)$ при п. в. $\eta\in\Omega$. Функцию $f(\cdot)\in L_\infty(T;H)$, $H = L_2(\Omega)$, предполагаем известной, а функции $v(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ неизвестными. Таким образом, множество ограничений на возмущение предполагается неизвестным. Неизвестны также постоянные k_1 и D_1, а также функция $x_0(\cdot)$.

Обозначим через $H^1(\Omega)$ и $H^2(\Omega)$ пространства Соболева. В дальнейшем нам потребуется пространство

$$W(T) = \{x(\cdot)\in L_2(T;H^2(\Omega)) : x_t(\cdot)\in L_2(T;H)\}$$

с нормой

$$|x|_{W(T)} = \Big\{ \int\limits_0^{\vartheta} \big(|x(t)|^2_{H^2(\Omega)} + |x_t(t)|^2_H\big)\, dt \Big\}^{1/2}.$$

Таким образом, $W(T)$ означает пространство функций из $L_2(T; H^2(\Omega))$, обобщенные производные которых являются элементами пространства $L_2(T; H)$. Заметим, что пространство $W(T)$ непрерывно и плотно вложено в пространство $C(T; H^1(\Omega)) \subset C(T; L_p(\Omega))$, $1 \le p < +\infty$, непрерывных функций, действующих из T в $H^1(\Omega)$. Поэтому найдется константа $c^* > 0$ такая, что для всех $x(\cdot) \in W(T)$ верно неравенство

$$|x(\cdot)|_{C(T;H^1(\Omega))} \le c^* |x(\cdot)|_{W(T)}.$$

Пространство $W(T)$ также вложено компактно (см. [1, с. 33]) в $L_p(Q)$, $1 \le p < +\infty$.

В дальнейшем предполагаем выполненным

У с л о в и е 1.1. $0 \le v_1(\eta) + f(t, \eta)$ при п. в. $(t, \eta) \in Q$.

Подчеркнем, что известна функция $f(\cdot)$ и не известна функция $v_1(\cdot)$. Однако полагаем, что она такова, что выполнено условие 1.1.

Справедлива (см. [2])

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любых $v(\cdot) \in P(\cdot) = \{\tilde v(\cdot) \in L_2(T; H) : \tilde v(t) \in P$ при п. в. $t \in T\}$ существует единственное неотрицательное решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in W(T) \times W(T)$ системы (1.1), удовлетворяющее неравенству*

$$|x(\cdot)|^2_{W(T)} + |y(\cdot)|^2_{W(T)} \le c(1 + |x_0|^2_{H^1(\Omega)} + |y_0|^2_{H^1(\Omega)} + |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} + |f(\cdot)|^2_{L_2(T;H)}),$$

где $c > 0$ константа, не зависящая от $x_0, y_0, v(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

Всюду ниже используются обозначения: $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$ — решение системы (1.1), порожденное возмущением $v(\cdot)$, ∇x — градиент функции $x \in H^1(\Omega)$, т. е. $\nabla x = \{\partial x/\partial\eta_1, \partial x/\partial\eta_2\}$, $\eta = \{\eta_1, \eta_2\} \in \Omega$, $|\nabla x|^2 = \partial^2 x/\partial\eta_1^2 + \partial^2 x/\partial\eta_2^2$. Норма в пространстве $H^1(\Omega)$ задается следующим образом

$$|x|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} \big\{x^2(\eta) + |\nabla x(\eta)|^2\big\}\, d\eta \Big)^{1/2}.$$

Рассматриваемая в работе задача состоит в следующем. Имеется система (1.1) с неизвестным возмущением $v(\cdot) \subset P(\cdot)$. Это возмущение, а также отвечающее ему решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ априори не известны. В моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $i \in [0 : m-1]$, $\tau_i = 0$, $\tau_m = \vartheta$, измеряется (с ошибкой) решение системы (1.1); а именно вычисляются величины $\xi_i^h \in L_4(\Omega)$ и $\psi_i^h \in L_4(\Omega)$ со свойствами:

$$|x(\tau_i) - \xi_i^h|_H \le h, \quad |y(\tau_i) - \psi_i^h|_H \le h. \tag{1.2}$$

Здесь $h \in (0, 1)$ величина погрешности измерений. Требуется указать алгоритм вычисления в «реальном времени» возмущения $v(\cdot)$. Такова содержательная постановка.

Таким образом, задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления неизвестного возмущения $v(\cdot)$ (по результатам неточных измерений решения системы

(1.1)), который обладал бы свойствами динамичности и устойчивости. Свойство динамичности алгоритма означает, что построенные с его помощью приближения $u^h(\cdot)$ текущих значений возмущения $v(\cdot)$ вырабатываются в реальном времени. Свойство устойчивости алгоритма означает, что приближение $u^h(\cdot)$ сколь угодно точно, если точность измерений достаточно высока (значение h и расстояние между временами измерения τ_i решения достаточно малы).

Задача относится к классу задач динамического обращения систем с возмущением; искомый алгоритм может быть классифицирован как алгоритм устойчивого динамического обращения (динамической регуляризации). Первый из алгоритмов динамического обращения, основанный на известном в теории гарантированного управления принципе экстремального сдвига [3], был предложен в работе [4]. Впоследствии данный алгоритм был развит в ряде работ (см., например, монографии [5, 6], обзорную [7] и журнальные статьи [8–10], а также последнюю по времени публикации статью [11], в которой рассматривалась задача (аналогичная обсуждаемой в данной работе) для другой системы параболического типа. В соответствии с описанным в цитированных выше работах методом задача восстановления неизвестного возмущения заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой (уравнением), называемой моделью. При этом задача восстановления сводится к следующим двум задачам:

а) задаче выбора модели, функционирующей «синхронно» с реальной системой (уравнением) и

б) задаче выбора закона формирования управления моделью по принципу обратной связи.

Перейдем к строгой постановке рассматриваемой задачи, воспользовавшись подходом, развитым в работах, цитированных выше. Пусть фиксировано семейство разбиений отрезка T:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \delta(h) = \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} < 1.$$

Обозначим

$$\xi^h(t) = \xi_i^h, \quad \psi^h(t) = \psi_i^h \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i \quad \text{и всех} \quad i \in [0 : m-1].$$

Здесь и всюду ниже $m = m_h$, $\delta = \delta(h)$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$.

В качестве модели возьмем параболическое уравнение

$$w_t^h(t,\eta) - D_2\Delta w^h(t,\eta) + k_2\xi^h(t,\eta)\psi^h(t,\eta) = u^h(t,\eta) + f(t,\eta), \quad (t,\eta) \in Q, \tag{1.3}$$

с краевым

$$\partial_\nu w^h(t,s) = 0, \quad (t,s) \in \Sigma,$$

и начальным

$$w^h(0,\eta) = y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega,$$

условиями. Существование и единственность решения $w^h(\cdot) \in W(T)$ следует, например, из [12, теорема 5.5]. Кроме того, из этой же теоремы следует, что при всех $t \in T$ имеет место неравенство

$$|w^h(t)|_H + \int_0^t |w^h(s)|^2_{H^1(\Omega)}\,ds + \int_0^t |\dot w^h(s)|^2_H\,ds \le c^{(0)}\Big(1 + |y_0|^2_{H^1(\Omega)} + \int_0^t |u^h(s)|^2_H\,ds\Big). \tag{1.4}$$

Роль управления в модели играет функция $u^h(\cdot)$.

Задача восстановления возмущения. Требуется указать такой алгоритм вычисления управления $u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.3) по принципу обратной связи

$$u^h(t) = u_i^h(\tau_i, \xi_i^h, \psi_i^h, \Psi_i^h,) \quad \text{при п. в.} \quad t \in \delta_i \quad \text{и всех} \quad i \in [0 : m-1], \tag{1.5}$$

что имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \to v(\cdot) \;\; \text{в} \;\; L_2(T; H) \;\; \text{при} \;\; h \to 0.$$

Здесь $\Psi_i^h \in H$ — результаты неточных измерений состояний $w^h(\tau_i) = w^h(\tau_i; x_0, u^h(\cdot))$:

$$|\Psi_i^h - w^h(\tau_i)|_H \le h, \quad i \in [1 : m-1], \quad m = m_h, \tag{1.6}$$

$\Psi_0^h = y_0$, $w^h(\cdot) = w^h(\cdot; y_0, u^h(\cdot))$ — решение уравнения (1.3), порожденное управлением $u^h(\cdot)$, формируемым по принципу обратной связи (1.5).

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения, заметим, что $t \to \xi^h(t)\psi^h(t) \subset L_2(T; H)$. Кроме того, как нетрудно видеть, для решения $x(\cdot) = x(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; x_0, y_0, v(\cdot))$ системы (1.1) равномерно по всем $h \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$, $v(\cdot) \in P(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\int_0^\vartheta \left|x(t)y(t) - \xi^h(t)\psi^h(t)\right|_H^2 dt \le c_0(h^2 + \delta), \tag{1.7}$$

где постоянная c_0 не зависит от h и δ.

2. Алгоритм решения

Возьмем некоторую функцию $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$ такую, что $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину погрешности измерения h. Вместе с ней фиксируются число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta = \Delta_h$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ ($m = m_h$) идентичных шагов. При осуществлении i-го шага на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ ($\tau_i = \tau_{h,i}$) сначала (в момент τ_i) находится элемент

$$u_i^h = u_i^h(\tau_i, \psi_i^h, \Psi_i^h) = \arg\min\left\{(\Psi_i^h - \psi_i^h, u) + \tfrac{1}{2}\alpha|u|_H^2 : u \in H\right\} = \alpha^{-1}(\psi_i^h - \Psi_i^h). \tag{2.1}$$

Здесь и всюду в дальнейшем символ $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве H. После этого при $t \in \delta_i$ на вход уравнения (1.3) подается управление

$$u^h(t) = u_i^h + u_i^{h1}, \tag{2.2}$$

где $u_i^{h1} = 2(\psi_i^h - \Psi_i^h)$. В результате действия этого управления на отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ реализуется $w^h(t)$ — решение уравнения (1.3). На $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма осуществляется до момента ϑ.

В дальнейшем нам потребуется дискретное неравенство Гронуолла.

Лемма 2.1. *Пусть* $0 \le \phi_j$, $0 \le f_j$ *при* $j \in [0 : m]$ *и* $f_j \le f_{j+1}$ *при* $j \in [0 : m-1]$. *Тогда неравенства*

$$\phi_{j+1} \le c_0\delta \sum_{i=1}^{j} \phi_i + f_j, \quad j \in [1 : m-1]$$

влекут неравенства

$$\phi_{j+1} \le f_j \exp\{c_0 j\delta\}, \quad j \in [0 : m-1],$$

если $c_0 = \text{const} > 0$, $\phi_1 \le f_0$.

Теорема 2.1. *Пусть управление* $u^h(\cdot)$ *в уравнении* (1.3) *находится по правилу* (2.1), (2.2). *Пусть также* $\delta(h)\alpha^{-2}(h) < 1$ *при всех* $h \in (0,1)$. *Тогда верны неравенства*

$$\varepsilon(t) \le d_1(\alpha + h^2\delta^{-1}), \quad t \in T, \tag{2.3}$$

$$|\tilde{u}^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} + d_2\rho(h,\delta,\alpha). \tag{2.4}$$

Здесь $\tilde{u}^h(t) = u^h_i$ *при п. в.* $t \in \delta_i$, $i \in [0 : m-1]$, $\rho(h,\delta,\alpha) = \alpha + h^2(\alpha\delta)^{-1} + \delta\alpha^{-2}$, $\alpha = \alpha(h)$, $\delta = \delta(h)$,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}|\mu^h(t)|^2_H + D_2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla\mu^h(\eta,\tau)|^2\,d\eta\,d\tau,$$

$\mu^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ *и* $w^h(\cdot)$ — *решения системы* (1.1) *и уравнения* (1.3) *соответственно,* d_1 *и* d_2 *положительные постоянные, не зависящие от* $v(\cdot), u^h(\cdot), x(\cdot), y(\cdot)$ *и* $w^h(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы оценим изменение величины

$$\varepsilon_h(t) = \varepsilon(t) + \frac{1}{2}\alpha\int\limits_0^t \left\{|\tilde{u}^h(s)|^2_H - |v(s)|^2_H\right\} ds.$$

Вычтем второе уравнение системы (1.1) из уравнения (1.3) и умножим полученную разность скалярно (в H) на $\mu^h(t)$. В результате получим

$$\mu^h(0) = 0,$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d|\mu^h(t)|^2_H}{dt} + D_2\int\limits_\Omega |\nabla\mu^h(\eta,t)|^2\,d\eta = I^h_{1t} + I^h_{2t} + I^h_{3t}, \tag{2.5}$$

где

$$I^h_{1t} = -k_2(\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t), \mu^h(t)) = -k_2\int\limits_\Omega (\xi^h(t,\eta)\psi^h(t,\eta) - x(t,\eta)y(t,\eta))\mu^h(t,\eta)\,d\eta,$$

$$I^h_{2t} = (\tilde{u}^h(t) - v(t), \mu^h(t)), \quad I^h_{3t} = 2(u^{h1}(t), \mu^h(t)), \quad u^{h1}(t) = u^{h1}_i \ \text{при п. в.}\ t \in \delta_i.$$

Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\dot{\varepsilon}_h(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}\alpha\{|\tilde{u}^h(t)|^2_H - |v(t)|^2_H\} \quad \text{при п. в.} \quad t \in T. \tag{2.6}$$

В силу теоремы 2.1, неравенств (1.7) и (1.4) при всех $t \in T$ справедлива оценка

$$I^h_{1t} \le k_2|\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t)|_H|\mu^h(t)|_H \le \Phi_h(t) + \frac{1}{2}|\mu^h(t)|^2_H, \tag{2.7}$$

где
$$\Phi_h(t) = \frac{1}{2}k_2^2|\xi^h(t)\psi^h(t) - x(t)y(t)|_H^2.$$
Также несложно заметить, что при п. в. $t \in \delta_i$ справедливо неравенство
$$I_{2t}^h \le (\tilde{u}^h(t) - v(t), \Psi_i^h - \psi_i^h)_H + \varrho_i(t, h). \tag{2.8}$$
Здесь
$$\varrho_i(t, h) = (|\tilde{u}^h(t)|_H + |v(t)|_H)(2h + \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(\tau)|_H + |\dot{y}(\tau)|_H\}\, d\tau).$$

Из (2.5), (2.8) и (2.6) вытекает верное при п. в. $t \in \delta_i$ неравенство
$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le \big(\tilde{u}^h(t), \Psi_i^h - \psi_i^h\big)_H + \frac{1}{2}\alpha|\tilde{u}^h(t)|_H^2 - \big(v(t), \Psi_i^h - \psi_i^h\big)_H - \frac{1}{2}\alpha|v(t)|_H^2 + \varrho_i(t, h) + I_{1t}^h + I_{3t}^h. \tag{2.9}$$
Заметим, что при почти всех $t \in \delta_i$
$$I_{3t}^h = 2(\psi_i^h - \Psi_i^h, \mu^h(t)) = 2(\psi_i^h - y(\tau_i), \mu^h(t)) - 2(\Psi_i^h - w^h(\tau_i), \mu^h(t)) - 2(\mu^h(\tau_i), \mu^h(t)).$$
При этом
$$-2(\mu^h(\tau_i), \mu^h(t)) = -2|\mu^h(t)|_H^2 + 2(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t)).$$
Поэтому
$$|I_{3t}^h| \le 4h|\mu^h(t)|_H - 2|\mu^h(t)|_H^2 + 2|(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t))|.$$
Далее, имеем
$$4h|\mu^h(t)|_H \le 8h^2 + \frac{1}{2}|\mu^h(t)|_H^2, 2|(\mu^h(t) - \mu^h(\tau_i), \mu^h(t))| = 2\Big|\Big(\int_{\tau_i}^{t} \{\dot{w}^h(s) - \dot{y}(s)\}\, ds, \mu^h(t)\Big)\Big| \le 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\}\, ds + |\mu^h(t)|_H^2.$$
Таким образом, при почти всех $t \in \delta_i$
$$|I_{3t}^h| \le 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \big\{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\big\}\, ds + 8h^2 - \frac{1}{2}|\mu^h(t)|_H^2. \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.10) получим при $t \in \delta_i$
$$I_{1t}^h + I_{3t}^h \le 8h^2 + \Phi_h(t) + 2\delta \int_{\tau_i}^{t} \{|\dot{w}^h(s)|_H^2 + |\dot{y}(s)|_H^2\}\, ds. \tag{2.11}$$
В таком случае ввиду (2.1), (2.2), (2.9) при п. в. $t \in \delta_i$ имеет место неравенство
$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le \rho_i(t, h) + I_{1h}^h + I_{3i}^h.$$

Значит, в силу (2.11) при п. в. $t \in \delta_i$ выполнено

$$\varepsilon_h(t) \le \varepsilon_h(\tau_i) + \int\limits_{\tau_i}^{t} \Big[\{|\tilde{u}^h(\tau)|_H + |v(\tau)|_H\}\{2h + \int\limits_{\tau_i}^{t}(|\dot{x}^h(s)|_H + |\dot{x}_1(s)|_H)ds\}\Big] d\tau + \int\limits_{\tau_i}^{t}\{I_{1s}^h + I_{3s}^h\}\, ds$$

$$\le \varepsilon_h(\tau_i) + c_2h^2 + c_3\delta \int\limits_{\tau_i}^{t}\{|\tilde{u}^h(s)|_H^2 + |v(s)|_H^2\}ds + c_4\delta\int\limits_{\tau_i}^{t}\{|\dot{w}^h(\tau)|_H^2 + |\dot{y}(\tau)|_H^2\}\, d\tau + \int\limits_{\tau_i}^{t}\Phi_h(s)\, ds.$$

Воспользовавшись теоремой 2.1, равенством $\varepsilon_h(0) = 0$, а также включением $v(\cdot) \in L_2(T; H)$ и неравенствами (1.7) и (1.4), получим при $t \in T$

$$\varepsilon_h(t) \le c_5 h^2\delta^{-1} + c_6\delta\Big(1 + \int\limits_0^t |\tilde{u}^h(s)|_H^2\, ds + \int\limits_0^t |u^{h1}(s)|_H^2\, ds\Big). \tag{2.12}$$

Ввиду (1.2), (1.6), а также способа формирования управлений u_i^h и u_i^{h1} (см. (2.1)), имеем

$$|u_i^h|_H^2 \le c_7(|\mu^h(\tau_i)|_H^2 + h^2)\alpha^{-2}, \quad |u_i^{h1}|_H^2 \le 4\{2h + |\mu^h(\tau_i)|_H\}^2. \tag{2.13}$$

Следовательно, учитывая (2.13) и (2.12), а также (1.7) и неравенства $\alpha(h) < 1$, $\delta(h) < 1$, получаем

$$|\mu^h(\tau_i)|_H^2 \le c_8h^2\delta^{-1} + c_9\delta + c_{10}\alpha + c_{11}\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i-1}(h^2 + |\mu^h(\tau_j)|_H^2)$$

$$\le c_{12}(\alpha + \delta + h^2\delta^{-1} + h^2\delta\alpha^{-2}) + c_{11}\delta^2\alpha^{-2}\sum_{j=0}^{i-1}|\mu^h(\tau_j)|_H^2.$$

В силу леммы 2.1, а также неравенства $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$ при всех $h \in (0, 1)$ имеем

$$|\mu^h(\tau_i)|_H^2 \le c_{13}(\alpha + h^2\delta^{-1})\exp\{c_{11}\vartheta\delta\alpha^{-2}\} \le c_{14}(h^2\delta^{-1} + \alpha), \quad i \in [0 : m]. \tag{2.14}$$

Неравенства (2.14) и (2.13) влекут неравенства

$$\delta\int\limits_0^t |u^{h1}(s)|_H^2 ds \le \delta^2\sum_{j=0}^{i}|u_i^{h1}|_H^2 \le c_{15}\delta\max_{j\in[0:i]}(h^2 + |\mu^h(\tau_j)|_H^2) \le c_{16}\delta^2(h^2\delta^{-1} + \alpha), \tag{2.15}$$

$$\delta\int\limits_0^t |\tilde{u}^h(s)|_H^2\, ds \le \delta^2\sum_{j=0}^{i}|u_i^h|_H^2 \le c_{17}\delta\alpha^{-2}\max_{j\in[0:i]}(h^2 + |\mu^h(\tau_j)|_H^2)$$

$$\le c_{18}\delta\alpha^{-2}(h^2\delta^{-1} + \alpha), \quad t \in \delta_i. \tag{2.16}$$

В таком случае, из (2.15), (2.16) и (2.12) выводим

$$\varepsilon(t) \le c_{19}(h^2\delta^{-1} + \alpha). \tag{2.17}$$

Неравенство (2.3) следует из (2.17). В силу (2.12) и (2.16) также верно неравенство

$$\varepsilon_h(t) \le c_{20}h^2\delta^{-1} + c_{21}\delta\alpha^{-2}(h^2\delta^{-1} + \alpha). \tag{2.18}$$

Неравенство (2.4) вытекает из (2.18). □

Из доказанной теоремы вытекает основной результат работы — следующая

Теорема 2.2. *Пусть* $\alpha(h) \to 0$, $\delta(h) \to 0$, $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \to 0$, $h^2(\alpha(h)\delta(h))^{-1} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда имеет место сходимость*

$$\tilde{u}^h(\cdot) \to v(\cdot) \ \text{ в } \ L_2(T;H) \ \text{ при } \ h \to 0.$$

Доказательство этой теоремы проводится по стандартной схеме (см., например, [6], доказательство теоремы 1.2.3 или [11], доказательство теоремы 8).

3. Оценка скорости сходимости алгоритма

При некоторых дополнительных условиях можно указать оценку скорости сходимости алгоритма (см. теорему 3.1 ниже).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1. [6, с. 29] *Пусть* $V(\cdot) \in L_\infty(T_*;V^*)$ *и* $\tilde{v}(\cdot) \in W(T_*;V)$, $T_* = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\Big| \int\limits_a^t V(\tau)\, d\tau \Big|_{V^*} \le \varepsilon_*, \quad |\tilde{v}(t)|_V \le K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда для всех $t \in T_*$ *справедливо неравенство*

$$\Big| \int\limits_a^t \langle V(\tau), \tilde{v}(\tau)\rangle_V \, d\tau \Big| \le \varepsilon_*(K + \mathrm{var}(T_*;\tilde{v}(\cdot))).$$

В этом утверждении V — банахово пространство с нормой $|\cdot|_V$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — двойственность между V и V^*. Символ $\mathrm{var}(T_*;v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_*, а символ $W(T_*;V)$ — множество функций $y(\cdot): T_* \to V$ ограниченной вариации.

Теорема 3.1. *Пусть* $v(\cdot) \in W(T;H^1(\Omega))$ *и пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:*

$$|v(\cdot) - \tilde{u}^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le c^{(0)}\{\alpha^{1/2}(h) + h\delta^{-1/2}(h)\} + c^{(1)}\rho(h,\delta(h),\alpha(h)),$$

где $c^{(0)}, c^{(1)}$ *— некоторые положительные постоянные, не зависящие от* $h \in (0,1)$, δ *и* α.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем линейный непрерывный оператор

$$A: H^1(\Omega) \to (H^1(\Omega))^*, \quad \langle Aw_1, w_2\rangle_{H^1} = \int\limits_\Omega \nabla w_1(\eta)\nabla w_2(\eta)\, d\eta, \quad w_1, w_2 \in H^1(\Omega).$$

Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1}$ означает двойственность между $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$.

Вычтем второе уравнение системы (1.1) из (1.3) и умножим полученную разность на $\phi \in H^1(\Omega)$. После интегрирования устанавливаем неравенство

$$\Big|\Big\langle \int\limits_{t_1}^{t_2} \{\tilde{u}^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau, \varphi \Big\rangle_{H^1}\Big| \le \sum_{j=1}^4 |J^h_{jt}(\varphi)|, \tag{3.1}$$

справедливое при всех $0 \le t_1 < t_2 \le \vartheta$. Здесь

$$J^h_{1t}(\varphi) = \langle \mu^h(t_2) - \mu^h(t_1), \varphi\rangle_{H^1}, \quad J^h_{2t}(\varphi) = D_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle A\mu^h(t), \varphi\rangle_{H^1}\, dt,$$

$$J^h_{3t}(\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle \xi^h(\tau)\psi^h(\tau) - x(\tau)y(\tau), \varphi\rangle_{H^1}\, d\tau, \quad J^h_{4t}(\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle u^{h1}(t), \varphi\rangle_{H^1}\, d\tau.$$

Из (3.1) следует неравенство

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \{\tilde{u}^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \Big|_{(H^1(\Omega))^*} \le C_1\{|\mu^h(t_2)|_{(H^1(\Omega))^*} + |\mu^h(t_1)|_{(H^1(\Omega))^*}$$
$$+ D_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} |A\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2} |x(t)y(t) - \psi^h(t)\xi^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$|w|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |\nabla w(\eta)|^2\, d\eta, \quad w \in H^1(\Omega).$$

Заметим, что

$$|\cdot|^2_{H^1(\Omega)} = |\cdot|^2_{H^1_0(\Omega)} + |\cdot|^2_H.$$

Поэтому, воспользовавшись теоремой 2.2 (см. (2.3)), получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} |A\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*}\, dt \le C_2 \Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} |\mu^h(t)|^2_{H^1(\Omega)}\, dt \Big)^{1/2} \le C_3(\alpha + h^2\delta^{-1})^{1/2}. \quad (3.3)$$

Объединив (1.7) с (3.3), учитывая непрерывность вложения H в $(H^1(\Omega))^*$, а также неравенство $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \le \mathrm{const}$, получим из (3.2)

$$\Big| \int\limits_{t_1}^{t_2} \{\tilde{u}^h(\tau) - v(\tau)\}\, d\tau \Big|_{(H^1(\Omega))^*} \le C_4(\alpha^{1/2} + h\delta^{-1/2}). \quad (3.4)$$

Далее, воспользовавшись известным свойством троек Гельфанда, а также неравенствами (2.4), (3.4) и леммой 3.1, устанавливаем неравенство

$$|\tilde{u}^h(\cdot) - v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} \le |\tilde{u}^h(\cdot)|^2_{L_2(T;H)} - 2\int\limits_0^{\vartheta} (\tilde{u}^h(s), v(s))\, ds + |v(\cdot)|^2_{L_2(T;H)}$$
$$\le 2\Big| \int\limits_0^{\vartheta} \langle \tilde{u}^h(s) - v(s), v(s)\rangle_{H^1}\, ds \Big| + d_2\rho(h,\alpha,\delta) \le C_5\{\alpha^{1/2} + h\delta^{-1/2}\} + d_2\rho(h,\alpha,\delta). \quad (3.5)$$

Утверждение теоремы следует из (3.5). $\square$

References

[1] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987; франц. пер.:J.-L. Lions, *Contrôle des Systèmes Distribués Singuliers*, Gauthier Villars, Paris, 1983.

[2] R. Griesse, "Parametric sensitivity analysis in optimal control of a reaction diffusion system. I. Solution differentiability", *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **25**:1–2 (2004), 93-117.

[3] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, *Позиционные дифференциальные игры*, Наука, М., 1974; англ. пер.:N. Krasovskii, A. Subbotin, *Game-Theoretical Control Problems*, Springer, Berlin, 1988.

[4] А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов, "О моделировании управления в динамической системе", *Известия АН СССР. Техническая кибернетика*, 1983, № 2, 51–60; англ. пер.:A. V. Kryazhimskiy, Yu. S. Osipov, "Modelling of a control in a dynamic system", *Engrg. Cybernetics*, **21**:2 (1983), 38–47.

[5] Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimskii, *Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions*, Gordon and Breach, London, 1995.

[6] Ю. С. Осипов, А. В. Кряжимский, В. И. Максимов, *Методы динамического восстановления входов управляемых систем*, Изд-во УрО РАН, Екатеринбург, 2011. [Yu. S. Osipov, A. V. Kryazhimsky, V. I. Maksimov, *Methods of Dynamic Restoration of Inputs of Controlled Systems*, Publishing house of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2011 (In Russian)].

[7] V. I. Maksimov, "The methods of dynamical reconstruction of an input in a system of ordinary differential equations", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**:1 (2021), 125–156.

[8] Yu. S. Osipov, V. I. Maksimov, "On dynamical input reconstruction in a distributed second order equation", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, **29**:5 (2021), 707–719.

[9] М. С. Близорукова, "О динамической реконструкции входа управляемой системы", *Дифференциальные уравнения*, **50**:7 (2014), 859–864; англ. пер.:M. S. Blizorukova, "On the dynamic reconstruction of the input of a control system", *Differential Equations*, **50**:7 (2014), 847–853.

[10] V. I. Maksimov, "On a stable solution of the dynamical reconstruction and tracking control problems for coupled ordinary differential equation-heat equation", *Mathematical Control and Related Fields*, **14**:1 (2024), 322–345.

[11] В. И. Максимов, Ю. С. Осипов, "Экстремальный сдвиг в задаче отслеживания возмущения параболического включения, описывающего двухфазную задачу Стефана", Труды Института математики и механики УрО РАН, **30**, № 3, 2024, 191–206; англ. пер.:V. I. Maksimov, Yu. S. Osipov, "Extremal shift in the problem of tracking a disturbance in a parabolic inclusion describing the two-phase Stefan problem", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **327**, Suppl. 1 (2024), S182–S197.

[12] F. Tröltzsch, *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.

Информация об авторах

Близорукова Марина Сергеевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: msb@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270

Information about the authors

Marina S. Blizorukova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: msb@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1728-1270

Максимов Вячеслав Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий отделом. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: maksimov@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998

Поступила в редакцию 19.05.2025 г.
Поступила после рецензирования 04.06.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

Vyacheslav I. Maksimov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of Department. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation. E-mail: maksimov@imm.uran.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5643-7998

Received 19.05.2025
Reviewed 04.06.2025
Accepted for press 06.06.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-110-127

Proof of Brouwer's Conjecture (BC) for all graphs with number of vertices $n > n_0$ assuming that BC holds for $n \leq n_0$ for some $n_0 \leq 10^{24}$

Vladimir M. BLINOVSKY[1,2], **Llohann D. SPERANCA**[2], **Alexander N. PCHELINTSEV**[3]

[1] Institute for Information Transmission Problems
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

[2] Federal University of Sao Paulo
Sao Jose dos Campus, Institute of Science and Technology
1201 — Eugenio de Mello, Cesare Mansueto Giulio Lattes Avenue, Sao Jose dos Campus/SP 12247-014, Brazil

[3] Tambov State Technical University
106 Sovetskaja Str., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In the article, the authors consider the problem of constructing an upper bound for the sum of the maximal eigenvalues of Laplacian of a graph. The article is devoted to proving the Brouwer conjecture, which states that the sum of the t-maximal eigenvalues of Laplacian of a graph does not exceed the number of edges of the graph plus $(t+1)t/2$. Note that we prove the validity of the general Brouwer conjecture under the assumption that the conjecture is valid for a finite number of graphs with the number of vertices less than 10^{24}, i.e., a complete proof of the conjecture is reduced to establishing its validity for a finite number of graphs. The proof of this conjecture attracts the interest of a large number of specialists. There are a number of results for special graphs and a proof of the conjecture for almost all random graphs. The proof we are considering uses an inductive method that has some peculiarities. The original method involves constructing various estimates for the eigenvalues of Laplacian of a graph which is used to construct the induction step. Several variants of the method are considered depending on the values of the coordinates of the eigenvectors of the Laplacian. The well-known fact of equivalence of the validity of the Brouwer conjecture for the graph itself and the complement of the graph is used.

Keywords: Laplacian of graph, eigenvalues

Acknowledgements: This research was supported by sections of contracts N114/2019, N20/2021, program N23089.101560/2018-91

Mathematics Subject Classification: 05C50.

For citation: Blinovsky V.M., Speranca L.D., Pchelintsev A.N. Proof of Brouwer's conjecture (BC) for all graphs with number of vertices $n > n_0$ assuming that BC holds for $n \leq n_0$ for some $n_0 \leq 10^{24}$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 110–127. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-110-127

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-110-127
УДК 519.177

Доказательство гипотезы Брауэра (ГБ) для всех графов с числом вершин $n > n_0$ в предположении, что ГБ выполняется при $n \leq n_0$ для некоторого $n_0 \leq 10^{24}$

Владимир Маркович БЛИНОВСКИЙ[1,2], **Лоан Далльянл СПЕРАНСА**[2], **Александр Николаевич ПЧЕЛИНЦЕВ**[3]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук»
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

[2] Федеральный Университет Сан-Паулу
Кампус Сан-Жозе-дус, Институт науки и технологий
12247-014, Бразилия, Сан-Жозе-дус-Кампус/SP, Чезаре Мансуэто Джулио Латтес Авеню, 1201 — Эухенио де Мелло

[3] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

Аннотация. В работе рассматривается проблема построения верхней оценки для суммы максимальных собственных чисел лапласиана графа. Статья посвящена доказательству гипотезы Брауэра, которая состоит в том, что сумма t-максимальных собственных чисел лапласиана графа не превышает числа ребер графа плюс $(t+1)t/2$. Отметим, что мы доказываем справедливость общей гипотезы Брауэра в предположении справедливости гипотезы для конечного числа графов с числом вершин меньше 10^{24}, т.е. полное доказательство гипотезы сводится к установлению ее справедливости для конечного числа графов. Доказательство данной гипотезы привлекает интерес большого числа специалистов. Имеется ряд результатов для специальных графов и доказательство справедливости гипотезы для почти всех случайных графов. Рассматриваемое нами доказательство использует индуктивный метод, имеющий ряд особенностей. Оригинальный метод предполагает построение различных оценок для собственных чисел лапласиана, который используется для построения шага индукции. Рассматриваются несколько вариантов метода в зависимости от величин координат собственных векторов лапласиана. Используется известный факт эквивалентности справедливости гипотезы Брауэра для самого графа и дополнения графа.

Ключевые слова: лапласиан графа, собственные значения

Благодарности: Исследования поддержаны разделами контракта N114/2019, N20/2021, программы N23089.101560/2018-91.

Для цитирования: *Блиновский В.М., Сперанса Л.Д., Пчелинцев А.Н.* Доказательство гипотезы Брауэра (ГБ) для всех графов с числом вершин $n > n_0$ в предположении, что ГБ выполняется при $n \leq n_0$ для некоторого $n_0 \leq 10^{24}$ // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 110–127. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-110-127

Introduction

Let A be $n\times n$ incidence matrix of simple undirected graph G:

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{iff } (i,j)\in G,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Define the Laplacian $L(G)$ of G as follows

$$L(G)=D-A,$$

where diagonal $n\times n$ matrix D has entries

$$d_i=|\{j:\ (i,j)\in G\}|.$$

We have $\sum_i d_i=2m$, were m is number of edges in G. Considering G as directed graph with some choice of ordering of vertices in G define $m\times n$ matrix B:

$$b_{i,j}=\begin{cases}1, & \text{if } j \text{ heard vertex in edge } i,\\ -1, & \text{if } j \text{ tail vertex in edge } i,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Then $L(G)=B^TB$ and hence eigenvalues of matrix $L(G)$ are nonnegative:

$$0=\mu_n(L(G))\le\mu_{n-1}(L(G))\le\ldots\le\mu_1(L(G)).$$

Brouwer's Conjecture 1 (see [1]). *For every graph $G\subset\binom{[n]}{2}$ and integer $t\in[n-1]$, the following inequality is valid:*

$$S_t(G)=\sum_{i=1}^{t}\mu_i(L(G))\le m+\binom{t+1}{2},\ t\in[n].$$

In this article we prove the validness of this conjecture under the assumption than it is true for all $n\le n_0$ where $n_0\le 10^{24}$.

For convenience, we denote

$$\Delta_t(G)=S_t(G)-m(G)-\binom{t+1}{2}.$$

Whenever $\Delta_t(G)\le 0$, we say that G satisfy BC_t.

It is known to be valid for trees [2], for $k=1,2,n-1,n$, for unicyclic and bicyclic graphs [3], for regular graphs [4], for $n\le 10$ it was checked by A. Brouwer using a computer. In [5] was proved that Brouwer's conjecture holds asymptotically almost surely.

Before the proof of Brouwer‘s conjecture under above assumption (we call it below “Conjecture”) we introduce some consequences of its validity.

Define set of conjugate degrees

$$d^*(G)=\{d_1^*,\ldots,d_n^*\},\ d_i^*=|\{j:d_j\ge i\}|.$$

We say that the set E of edges is compressed if from $e=(i<j)\in E$ it follows that $e=(i_1<j_1)\in E$, were $i_1\le i,\ j_1\le j$. V. Chátal and P. Hammer in [6] introduce the notion

of threshold graph. It can be defined as a graph isomorphic (up to permutations on vertices $[n]$) to a graph with compressed edge set.

Grone–Merris Conjecture [7], which was proved by Bai [8], we call it GMB, theorem says that the following upper bound is valid

$$\sum_{i=1}^{t} \mu_i(L(G)) \leq \sum_{i=1}^{t} d_i^*(G). \tag{0.1}$$

It is known [9] that for threshold graphs there is equality in the last relation.

Say that a graph G on n nodes with $m = m(G)$ edges is spectrally threshold dominated [10] if for each $t \in [n]$ there is a threshold graph $\hat{G}$ having the same number of nodes and edges satisfying

$$\sum_{i=1}^{t} \mu_i(L(G)) \leq \sum_{i=1}^{t} \mu_i(L(\hat{G})) = \sum_{i=1}^{t} d_i^*(L(\hat{G})).$$

In paper [10] Helmberg and Trevisan proved the following

Conjecture 1. *Graph G is spectrally threshold dominated iff Conjecture for this graph is valid.*

We introduce here their proof via construction of the set of conjugate degrees of optimal threshold graphs.

We construct for arbitrary n, $m = m(G)$, t threshold graph T that attains Brouwer's bound for the sum of eigenvalues. Denote by $\mathrm{Tr}(n, m)$ the set of threshold graphs with n vertices and m edges. To each graph with degree sequence $d_i \geq d_{i+1}$ define Ferrers diagram of n rows, s. t. the i-th row displays d_i boxes aligned to the left.

Next we demonstrate for arbitrary $t \in [n]$ that

$$\min\left\{tn, m(G) + t(t+1)/2, 2m(G)\right\} = \max_{T \in \mathrm{Tr}(n,m)} \sum_{i=1}^{t} d_i^*(T).$$

This together with (0.1) deliver the proof of Conjecture 1.

Depending on the relation between t, n and $m(G)$, we consider the following cases:

Case 1: $\min\{tn, m(G) + t(t+1)/2, 2m(G)\} = tn$. Consider the threshold graph T constructed by filling up the Ferrers diagram below the diagonal in column wise order (on and above the diagonal in corresponding row wise order). The first t columns below the diagonal are fully filled because they require $tn - t(t+1)/2 \leq m(G)$ boxes. Hence T satisfies $d_i^*(T) = n$ for $i \in [t]$ and $\sum_{i=1}^{t} d_i^*(T) = tn$. This is the maximum attainable over all threshold graphs on n nodes.

Case 2. $\min\{tn, m(G) + t(t+1)/2, 2m(G)\} = m(G) + t(t+1)/2$. In this case put $h = \lfloor \frac{m(G)}{t} + \frac{t+1}{2} \rfloor < n$ and $r = m(G) + t(t+1) - th < t$. Note that this implies $h \geq t+1$. Define a threshold graph T on n nodes with $m(T) = m(G)$ edges of trace t by the conjugate degrees

$$d_i^*(T) = \begin{cases} h+1, & i \leq r, \\ h, & r < i \leq t, \end{cases}$$

then $\sum_{i=1}^{t} \lambda_i(T) = \sum_{i=1}^{t} d_i^*(T) = m(T) + t(t+1)/2$. This value cannot be exceeded by any threshold graph on n nodes with m edges by the GMB theorem, because in the Ferrers diagram of the conjugate degrees up to column t all boxes are used on and above the diagonal, while all possible m boxes are included below the diagonal.

Case 3. $\min\{tn, m(G)+t(t+1)/2, 2m(G)\} = 2m(G)$. Put $h = \max\{h \in [n] : h(h+1) \leq 2m(G)\} < t$ and $r = (2m(G) - h(h+1))/2 < h+1$, then the threshold graph T of trace h with conjugate degrees

$$d_i^*(T) = \begin{cases} h+2, & i \leq r, \\ h+1, & r < i \leq h, \\ r, & i = h+1, \\ 0, & h+1 < i \end{cases}$$

satisfies $\sum_i^t \lambda_i(T) = \sum_i^t d_i^*(T) = 2m(T)$ and this is the maximum attainable over all threshold graphs T with $m(T) = m(G)$ edges.

Define Laplacian energy of graph as follows

$$LE(G) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i(L(G)) - \frac{2m(G)}{n} \right|.$$

The main result of the paper [10] is the following

Theorem 0.1. *For each spectrally threshold dominated graph G there exists a threshold graph with the same number of nodes and edges whose Laplacian energy is at least as large as that of G.*

1. Preliminary remarks

Here we gather preliminary results that will be useful later.

Let $\bar{G} = \binom{[n]}{2} - G$ denote the complement of G. Then, [9]:

$$\mu_i(L(G)) = n - \mu_{n-i}(L(\bar{G})), \ \ i = 1, \dots, n-1.$$

The following duality result will be key in our work. It follows directly from the proof of [2, Theorem 6], by including Δ's with proper indices in the calculation.

Theorem 1.1 (see [11])**.** *For every graph G,*

$$\Delta_t(G) = \Delta_{n-t-1}(\bar{G}).$$

In particular, G satisfies BC_t if and only if $\bar{G}$ satisfies BC_{n-t-1}.

On the other hand, once G satisfy BC_t, the graph obtained by adding an isolated vertex, $G \cup \{v\}$, trivially satisfy BC_t. Then, from Theorem 1.1, we conclude that the graph $G' = \overline{\bar{G} \bigcup \{v\}}$ obtained by adding a dominating vertex v satisfies BC_{t+1} :

$$\Delta_{t+1}(G') = \Delta_{t+1}(\overline{\bar{G} \cup \{v\}}) = \Delta_{n-t-1}(\bar{G} \cup \{v\}) = \Delta_{n-t-1}(\bar{G}) = \Delta_t(G). \tag{1.1}$$

Given $G \subset \binom{[n]}{2}$, we define the *threshold family of* G, $\mathcal{T}(\mathcal{G})$, as the family of all graphs obtained from G by adding complete or empty vertices. Note that the family of threshold graphs defined in the Introduction coincides with $\mathcal{T}(\emptyset)$. From Theorem 1.1 and equality (1.1) we conclude that G satisfy Conjecture iff an element in $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ does so. From this fact it follows

Lemma 1.1. *Brouwer's Conjecture is valid for every n and t provided that $BC_{t'}$ holds for every graph G with n' vertices where $t' = \frac{n'-1}{2}$ if n' is odd or t' equal to either $\frac{n'-2}{2}$ or $\frac{n'}{2}$ if n' is even.*

We call the explicit t's in Lemma 1.1 as the *middle t's*. In what follows we will consider an inductive approach on n to prove that BC_t holds for the middle t's, whenever it holds for middle t's for graphs with fewer vertices. To this end, we remove one vertex of G and derive a special basis of R^n where explicit bounds can be inferred. Recall the following formula for $L(G)$:

$$(L(G)v, v) = \frac{1}{2} \sum_{(p,q)\in E} (v_p - v_q)^2.$$

We have [12, Cor 4.3.18]

$$\begin{aligned} S_t(G) &= \max \Big\{ \sum_{i=1}^{t} (L(G)x_i, x_i) \Big| x_1, \dots, x_t, (x_i, x_j) = \delta_{ij} \Big\}, \\ &= \max \big\{ \mathrm{tr}(L(G)_V) | V \text{ is a } t \text{ dimensional subspace of } R^n \big\} = \sum_{i=1}^{t} (L(G)z_i, z_i) \end{aligned} \tag{1.2}$$

for $\{z_1, \dots, z_n\}$ an orthonormal set of eigenvectors corresponding to non-increasing eigenvalues of $L(G)$, and $z_n = z = (1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$.

From the last equality we conclude that

$$S_t(G) = \sum_{i=1}^{t} (L(G)x_i, x_i)$$

for any orthonormal basis $\{x_1, \dots, x_t\}$ of $\mathrm{span}\{z_1, \dots, z_t\}$.

We have

$$\begin{aligned} S_t(G) &= \max_{\{h_j,\ j\in[t]\}\in \mathrm{ort}(n,t)} \sum_{i=1}^{t} (L(G)x_i, x_i) \\ &\le \max_{\{h_j,\ j\in[t]\}\in \mathrm{ort}(n,t)} \sum_{i=1}^{t} (Dh_i, h_i) + \max_{\{h_j,\ j\in[t]\}\in \mathrm{ort}(n,t)} \sum_{i=1}^{t} (Ah_i, h_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{t} d_i + \sqrt{t \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \le \sum_{i=1}^{t} d_i + \sqrt{nm} \le \sum_{i=1}^{t} d_i + n\sqrt{n}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

where α_i, $i \in [n]$ are eigenvalues of A and $\mathrm{ort}(n,t)$ is the family of sets of t orthonormal vectors in R^n.

Lemma 1.2. *There exists an orthonormal basis $\{x_1, \dots, x_t\}$ of span$\{z_1, \dots, z_t\}$ and orthonormal basis $\{x_{t+1}, \dots, x_{n-1}\}$ of span$\{z_{t+1}, \dots, z_{n-1}\}$ for any $t \in [n-1]$ such that $x_i = (0, \dots, 0, x_{i,i}, x_{i,i+1}, \dots, x_{i,n})$, $i \in [t]$, $x_i = (0, \dots, 0, x_{i-t,i}, x_{i-t-1,i}, \dots, x_{n,i})$, $i \in [t+1, n-1]$.*

We skip the usual proof of this Lemma, it contains the statement that one can choose the basis of such form in arbitrary subspace of dimension t and $n-t-1$.

From now we fix a basis as in Lemma 1.2 and denote it by $\{x_1,\dots,x_t,x_{t+1},\dots,x_{n-1}\}$. It is easy to see that $0\le x_{1,1},x_{t+1,1}\le\sqrt{\frac{n-1}{n}}$. This is because $\sum_{i=1}^n x_{i,j}^2=1$ and $x_{n,j}=z_j=\frac{1}{\sqrt{n}}$. We further assume $0<x_{1,1},x_{t+1,1}<\sqrt{\frac{n-1}{n}}$, since the extremal cases are easily dealt with. The existence of x_1 also allows our induction step. Let $x_1,\dots,x_t$ be as in Lemma 1.2. Given $G\subset\binom{[n]}{2}$, consider the subgraph $G-\{1\}$ obtained by removing the first vertex of G, together with its edges.

We have

$$S_t(G)=\sum_{i=1}^{t}(x_i,L(G)x_i)=\sum_{i=2}^{t}(x_i,L(G-\{1\})x_i)+\sum_{p;(1,p)\in E}\sum_{i=2}^{t}x_{i,p}^2+(x_1,L(G)x_1)$$
$$\le S_{t-1}(G-\{1\})+\omega_1+(x_1,L(G)x_1),$$

where

$$\omega_1=\sum_{q:(1,q)\in E}\sum_{i=2}^{t}(x_{i,1}-x_{i,q})^2=\sum_{q:(1,q)\in E}\sum_{i=2}^{t}x_{i,q}^2\le d_1. \tag{1.4}$$

In particular, if $G-\{1\}$ satisfies BC_{t-1}, then G satisfies BC_t if

$$\omega_1+(x_1,L(G)x_1)\le t+d_1. \tag{1.5}$$

Equivalently, we can work with the complement graph, $\bar G$, and show that $\mathrm{BC}_{\bar t}$ holds if $\bar G-\{1\}$ satisfies $\mathrm{BC}_{\bar t-1}$ and

$$\bar\omega_1+(x_{t+1},L(\bar G)x_{t+1})\le\bar t+\bar d_1. \tag{1.6}$$

Here we take x_{t+1} as the only vector with (possibly) non-zero first coordinate, and

$$\bar t=n-1-t,\quad \bar d_1=n-1-d_1,\quad \bar\omega_1=\sum_{q:(1,q)\in\bar E}\sum_{i=t+2}^{n-1}(x_{i,1}-x_{i,q})^2=\sum_{q:(1,q)\in\bar E}\sum_{i=t+2}^{n-1}x_{i,q}^2\le\bar d_1. \tag{1.7}$$

It is easy to see that we can choose arbitrary $p\in[n]$ instead of the first coordinate in above consideration with substitution $1\leftrightarrow p$ in the formulas, we use this consideration below several times.

The key elements in the paper are the following bounds on $(L(G)x_1,x_1)$

P r o p o s i t i o n 1.1. *Let x_1 be as in Lemma 1.2 and $x_{1,1}>0$. Then,*

$$(x_1,L(G)x_1)\le\begin{cases} d_1+\sqrt{d_1\frac{1-x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}}, & x_{1,1}^2\ge\frac{d_1}{d_1+1};\\ \frac{nd_1}{n-1}+\sqrt{\frac{d_1\bar d_1}{n-1}\frac{1-\frac{n}{n-1}x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}}, & x_{1,1}^2<\frac{d_1}{d_1+1}.\end{cases} \tag{1.8}$$

Likewise,

$$(x_{t+1},L(\bar G)x_{t+1})\le\begin{cases} \bar d_1+\sqrt{\bar d_1\frac{1-x_{t+1,1}^2}{x_{t+1,1}^2}}, & x_{t+1,1}^2\ge\frac{\bar d_1}{\bar d_1+1};\\ \frac{n\bar d_1}{n-1}+\sqrt{\bar d_1\left(1-\frac{\bar d_1}{n-1}\right)\frac{1-\frac{n}{n-1}x_{t+1,1}^2}{x_{t+1,1}^2}}, & x_{t+1,1}^2<\frac{\bar d_1}{\bar d_1+1}.\end{cases}$$

P r o o f. By eventually replacing x_1 by $-x_1$, we assume that $x_{1,1} > 0$.
We have

$$(x_1, L(G)x_1)x_{1,1} = d_1 x_{1,1} - \sum_{p:(1,p)\in E} x_{t,p} \le d_1 x_{1,1} + \Big|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\Big|$$

and

$$\Big|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\Big| = \Big|\sum_{p:(1,p)\in \bar{E}} x_{1,p} + x_{1,1}\Big| \le x_{1,1} + \Big|\sum_{p:(1,p)\in \bar{E}} x_{1,p}\Big|.$$

Using Jensen inequality we obtain:

$$\Big|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\Big| \le \sqrt{d_1 x}, \qquad \Big|\sum_{p:(1,p)\in \bar{E}} x_{1,p}\Big| \le \sqrt{\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - x)},$$

where $x = \sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}^2$.

Therefore,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\Big| &\le \max_{x\in[0,1-x_{1,1}^2]} \min\Big\{\sqrt{d_1 x}, x_{1,1} + \sqrt{\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - x)}\Big\} \\ &= \begin{cases} \sqrt{d_1(1 - x_{1,1}^2)}, & x_{1,1}^2 \ge \frac{d_1}{d_1+1}; \\ \frac{x_{1,1} d_1}{n-1} + \sqrt{\frac{d\bar{d}_1}{n-1}\left(1 - \frac{n}{n-1} x_{1,1}^2\right)}, & \text{otherwise.}\end{cases}\end{aligned}$$

The first bound on $x_{1,1}^2$ is equivalent to

$$\sqrt{d_1(1 - x_{1,1}^2)} \le x_{1,1},$$

making $\sqrt{d_1(1 - x_{1,1}^2)}$ the solution to the $\max\min$ problem. Otherwise, since

$$x \mapsto \sqrt{\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - x)}$$

is decreasing, the $\max\min$ is achieved when

$$\sqrt{d_1 x} = x_{1,1} + \sqrt{\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - x)}.$$

We manipulate this equation as follows:

$$(\sqrt{d_1 x} - x_{1,1})^2 = \bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - x) \iff (n-1)x - 2\sqrt{d_1}x_{1,1}\sqrt{x} + x_{t,1}^2 - \bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2) = 0$$

$$\begin{aligned}\iff \sqrt{x} &= \frac{\sqrt{d_1}x_{1,1}}{n-1} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{d_1}x_{1,1}}{n-1}\right)^2 - \frac{x_{1,1}^2 - \bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2)}{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{d_1}x_{1,1}}{n-1} + \sqrt{\frac{d_1 x_{1,1}^2 - (n-1)x_{1,1}^2 + (n-1)\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2)}{(n-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{d_1}x_{1,1}}{n-1} + \sqrt{\frac{\bar{d}_1(1 - x_{1,1}^2 - \frac{1}{n-1}x_{1,1}^2)}{n-1}} = \frac{\sqrt{d_1}x_{1,1}}{n-1} + \sqrt{\frac{\bar{d}_1}{n-1}\left(1 - \frac{n}{n-1}x_{1,1}^2\right)}.\end{aligned}$$

The result is concluded by multiplying the last expression by $\sqrt{d_1}$. □

Before proceeding, we remark the following inequality that follows from the last proof.

Lemma 1.3. *Suppose* $x_{1,1}^2 < \frac{d_1}{d_1+1}$. *Then,* $\left|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\right| \le \sqrt{\frac{d_1\bar{d}_1}{n-1}}$.

P r o o f. In the proof of Proposition 1.1, we concluded that

$$\Big|\sum_{p:(1,p)\in E} x_{1,p}\Big| \le \frac{x_{1,1}d_1}{n-1} + \sqrt{\frac{d\bar{d}_1}{n-1}\Big(1-\frac{n}{n-1}x_{1,1}^2\Big)}.$$

Proof follows from the observation that r.h.s. of last inequality is decreasing function of $x_{1,1}$ and hence achieved its maximum for $x_{1,1} > 0$ at $x_{1,1} = 0$. $\square$

An extra inequalities are also needed.

Recall that x_1, x_{t+1} are the only vectors in $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ with non-zero first coordinates. To motivate the next inequality, we also recall that the first vertex is complete if and only if the vector

$$z = \Big(\sqrt{\frac{n-1}{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}\Big)$$

is in the span of $\{x_1, \dots, x_t\}$.

Next, we measure how much this vector does not belong to this t-subspace.

There exists $0 < \lambda < 1$ and a vector $y = (0, y_2 \dots, y_n)$, $\sum_{p=2}^n y_p = 0$, $\sum_{p=2}^n y_p^2 = 1$ such that

$$\begin{aligned} x_1 &= z\sqrt{\lambda} + \sqrt{1-\lambda}y,\\ x_{t+1} &= z\sqrt{1-\lambda} - \sqrt{\lambda}y. \end{aligned}$$

Further denote:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}(y, L(G)y) = \sum_{p<q,\ (p,q)\in E} (y_p - y_q)^2,\\ \bar{B} &= \frac{1}{2}(y, L(\bar{G})y) = \sum_{p<q,\ (p,q)\in \bar{E}} (y_p - y_q)^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Then, using inequalities

$$\Big|\sum_{p:(1,p)\in E} y_p\Big| \le \max_{x\in[0,1]} \min\Big\{\sqrt{d_1 x}, \sqrt{\bar{d}_1(1-x)}\Big\}$$

we have

$$\begin{aligned} (x_1, L(G)x_1) &= \lambda d_1\frac{n}{n-1} + (1-\lambda)B - 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)\frac{n}{n-1}}\sum_{p:(1,p)\in E} y_p\\ &\le \lambda d_1\frac{n}{n-1} + (1-\lambda)B + 2\sqrt{\frac{n}{n-1}\lambda(1-\lambda)d_1\Big(1-\frac{d_1}{n-1}\Big)};\\ (x_{t+1}, L(\bar{G})x_{t+1}) &= (1-\lambda)\bar{d}_1\frac{n}{n-1} + \lambda\bar{B} - 2\sqrt{\lambda(1-\lambda)\frac{n}{n-1}}\sum_{p:(1,p)\in \bar{E}} y_p\\ &\le (1-\lambda)\bar{d}_1\frac{n}{n-1} + \lambda\bar{B} + 2\sqrt{\frac{n}{n-1}\lambda(1-\lambda)\bar{d}_1\Big(1-\frac{\bar{d}_1}{n-1}\Big)}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Optimization over λ deliver the following bounds

P r o p o s i t i o n 1.2. *Let x_t be as above. Then,*

$$(x_1, L(G)x_1) \le \frac{d_1\frac{n}{n-1} + B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2 + 4\frac{n}{n-1}d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)};$$
$$(x_{t+1}, L(\bar{G})x_{t+1}) \le \frac{\bar{d}_1\frac{n}{n-1} + \bar{B}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(\bar{d}_1\frac{n}{n-1} - \bar{B}\Big)^2 + 4\frac{n}{n-1}\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-1}\Big)}.$$

P r o o f. We maximize the expression in (1.10) for $0 < \lambda < 1$. To this aim, we analyze the derivative of the expression with respect to λ:

$$d_1\frac{n}{n-1} - B + \sqrt{\frac{d_1\bar{d}_1}{n-1}}\frac{1-2\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}. \tag{1.11}$$

Observe that the derivative goes to $+\infty$ and $-\infty$ as λ goes to 0 and 1, respectively.

Therefore, we conclude that the maximum is in the interior. On the other hand setting expression (1.11) to zero gives:

$$\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4+A^2} = 0, \quad A = \frac{\big(d_1\frac{n}{n-1} - B\big)(n-1)}{\sqrt{d_1\bar{d}_1 n}}.$$

The maximum is achieved at:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{A}{\sqrt{4+A^2}}\Big).$$

The proof is concluded by replacing λ by $\lambda_\pm$ in (1.10), observing that $\lambda_\pm = 1 - \lambda_\mp$. $\square$

Using Proposition 1.2 and conditions (1.5), we conclude that if graph $G - \{1\}$ satisfies BC_{t-1} and

$$\frac{d_1\frac{n}{n-1} + B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2 + 4d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{n}{n-1}} + \omega_1 \le t + d_1, \tag{1.12}$$

then graph G satisfies BC_t. Simular using condition (1.6)

$$\frac{\bar{d}_1\frac{n}{n-1} + \bar{B}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(\bar{d}_1\frac{n}{n-1} - \bar{B}\Big)^2 + 4\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-1}\Big)\frac{n}{n-1}} + \bar{\omega}_1 \le \bar{t} + \bar{d}_1 \tag{1.13}$$

we conclude that if graph $\bar{G} - \{1\}$ satisfies $\mathrm{BC}_{\bar{t}-1}$, then graph $\bar{G}$ satisfies $\mathrm{BC}_{\bar{t}}$.

2. Proof of Conjecture

We describe the key steps in the proof.

First case. Using (1.8) and assuming condition $x_{1,1}^2 \ge \frac{d_1}{d_1+1}$ or $x_{t+1,1}^2 \ge \frac{\bar{d}_1}{\bar{d}_1+1}$ we make inductive proof BC_t for graph G or $\bar{G}$ assuming that BC_{t-1} for $G - \{1\}$ is valid.

Second case. We assume that there exists $p \in [n]$ s.t. $\omega_p \le t(1-\delta)$. Because we can make permutation $p \leftrightarrow 1$ vertices of graph in arbitrary way, w.l.o.g. we set $p = 1$. Assume also

$$x_{1,1}^2 \ge \frac{2}{n\delta^2}, \quad \frac{1}{5} > \delta > 2n^{-1/3} \tag{2.1}$$

and $t-B>\frac{2}{\delta}$. At first we use inequality (1.5) which we reduce to (2.1) for one step inductive proof BC_t for graph G under the condition that BC_{t-1} for graph $G-\{1\}$ is true. Next we consider the case $B\geq t-\frac{2}{\delta}$. Then we come to contradiction to the condition (2.1).

Third case. $\omega_q>t(1-\delta)$, $q\in[n]$. Two situations are possible.

When

$$m(\bar{G})\geq\binom{t}{2}(1+3\delta),$$

we prove BC_{t-1} for graph $\bar{G}$ directly by using bound (1.2).

In the case

$$m(\bar{G})<\binom{t}{2}(1+3\delta),$$

we first assume that there exist $p\in[n]$ s.t. $t(1+\delta)\geq d_p$, $\bar{d}_p\geq t(1-\delta)$. Next we show that there exist set $\mathcal{R}\subset[n]$ s.t. $\bar{d}_q\leq 7n\delta^{1/4}$, $q\in\mathcal{R}$,

$$a=|\mathcal{R}|=\Big[n(1-8\delta^{1/4})\Big(1-\sqrt{1-\frac{1}{2(1-8\delta^{1/4})^2}}\Big)\Big].$$

By permutation of vertices of graph w.l.o.g. we can assume that $\mathcal{R}=[a]$. We make a steps of induction adding step by step $[a]$ vertices to the graph $G-[a]$ and for each step $i\in[a]$ we prove the BC_{t-i} for the graph $G-[i]$ under the assumption that BC_{t-i-1} is valid for graph $G-[i+1]$, $i\in[a]$. Choice of a in (2.11) allows to prove BC_{t-a} directly by using bound (1.2).

In **the last case** assumption is $d_q>t(1+\delta)$ or $\bar{d}_q\leq(1-\delta)$, $q\in[n]$, BC_{t-1} for $\bar{G}$ is proved directly, using bound (1.2).

Next we use this scheme to demonstrate the proof in details.

We use induction on n to prove BC and assume that BC is true for $n\leq 10^{24}$. One can significantly improve this bound for n by following the proof in this article more carefully.

Let $\{x_i,\ i\in[n-1]\}$ be the set of eigenvectors of $L(G)$. Considering Grassmannian frame F with row set $\{x_i,\ i\in[t]\}$ and complement frame $\bar{F}$ with row set $\{x_i,\ i\in[t+1,n-1]\}$.

Note, that

$$x_{1,1}^2+x_{t+1,1}^2=\frac{n-1}{n}.$$

W.l.o.g. we can assume that $x_{1,1}\in\Big(0,\sqrt{(n-1)/n}\Big)$.

As a first step, we observe that the case $x_{1,1}^2\geq\frac{d_1}{d_1+1}$ (respectively, $x_{t+1,1}^2\geq\frac{\bar{d}_1}{\bar{d}_1+1}$), is easily discarded.

Lemma 2.1. *Suppose that either* $x_{1,1}^2\geq\frac{d_1}{d_1+1}$ *or* $x_{t+1,1}^2\geq\frac{\bar{d}_1}{\bar{d}_1+1}$. *Then, BC holds for* G.

P r o o f. To prove BC for n and $x_{1,1}^2\geq\frac{d_1}{d_1+1}$, assuming that it is true for $n-1$, it is sufficient to prove the inequality

$$d_1+\sqrt{d_1\frac{1-x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}}+\omega_1\leq d_1+t$$

or

$$\omega_1\leq t-\sqrt{d_1\frac{1-x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}}.$$

Last inequality is trivial, since

$$\sqrt{d_1 \frac{1 - x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}} \leq \sqrt{d_1 \frac{1 - \frac{d_1}{d_1+1}}{\frac{d_1}{d_1+1}}} \leq 1.$$

The same consideration proves BC when $x_{t+1,1}^2 \geq \frac{\bar{d}_1}{\bar{d}_1+1}$. □

Taking into account conditions 1.5, 1.6 and Proposition 1.1 together we conclude that BC_t holds for G if one of the following inequalities is true:

$$\frac{d_1}{n-1} + \sqrt{d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{1 - \frac{n}{n-1}x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2}} + \omega_1 \leq t; \tag{2.2}$$

$$\frac{\bar{d}_1}{n-1} + \sqrt{\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-1}\Big)\frac{1 - \frac{n}{n-1}x_{t+1,1}^2}{x_{t+1,1}^2}} + \bar{\omega}_1 \leq \bar{t}. \tag{2.3}$$

For the remaining of the paper, we consider $t = \frac{n}{2}$ when $n = 2t$ and $t = \frac{n-1}{2}$ when $n = 2t+1$. Assume at first that $\omega_1 < t(1-\delta)$.

Then using (2.2) we obtain the inequality

$$d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{1 - \frac{n}{n-1}x_{1,1}^2}{x_{1,1}^2} \leq (t\delta - 1)^2$$

or

$$x_{1,1}^2 \geq \frac{s\bar{s}(n-1)}{s\bar{s}n + (t\delta-1)^2}, \quad s = \frac{d_1}{n-1}, \quad \bar{s} = 1 - s.$$

The last inequality is satisfied if

$$x_{1,1}^2 \geq \frac{2}{n\delta^2}, \quad \frac{1}{5} > \delta > 3n^{-1/3}. \tag{2.4}$$

It is left to consider the reverse condition:

$$x_{1,1}^2 < \frac{2}{n\delta^2}.$$

In this case, we have:

$$\begin{aligned} d_1 &< \omega_1 + \sum_{p:(1,p)\in E} (x_{1,p} - x_{1,1})^2 < d_1 x_{1,1}^2 + 2\sqrt{d_1}x_{1,1} + 1 + \omega_1 \\ &< \frac{1}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 1 + \omega_1 < \frac{2}{\delta^2} + \omega_1 \leq t\Big(1 - \frac{\delta}{4}\Big), \quad 3n^{-1/3} < \delta < 10^{-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Imposing condition (1.12) and using inequality $\omega_1 \leq d_1$, we obtain stronger condition

$$\frac{d_1\frac{n}{n-1} + B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2 + 4d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{n}{n-1}} + d_1 \leq d_1 + t \tag{2.6}$$

to prove that graph G satisfies BC_t if $G - \{1\}$ satisfies BC_{t-1}.

Hence

$$\sqrt{\Big(d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2 + 4d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{n}{n-1}} \leq 2t - d_1\frac{n}{n-1} - B.$$

Assume that $B \le t - \frac{2}{\delta}$, then

$$4d_1\Big(1 - \frac{d_1}{n-1}\Big)\frac{n}{n-1} \le \Big(2t - d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2 - \Big(d_1\frac{n}{n-1} - B\Big)^2.$$

Hence we need to prove inequality

$$d_1\left(1 - \frac{d_1}{n-1}\right)\frac{n}{n-1} \le \left(t - d_1\frac{n}{n-1}\right)(t - B).$$

To satisfy last inequality it is sufficient to impose condition

$$d_1 < t\Big(1 - \frac{\delta}{4}\Big), \tag{2.7}$$

when $\delta > 3n^{-1/3}$, $t - B \ge \frac{2}{\delta}$.

At last, if $B \ge t - \frac{2}{\delta}$, then $\bar{B} < n - t + \frac{2}{\delta} = \frac{n}{2} + \frac{2}{\delta}$, $\bar{d}_1 > n - 1 - t\left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \ge \frac{n-2}{2}\left(1 + \frac{\delta}{4}\right)$. From other side,

$$\begin{aligned}\bar{B} &\ge \sum_{q:(1,q)\in\bar{E}} (x_{t+1,1} - x_{t+1,p})^2 \ge \bar{d}_1 x_{t+1,1}^2 - 2|x_{t+1,1}|\sqrt{\bar{d}_1(1 - x_{t+1,1}^2)} \\ &> \frac{n-2}{2}\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)\Big(\frac{n-1}{n} - \frac{2}{n\delta^2}\Big) - 2\sqrt{\Big(\frac{2}{n\delta^2} + \frac{1}{n}\Big)\frac{n}{2}\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)} \\ &\ge \frac{n}{2} + n\frac{\delta}{8} - \Big(2 + \frac{\delta}{4}\Big)\Big(1 + \frac{1}{\delta^2}\Big) - \frac{2}{\delta}\Big(1 + \frac{\delta}{8}\Big) > \frac{n}{2} + \frac{2}{\delta}, \quad \text{where } \frac{1}{5} > \delta > 3n^{-1/3}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

This contradiction complete the proof in the case that exists $p \in [n]$, s.t. $\omega_p \le t(1-\delta)$. Here in the third inequality we use relation

$$x_{t+1,1}^2 = \frac{n-1}{n} - x_{1,1}^2$$

and in the forth inequality in (2.8) we use the inequality

$$2\sqrt{\Big(\frac{2}{n\delta^2} + \frac{1}{n}\Big)\frac{n}{2}\Big(1 + \frac{\delta}{4}\Big)} < \frac{2}{\delta}\Big(1 + \frac{\delta}{8}\Big).$$

Next we assume that $\omega_q > t(1-\delta)$, $q \in [n]$. Then $d_q \ge \omega_q > t(1-\delta)$ and $\bar{d}_q \le t(1+\delta)$, $q \in [n]$. $\mathrm{BC}_{\bar{t}}$, $\bar{t} = t, t-1$ to be true for complement graph $\bar{G}$ it is sufficient to impose inequality

$$\sum_{q=t+1}^{n-1} (x_q, L(\bar{G})x_q)) = \sum_{q=t+1}^{n-1} \mu_q(L(\bar{G})) \le \sum_{q=t+1}^{n-1} \bar{d}_q + n\sqrt{n} \le t^2(1+\delta) + n\sqrt{n} \le m(\bar{G}) + \binom{\bar{t}}{2}.$$

Here we use bound (1.3).

From the last inequality it follows that $\mathrm{BC}_{\bar{t}}$ is true for $\bar{G}$ if the number of edges $m(\bar{G})$ satisfies the inequality

$$m(\bar{G}) \ge \binom{t}{2}(1 + 3\delta).$$

Assume now that there exists $p \in [n]$ s.t. $t(1+\delta) > d_p$, $\bar{d}_p \ge t(1-\delta)$.

Taking into account that $\omega_p > t(1-\delta)$ we have

$$\sum_{q:(p,q)\in\bar{E}} \sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2 < t - t(1-\delta) = t\delta.$$

Assuming uniform distribution on the set $\{q : (p,q) \in \bar{E}\}$,

$$E\Big(\sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2\Big) \le \frac{t\delta}{\bar{d}_p} \le \frac{t\delta}{t(1-\delta)} = \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Using Markov inequality $P(X > CE(X)) \le \frac{1}{C}$, $C > 0$ and choosing $C = \delta^{-1/2}$, we have

$$P\Big(\sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2 > \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta}\Big) < \sqrt{\delta}.$$

Hence

$$\sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2 < \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta},$$

where $q \in J$ for some set $J \subset \{q : (p,q) \in \bar{E}\}$, $|J| > (1-\sqrt{\delta})(1-\delta)t$. Note also that $\omega_q \le t$.

Hence for the arbitrary $q \in J$

$$\begin{aligned} d_q &\le \sum_{r:(r,q)\in E} \sum_{i=1}^{t} (x_{i,r} - x_{i,q})^2 \le \sum_{r:(r,q)\in E} \sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2 + \sum_{r:(r,q)\in E} \sum_{i=1}^{t} x_{i,r}^2 - 2 \sum_{r:(r,q)\in E} \sum_{i=1}^{t} x_{i,q} x_{i,r} \\ &\le t + d_q \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta} + 2! \sum_{r:(r,q)\in E} \sqrt{\sum_{i=1}^{t} x_{i,q}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{t} x_{i,r}^2} \le t + d_q \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta} + 2d_q \sqrt{\frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta}} \end{aligned}$$

or

$$d_q \le \frac{t}{1 - \frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta} - 2\sqrt{\frac{\sqrt{\delta}}{1-\delta}}} \le t(1 + 3\delta^{1/4}), \quad q \in J, \quad \delta > 3n^{-1/3}. \tag{2.9}$$

Because $d_p > \omega_p > t(1-\delta) > t(1 - 4\delta^{1/4})$, $p \in [n]$, we have inequalities

$$t(1 - 4\delta^{1/4}) < d_p, \bar{d}_q < t(1 + 4\delta^{1/4}), \quad \omega_q > t(1-\delta), \quad q \in J.$$

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{q\in[n]\setminus J} \bar{d}_q &\le 2m(\bar{G}) - (1 - 4\delta^{1/4})t^2(1-\delta)(1-\sqrt{\delta}) \\ &\le 2\binom{t}{2}(1+3\delta) - (1 - 4\delta^{1/4})t^2(1-\delta)(1-\sqrt{\delta}) < 3n^2\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

W.l.o.g. we can assume $|J| = [t(1-\delta)(1-\sqrt{\delta})]$. Assuming uniform distribution on the set $[n] \setminus J$, we have

$$E(\bar{d}_q) = \frac{\sum_{q\in[n]\setminus J} \bar{d}_q}{|[n] \setminus J|} < \frac{3n^2\sqrt{\delta}}{n - t(1-\delta)(1-\sqrt{\delta})} < 7n\sqrt{\delta}.$$

Using Markov inequality we have

$$P\big(\bar{d}_q \geq 7n\delta^{1/4}\big) < \delta^{1/4}.$$

Thus there exists set $I \subset [n]\setminus J,\ |I| > n - t(1-\delta^{1/4})(1-\sqrt{\delta})(1-\delta) > t(1+\delta^{1/4})$ s.t. $\bar{d}_q < 7n\delta^{1/4}$, $q \in I$ and hence $d_q \geq n(1-7\delta^{1/4}),\ q \in I$. W.l.o.g. we can assume that $I = \lfloor t(1+\delta^{1/4}) \rfloor$ and it is sufficient here to assume that $7\delta^{1/4} \leq 1/10$.

Last inequality and inequality $3n^{-1/3} < \delta$, which is imposed in (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) leads to the condition $3n^{-1/3} < \delta < (70)^{-4}$. Hence $3n^{-1/3} < (70)^{-4}$. The last inequality to be true it is sufficient to impose condition $n > 10^{24}$.

We consider a coordinates $\mathcal{R}$ from the set I. W.l.o.g. we can assume that $\mathcal{R} = [a]$, where

$$a = \Big[n(1-8\delta^{1/4})\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(1-8\delta^{1/4})^2}}\Big)\Big].$$

Justification of the choice of a we make later. When passing step $i \in [a-1]$ we renumber vertices of graph $G - [i-1]$ as follows $i \to i-1$ skipping first $i-1$ positions in graphs $G - [i-1]$ and $\bar{G} - [i-1]$. On this way we redefine $t(i) = t - i$ vectors $x_{t+1}, \ldots, x_{n-1}$ as follows $x_{t+i} = (0, \ldots, 0, x_{t+i,i}, \ldots, x_{t+i,n}) \to \tilde{x}_{t+i} = (x_{t+i,1}, \ldots, x_{t+i,n-i+1})$. Complement set of orthonormal vectors of length $n-i+1$ we denote $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_t$.

○ **Starting point for the process, described below and implemented "a" times.**

Using inequality (2.3) on i-th step and taking into account the inequalities $\bar{\omega}_1 < \bar{d}_1 \leq 7n\delta^{1/4}$ and $t(i) = t - i$ we obtain the inequality

$$\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-i}\Big)\frac{1 - \frac{n-i+1}{n-i}\tilde{x}^2_{t+i,1}}{\tilde{x}^2_{t+i,1}} \leq \Big(t - 1 - i - 7n\delta^{1/4}\Big)^2. \tag{2.10}$$

Because $i \leq a$, we relax bound (2.10) to

$$\tilde{x}^2_{t+i,1} \geq \frac{7n\delta^{1/4}}{\big(\frac{1}{14}n - 7n\delta^{1/4}\big)^2} > \frac{7\cdot 14^2\delta^{1/4}}{n}.$$

Assume now, that the opposite inequality is valid $\tilde{x}^2_{t+i,1} < \frac{7\cdot 14^2\delta^{1/4}}{n}$. Then we repeat considerations starting from equation (2.6) for $\bar{d}_1(G-[i]) \to \bar{d}_1(G-[i-1]) \leq 7n\delta^{1/4},\ t \to t-i,\ \bar{B}(G-[i]) \to \bar{B}(G-[i-1])$.

According the induction process, we impose the inequality (1.13)

$$\frac{\bar{d}_1\frac{n-i+1}{n-i} + \bar{B}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Big(\bar{d}_1\frac{n-i+1}{n-i} - \bar{B}\Big)^2 + 4\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-i}\Big)\frac{n-i+1}{n-i}} + \bar{\omega}_1 \leq \bar{d}_1 + t - i. \tag{2.11}$$

Assume that $\bar{B} \leq t - i - 1$. Making transformations of the last inequality, and using inequality $\bar{\omega}_1 \leq \bar{d}_1$, we impose stronger inequality

$$\bar{d}_1\Big(1 - \frac{\bar{d}_1}{n-i}\Big)\frac{n-i+1}{n-i} \leq (t - i - \bar{B})\Big(t - i - \bar{d}_1\frac{n-i+1}{n-i}\Big).$$

We strength last inequality and obtain the bound

$$8n\delta^{1/4} \le (t-i-\bar{B})(t-i-7n\delta^{1/4})$$

or

$$\bar{B} \le t-i-\frac{8n\delta^{1/4}}{t-i-7n\delta^{1/4}}.$$

Assume now the opposite inequality

$$\bar{B} > t-i-\frac{8n\delta^{1/4}}{t-i-7n\delta^{1/4}}$$

or

$$B \le t+1+\frac{8n\delta^{1/4}}{t-i-7n\delta^{1/4}}. \tag{2.12}$$

From other side we have $d_1 > n(1-7\delta^{1/4})$ and $\tilde{x}_{1,1}^2 > \frac{n-i}{n-i+1} - \frac{7\cdot 14^2\delta^{1/4}}{n} > 1-\frac{2}{n}$, $\delta < (70)^{-4}$.

At the end we show that inequality (2.12) could not be satisfied, and we come to contradiction:

$$\begin{aligned} B &\ge \sum_{p:(1,p)\in E(G-[i-1])} (\tilde{x}_{1,1}-\tilde{x}_{1,p})^2 > d_1\tilde{x}_{1,1}^2 - 2|\tilde{x}_{1,1}|\sqrt{d_1} \\ &> n(1-7\delta^{1/4})\Big(1-\frac{2}{n}\Big) - 2\sqrt{n(1-7\delta^{1/4})\Big(1-\frac{2}{n}\Big)} > \frac{3}{2}t. \end{aligned}$$

Last inequality contradict to inequality (2.12) for $n > 10^{24}$.

Next we make above proof procedure (from sign $\bigcirc$) for graph $\bar{G}-[i-1]$ and set of orthonormal vectors $x_{t+i},\dots,x_{n-1}$. Step by step deleting vertex $i \in I$ from $\bar{G}$ on i-th step and assuming by induction that BC_{t-1-i} is true for graph $\bar{G}-[i]$ and set of vectors $x_{t+i+1},\dots,x_{n-1}$ of length $n-i=2t-i$ and as before proving that BC_{t-i} is true for graph $\bar{G}-[i-1]$ and set of vectors $x_{t+i},\dots,x_{n-1}$.

We make a steps of this induction process and obtain from graph $\bar{G}-[a]$ and set of vectors $x_{t+a+1},\dots,x_{n-1}$ of length $n-a=2t-a$, graph $\bar{G}$ and set of vectors $x_{t+1},\dots,x_{n-1}$ of length n. The complement to graph $\bar{G}-[a]$ is graph $G-[a]$ and complement set of orthonormal vectors $x_1,\dots,x_t$ of length $n-a$. The BC_{t-a-1} is true for $\bar{G}-[a]$ iff BC_t is true for graph $G-[a]$.

Remind that we assume that

$$m(\bar{G}) \le \binom{t}{2}(1+3\delta)$$

or

$$\binom{2t+1}{2} - \binom{t}{2} \ge m(G) \ge 3\binom{t}{2}(1-\delta).$$

BC_t for $G-[a]$ is obviously true if $m(\bar{G}-[a]) \le \binom{t+1}{2}$. Because

$$d_q > n-1-\bar{d}_q \ge n-1-7n\delta^{1/4} > n(1-8\delta^{1/4}),$$

we have

$$\begin{aligned} m(G-[a]) &\le m(G) - na(1-8\delta^{1/4}) + \binom{a}{2} \\ &\le \binom{2t+1}{2} - \binom{t}{2} - na(1-8\delta^{1/4}) + \binom{a}{2} \le \binom{t+1}{2}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

The last condition to be true it is sufficient to impose condition

$$a = \Big[n(1-8\delta^{1/4})\Big(1-\sqrt{1-\frac{1}{2(1-8\delta^{1/4})^2}}\Big)\Big]. \tag{2.14}$$

Note that $|I| = [t(1+\delta^{1/4})] > a$.

Assume now that $d_q > t(1+\delta)$, $i \in [n]$. Then $\bar{d}_q \leq t(1-\delta)$. BC_{t-1} is true if

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{t-1}\mu_i(L(\bar{G})) &\leq \sum_{i=1}^{t-1}\bar{d}_q + \sqrt{2m(\bar{G})t} \leq t(t-1)(1-\delta) + \sqrt{nm(\bar{G})} \\ &\leq t(t-1)(1-\delta) + n\sqrt{n} \leq m(\bar{G}) + \frac{n(n-2)}{8},\end{aligned}$$

which is true when $m(\bar{G}) > \binom{t}{2}$, otherwise BC_{t-1} is trivially true for graph $\bar{G}$. This completes the proof.

Note that this version of the article has the following additions compared to the preprint published at [13]:

1. The formula (2.12) in the preprint was refined for the number a (in this article it became the formula (2.14));

2. Before the formula (2.14), in the second inequality for (2.13), the refined estimate $d_q > t(1-\delta)$ for $d_q > n(1-7\delta^{1/4})$ is used instead of the weaker one which allows us to obtain a suitable estimate value for the number a;

3. According to the formulas on page 11 of the preprint, the terms $1/n$ have been removed: taking its contribution is redundant and does not need to be taken into account;

4. The estimate for d_1 before formula (2.5) in the preprint (the inequality (2.7) in this paper) is corrected to match the estimate after formula (2.4) in the preprint ((2.5) in this article), so that the subsequent evaluation of $\bar{B}$ is transparent.

Acknowledgements: The article was basicaly written while the first author was visiting Unifesp, Brazil. He would like to thank the Department of Mathematics and also colleagues for their kind atmosphere to execute this work.

References

[1] A. E. Brouwer, W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer–Verlag, New York, 2012.

[2] W. H. Haemers, A. Mohammadian, B. Tayfeh–Rezaie, “On the sum of Laplacian eigenvalues of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **432** (2010), 2214–2221.

[3] Z. Du, B. Zhou, “Upper bounds for the sum of Laplacian eigenvalues of graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **436**:9 (2012), 3672–3683.

[4] Mayank, *On variants of the Grone–Merris conjecture*, Master’s Thesis, Eindhoven, 2010, 59 pp.

[5] I. Rocha, “Brouwer’s conjecture holds asymptotically almost surely”, 2019, arXiv: 1906.05368v1.

[6] V. Chvátal, P. L. Hammer, “Aggregation of inequalities in integer programming”, *Ann. of Disc. Math.*, **1** (1977), 145–162.

[7] R. Grone, R. Merris, “The Laplacian spectrum of a graph. II”, *SIAM J. Disc. Math.*, **7** (1994), 221–229.

[8] H. Bai, "The Grone–Merris conjecture", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **363**:8 (2011), 4463–4474.

[9] A. M. Duval, V. Reiner, "Shifted simplicial complexes are Laplacian integral", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 4313–4344.

[10] C. Helmberg, V. Trevisan, "Spectral threshold dominance, Brouwer's conjecture and maximality of Laplacian energy", *Linear Algebra and its Applications*, **512** (2017), 18–31.

[11] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Springer–Verlag, New York, 2001.

[12] R. Horn, C. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[13] V. Blinovsky, L. D. Speranca, "Proof of Brouwers Conjecture (BC) for all graphs with number of vertices $n > n_0$ assuming that BC holds for $n < n_0$ for some n_0", 2024, arXiv: 1908.08534v6.

Information about the authors

Vladimir M. Blinovsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute for Information Transmission Problems, Moscow, Russian Federation. E-mail: vblinovs@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4029-5715

Llohann D. Speranca, PhD, Professor, Federal University of Sao Paulo, Sao Jose dos Campus, Institute of Science and Technology, Brazil. E-mail: lsperanca@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8509-8622

Alexander N. Pchelintsev, Candidate of Physics and Mathematics, Head of the Higher Mathematics Department, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4136-1227

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vladimir M. Blinovsky
E-mail: vblinovs@yandex.ru

Received 22.03.2025
Reviewed 02.06.2025
Accepted for press 06.06.2025

Информация об авторах

Блиновский Владимир Маркович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: vblinovs@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4029-5715

Сперанса Лоан Далльянл, кандидат физико-математических наук, профессор, Федеральный Университет Сан Паулу, Кампус Сан Жозе, Институт науки и технологий, Бразилия. E-mail: lsperanca@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8509-8622

Пчелинцев Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика», Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4136-1227

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Блиновский Владимир Маркович
E-mail: vblinovs@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.03.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.06.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-128-143

Pólya groups and fields in some real biquadratic number fields

Said El MADRARI

Faculty of Sciences and Techniques
Moulay Ismail University
BP 509 Boutalamine, Errachidia, Morocco

Abstract. Let K be a number field and $\mathcal{O}_K$ be its ring of integers. Let $\prod_q(K)$ be the product of all prime ideals of $\mathcal{O}_K$ with absolute norm q. The Pólya group of a number field K is the subgroup of the class group of K generated by the classes of $\prod_q(K)$. K is a Pólya field if and only if the ideals $\prod_q(K)$ are principal. In this paper, we follow the work that we have done in [S. EL Madrari, "On the Pólya fields of some real biquadratic fields", Matematicki Vesnik, online 05.09.2024] where we studied the Pólya groups and fields in a particulare cases. Here, we will give the Pólya groups of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d_2})$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$ and the prime 2 is not totally ramified in $K/\mathbb{Q}$. And then, we characterize the Pólya fields of the real biquadratic fields K.

Keywords: Pólya fields, Pólya groups, real biquadratic fields, the first cohomology group of units, integer-valued polynomials

Mathematics Subject Classification: 11R04, 11R16, 11R27, 13F20.

For citation: El Madrari S. Pólya groups and fields in some real biquadratic number fields. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 128–143. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-128-143

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-128-143
УДК 511.2, 512.62

Группы и поля Пойи в некоторых действительных биквадратичных числовых полях

Саид ЭЛЬ МАДРАРИ
Факультет естественных наук и технологий
Университет Мулая Исмаила
Марокко, г. Эр-Рашидия, П.Я. 509 Буталамин

Аннотация. Пусть K — числовое поле, а $\mathcal{O}_K$ — его кольцо целых чисел. Пусть $\prod_q(K)$ — произведение всех простых идеалов $\mathcal{O}_K$ с абсолютной нормой q. Группа Пойи числового поля K — это подгруппа группы классов K, порожденная классами $\prod_q(K)$. K является полем Пойи тогда и только тогда, когда идеалы $\prod_q(K)$ являются главными. В этой статье мы следуем нашей работе [S. EL Madrari, "On the Pólya fields of some real biquadratic fields" Matematicki Vesnik, online 05.09.2024], в которой мы изучали группы и поля Пойи в частных случаях. Здесь мы дадим группы Пойи $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ такие, что $d_1 = lm_1$ и $d_2 = lm_2$ являются свободными от квадратов целыми числами с $l > 1$ и НОД$(m_1, m_2) = 1$, а простое число 2 не полностью разветвлено в $K/\mathbb{Q}$. А затем мы охарактеризуем поля Пойи действительных биквадратичных полей K.

Ключевые слова: поля Пойи, группы Пойи, действительные биквадратичные поля, первая когомологическая группа единиц, целочисленные многочлены

Для цитирования: *Эль Мадрари С.* Группы и поля Пойи в некоторых действительных биквадратичных числовых полях // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 128–143. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-128-143

Introduction

Let K be a number field and $\mathcal{O}_K$ be its ring of integers. Let $\text{Int}(\mathcal{O}_K) = \{R \in K[X] \mid R(\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K\}$ be the ring of integer-valued polynomials on $\mathcal{O}_K$. According to Pólya in [1], a basis $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of $\text{Int}(\mathcal{O}_K)$ is said to be a regular basis if the deg $(g_n) = n$ for each polynomial g_n. In 1919, G. Pólya was interested whether the $\mathcal{O}_K$-module $\text{Int}(\mathcal{O}_K)$ has a regular basis. Ostrowski [2] showed that the $\mathcal{O}_K$-module $\text{Int}(\mathcal{O}_K)$ admits a regular basis if and only if the ideals $\prod_q(K)$ are principal, where $\prod_q(K)$ is the product of all prime ideals of $\mathcal{O}_K$ with absolute norm q. In 1982, Zantema in [3] gave the name of Pólya field to any field K such that the $\mathcal{O}_K$-module $\text{Int}(\mathcal{O}_K)$ has a regular basis. In 1997, Cahen and Chabert in [4] introduced the notion of Pólya group which is the group generated by the classes of $\prod_q(K)$.

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$. The studies about the Pólya fields in the real biquadratic fields started in 1982 by Zantema [3]. In 2011, A. Leriche in [5] gave some Pólya fields of K by using the capitulation. Otheres (see [6], [7], and [8]) determined some particular cases of Pólya groups and Pólya fields of K.

In this paper, we are going to determine $H^1(G_K, E_K)$ which is the first cohomology group of units of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$ and the prime 2 is not totally ramified in $K/\mathbb{Q}$. And then, we give the Pólya groups of K. Lastly, we give the Pólya fields of the real biquadratic fields K. This paper continues the study of [9].

1. Notations

In this work, we adopt the following notations:

- $l > 1$ and $m_1 > 1$ and $m_2 > 1$ are square-free integers.
- $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ and $d_3 = m_1m_2$ are square-free integers.
- $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$: a real biquadratic number field.
- $\mathcal{O}_K$: the ring of integers of K.
- $k_i = \mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$: the quadratic subfields of K for $i = 1, 2, 3$.
- $\epsilon_i = x_i + y_i\sqrt{d_i}$: the fundamental unit of $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$, for $i = 1, 2, 3$.
- $N(\eta_i) = N_i(\eta_i) = Norm_{k_i/\mathbb{Q}}(\eta_i)$ where $\eta_i \in k_i$, for $i = 1, 2, 3$.
- E_K : the unit group of K over $\mathbb{Q}$.
- G_K : the Galois group of K over $\mathbb{Q}$.
- e_p : the ramification index of a prime number p in $K/\mathbb{Q}$.
- d_K : the discriminant of K over $\mathbb{Q}$.
- t : the number of the prime divisors of d_K.

2. Preliminaries

Definition 2.1. Let $\prod_q(L)$ be the product of all prime ideals of $\mathcal{O}_L$ with norm $q \geq 2$. The Pólya group $\mathcal{P}_O(L)$ of a number field L is the subgroup of the class group of L generated by the classes of the ideals $\prod_q(L)$.

In the real biquadratic number fields K, the prime 2 is the only prime can be totally ramified in $K/\mathbb{Q}$. When e_2 the ramification index of the prime 2 in $K/\mathbb{Q}$ is $4 = [K : \mathbb{Q}]$, in other words 2 is totally ramified in $K/\mathbb{Q}$ so we have $(d_1, d_2) \equiv (2, 3)$ or $(3, 2) \pmod 4$, therefore $N\epsilon_1 \neq N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$, $N\epsilon_2 \neq N\epsilon_1 = N\epsilon_3 = 1$, or $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$. When $e_2 \neq 4$, i. e., the prime 2 is not totally ramified in $K/\mathbb{Q}$. So, we have either $e_2 = 1$, when the prime 2 is not ramified in $K/\mathbb{Q}$ or $e_2 = 2$, when the prime 2 is ramified in $K/\mathbb{Q}$. Thus, we have the following possibilities $(d_1, d_2) \equiv (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (3,3) \pmod 4$. Let $k_j = \mathbb{Q}(\sqrt{d_j})$, $j = 1,2$ note that when $d_j \equiv 1,2 \pmod 4$, then $N\epsilon_j = \pm 1$, for $j = 1,2$ and when there exists a prime number $\equiv 3 \pmod 4$ dividing d_j then $N\epsilon_j = +1$, for $j = 1,2$.

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d}_2)$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are two square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$. Let $H^1(G_K, E_K)$ be the first cohomology group of units of K. Let $\epsilon_i = x_i + y_i\sqrt{d_i}$ be the fundamental unit of $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$, for $i = 1,2,3$. Recall that $a_i \in \mathbb{Q}$ such that $a_i = N(\epsilon_i + 1) = 2(x_i + 1)$ when $N\epsilon_i = 1$ else $a_i = 1$, for $i = 1,2,3$. Let H be the subgroup of $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ generated by the images of d_1, d_2, d_3, a_1, a_2 and a_3 with $d_1 = lm_1$, $d_2 = lm_2$, and $d_3 = m_1m_2$. $[a_i]$ is the class of a_i in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$, for $i = 1,2,3$ and $[d_i]$ is the class of d_i in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$, for $i = 1,2,3$.

Theorem 2.1 (see [10]). *$H \simeq H^1(G_K, E_K)$, except for the next two cases in which H is canonically isomorphic to a subgroup of index 2 of $H^1(G_K, E_K)$:*

1. *the prime 2 is totally ramified in $K/\mathbb{Q}$, and there exists integral $z_i \in k_i$, $i = 1,2,3$ such that $N_1(z_1) = N_2(z_2) = N_3(z_3) = \pm 2$,*
2. *all the quadratic subfields k_i contain units of norm -1 and $E_K = E_{k_1}E_{k_2}E_{k_3}$.*

Remark 2.1. The theorem above was given by C. Bennett Setzer in [10]. It presents the first cohomology group of units of the real biquadratic number fields K. For the proof of the theorem above, the reader refers to see the proof in [10, Theorems 4,5,7]. Note that the theorem above is mentioned by Zantema in [3, Section 4, p. 14,15], also it is mentioned in [6].

Now we give a well-known proposition in the notion of Pólya group and field (see [5, Proposition 2.3]).

Proposition 2.1. *The group $\mathcal{P}_O(L)$ is trivial if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. *the field L is a Pólya field,*
2. *all the ideals $\prod_q(L)$ are principal,*
3. *the $\mathcal{O}_L$-module $\mathrm{Int}(\mathcal{O}_L)$ has a regular basis.*

Zantema gave the following proposition which connects the first cohomology group of units of a number field L with the Pólya group of L in a Galois extension.

Proposition 2.2 (see [3]). *Let $L/\mathbb{Q}$ be a Galois extension and d_L be its discriminant. Denote by e_p the ramification index of a prime number p in L. Then, the following sequence is exact*

$$1 \to H^1(G_L, E_L) \to \oplus_{p|d_L}\mathbb{Z}/e_p\mathbb{Z} \to \mathcal{P}_O(L) \to 1.$$

In particular, $|H^1(G_L, E_L)||\mathcal{P}_O(L)| = \prod_{p|d_L} e_p$.

Hence, we get the following result.

Corollary 2.1. *L is a Pólya field if and only if $|H^1(G_L, E_L)| = \prod_{p|d_L} e_p$.*

P r o p o s i t i o n 2.3 (see [11]). *Let* $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d}_1,\sqrt{d}_2)$. *Let* ϵ_i *be the fundamental unit of* $\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$, $i=1,2,3$. *Let* E_K *be the unit group of* K *over* $\mathbb{Q}$. *So, we have the following possibilities for a system of fundamental of units of* E_K *:*

1. $\epsilon_i,\epsilon_j,\epsilon_k$,
2. $\sqrt{\epsilon_i},\epsilon_j,\epsilon_k$ *with* $N\epsilon_i=1$,
3. $\sqrt{\epsilon_i},\sqrt{\epsilon_j},\epsilon_k$ *such that* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=1$,
4. $\sqrt{\epsilon_i\epsilon_j},\epsilon_j,\epsilon_k$ *such that* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=1$,
5. $\sqrt{\epsilon_i\epsilon_j},\sqrt{\epsilon_k},\epsilon_j$ *where* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=N\epsilon_k=1$,
6. $\sqrt{\epsilon_i\epsilon_j},\sqrt{\epsilon_j\epsilon_k},\sqrt{\epsilon_k\epsilon_i}$ *where* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=N\epsilon_k=1$,
7. $\sqrt{\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k},\epsilon_j,\epsilon_k$ *where* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=N\epsilon_k=1$,
8. $\sqrt{\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_k},\epsilon_j,\epsilon_k$ *with* $N\epsilon_i=N\epsilon_j=N\epsilon_k=-1$, *where* $\{\epsilon_i,\epsilon_j,\epsilon_k\}=\{\epsilon_3,\epsilon_1,\epsilon_2\}$.

P r o p o s i t i o n 2.4 (see [11]). *Let* $k=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *such that* $N\epsilon=1$ *and let* λ *denote the square-free part of the positive integer* $N(\epsilon+1)$. *Then* $\lambda>1$, λ *divides the discriminant of* k, $\lambda\neq d$, *and* $\sqrt{\lambda\epsilon}\in k$.

3. The Pólya Groups of The Real Biquadratic Fields $K=\mathbb{Q}(\sqrt{lm_1},\sqrt{lm_2})$

In this section, we are going to determine the Pólya groups of the fields K. Firstly, we need to give the first cohomology group of units of K.

3.1. The structure of the first cohomology group of units of $K=\mathbb{Q}(\sqrt{lm_1},\sqrt{lm_2})$

P r o p o s i t i o n 3.1. *Let* $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d}_1,\sqrt{d}_2)$ *such that* $d_1=lm_1$ *and* $d_2=lm_2$ *are square-free integers with* $l>1$ *and* $gcd(m_1,m_2)=1$. *Let* ϵ_1,ϵ_2 *and* ϵ_3 *be the fundamental unit of* $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d_2})$ *and* $\mathbb{Q}(\sqrt{d_3})$ *with* $d_3=m_1m_2$ *respectively, and let* $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$. *Let* λ_1,λ_2 *and* λ_3 *be the square-free part of* $N(\epsilon_1+1)$, $N(\epsilon_2+1)$ *and* $N(\epsilon_3+1)$ *respectively. Then, we have the following results:*

1. $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$ *if and only if either* $[\lambda_1\lambda_2]=[lm_1],[lm_2]$ *or* $[m_1m_2]$, *or* $\lambda_1=\lambda_2=l$,
2. $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$ *for* $j=1$ *or* 2 *if and only if either* $[\lambda_j\lambda_3]=[lm_1],[lm_2]$ *or* $[m_1m_2]$, *or* $\lambda_j=\lambda_3=m_j$,
3. $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ *if and only if either* $[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]=[lm_1],[lm_2]$ *or* $[m_1m_2]$, *or* $[\lambda_1\lambda_2]=[\lambda_3]$.

P r o o f. Let $k_i=\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})$ such that $N\epsilon_i=1$ for $i=1,2,3$ and let λ_i be the square-free part of the positive integer $N(\epsilon_i+1)$ for $i=1,2,3$. Recall that $[lm_1],[lm_2]$ and $[m_1m_2]$ is the class of lm_1,lm_2 and m_1m_2 in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ respectively. We start by the first equivalent.

1. ($\Longrightarrow$), we use the contrapositive. We suppose that ($[\lambda_1\lambda_2]\neq[lm_1],[lm_2]$ and $[m_1m_2]$), and ($\lambda_1\neq l$ or $\lambda_2\neq l$). We know that $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1}\in k_1$ and $\sqrt{\lambda_2\epsilon_2}\in k_2$ (see Proposition 2.4), so $\sqrt{\lambda_1\lambda_2\epsilon_1\epsilon_2}\in K$ and since ($[\lambda_1\lambda_2]\neq[lm_1],[lm_2]$ and $[m_1m_2]$), and ($\lambda_1\neq l$ or $\lambda_2\neq l$), so $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$. Reciprocally, we suppose either $[\lambda_1\lambda_2]=[lm_1],[lm_2]$ or $[m_1m_2]$, or $\lambda_1=\lambda_2=l$, and since we have $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1}\in k_1$ and $\sqrt{\lambda_2\epsilon_2}\in k_2$. So, $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1}\sqrt{\lambda_2\epsilon_2}\in K$ and thus we get that $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$.

2. As above the first assertion we get the second.

3. Lastely, ($\Longrightarrow$) assuming that $[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\neq[lm_1],[lm_2]$ and $[m_1m_2]$, and $[\lambda_1\lambda_2]\neq[\lambda_3]$. Since $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1}\in k_1$, $\sqrt{\lambda_2\epsilon_2}\in k_2$, and $\sqrt{\lambda_3\epsilon_3}\in k_3$, so $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1\lambda_2\epsilon_2\lambda_3\epsilon_3}\in K$. As we have $[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]\neq[lm_1],[lm_2]$ and $[m_1m_2]$, and $[\lambda_1\lambda_2]\neq[\lambda_3]$, so $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$. Now we suppose either $[\lambda_1\lambda_2\lambda_3]=[lm_1],[lm_2]$ or $[m_1m_2]$, or $[\lambda_1\lambda_2]=[\lambda_3]$. As $\sqrt{\lambda_1\epsilon_1}\in k_1$ and $\sqrt{\lambda_2\epsilon_2}\in k_2$ and then $\sqrt{\lambda_3\epsilon_3}\in k_3$, thus we get that $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$. $\square$

E x a m p l e 3.1. In the field $K=\mathbb{Q}(\sqrt{7\cdot 5},\sqrt{7\cdot 11})$, we have $d_1=7\cdot 5=35$, $d_2=7\cdot 11=77$ and $d_3=5\cdot 11=55$. The fundamental units are $\epsilon_1=6+\sqrt{35}$, $\epsilon_2=\frac{1}{2}(9+\sqrt{77})$, $\epsilon_3=89+12\sqrt{55}$ such that $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$. So, $a_1=2(x_1+1)=2(6+1)=2\cdot 7$, $a_2=2(x_2+1)=2(\frac{9}{2}+1)=11$, $a_3=2(89+1)=2\cdot 90=2^2\cdot 3^2\cdot 5$. And thus we have $\lambda_1=2\cdot 7$, $\lambda_2=11$, and then $\lambda_3=5$. By Proposition 2.4, we get that $\sqrt{2\cdot 7\epsilon_1}\in k_1=\mathbb{Q}(\sqrt{7\cdot 5})$, $\sqrt{11\epsilon_2}\in k_2=\mathbb{Q}(\sqrt{7\cdot 11})$ and $\sqrt{5\epsilon_3}\in k_3=\mathbb{Q}(\sqrt{5\cdot 11})$. So, $\sqrt{11\epsilon_2}\sqrt{5\epsilon_3}=\sqrt{11\cdot 5}\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$, as we have $\lambda_2\lambda_3=11\cdot 5=d_3$, then $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$.

R e m a r k 3.1. Let $k_3=\mathbb{Q}(\sqrt{m_1m_2})$ and ϵ_3 be the fundamental unit of k_3 with $N\epsilon_3=1$. Let λ_3 be the square-free part of the positive integer $N(\epsilon_3+1)$. Since $\lambda_3>1$, λ_3 divides the discriminant of k_3, $\lambda_3\neq m_1m_2$, and $\sqrt{\lambda_3\epsilon_3}\in k_3=\mathbb{Q}(\sqrt{m_1m_2})$, so $\sqrt{\epsilon_3}\notin K$. Similarly, we find that $\sqrt{\epsilon_1}\notin K$ and $\sqrt{\epsilon_2}\notin K$.

Let $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$. We know that when we have either $N\epsilon_1\neq N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$, $N\epsilon_2\neq N\epsilon_1=N\epsilon_3=1$, or $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ so we can have $e_2=4$ or $e_2\neq 4$. In the lemma below, we give $H^1(G_K,E_K)$ the first cohomology group of units of K such that $e_2\neq 4$, i. e., the prime 2 is not totally ramified in $K/\mathbb{Q}$. We mention here that when $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=-1$, $N\epsilon_1=N\epsilon_2=-1\neq N\epsilon_3=1$, $N\epsilon_i\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=-1$, with $j\neq i=1,2$, and $N\epsilon_1=N\epsilon_2\neq N\epsilon_3=-1$, we always have $e_2\neq 4$.

Lemma 3.1. *Let $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$ such that $d_1=lm_1$ and $d_2=lm_2$ are square-free integers with $l>1$ and $gcd(m_1,m_2)=1$. Then*

1. $H^1(G_K,E_K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, *when* $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$.
2. $H^1(G_K,E_K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, *when*
   (a) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$,
   (b) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=-1$, $N\epsilon_3=1$,
   (c) $N\epsilon_j\neq N\epsilon_k=N\epsilon_3=-1$, *for* $j\neq k\in\{1,2\}$,
   (d) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=1$, $N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, *or*
   (e) $N\epsilon_k\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$, $j\neq k\in\{1,2\}$ *such that* $e_2\neq 4$,
   (f) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$ *and* $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ *such that* $e_2\neq 4$.
3. $H^1(G_K,E_K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, *when*
   (a) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=1$, $N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$,
   (b) $N\epsilon_k\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\notin K$, $j\neq k\in\{1,2\}$ *such that* $e_2\neq 4$ *or*
   (c) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$, *or* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ *such that* $e_2\neq 4$.
4. $H^1(G_K,E_K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$, *when* $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\notin K$, *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$ *such that* $e_2\neq 4$.

P r o o f. Recall that λ_1,λ_2 and λ_3 be the square-free part of $N(\epsilon_1+1)=a_1$, $N(\epsilon_2+1)=a_2$ and $N(\epsilon_3+1)=a_3$ respectively, such that $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$. Let $[a_1]$, $[a_2]$, and $[a_3]$ be the class of a_1,a_2 and a_3 in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ respectively, so $[a_1]=[\lambda_1]$, $[a_2]=[\lambda_2]$, and $[a_3]=[\lambda_3]$ where $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$. We know that H is the subgroup of $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ generated by the images of d_1,d_2,d_3,a_1,a_2 and a_3 with $d_1=lm_1$, $d_2=lm_2$ and $d_3=m_1m_2$. In the following we study in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$ whether $[lm_1]$, $[lm_2]$, $[m_1m_2]$, $[a_1]$, $[a_2]$, and $[a_3]$ are linearly independents. Note that $[m_1m_2]$ belongs to the subgroup generated by $[lm_1]$ and

$[lm_2]$ in $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$, in other words $[m_1m_2] \in \langle [lm_1], [lm_2] \rangle$. We refer the reader to see the proof of the theorems A, B, C, and D in [6] since in the following we do the same process to give $H^1(G_K, E_K)$.

When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = -1$, we get that $[a_1] = [a_2] = [a_3] = 1$. And thus, $[lm_1]$ and $[lm_2]$ are linearly independents, i. e., $\langle [lm_1], [lm_2] \rangle \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. As the three fundamental units with negative norm. Then, by Kubota [11], we have either $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle$ or $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \rangle$ is the group of units of K. Thus, we will distinguish the two following cases.

- When $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, which means that we have $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \rangle$. So, by Theorem 2.1, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- Otherwise, i. e., $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \notin K$, then $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle$. On the other hand, we know that $E_{k_1} = \langle -1, \epsilon_1 \rangle$, $E_{k_2} = \langle -1, \epsilon_2 \rangle$ and then $E_{k_3} = \langle -1, \epsilon_3 \rangle$. Therefore, $E_K = E_{k_1}E_{k_2}E_{k_2}$. So, using the Theorem 2.1, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = -1$ and $N\epsilon_3 = 1$, then $[a_1] = [a_2] = 1$. Now we have to check whether $[a_3]$ belongs to the group generated by $[lm_1]$ and $[lm_2]$. By Proposition 2.4 we have $\lambda_3 > 1$ and $\lambda_3 \neq m_1m_2 = d_3$ and then λ_3 divides d_{k_3}. Therefore, we get that $[a_3] = [\lambda_3] \notin \langle [lm_1], [lm_2] \rangle$ and thus $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Assuming $N\epsilon_j \neq N\epsilon_k = N\epsilon_3 = -1$ such that $j \neq k = 1, 2$. Then, $[a_k] = [a_3] = 1$. As above, the second assertion, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = 1$ and $N\epsilon_3 = -1$, so $[a_3] = 1$. Thence, we have to verify whether $[lm_1]$, $[lm_2]$, $[a_1]$, and $[a_2]$ are linearly independents or not. As $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = 1$. Then, we have to distinguish the following cases.

- When $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$ (note that we have $E_K = \langle -1, \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle$ see Proposition 2.3). So, according to Proposition 3.1, we have either $([a_1] = [a_2] = [l])$ or $([a_1a_2] = [lm_1], [lm_2]$ or $[m_1m_2])$. Note that, we have $\lambda_j > 1$, $\lambda_j \neq lm_j$, and λ_j divides d_{k_j} for $j = 1, 2$. So, we get both $[a_1] = [\lambda_1]$ and $[a_2] = [\lambda_2]$ are not in $\langle [lm_1], [lm_2] \rangle$. Thus, we obtain that $[a_j] \in \langle [lm_1], [lm_2], [a_k] \rangle$ with $j \neq k = 1, 2$. Then, by the Theorem 2.1, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
- Otherwise, i. e., $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \notin K$ (note that here we have $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle$), so we have $([a_1] \neq [l]$ or $[a_2] \neq [l])$ and $([a_1a_2] \neq [lm_1], [lm_2]$ and $[m_1m_2])$. Hence, $[a_j] \notin \langle [lm_1], [lm_2], [a_k] \rangle$ for $j \neq k = 1, 2$. So, $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

Let $N\epsilon_k \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = 1$, for $j \neq k = 1, 2$ such that $e_2 \neq 4$. Then, $[a_k] = 1$ and thus we have to see whether $[lm_1]$, $[lm_2]$, $[a_j]$, and $[a_3]$ with $j = 1, 2$ are linearly independents. As above, the fourth case, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ when $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3} \in K$ with $j = 1, 2$. Otherwise, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

Suppose $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ such that $e_2 \neq 4$. Then, we have to check if $[lm_1]$, $[lm_2]$, $[a_1]$, $[a_2]$ and $[a_3]$ are linearly independents. Therefore, we have to distinguish the following cases.

- When $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$. As above, (the fourth case) , we get that $[a_k] \in \langle [lm_1], [lm_2], [a_j] \rangle$ with $j \neq k = 1, 2$. We know that $[a_3] = [\lambda_3] \notin \langle [lm_1], [lm_2] \rangle$. As we are in the case of $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$, (i. e., $E_K = \langle -1, \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}, \epsilon_2, \epsilon_3 \rangle$) so $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3} \notin K$ with $j = 1, 2$. Hence, we get that $([a_j][a_3] = [\lambda_j][\lambda_3] \neq [lm_j]$ and $[m_1m_2])$, and $([a_j] \neq [m_j]$ or $[a_3] \neq [m_j])$ for $j = 1, 2$. As a result, we have $[a_3] \notin \langle [lm_1], [lm_2], [a_j] \rangle$ and thus $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.
- When $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3} \in K$ for $j \in \{1, 2\}$, as above, we get that $H^1(G_K, E_K) \simeq H \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.
- When $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, (note that we have $E_K = \langle -1, \epsilon_1, \epsilon_2, \sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \rangle$ see Proposition 2.3). So, we have either $([a_1][a_2][a_3] = [\lambda_1][\lambda_2][\lambda_3] = [lm_1], [lm_2]$ or $[m_1m_2])$, or $([a_1][a_2] =$

$[\lambda_1][\lambda_2]=[a_3]=[\lambda_3]$). We know that, $[a_1]$, $[a_2]\,[a_3]\notin\langle[lm_1],[lm_2]\rangle$. Note that $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\notin K$ and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$ (since $E_K=\langle -1,\epsilon_1,\epsilon_2,\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\rangle$), so $[a_3]\notin\langle[lm_1],[lm_2],[a_k]\rangle$ with $k=1,2$, but $[a_3]\in\langle[lm_1],[lm_2],[a_1],[a_2]\rangle$. So, $H^1(G_K,E_K)\simeq H\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

- Otherwise, i. e., $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\notin K$, and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$ in other words $E_K=\langle -1,\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\rangle$. As a result, we get that $[lm_1]$, $[lm_2]$, $[a_1]$, $[a_2]$ and $[a_3]$ are linearly independents. So, $H^1(G_K,E_K)\simeq H\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$.

When $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$ and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ such that $e_2\neq 4$ (here we have $E_K=\langle -1,\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2},\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3},\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\rangle$ see Proposition 2.3). Now we verify if $[lm_1],[lm_2],[a_1],[a_2]$ and $[a_3]$ are linearly independents. We know that when $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, then $[a_k]\in\langle[lm_1],[lm_2],[a_j]\rangle$ with $j\neq k=1,2$ and when $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$ so $[a_3]\in\langle[lm_1],[lm_2],[a_j]\rangle$, $j=1,2$. Thus, $H^1(G_K,E_K)\simeq H\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. □

In the following we give some examples of $H^1(G_K,E_K)$ such that $e_2\neq 4$.

Example 3.2. In this example we use the same field $K=\mathbb{Q}(\sqrt{7\cdot 5},\sqrt{7\cdot 11})$ of the Example 3.1 (we recall that $e_2\neq 4$). Since we have $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$, then $H^1(G_K,E_K)\simeq H\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ or $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ (see the lemma above). As we have $\lambda_1=2\cdot 7$, $\lambda_2=11$, and then $\lambda_3=5$, and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ (see the Example 3.1), then by the lemma above we get that $H^1(G_K,E_K)\simeq H\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

Example 3.3. Let $K=\mathbb{Q}(\sqrt{3\cdot 5\cdot 7},\sqrt{3\cdot 5\cdot 11})$, where $d_1=3\cdot 5\cdot 7=105$, $d_2=3\cdot 5\cdot 11=165$, $d_3=7\cdot 11=77$. Thus, we have $\epsilon_1=41+4\sqrt{105}$, $\epsilon_2=\frac{1}{2}(13+\sqrt{165})$ and then $\epsilon_3=\frac{1}{2}(9+\sqrt{77})$ such that $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ and $e_2\neq 4$. Hence, we have $a_1=2(x_1+1)=2(41+1)=2^2\cdot 3\cdot 7$, $a_2=2(x_2+1)=2(\frac{13}{2}+1)=3\cdot 5$, $a_3=2(x_3+1)=2(\frac{9}{2}+1)=11$. We have $\lambda_1=3\cdot 7$, $\lambda_2=3\cdot 5$, and $\lambda_3=11$, thus we get that $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ ($\lambda_2\lambda_3=3\cdot 5\cdot 11=d_2$). Then $H^1(G_K,E_K)=\langle[3\cdot 5\cdot 7],[3\cdot 5\cdot 11],[3\cdot 7],[3\cdot 5]\rangle\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.

3.2. The Pólya groups of the real biquadratic fields $K=\mathbb{Q}(\sqrt{lm_1},\sqrt{lm_2})$

Theorem 3.1. *Let $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$ such that $d_1=lm_1$ and $d_2=lm_2$ are square-free integers with $l>1$ and $\gcd(m_1,m_2)=1$. Let t be the number of the prime divisors of d_K. So,*

1. $\mathcal{P}_O(K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-2}$, *when* $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$.
2. $\mathcal{P}_O(K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$, *when*
   - (a) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$,
   - (b) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=-1$, $N\epsilon_3=1$,
   - (c) $N\epsilon_j\neq N\epsilon_k=N\epsilon_3=-1$, *for* $j\neq k\in\{1,2\}$,
   - (d) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=1$, $N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, *or*
   - (e) $N\epsilon_k\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$, $j\neq k\in\{1,2\}$ *such that* $e_2\neq 4$,
   - (f) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ *such that* $e_2\neq 4$.
3. $\mathcal{P}_O(K)\simeq E_{t-4}$, *when*
   - (a) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=1$, $N\epsilon_3=-1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$,
   - (b) $N\epsilon_k\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\notin K$, $j\neq k\in\{1,2\}$ *such that* $e_2\neq 4$, *or*
   - (c) $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$ $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ *such that* $e_2\neq 4$.
4. $\mathcal{P}_O(K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-5}$, *when* $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\notin K$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}\notin K$ *such that* $e_2\neq 4$.

P r o o f. We have $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d}_2)$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$. K is a Galois extension of $\mathbb{Q}$ with $[K : \mathbb{Q}] = 4$ and d_K is the discriminant K. We recall that e_p is the ramification index of a prime number p in $K/\mathbb{Q}$ and thus $e_2 = 1$ when the prime 2 is not ramified in $K/\mathbb{Q}$ and $e_2 = 2$ when the prime 2 is ramified in $K/\mathbb{Q}$. According to Proposition 2.2, we have $|H^1(G_K, E_K)||\mathcal{P}_O(K)| = \prod_{p|d_K} e_p$. Thus, $|\mathcal{P}_O(K)| = \frac{2^t}{|H^1(G_K,E_K)|}$, where t is the number of prime numbers dividing d_K. Thence, we have $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-s}$ where s is satisfying $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^s \simeq H^1(G_K, E_K)$. By the Lemma 3.1, we have when $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = -1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, then $H^1(G_K, E_K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Therefore, we get that $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-2}$.

Similarly, as above, we deduce the other results of the theorem. □

4. The Pólya Fields of The Real Biquadratic Fields $K = \mathbb{Q}(\sqrt{lm_1}, \sqrt{lm_2})$

In this section, we aim to determine the Pólya fields of the real biquadratic fields of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d}_2)$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$. Let p, p_1, p_2, p_3, p_4 and then p' be the prime integers congruent to 1 (mod 4) and let q, q_1, q_2, q_3, q_4 and then q' be the prime integers congruent to 3 (mod 4).

Since we are going to characterize the Pólya fields of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d}_2)$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$. So, we need the discriminant of K over $\mathbb{Q}$ which determined in [12] and [13] by: $d_K = (lm_1m_2)^2$, when $(d_1, d_2) \equiv (1, 1) \pmod 4$. And when $(d_i, d_j) \equiv (1, 2)$, $(1, 3)$ or $(3, 3) \pmod 4$ with $i \neq j \in \{1, 2\}$, $d_K = (4lm_1m_2)^2$. In the following theorem we give the Pólya fields of K in the cases of $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = -1$, $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = -1 \neq N\epsilon_3 = 1$, and $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = -1$, with $j \neq i = 1, 2$. Note that in those cases we have $e_2 \neq 4$ and the primes dividing $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are not congruent to 3 (mod 4). So, in the theorem below l must be congruent to 1 (mod 4).

Theorem 4.1. *Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}_1, \sqrt{d}_2)$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$ and put $j \neq k \in \{1, 2\}$.*

We assume $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = -1$. Then, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:

1. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$, *with* $l = p$,
2. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l$, *with* $l = p$.

Now we assume that $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = -1$, $N\epsilon_3 = 1$. So, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:

1. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$ *where* $l = p$,
2. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l$ *where* $l = p$.

We suppose that $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = -1$. So, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:

1. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$,
2. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l$,
3. $d_j = lp_1$ *and* $d_i = 2l$,

where in the three items above we have $l = p$.

P r o o f. We know that, K is a Pólya field if and only if $\mathcal{P}o(K)$ is trivial. By the Theorem 3.1, we have the following cases.

(i) When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = -1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, then $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-2}$ where t is the number of prime divisors of d_K, and thus K is a Pólya field if and only if $t = 2$. Note that this case can not occur because t must be ≥ 3. On the other hand, when $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \notin K$, so $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$. So, K is a Pólya field if and only if $t = 3$. Hence

- We suppose $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, then by Williams [12] we have $d_K = (lm_1m_2)^2$. Thence, K is a Pólya field if and only if $d_i = lp_1$ and $d_j = lp_2$ with $l = p \equiv 1 \pmod 4$.
- Now we suppose $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, then $d_K = (4lm_1m_2)^2$. So, K is a Pólya field if and only if $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$ with $l = p$.

(ii) When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = -1$ and $N\epsilon_3 = 1$, then $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$. Thus, K is a Pólya field if and only if $t = 3$. When $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, we get the item 1, and when $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, we have the item 2.

(iii) When $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = -1$ with $i \neq j \in \{1,2\}$, then $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$. Hence, K is a Pólya field if and only if $t = 3$. When $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, we get the item 1 and when $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, we obtain 2. And then when $(d_j, d_i) \equiv (m_j, m_i) \equiv (1,2) \pmod 4$, we have 3. □

In the following theorem, we give the Pólya fields of K in the case of $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 \neq N\epsilon_3 = -1$. We mention here that $e_2 \neq 4$.

Theorem 4.2. *Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $gcd(m_1, m_2) = 1$ and put $j \neq k \in \{1,2\}$. Let $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 \neq N\epsilon_3 = -1$.*

We suppose $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$. Then, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:

1. *$d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$, where $l = p$,*
2. *$d_i = lp_1$, $d_j = 2l$, where $l = p$.*

Otherwise, i. e., $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \notin K$. Then, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:

1. *$d_i = lp_1p_2$, $d_j = lp_3$, where $l = p$,*
2. *$d_i = lp_1p_2$, $d_j = 2l$, where $l = p$,*
3. *$d_i = lp_1$, $d_j = 2lp_2$, where $l = p$,*
4. *$d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$, where $l = pp'$,*
5. *$d_i = lp_1$ $d_j = 2l$ where $l = pp'$.*

P r o o f. By the Theorem 3.1, we have the following cases.

(i) When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 \neq N\epsilon_3 = -1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$, then $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$ where t is the number of prime divisors of d_K. So, K is a Pólya field if and only if we have either the item 1, or 2.

(ii) When $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 \neq N\epsilon_3 = -1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \notin K$. Then, $\mathcal{P}_O(K) \simeq E_{t-4}$. So, K is a Pólya field if and only if $t = 4$.

- When $(d_i, d_j) \equiv (1,1) \pmod 4$. So, K is a Pólya field if and only if $d_i = lp_1p_2$ $d_j = lp_3$ such that $l = p$. When $l = pp'$, we get the item 4.
- Now when $(d_i, d_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, we get the other items of the theorem. □

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ such that $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = 1$, for $i \neq j \in \{1,2\}$. Note that in this case we can have either $e_2 = 4$ (since we can have $(d_1, d_2) \equiv (2,3), (3,2) \pmod 4$) or $e_2 \neq 4$ (since we can have $(d_1, d_2) \equiv (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) \pmod 4$) note that $(d_1, d_2) \not\equiv (3,3) \pmod 4$ since $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j$, with $i \neq j \in \{1,2\}$. In the following theorem we give the Pólya fields of K where $e_2 \neq 4$. As we have $N\epsilon_i \neq N\epsilon_j = N\epsilon_3 = 1$, for $i \neq j \in \{1,2\}$ and l dividing d_1 and d_2, then the divisors of l are $\equiv 1 \pmod 4$.

Theorem 4.3. *Let* $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$ *such that* $d_1=lm_1$ *and* $d_2=lm_2$ *are square-free integers with* $l>1$ *and* $gcd(m_1,m_2)=1$. *Let* $N\epsilon_i\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$, *for* $i\neq j\in\{1,2\}$ *such that* $e_2\neq 4$.

Assuming $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$, $j=1,2$. *So,* K *is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. $d_i=lp_1$, $d_j=lp_2$,
2. $d_i=lp_1$, $d_j=2l$,
3. $d_j=lp_1$, $d_i=2l$,
   where in the three items above we have $l=p$.

Otherwise. Then, K *is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. $d_i=lp_1p_2$ *and* $d_j=lp_3$,
2. $d_i=lp_1$ *and* $d_j=lp_2p_3$ *or* lq_1q_2,
3. $d_i=lp_1p_2$ *and* $d_j=2l$,
4. $d_i=lp_1$ *and* $d_j=2lp_2$ *or* $2lq$,
5. $d_j=lp_1p_2$ *or* lq_1q_2 *and* $d_i=2l$,
6. $d_j=lp_1$ *and* $d_i=2lp_2$,
7. $d_i=lp_1$ *and* $d_j=lq_1$,
   where in the items above we have $l=p$,
8. $d_i=lp_1$ *and* $d_j=lp_2$,
9. $d_i=lp_1$ *and* $d_j=2l$,
10. $d_j=lp_1$ *and* $d_i=2l$,
    such that $l=pp'$.

P r o o f. We know that, when $N\epsilon_i\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ such that $e_2\neq 4$, for $i\neq j\in\{1,2\}$, then we have $(d_i,d_j)\equiv(1,1),(1,2),(2,1),(1,3) \pmod 4$. By Theorem 3.1, we have the following cases.

(i) When $N\epsilon_i\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$, and $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\in K$ such that $e_2\neq 4$ with $i\neq j\in\{1,2\}$. Then, $\mathcal{P}_O(K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$. So, K is a Pólya field if and only if $t=3$. Therefore, when $(d_i,d_j)\equiv(1,1)\pmod 4$ we get the item 1 and when $(d_i,d_j)\equiv(1,2)\pmod 4$ we have the item 2, lastly when $(d_j,d_i)\equiv(1,2)\pmod 4$ we obtain the item 3.

(ii) When $N\epsilon_i\neq N\epsilon_j=N\epsilon_3=1$ and $\sqrt{\epsilon_j\epsilon_3}\notin K$ such that $e_2\neq 4$ with $i\neq j\in\{1,2\}$. Then, $\mathcal{P}_O(K)\simeq(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-4}$. Thence, K is a Pólya field if and only if $t=4$.

- When $(d_i,d_j)\equiv(1,1)\pmod 4$, then $d_K=(lm_1m_2)^2$. When $l=p$, so K is a Pólya field if and only if either $d_i=lp_1p_2$, $d_j=lp_3$ or the item 2. When $l=pp'$, we have the item 8.
- We suppose that $(d_i,d_j)\equiv(1,2)\pmod 4$. If $l=p$ thus K is a Pólya field if and only if we have either the item 3, or 4. When $l=pp'$, we get the item 9.
- When $(d_j,d_i)\equiv(1,2)\pmod 4$. When $l=p$, we have either the item 5, or 6. And when $l=pp'$, we obtain the item 10.
- Lastly, when $(d_i,d_j)\equiv(1,3)\pmod 4$, we get the item 7. □

Consider $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2})$, $d_1=lm_1$ and $d_2=lm_2$ such that $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$. Under the condition of the norm, we can have either $e_2\neq 4$ or $e_2=4$. In the following theorem we give the Pólya fields of K where $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}\in K$ and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3}\in K$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\in K$ (i. e., $E_K=\langle -1,\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2},\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3},\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3}\rangle$) such that $e_2\neq 4$. As we have $N\epsilon_1=N\epsilon_2=N\epsilon_3=1$, so l can be $\equiv 1\pmod 4$ or $\equiv 3\pmod 4$.

Theorem 4.4. *Let* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ *such that* $d_1 = lm_1$ *and* $d_2 = lm_2$ *are square-free integers with* $l > 1$ *and* $gcd(m_1, m_2) = 1$. *Let* $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$ *and* $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \in K$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3} \in K$ *such that* $e_2 \neq 4$. *Then,* K *is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$, *where* $l = p$,
2. $d_i = lq_1$, $d_j = lq_2$, *where* $l = q$,
3. $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$, *where* $l = p$,
4. $d_j = lq_1$, $d_i = 2l$, *with* $l = q$.

P r o o f. As we have $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$ and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \in K$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3} \in K$ such that $e_2 \neq 4$, so by Theorem 3.1 we have $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-3}$. Hence, K is a Pólya field if and only if $t = 3$. Therefore, when $(d_i, d_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, we know that $d_K = (lm_1m_2)^2$ and thus we get the items 1, 2. And when $(d_i, d_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, we have $d_K = (4lm_1m_2)^2$ and thus we get the items 3, 4. When $(d_i, d_j) \equiv (1,3)$ or $(3,3) \pmod 4$, $i \neq j = 1,2$ so $d_K = (4lm_1m_2)^2$ and since $t = 3$ we find that these cases can not occur. □

Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$, $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$. In the two following theorems, we give the Pólya fields of K such that $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ and $e_2 \neq 4$. We recall that since $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$, so l can be $\equiv 1 \pmod 4$ or $\equiv 3 \pmod 4$.

Theorem 4.5. *Let* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ *such that* $d_1 = lm_1$ *and* $d_2 = lm_2$ *are square-free integers with* $l > 1$ *and* $gcd(m_1, m_2) = 1$ *and put* $j \neq k \in \{1,2\}$. *Let* $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ *and* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3} \in K$ *or* $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$ *such that* $e_2 \neq 4$. *Then,* K *is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. $d_i = lp_1p_2$ *or* lq_1q_2 *and* $d_j = lp_3$,
2. $d_i = lp_1p_2$ *or* lq_1q_2 *and* $d_j = 2l$,
3. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2lp_2$ *or* $2lq$,
4. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lq_1$,
5. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lq_2$,
   where in the items above $l = p$,
6. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$,
7. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l$,
   where $l = pp'$.
8. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lpq_2$,
9. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lp_1$,
10. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = 2l$,
11. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = 2lp$ *or* $2lq_2$,
12. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$,
    such that $l = q$,
13. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2$,
14. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l$,
    where $l = qq'$,
15. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lq_2$,
16. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = 2l$,
    where $l = pq$.

P r o o f. According to the Theorem 3.1, we have when $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \in K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \in K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3} \in K$ or $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \in K$ such that $e_2 \neq 4$. Then, $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-4}$. Hence, K is a Pólya field if and only if $t = 4$.

We suppose that $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, then we have $d_K = (lm_1m_2)^2$. When $l = p$, then K is a Pólya field if and only if either $d_i = lp_1p_2$ or lq_1q_2 and $d_j = lp_3$. When $l = pp'$, then $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$. If $l = qq'$, so $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$.

When $(d_i, d_j) \equiv (1,1) \pmod 4$, $(m_i, m_j) \equiv (3,3) \pmod 4$. So, we get that $d_i = lq_1$, $d_j = lpq_2$ such that $l = q$. When $l = pq$, so we have $d_i = lq_1$, $d_j = lq_2$.

Assuming $(d_i, d_j) \equiv (1,2) \pmod 4$, then $d_K = (4lm_1m_2)^2$.

- When $l = p$ and $m_j = 2$, then $d_i = lp_1p_2$ or lq_1q_2, $d_j = 2l$. Now for $m_j = 2p_2, 2q_2$ so $d_i = lp_1$, $d_j = 2lp_2, 2lq$.
- We assume $l = pp'$, so $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$. When $l = qq'$, we get $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$. And when $l = pq$, we obtain $d_i = lq_1$, $d_j = 2l$.
- When $l = q$ and $m_j = 2$, then $d_i = lp_1q_1$, $d_j = 2l$. For $m_j = 2p, 2q_2$, so $d_i = lq_1$, $d_j = 2lp, 2lq_2$.

We suppose that $(d_i, d_j) \equiv (1,3) \pmod 4$, then $d_K = (4lm_1m_2)^2$. For $l = p$, then $d_i = lp_1$ $d_j = lq_1$. When $l = q$, so $d_i = lq_1$ $d_j = lp_1$.

When $(d_i, d_j) \equiv (3,3) \pmod 4$, $i \neq j \in \{1,2\}$ then $d_K = (4lm_1m_2)^2$. When $l = p$, thus $d_i = lq_1$ $d_j = lq_2$. If $l = q$, so $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$. As we have $e_2 \neq 4$, then (d_i, d_j) not congruent to $(2,3) \pmod 4$ for $i \neq j = 1,2$. $\square$

E x a m p l e 4.1. Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7\cdot 5}, \sqrt{7\cdot 11})$. We have $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$, and $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \in K$ and $e_2 \neq 4$ (se Example 3.1). We have $l = 7 \equiv 3 \pmod 4$ and $5 \equiv 1 \pmod 4$ and $11 \equiv 3 \pmod 4$. So by the item 9 of the theorem above, we get that K is a Pólya field.

Theorem 4.6. *Let $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2})$ such that $d_1 = lm_1$ and $d_2 = lm_2$ are square-free integers with $l > 1$ and $\gcd(m_1, m_2) = 1$ and put $j \neq k \in \{1,2\}$. Assuming $N\epsilon_1 = N\epsilon_2 = N\epsilon_3 = 1$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \notin K$, $\sqrt{\epsilon_2\epsilon_3} \notin K$, $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_3} \notin K$ and $\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \notin K$ such that $e_2 \neq 4$. Then, K is a Pólya field if and only if one of the following assertions is satisfied:*

1. $d_i = lp_1p_2$ *or* lq_1q_2 *and* $d_j = lp_3p_4$,
2. $d_i = lp_1p_2$ *or* lq_1q_2 *and* $d_j = lq_3q_4$,
3. $d_i = lp_1p_2p_3$ *or* $lq_1q_2p_1$ *and* $d_j = lp'_1$,
4. $d_i = lp_1p_2p_3$ *or* $lq_1q_2p_1$ *and* $d_j = 2l$,
5. $d_i = lp_1p_3$ *or* lq_1q_3 *and* $d_j = 2lp_2$,
6. $d_i = lp_1p_3$ *or* lq_1q_3 *and* $d_j = 2lq_2$,
7. $d_i = lp_3$ *and* $d_j = 2lp_1p_2, 2lp_1q_1, 2lq_1q_2$,
8. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = lq_2$,
9. $d_i = lq_1q_2$ *and* $d_j = lq_3$,
10. $d_i = lp_1p_2$ *and* $d_j = lq_1$,
11. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2q_1$,

    where in the items above we have $l = p$,
12. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = lp_2q_2$,
13. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lp_1p_2q_2, lq_2q_3q_4$,
14. $d_i = lp_1p_2$ *and* $d_j = lp_3$,
15. $d_i = lq_1q_2$ *and* $d_j = lp_1$,
16. $d_i = lq_1p_1$ *and* $d_j = lp_2$,

17. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lp_1p_2,\, lq_1q_2,$
18. $d_i = lp_1p_2q_1,\, lq_1q_2q_3$ *and* $d_j = 2l,$
19. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = 2lp_2,\, 2lq_2,$
20. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = 2lp_1p_2,\, 2lp_1q_2,\, 2lq_2q_3,$
where $l = q,$
21. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lq_2,$
22. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lq_1,$
23. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2p_3,\, lq_1q_2,$
24. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2lp_2,\, 2lq_1,$
25. $d_i = lp_1p_2,\, lq_1q_2$ *and* $d_j = 2l,$
where $l = pp',$
26. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2p_3,\, lq_1q_2,$
27. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2lp_2,\, 2lq_1,$
28. $d_i = lp_1p_2,\, lq_1q_2$ *and* $d_j = 2l,$
29. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lq_2,$
30. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lq_1,$
where $l = qq',$
31. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = lq_2,$
32. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2,$
33. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lp_1,$
34. $d_i = lp_1q_1$ *and* $d_j = 2l,$
35. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = 2lq_2,\, 2lp_1,$
such that $l = pq,$
36. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2,$
37. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l,$
such that $l = pp'p'_1,$
38. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = lp_2,$
39. $d_i = lp_1$ *and* $d_j = 2l,$
where $l = qq'p,$
40. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = lq_2,$
41. $d_i = lq_1$ *and* $d_j = 2l,$
where $l = pp'q$ *or* $qq'q'_1.$

P r o o f. According to the Theorem 3.1, we have $\mathcal{P}_O(K) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{t-5}$. Thence, K is a Pólya field if and only if $t = 5$.

We suppose $(d_i, d_j) \equiv (m_i, m_j) \equiv (1, 1) \pmod 4$.

- When $l = p$. Hence, we have either $d_i = lp_1p_2,\, lq_1q_2,$ $d_j = lp_3p_4$ or $d_i = lp_1p_2,\, lq_1q_2,$ $d_j = lq_3q_4$ or $d_i = lp_1p_2p_3,\, lq_1q_2p_1,$ $d_j = lp'_1$.
- If $l = pp'$, then $d_i = lp_1,$ $d_j = lp_2p_3,\, lq_1q_2$.
- When $l = qq'$, so $d_i = lp_1,$ $d_j = lp_2p_3,\, lq_1q_2$.
- If $l = pp'p'_1$, therefore $d_i = lp_1,$ $d_j = lp_2$.
- Now for $l = qq'p$, thus $d_i = lp_1,$ $d_j = lp_2$.

When $(d_i, d_j) \equiv (1, 1) \pmod 4$, $(m_i, m_j) \equiv (3, 3) \pmod 4$.

• When $l = q$, so we get either $d_i = lp_1q_1$, $d_j = lp_2q_2$ or $d_i = lq_1$, $d_j = lp_1p_2q_2, lq_2q_3q_4$. If $l = pq$, then we have $d_i = lp_1q_1$, $d_j = lq_2$. If $l = pp'q$ or $qq'q'_1$, we get that $d_i = lq_1$, $d_j = lq_2$.

Assuming $(d_i, d_j) \equiv (1, 2) \pmod 4$, then $d_K = (4lm_1m_2)^2$.

• When $l = p$ and $m_j = 2$. So, K is a Pólya field if and only if $d_i = lp_1p_2p_3, lq_1q_2p_1$, $d_j = 2l$. For $m_j = 2p_2, 2q_2$ we get either $d_i = lp_1p_3, lq_1q_3$, $d_j = 2lp_2$ or $d_i = lp_1p_3, lq_1q_3$, $d_j = 2lq_2$. For $m_j = 2p_1p_2, 2p_1q_1, 2q_1q_2$, we obtain $d_i = lp_3$, $d_j = 2lp_1p_2, 2lp_1q_1, 2lq_1q_2$.

• We assume $l = pp'$, then we get that either $d_i = lp_1$, $d_j = 2lp_2, 2lq_1$ or $d_i = lp_1p_2, lq_1q_2$, $d_j = 2l$.

• When $l = qq'$, then we get either $d_i = lp_1$, $d_j = 2lp_2, 2lq_1$ or $d_i = lp_1p_2, lq_1q_2$, $d_j = 2l$.

• If $l = pp'p'_1$, then $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$.

• When $l = qq'p$, thence, $d_i = lp_1$, $d_j = 2l$.

When $l = q$ and $m_j = 2$, so $d_i = lp_1p_2q_1, lq_1q_2q_3$, $d_j = 2l$. For $m_j = 2p_2, 2q_2$, we get that $d_i = lp_1q_1$ and $d_j = 2lp_2, 2lq_2$. For $m_j = 2p_1p_2, 2p_1q_1, 2q_1q_2$ so $d_i = lq_1$ and $d_j = 2lp_1p_2, 2lp_1q_2, 2lq_2q_3$.

• We assume $l = pq$, then we get that either $d_i = lp_1q_1$, $d_j = 2l$ or $d_i = lq_1$, $d_j = 2lq_2, 2lp_1$.

• When $l = qpp'$ or $qq'q'_1$, so $d_i = lq_1$, $d_j = 2l$.

We suppose that $(d_i, d_j) \equiv (3, 3) \pmod 4$, then $d_K = (4lm_1m_2)^2$.

• When $l = p$, thence $d_i = lp_1q_1$, $d_j = lq_2$. When $l = pp'$, we get $d_i = lq_1$, $d_j = lq_2$.

• For $l = q$, so $d_i = lp_1p_2$, $d_j = lp_3$ or $d_i = lq_1q_2$, $d_j = lp_1$. If $l = qq'$, then we get $d_i = lq_1$, $d_j = lq_2$.

• When $l = pq$, we get that $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2$.

We assume that $(d_i, d_j) \equiv (1, 3) \pmod 4$. So, $d_K = (4lm_1m_2)^2$.

• We put $l = p$, thus we have either $d_i = lq_1q_2$, $d_j = lq_3$ or $d_i = lp_1p_2$, $d_j = lq_1$ or $d_i = lp_1$, $d_j = lp_2q_1$. When $l = pp'$, we get $d_i = lp_1$, $d_j = lq_1$.

• We let $l = q$, so $d_i = lq_1p_1$, $d_j = lp_2$ or $d_i = lq_1$, $d_j = lp_1p_2, lq_1q_2$. If $l = qq'$, then we get $d_i = lp_1$, $d_j = lq_1$.

• When $l = pq$, then $d_i = lq_1$, $d_j = lp_1$. □

References

[1] G. Pólya, "Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpren", *Journal Für die Reine und Angewandte Mathematik*, **149** (1919), 97–116.

[2] A. Ostrowski, "Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpren", *Journal Für die Reine und Angewandte Mathematik*, **149** (1919), 117–124.

[3] H. Zantema, "Integer valued polynomials over a number field", *Manuscripta Mathematica*, **40**:1–2 (1982), 155–203.

[4] P. J. Cahen, J. L. Chabert, *Integer-Valued Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, **48**, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[5] A. Leriche, "Pólya fields, pólya groups and pólya extensions: A question of capitulation", *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **23** (2011), 235–249.

[6] B. Heidaryan, A. Rajaei, "Some non-Pólya biquadratic fields with low ramification", *Revista Matematica Iberoamericana*, **33**:3 (2017), 1037–1044.

[7] Ch. Wend-Waoga Tougma, "Some questions on biquadratic Pólya fields", *Journal of Number Theory*, **229** (2021), 386–398.

[8] A. Maarefparvar, "Pólya group in some real biquadratic fields", *Journal of Number Theory*, **228** (2021), 1–7.

[9] S. El Madrari, "On the Pólya fields of some real biquadratic fields", *Matematicki Vesnik*, http://www.vesnik.math.rs/inpress/mv2023_069.pdf.

[10] C. Bennett Setzer, "Units over totally real $C_2 \times C_2$ fields", *Journal of Number Theory*, **12**:2 (1980), 160–175.

[11] T. Kubota, "Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper", *Nagoya Mathematical Journal*, **10** (1956), 65–85.

[12] K. S. Williams, "Integers of biquadratic fields", *Canadian Mathematical Bulletin*, **13**:4 (1970), 519–526.

[13] E. Haught, *Bicyclic Biquadratic Number Fields*, Masters Thesis, VPI&SU, Blacksburg, 1972.

Information about the author

Said El Madrari, PhD, Faculty of Sciences and Techniques, Moulay Ismail University, Errachidia, Morocco. E-mail: saidelmadrari@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1632-8441

Received 17.01.2025
Reviewed 19.04.2025
Accepted for press 23.04.2025

Информация об авторе

Эль Мадрари Саид, кандидат физико-математических наук, факультет естественных наук и технологий, университет Мулая Исмаила, г. Эр-Рашидия, Марокко. E-mail: saidelmadrari@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1632-8441

Поступила в редакцию 17.01.2025 г.
Поступила после рецензирования 19.04.2025 г.
Принята к публикации 23.04.2025 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

УДК 517.952

О структуре ядра задачи Шварца в эллипсе в общем случае

Владимир Геннадьевич НИКОЛАЕВ

ФГБОУ ВО «Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого»

173003, Российская Федерация, г. Великий Новгород, ул. Большая Санкт-Петербургская, 41

Аннотация. В статье вычислена структура ядра и коядра задачи Шварца для J-аналитических функций, заданных в эллипсе D с границей Γ. Задача Шварца состоит в нахождении J-аналитической в эллипсе D функции по известному значению ее реальной части на Γ. В параграфах 1 и 2 приведена постановка задачи, а также изучено ее решение для специальной правой части. В параграфе 3 изложены необходимые сведения из одной работы А. П. Солдатова. В параграфе 4 построено решение союзной задачи Шварца для специальной правой части. На основании этих результатов в параграфе 5 вычислены ядро и коядро задачи Шварца. Схема их вычисления кратко описана в начале пятого параграфа. Затем в теоремах 5.1–5.6 данная схема реализована. При этом использованы введенные автором понятия теоретической и алгоритмической разрешимости специальной задачи Шварца. Также использован метод математической индукции. Показано, что ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе состоят только из вектор-полиномов. Описана структура ядра и коядра в терминах рангов некоторых вещественных матриц, зависящих от матрицы J и эллипса Γ. В конце статьи приведен пример вычисления ядра задачи Шварца в эллипсе для двумерной матрицы J с кратным собственным числом.

Ключевые слова: вектор-полином, задача Шварца, матрица, эллипс, ядро, коядро, алгоритмическая разрешимость, теоретическая разрешимость

Благодарности: Исследование выполнено в ходе реализации НИР «Математическое моделирование природных процессов», выполняемой в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 124111600020-2).

Для цитирования: *Николаев В.Г.* О структуре ядра задачи Шварца в эллипсе в общем случае // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 144–159. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

On the structure of the kernel of the Schwarz problem in an ellipse in the general case

Vladimir G. NIKOLAEV

Novgorod State University

41 Bolshaya Sankt-Peterburgskaya St., Velikiy Novgorod 173003, Russian Federation

Abstract. The paper calculates the structure of the kernel and co-kernel of the Schwartz problem for J-analytic functions defined in the ellipse D with a boundary Γ. The Schwartz problem consists in finding a J-analytic function in the ellipse D by the known value of its real part on Γ. In paragraphs 1 and 2 the problem is formulated and its solution for a special right part is studied. Paragraph 3 contains the necessary information from one paper by A. P. Soldatov. Paragraph 4 constructs the solution of the Schwarz union problem for the special right-hand side. On the basis of these results, paragraph 5 calculates the kernel and the co-kernel of the Schwartz problem. The model of their calculation is briefly described at the beginning of the fifth paragraph. Then in the theorems 5.1–5.6 this scheme is implemented. Here the notions of theoretical and algorithmic solvability of the special Schwarz problem introduced by the author are used. The method of mathematical induction is used as well. It is shown that the kernel and co-kernel of the Schwarz problem in an ellipse consist only of vector polynomials. The paper describes the structure of the kernel and co-kernel in terms of the ranks of some real matrices depending on the matrix J and the ellipse Γ. The paper concludes with an example of calculating the kernel of the Schwarz problem in an ellipse for a two-dimensional matrix J with multiple eigenvalue.

Keywords: vector polynomial, Schwartz problem, matrix, ellipse, kernel, co-kernel, algorithmic solvability, theoretical solvability

Acknowledgements: The study was carried out in the course of implementation of the research work "Mathematical modeling of natural processes", carried out within the framework of the state assignment in the field of scientific activity (project no. 124111600020-2).

Mathematics Subject Classification: 35F15.

For citation: Nikolaev V.G. On the structure of the kernel of the Schwarz problem in an ellipse in the general case. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 144–159. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-144-159

Введение

Исследование краевых задач для различных классов аналитических функций имеет давнюю историю [1, 2] и в последние годы развивалось в нескольких направлениях как теоретического характера [3, 4], так и с точки зрения их приложений к задачам общей теории краевых задач для (псевдо)дифференциальных уравнений [5, 6].

Задача Римана–Гильберта [1, с. 264], [2, с. 140] о нахождении аналитической в области D функции по заданному на границе Γ этой области значению ее вещественной части относится к основным краевым задачам. Одним из возможных ее обобщений является задача Шварца для аналитических по Дуглису функций, специальный случай которой рассматривается в настоящей работе.

1. Основные понятия

Определение 1.1 (см. [3]). Пусть матрица $J \in \mathbb{C}^{\ell\times\ell}$ не имеет вещественных собственных чисел. Аналитической по Дуглису (Avron Douglis), или J-аналитической с матрицей J называется комплексная ℓ-вектор-функция $\phi = \phi(z) \in C^1(D)$, удовлетворяющая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ уравнению

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad z = (x, y) \in D. \tag{1.1}$$

Как нетрудно видеть, равенство (1.1) есть комплексная однородная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В [3] показано, что система (1.1) является эллиптической. Очевидным примером функции, J-аналитической с данной матрицей J, будет следующий вектор-полином степени n:

$$\phi_n(z) = (x+Jy)^n c_n + (x+Jy)^{n-1}c_{n-1} + \ldots + (x+Jy)c_1 + c_0, \quad c_k \in \mathbb{C}^\ell, \ \ k = n, \ldots, 1, 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим для системы (1.1) следующую граничную задачу Шварца [4, 7, 8].

Пусть конечная область $D \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладким контуром Γ. Требуется найти J-аналитическую с матрицей J в области D функцию $\phi(z) \in C(\overline{D})$, для которой выполнено краевое условие

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \omega \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где граничная ℓ-вектор-функция $\psi(\omega) = \big(\psi_1(\omega), \ldots, \psi_\ell(\omega)\big) \in C(\Gamma)$ задана.

Определение 1.2 (см. [4]). Задачу Шварца (1.3) будем называть задачей S.

Если $\psi(\omega) \equiv 0$, то будем говорить об однородной задаче Шварца:

$$\operatorname{Re}\phi(z)\big|_\Gamma = 0. \tag{1.4}$$

Очевидными решениями задачи (1.4) служат постоянные функции $\phi(z) \equiv i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$, которые назовем тривиальными решениями.

Определение 1.3. Ядром $\operatorname{Ker} S$ задачи Шварца S называется линейное пространство решений однородной задачи (1.4).

Но существуют так же и непостоянные решения однородной задачи (1.4). Приведем один пример такого решения, построенный автором.

П р и м е р 1.1. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 7i & 1 \\ 16 & -i \end{pmatrix}, \quad \phi_2(z) = \begin{pmatrix} (x^2+9y^2)\,i \\ 7x^2+9y^2-1+18xyi \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Матрица J в (1.5) имеет кратное собственное число $\lambda = 3i$. Вектор-полином второй степени $\phi_2(z)$ есть функция, J-аналитическая с данной матрицей J — согласно (1.1). При этом $\operatorname{Re}\phi_2(z)\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ 7x^2+9y^2=1$.

2. Задача Шварца в специальном виде

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем называть эллипсом как кривую Γ на плоскости, так и область D, ограниченную Γ, — в зависимости от контекста.

Задачу (1.3) будем изучать в эллипсе $\Gamma = \partial D$ с центром в начале координат. Он определяется тремя параметрами $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ и может быть задан следующей параметризацией:

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1\cos\alpha\cdot\cos t - r_2\sin\alpha\cdot\sin t = \\ &= \frac{(r_1\cos\alpha + ir_2\sin\alpha)}{2}e^{it} + \frac{(r_1\cos\alpha - ir_2\sin\alpha)}{2}e^{-it}, \\ y(t) &= r_1\sin\alpha\cdot\cos t + r_2\cos\alpha\cdot\sin t = \\ &= \frac{(r_1\sin\alpha - ir_2\cos\alpha)}{2}e^{it} + \frac{(r_1\sin\alpha + ir_2\cos\alpha)}{2}e^{-it}, \quad t\in[-\pi,\pi). \end{aligned} \tag{2.1}$$

В (2.1) использована формула Эйлера $e^{it} = \cos t + i\sin t$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Всюду ниже через $\phi_n = \phi_n(z)$ будем обозначать J-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Также с учетом (2.1) обозначим $\omega(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

Рассмотрим задачу Шварца (1.3) в следующем специальном виде:

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_\Gamma = \sum_{k=1}^{n}\psi_k\big(\omega(t)\big) = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t) = \psi(t), \tag{2.2}$$

$$\psi_k(t) = \psi\big(\omega(t)\big) = \big(d_{k1}\cos kt + d'_{k1}\sin kt, \dots, d_{k\ell}\cos kt + d'_{k\ell}\sin kt\big)^{\mathrm T}, \tag{2.3}$$

где $d_{kl}, d'_{kl} \in \mathbb{R}$. Решение задачи (2.2) будем искать в виде вектор-полинома (1.2), исходя из следующего соотношения:

$$\operatorname{Re}\phi_n(z)\big|_\Gamma = \operatorname{Re}\Big[(x+Jy)^n c_n + \ldots + (x+Jy)c_1 + c_0\big|_{x=x(t),\,y=y(t)}\Big] = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t). \tag{2.4}$$

Функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ в (2.4) есть функции переменных e^{it}, e^{-it} в (2.1).

В равенстве (2.4) неизвестными являются комплексные вектор-константы $c_k \in \mathbb{C}^\ell$, $k = n, \dots, 1, 0$. Для их определения с учетом (2.3) имеем следующие *вещественные* алгебраические $2\ell\times 2\ell$-системы:

$$\begin{aligned} &\widehat{Q}_n\widehat{c}_n = \alpha_n, \quad \widehat{Q}_{n-1}\widehat{c}_{n-1} = \alpha_{n-1}, \quad \ldots, \quad \widehat{Q}_1\widehat{c}_1 = \alpha_1, \quad \operatorname{Re}[c_0 + c^*] = 0, \ c_0, c^* \in \mathbb{C}^\ell, \\ &\alpha_k = (d_{k1}, d'_{k1}, \dots, d_{k\ell}, d'_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\ell}, \quad k = n, n-1, \dots 1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В (2.5) через $\widehat{Q}_k$ обозначены вещественные $2\ell\times 2\ell$-матрицы, $k = n, n-1, \dots 1$. Кроме того, $\widehat{c}_k = (\operatorname{Re} c_k, \operatorname{Im} c_k)^{\mathrm T} \in \mathbb{R}^{2\ell}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^{2\ell}$. При этом правая часть α_k каждой последующей системы в (2.5) зависит от решений предыдущих систем.

З а м е ч а н и е 2.1. Матрицы $\widehat{Q}_k$ в (2.5) зависят от коэффициентов матрицы J, а также от параметров α, r_1, r_2 эллипса Γ. Для диагонализируемых матриц J соответствующие им матрицы $\widehat{Q}_k$ выписаны в явном виде в [7]. Однако в общем случае структура матриц $\widehat{Q}_k$ очень сложна и не будет использована.

Таким образом, с учетом равносильности задач (2.4) и (2.2) и с учетом свойств решений систем алгебраических уравнений справедливы следующие два утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть в* (2.5) $\det \widehat{Q}_k \neq 0,\ \ k = n, n-1, \dots 1.$ *Тогда задача* (2.2) *имеет решение в виде вектор-полинома* $\phi_n(z)$ (1.2) *для любой правой части* $\psi(t)$.

Теорема 2.2. *Пусть в* (2.5) $\det \widehat{Q}_m = 0$, *но при этом* $\det \widehat{Q}_k \neq 0,\ \ k < m$. *Тогда однородная задача* (2.2) $\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = 0$ *имеет* $2\ell - \operatorname{rang} \widehat{Q}_m$ *линейно независимых решений в виде вектор-полиномов* $\phi_m(z)$ (1.2) *степени* m.

З а м е ч а н и е 2.2. Тот случай, когда все определители $\det \widehat{Q}_k$ в (2.5) отличны от нуля, не требует дополнительного изучения. Однако если $\det \widehat{Q}_m = 0$ при некотором $m < n$, то совместность всех систем в (2.5) неочевидна. Именно такие нетривиальные ситуации рассмотрены в параграфе 5 при вычислении ядра задачи Шварца.

3. Некоторые сведения из работы [4]

В данном параграфе приведены выдержки из статьи А. П. Солдатова [4], необходимые для дальнейших построений.

Пусть параметризация $\omega = \omega(t)$ эллипса $\Gamma = \partial D$ такова, что область D остается слева при $t \in [-\pi, \pi)$. Заметим, что параметризация (2.1) обладает этим свойством. Такой эллипс Γ назовем положительно ориентированным и обозначим Γ^+. Пусть

$$e(\omega) = e_1(\omega) + ie_2(\omega), \quad \omega \in \Gamma \tag{3.1}$$

— единичный касательный вектор к эллипсу Γ в точке ω, направленный согласно данной ориентации. В (3.1) через $e_1(\omega)$, $e_2(\omega)$ обозначены вещественные скалярные функции.

Пусть E — единичная $\ell \times \ell$-матрица, J^{T} — транспонированная матрица J. В той же области D вместе с J-аналитическими функциями (1.1) рассмотрим J^{T}-аналитические ℓ-вектор-функции $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(z)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial y} - J^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial x} = 0, \quad z = (x, y) \in D. \tag{3.2}$$

С помощью скалярной функции (3.1) образуем $\ell \times \ell$-матрицу-функцию

$$e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega) = e_1(\omega) \cdot E + e_2(\omega) \cdot J^{\mathrm{T}}, \quad \omega \in \Gamma, \tag{3.3}$$

которая зависит от параметра ω.

С задачей S свяжем *союзную задачу* $\widetilde{S}$. Она состоит в нахождении такой J^{T}-аналитической функции $\widetilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ (3.2), для которой выполнено граничное условие

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(\omega)\big|_\Gamma = \psi(\omega), \quad \psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma). \tag{3.4}$$

Соответственно, при $\psi(\omega) \equiv 0$ будем говорить об *однородной союзной задаче* $\widetilde{S}$:

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(\omega)\big|_\Gamma = 0. \tag{3.5}$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Коядром $\operatorname{Ker}\widetilde{S}$ задачи Шварца S (или ядром задачи $\widetilde{S}$) называется линейное пространство решений однородной союзной задачи $\widetilde{S}$ (3.5).

Для непрерывных ℓ-вектор-функций $f(\omega) = (f_1, \ldots, f_\ell)$, $g(\omega) = (g_1, \ldots, g_\ell)$, заданных на контуре Γ, определим билинейную форму $\langle f, g\rangle$ по правилу

$$\langle f, g\rangle = \oint_{\Gamma^+} f(\omega)\cdot g(\omega)\cdot |d\omega| = \oint_{\Gamma^+} (f_1\cdot g_1 + \ldots + f_\ell \cdot g_\ell)\cdot |d\omega|, \tag{3.6}$$

где $|d\omega|$ означает элемент длины дуги кривой Γ. С учетом обозначений (3.6) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [4]). *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Пусть $\Gamma = \partial D$ — эллипс. Справедливы следующие утверждения.*

1) *Задачи $S, \widetilde{S}$ фредгольмово разрешимы в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ (т. е. ядро и коядро конечномерны).*

2) *Неоднородная задача S (1.3) для данной функции $\psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\bigl\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}(\omega)\bigr\rangle = 0, \quad \omega\in\Gamma,$$

где $\widetilde{\phi}(z)$ — произвольное решение однородной союзной задачи $\widetilde{S}$ (3.5).

3) *Утверждение пункта 2) справедливо и для союзной задачи $\widetilde{S}$. Более точно, неоднородная союзная задача $\widetilde{S}$ (3.4) для данной функции $\psi(\omega) \in H^\sigma(\Gamma)$ разрешима в классах Гёльдера $\widetilde{\phi}(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности*

$$\bigl\langle \psi(\omega), \operatorname{Im} \phi(\omega)\bigr\rangle = 0, \quad \omega\in\Gamma, \tag{3.7}$$

где $\phi(z)$ — произвольное решение однородной задачи S (1.4).

4) *Индекс $\operatorname{Ind} S$ задачи Шварца S равен $\operatorname{Ind} S = \dim\operatorname{Ker} S - \dim\operatorname{Ker}\widetilde{S} = \ell$.*

4. Союзная задача Шварца в специальном виде

Выпишем с учетом (2.1), (3.1) и (3.3) следующие функции:

$$\begin{gathered} e_{J^{\mathrm{T}}}(t) = e_{J^{\mathrm{T}}}(\omega(t)) = e_1(t)\cdot E + e_2(t)\cdot J^{\mathrm{T}} = \frac{1}{p(t)}\left[\frac{dx(t)}{dt}\cdot E + \frac{dy(t)}{dt}\cdot J^{\mathrm{T}}\right], \\ p(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{r_1^2\sin^2 t + r_2^2\cos^2 t} \neq 0, \quad |d\omega| = |d\omega(t)| = p(t)dt. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Функцию $p(t)$ в (4.1) будем называть весом (или весовой функцией). Определим с учетом обозначений (4.1) следующую матрицу-функцию, которая более удобна для изучения:

$$e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) = p(t)\cdot e_{J^{\mathrm{T}}}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\cdot E + \frac{dy(t)}{dt}\cdot J^{\mathrm{T}}. \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Несложно показать, что $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$ при всех $t\in[-\pi, \pi)$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Обозначим через $\widetilde{\phi}_n(z)$ J^{T}-аналитический ℓ-вектор-полином степени n. Обозначим также $\widetilde{\phi}_0 \equiv c$, $c\in\mathbb{C}^\ell$.

Определим *специальную союзную* задачу Шварца $\widetilde{S}^*$. Именно, в отличие от задачи $\widetilde{S}$ (3.4), вместо матрицы-функции $e_{J^{\mathrm{T}}}(t)$ (4.1) возьмем матрицу-функцию $e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t)$ (4.2):

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n}\psi_k\big(\omega(t)\big) = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t) = \psi(t),\\ \psi_k(t) = \big(d_{k1}\cos kt + d'_{k1}\sin kt, \ldots, d_{k\ell}\cos kt + d'_{k\ell}\sin kt\big)^{\mathrm{T}},\end{gathered} \tag{4.3}$$

где $d_{kl}, d'_{kl} \in \mathbb{R}$. Задачу (4.3) будем решать аналогично задаче (2.2). Именно, ℓ-вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n-1}(z)$ степени $(n-1)$

$$\widetilde{\phi}_{n-1}(z) = \big(x + J^{\mathrm{T}}y\big)^{n-1}c_{n-1} + \ldots + \big(x + J^{\mathrm{T}}y\big)c_1 + c_0, \quad c_k \in \mathbb{C}^{\ell}, \quad k = n-1, \ldots, 0, \tag{4.4}$$

будет согласно (3.2) J^{T}-аналитической функцией. Решение задачи (4.3) ищем в виде вектор-полинома (4.4), исходя из равенства

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_{\Gamma}\\ &\qquad = \operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\Big[\big(x + J^{\mathrm{T}}y\big)^{n-1}c_{n-1} + \ldots + \big(x + J^{\mathrm{T}}y\big)c_1 + c_0\big|_{x=x(t),\, y=y(t)}\Big] = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t).\end{aligned} \tag{4.5}$$

В (4.5) через $x = x(t)$, $y = y(t)$ обозначены функции переменных e^{it}, e^{-it} из (2.1).

Для определения неизвестных вектор-переменных $c_k \in \mathbb{C}^{\ell}$ в (4.5) имеем с учетом (4.3) следующие *вещественные* алгебраические $2\ell \times 2\ell$-системы:

$$\begin{gathered}\widetilde{Q}_n\widehat{c}_{n-1} = \alpha_n, \quad \widetilde{Q}_{n-1}\widehat{c}_{n-2} = \alpha_{n-1}, \quad \ldots, \quad \widetilde{Q}_1\widehat{c}_0 = \alpha_1,\\ \alpha_k = (d_{k1}, d'_{k1}, \ldots, d_{k\ell}, d'_{k\ell}) \in \mathbb{R}^{2\ell}, \quad k = n, n-1, \ldots, 1.\end{gathered} \tag{4.6}$$

В (4.6) через $\widetilde{Q}_k$ обозначены вещественные $2\ell \times 2\ell$-матрицы, $k = n, n-1, \ldots 1$. Как и выше, здесь $\widehat{c}_k = (\operatorname{Re} c_k, \operatorname{Im} c_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2\ell}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}^{2\ell}$. При этом правая часть α_k каждой последующей системы в (4.6) зависит от решений предыдущих систем. В итоге схема аналогична схеме параграфа 2. Но есть два отличия от задачи (2.4).

Во-первых, индексы у матрицы $\widetilde{Q}_k$, вектора α_k и вектора $\widehat{c}_{k-1}$ разные. Это связано с тем, матрица $\widetilde{Q}_k$ и вектор α_k соответствуют коэффициентам перед $\cos kt, \sin kt$ при составлении систем (4.6). При этом индекс вектор-коэффициента $\widehat{c}_{k-1}$ соответствует (4.4).

Второе отличие от задачи (2.4) состоит в *проблеме завершения алгоритма*. Действительно, найдем переменную $\widehat{c}_{n-1}$ из первого равенства в (4.6). После этого предста́вим $\widehat{c}_{n-1} \in \mathbb{R}^{2\ell}$ в виде $c_{n-1} \in \mathbb{C}^{\ell}$, и подставим c_{n-1} в (4.5). Тогда получим задачу (4.5) с правой частью $\psi_{n-1}(t) + \ldots$, откуда находим переменную $c_{n-2} \in \mathbb{C}^{\ell}$. Продолжая этот процесс, находим все переменные c_k в (4.5). Но в процессе такого решения в левой части (4.5) может возникать «лишняя» константа $c^* \in \mathbb{C}^{\ell}$, которую нельзя приравнять к какой-либо переменной c_k. При решении систем (2.5) такой проблемы не возникает.

Таким образом, для сходимости алгоритма нужно показать, что $\operatorname{Re} c^* = \alpha' = 0$. «От противного»: пусть $\alpha' \neq 0$ и пусть все алгебраические системы в (4.6) совместны. Тогда согласно описанному выше алгоритму и (4.5) разрешима задача

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_{\Gamma} = \sum_{k=1}^{n}\psi_k(t) + \alpha' = \psi(t) + \alpha', \quad \alpha' \in \mathbb{R}^{\ell}. \tag{4.7}$$

Деля обе части (4.7) на вещественную функцию $p(t) \neq 0$, получаем с учетом (4.2) разрешимость задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1}(z)\big|_{\Gamma} = \frac{\psi(t) + \alpha'}{p(t)}, \quad \alpha' \in \mathbb{R}^{\ell}. \tag{4.8}$$

Пусть $\phi(\omega) = i\alpha''$, $\alpha'' \in \mathbb{R}^{\ell}$ — тривиальное решение однородной задачи Шварца (1.4), причем скалярное произведение $(\alpha', \alpha'') \neq 0$. Тогда в силу (3.7), (3.6) и (4.1) имеем:

$$\Big\langle \frac{\psi(t) + \alpha'}{p(t)}, \operatorname{Im} i\alpha'' \Big\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{p(t)} \big(\psi(t) + \alpha'\big) \cdot \alpha'' \cdot p(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha' \cdot \alpha'' dt = 2\pi(\alpha', \alpha'') \neq 0. \tag{4.9}$$

Но равенство (4.9) в силу пункта 3) теоремы 3.1 противоречит разрешимости задачи (4.8). Полученное противоречие означает, что вектор-константа $\alpha' = \operatorname{Re} c^* = 0$. Таким образом, описанный выше алгоритм решения задачи (4.5) реализуем.

В силу эквивалентности задач (4.5) и (4.3) справедлива

Теорема 4.1. *Пусть в* (4.6) $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k = n-1, \dots, 1$. *Тогда задача* (4.3) *имеет решение в виде вектор-полинома* $\widetilde{\phi}_{n-1}(z)$ (4.4) *для любой правой части* $\psi(t)$.

Определение 4.2. Ядром $\operatorname{Ker} \widetilde{S}^*$ задачи $\widetilde{S}^*$ назовем линейное пространство решений однородной специальной союзной задачи $\widetilde{S}^*$ (4.3).

Лемма 4.1. *Справедливо тождество*

$$\operatorname{Ker} \widetilde{S} \equiv \operatorname{Ker} \widetilde{S}^*. \tag{4.10}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\phi}(z)$ есть решение однородной союзной задачи $\widetilde{S}$, т. е. $\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = 0$. Функция $p = p(t) \neq 0$ в (4.1) — вещественная. Поэтому в силу (4.2) имеем:

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{p}\, e_{J^{\mathrm{T}}}\Big) \widetilde{\phi}(z)\big|_{\Gamma} = \frac{1}{p} \cdot \Big(\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}(z)\Big)\Big|_{\Gamma} = 0.$$

Следовательно, та же самая функция $\widetilde{\phi}(z)$ есть решение однородной специальной союзной задачи $\widetilde{S}^*$. В обратную сторону доказательство аналогичное. □

Таким образом, с учетом (4.10) и свойств решений алгебраических систем справедлива

Теорема 4.2. *Пусть в* (4.6) $\det \widetilde{Q}_m = 0$, *но при этом* $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k < m$. *Тогда однородные союзные задачи* $\widetilde{S}^*$ (4.3) *и* $\widetilde{S}$ (3.5) *имеют* $2\ell - \operatorname{rang} \widetilde{Q}_m$ *линейно независимых решений в виде вектор-полиномов* $\widetilde{\phi}_{m-1}(z)$ (4.4) *степени* $(m-1)$.

5. Вычисление ядра задачи Шварца в эллипсе

Всюду в этом параграфе имеем в виду лемму 4.1 и формулу (4.10), т. е. отождествляем однородные задачи $\widetilde{S}$ и $\widetilde{S}^*$. Параграф построен по приведенной ниже схеме:

теоремы 2.1, 2.2, 4.1, 4.2, 3.1 $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\text{леммы 5.1, 5.2} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \text{теорема 5.1}}_{\text{база индукции}}$;

индукционное предположение (5.7), теорема 3.1 $\Longrightarrow$ теоремы 5.2, 5.3;

индукционное предположение (5.7), теоремы 5.2, 5.3 $\overset{(3)}{\Longrightarrow}$ теорема 5.4 (инд. переход);

утверждение (5.7), теоремы 3.1, 5.2, 5.3 $\Longrightarrow$ теорема 5.5;

утверждение (5.7), теоремы 5.5, 4.2, лемма 5.1 $\Longrightarrow$ теорема 5.6.

Заметим, что в импликации (3) теоремы 5.2, 5.3 играют ту же роль, что и теоремы 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 в импликациях (1) и (2).

Пусть $f(t) = (f_1, \dots, f_\ell)$, $g(t) = (g_1, \dots, g_\ell)$ — непрерывные вещественные ℓ-вектор-функции, $t \in [-\pi, \pi)$. Определим их скалярное произведение (f, g) по правилу

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} (f_1 g_1 + \ldots + f_\ell g_\ell) dt. \tag{5.1}$$

Также приведем определения, необходимые для дальнейших построений. Пусть $p = p(t)$ — весовая функция (4.1).

Определение 5.1. Пусть вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n-1}(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$. С учетом (3.6), (4.1), (4.2) и (5.1) обозначим $\psi_n \not\vdash \widetilde{\phi}_{n-1}$ (т. е. ψ_n «неортогонален» $\widetilde{\phi}_{n-1}$), если билинейная форма

$$\langle \psi_n, \operatorname{Im} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1} \rangle = \big(\psi_n, \operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n-1}\big) \neq 0. \tag{5.2}$$

Определение 5.2. Пусть вектор-полином $\phi_n(z) \in \operatorname{Ker} S$. Обозначим $\psi_n \not\vdash \phi_n$, если билинейная форма

$$\Big\langle \frac{\psi_n}{p}, \operatorname{Im} \phi_n \Big\rangle = \big(\psi_n, \operatorname{Im} \phi_n\big) \neq 0. \tag{5.3}$$

Для дальнейших построений приведем еще два определения.

Определение 5.3. Задачу Шварца S (2.2) или $\widetilde{S}^*$ (4.3) назовем разрешимой *алгоритмически*, если ее решение можно построить по алгоритму, описанному в параграфах 2 или 4 соответственно.

Определение 5.4. Задачу Шварца S (2.2) или $\widetilde{S}$ (3.4) назовем разрешимой *теоретически*, если правая часть $\psi(\omega(t))$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.

На формальном различии между теоретической и алгоритмической разрешимостью и основано приведенное ниже вычисление ядра задачи Шварца. Справедлива

Лемма 5.1. *Следующие два условия равносильны:*

$$1) \det \widehat{Q}_{n_1} = 0,\ \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad k < n_1; \quad 2) \det \widetilde{Q}_{n_1} = 0,\ \det \widetilde{Q}_k \neq 0, \quad k < n_1. \tag{5.4}$$

Доказательство. «От противного»: пусть выполнено 1), и пусть $\det \widetilde{Q}_m = 0$, $m < n_1$. При этом m — минимальное такое число. Тогда в силу теоремы 4.2 существует полином $\widetilde{\phi}_{m-1}(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$. Так как $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$, то $\operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \ldots$. Тогда для некоторой функции ψ'_m имеем: $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. т. е. с учетом (5.2) $\psi'_m \not\vdash \widetilde{\phi}_{m-1}$. Поэтому в силу пункта 2) теоремы 3.1 и формулы (5.2) задача $\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi'_m$ неразрешима теоретически. Но в силу условия 1), (5.4) и теоремы 2.1 она разрешима алгоритмически. Противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k < n_1$.

Допустим теперь, что при выполнении 1), (5.4) имеем $\det \widetilde{Q}_k \neq 0$, $k \le n_1$. Тогда согласно теореме 4.1 задача $\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_1}$ разрешима (алгоритмически) для любой функции $\psi'_{n_1}(t)$. т. е. с учетом (4.2) тот же самый вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)$ есть решение задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}} \widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_1}/p(t).$$

Но в силу теоремы 2.2 и 1), (5.4) существует полином $\phi_{n_1}(z) \in \operatorname{Ker} S$. Следовательно,

$$\operatorname{Im} \phi_{n_1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1} + \dots .$$

Тогда для некоторой функции ψ'_{n_1} имеем: $(\psi'_{n_1}, \operatorname{Im} \phi_{n_1}) = (\psi'_{n_1}, \psi_{n_1}) \neq 0$, откуда с учетом (5.3) $\psi'_{n_1} \not\vdash \phi_{n_1}$, т. е. указанная выше задача для функции ψ'_{n_1}/p согласно пункту 3) теоремы 3.1 неразрешима (теоретически). Полученное противоречие означает, что $\det \widetilde{Q}_{n_1} = 0$. Аналогичным образом может быть доказана импликация 2) $\Longrightarrow$ 1). □

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия* (5.4). *Тогда* $\operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1} = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_{n_1}$.

Доказательство. Обозначим $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1}$, $r'_1 = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_{n_1}$. Ядро задачи $\widetilde{S}$ согласно теореме 4.2 содержит по крайней мере $2\ell - r'_1$ линейно независимых вектор-полиномов $\widetilde{\phi}_{n_1-1}(z)$. Это означает, что задача S вида $\operatorname{Re} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}$ разрешима не более чем для r'_1 линейно независимых функций $\psi_{n_1}(t)$. Иначе получаем противоречие пункту 2) теоремы 3.1. Отсюда следует, что $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_1} \leq r'_1$. Аналогично с учетом теоремы 2.2 пункта 3) теоремы 3.1 доказывается, что $r'_1 \leq r_1$. Таким образом, $r_1 = r'_1$, что и требовалось доказать. □

Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* 1) *в* (5.4). *Обозначим* $r_1 = \operatorname{rang} \widehat{Q}_1$. *Тогда*

$$1)\ \phi_{n_1}^{(1)}, \dots, \phi_{n_1}^{(2\ell - r_1)} \in \operatorname{Ker} S; \quad 2)\ \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(2\ell - r_1)} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}, \tag{5.5}$$

причем все вектор-полиномы ядра и коядра в (5.5) *линейно независимы.*

3) *Кроме того, пусть разрешима алгебраическая система* $\widehat{Q}_{n_1} \widehat{c}_{n_1} = \alpha_{n_1}$ *в* (2.5). *Тогда разрешима и неоднородная задача* $\operatorname{Re} \phi_{n_1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}(t)$.

4) *Соответственно, пусть разрешима алгебраическая система* $\widetilde{Q}_{n_1} \widehat{c}_{n_1-1} = \alpha_{n_1}$ *в* (4.6). *Тогда разрешима и неоднородная задача* $\operatorname{Re} e^*_{J\mathrm{T}} \phi_{n_1-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_1}(t)$.

Доказательство. Условие 1), (5.5) — это теорема 2.2. Условие 2), (5.5) следует из лемм 5.1, 5.2 и теоремы 4.2. Утверждения 3) и 4) вытекают из алгоритмов решения таких задач, описанных в параграфах 2 и 4. □

Далее леммы 5.1, 5.2 и теорему 5.1 будем рассматривать как *базу индукции*. Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \widehat{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}; \quad \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \dots, n_p\}, \quad k < n_p. \tag{5.6}$$

Обозначим $r_l = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_l}$, $l = 1, \dots, p$. Пусть доказано, что:

$$\begin{gathered} \det \widetilde{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}; \quad \det \widetilde{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \dots, n_p\}, \quad k < n_p; \\ \operatorname{rang} \widehat{Q}_k = \operatorname{rang} \widetilde{Q}_k, \quad k \in \{n_1, \dots, n_p\}, \\ \phi_{n_1}^{(1)}, \dots, \phi_{n_1}^{(2\ell - r_1)}, \ \dots, \ \phi_{n_p}^{(1)}, \dots, \phi_{n_p}^{(2\ell - r_p)} \in \operatorname{Ker} S; \\ \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(2\ell - r_1)}, \ \dots, \ \widetilde{\phi}_{n_p-1}^{(1)}, \dots, \widetilde{\phi}_{n_p-1}^{(2\ell - r_p)} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

При этом в (5.7) вектор-полиномы ядра и коядра линейно независимы.

Пусть число $m > n_p$ таково, что $\det \widehat{Q}_k \neq 0$ при $n_p < k < m$. При этом может быть как $\det \widehat{Q}_m \neq 0$, так и $\det \widehat{Q}_m = 0$. Также возможна ситуация $\det \widehat{Q}_{n_p+1} = 0$, в этом случае положим $m = n_p + 1$. Рассмотрим следующий упрощенный вариант задачи (2.3):

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) = \big(d_{m1} \cos mt + d'_{m1} \sin mt, \ldots, d_{m\ell} \cos mt + d'_{m\ell} \sin mt\big)^{\mathrm{T}}, \quad m > n_p. \tag{5.8}$$

О п р е д е л е н и е 5.5. Обозначим через B_m 2ℓ-мерное линейное вещественное пространство функций $\psi_m(t)$ (5.8) (или, что то же, пространство коэффициентов

$$\alpha_m = (d_{m1}, d'_{m1}, \ldots, d_{m\ell}, d'_{m\ell}) \in \mathbb{R}^{2\ell}$$

этих функций), таких, что алгебраическая система $\widehat{Q}_m \widehat{c}_m = \alpha_m$ в (2.5) разрешима. Аналогично определим пространство $\widetilde{B}_m$ как пространство функций $\psi_m(t)$ (или, что то же, пространство их коэффициентов α_m), для которых разрешима система $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ в (4.6). Таким образом, будем писать $\psi_m, \alpha_m \in B_m$, либо $\psi_m, \alpha_m \in \widetilde{B}_m$.

Теорема 5.2. *Пусть при выполнении* (5.6) *и* (5.7) *совместна алгебраическая система* $\widehat{Q}_m \widehat{c}_m = \alpha_m$ *в* (2.5). *Пусть доказано, что* 1) *задача* (5.8) *разрешима* (*алгоритмически*) *при* $m \leq n_p$, *если* $\psi_m \in B_m$. *Тогда разрешима* (*алгоритмически*) *и задача* (5.8) *при* $m > n_p$, *в том числе однородная* (*т. е. при* $\psi_m = 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (5.7) и пункт 1) настоящей теоремы будем рассматривать как *индукционное предположение*. При этом *базой индукции* для (5.7) служат леммы 5.1, 5.2 и теорема 5.1. В них доказано (5.7) для $k \in \{n_1\}$. Базой индукции для пункта 1) настоящей теоремы служат пункт 3) теоремы 5.1 и теорема 2.1.

Далее «от противного»: пусть задача (5.8) неразрешима алгоритмически. Согласно схеме параграфа 2 и (2.5) это означает, что несовместна некоторая система $\widehat{Q}_{l_1} \widehat{c}_{l_1} = \alpha_{l_1}$, где $l_1 \leq n_p$, $\det \widehat{Q}_{l_1} = 0$. В этом случае по определению $\alpha_{l_1}, \psi_{l_1} \notin B_{l_1}$. Рассмотрим задачу

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1}, \quad \psi'_{l_1}, \alpha'_{l_1} \notin B_{l_1}, \quad \psi_{l_1} + \psi'_{l_1} \in B_{l_1}, \quad \alpha_{l_1} + \alpha'_{l_1} \in B_{l_1}. \tag{5.9}$$

Этой задаче в процессе последовательного решения систем (5.2) будет соответствовать алгебраическая система $\widehat{Q}_{l_1} \widehat{c}_{l_1} = \alpha_{l_1} + \alpha'_{l_1}$, которая будет разрешима при соответствующем подборе функции $\psi'_{l_1} \notin B_{l_1}$. Но при дальнейшем решении задачи (5.9) может возникнуть аналогичная ситуация, когда будет неразрешима система $\widehat{Q}_{l_2} \widehat{c}_{l_2} = \alpha_{l_2}$, где $l_2 < l_1$, $\det \widehat{Q}_{l_2} = 0$. В этом случае $\alpha_{l_2}, \psi_{l_2} \notin B_{l_2}$. Тогда рассмотрим задачу

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1} + \psi'_{l_2},\ \psi'_{l_1} \notin B_{l_1},\ \psi'_{l_2} \notin B_{l_2}, \ \ \psi_{l_1} + \psi'_{l_1} \in B_{l_1},\ \psi_{l_2} + \psi'_{l_2} \in B_{l_2}. \tag{5.10}$$

Задаче (5.10) в процессе решения систем (5.2) соответствует алгебраическая система $\widehat{Q}_{l_2} \widehat{c}_{l_2} = \alpha_{l_2} + \alpha'_{l_2}$, которая будет разрешима при соответствующем подборе функции $\psi'_{l_2} \notin B_{l_2}$. Продолжая этот процесс дальше, получим следующую задачу:

$$\operatorname{Re} \phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \psi'_{l_1} + \psi'_{l_2} + \ldots + \psi'_{l_s} = \psi', \tag{5.11}$$

$$l_s < l_{s-1} < \ldots < l_2 < l_1; \quad \psi'_{l_k} \notin B_{l_k}, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{5.12}$$

Число $l_s \geq n_1$ в (5.12) — минимальное такое, что система $\widehat{Q}_{l_s} \widehat{c}_{l_s} = \alpha_{l_s}$, $\det \widehat{Q}_{l_s} = 0$ неразрешима (т. е. $\alpha_s \notin B_{l_s}$). Тогда задача (5.11) будет по построению *разрешима алгоритмически.*

Далее используем индукционное предположение (5.7). Так как $\det e^*_{J\mathrm{T}}(t) \neq 0$, то с учетом (5.7) и обозначений (5.8) имеем:

$$\operatorname{Im} e^*_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(1)}_{l_s-1}(z)\big|_\Gamma = \psi^{(1)}_{l_s} + \dots, \quad \dots, \quad \operatorname{Im} e^*_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_s)}_{l_s-1}(z)\big|_\Gamma = \psi^{(2\ell-r_s)}_{l_s} + \dots, \tag{5.13}$$

где все функции $\psi^{(k)}_{l_s} = \psi^{(k)}_{l_s}(t)$ в (5.13) линейно независимы. При этом с учетом пункта 1) настоящей теоремы (индукционное предположение) задача Шварца $\operatorname{Re}\phi_{l_s}(z)\big|_\Gamma = \psi_{l_s}$ разрешима не менее чем для $r_s = \operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_s}$ линейно независимых функций $\psi_{l_s} \in B_{l_s}$. Для каждой из них согласно пункту 2) теоремы 3.1 и (5.13) должно выполняться следующее равенство:

$$\langle \psi_{l_s}, \operatorname{Im} e_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \rangle = \big(\psi_{l_s}, \operatorname{Im} e^*_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\big) = \big(\psi_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}\big) = 0, \quad \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}.$$

т. е. функции $\psi_{l_s} \in B_{l_s}$ и функции $\psi^{(k)}_{l_s}$ в (5.13) образуют два ортогональных подпространства в $\mathbb{R}^{2\ell}$, сумма размерностей которых равна 2ℓ.

Отсюда следует, что если $\psi'_{l_s} \notin B_{l_s}$, то скалярное произведение $(\psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}) \neq 0$ для некоторой функции $\psi^{(k)}_{l_s}$ из (5.13). Поэтому с учетом (5.11) и минимальности числа l_s для элемента коядра $\widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}$ справедливо соотношение

$$\langle \psi', \operatorname{Im} e_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1} \rangle = \big(\psi', \operatorname{Im} e^*_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}^{(k)}_{l_s-1}\big) = \big(\psi_m + \dots + \psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s} + \dots\big) = (\psi'_{l_s}, \psi^{(k)}_{l_s}) \neq 0.$$

Следовательно, задача (5.11) согласно пункту 2) теоремы 3.1 *неразрешима теоретически.*

Итак, пусть задача (5.8) неразрешима алгоритмически. Тогда по ней можно построить задачу (5.11), которая будет разрешима алгоритмически, но неразрешима теоретически. Полученное противоречие означает алгоритмическую разрешимость задачи (5.8). □

Далее приведем аналог теоремы 5.2 «в обратную сторону», — для коядра.

Теорема 5.3. *Пусть при выполнении* (5.6) *и* (5.7) *совместна алгебраическая система* $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ *в* (4.6). *Пусть доказано, что задача*

$$\operatorname{Re} e^*_{J\mathrm{T}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) \tag{5.14}$$

разрешима (алгоритмически) при $m \leq n_p$, *если* $\psi_m \in \widetilde{B}_m$. *Тогда разрешима (алгоритмически) и задача* (5.14) *при* $m > n_p$, *в том числе однородная (т. е. при* $\psi_m = 0$ *).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь в точности повторяется схема доказательства теоремы 5.2. Приводить эту схему еще раз не имеет смысла. При этом используется определение 5.5. Также используются определения 5.3 и 5.4 алгоритмической и теоретической разрешимости задач S, $\widetilde{S}^*$ и $\widetilde{S}$. □

З а м е ч а н и е 5.1. В теоремах 5.2 и 5.3 доказан не индукционный переход при базе индукции (5.7), а некоторые утверждения. Индукционный переход доказан ниже.

Из теорем 5.2, 5.3 и 3.1 вытекает

Теорема 5.4 (индукционный переход)**.** *Пусть выполнены соотношения* (5.6) *и* (5.7), *а также пусть*

$$n_{p+1} > n_p, \quad \det \widehat{Q}_{n_{p+1}} = 0, \quad \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad n_p < k < n_{p+1}. \tag{5.15}$$

Обозначим $r_{p+1} = \operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_{p+1}}$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{array}{ll} 1)\ \det\widetilde{Q}_{n_{p+1}} = 0;\ \ \det\widetilde{Q}_k \neq 0,\ \ n_p < k < n_{p+1}; & 2)\ \operatorname{rang}\widehat{Q}_{n_{p+1}} = \operatorname{rang}\widetilde{Q}_{n_{p+1}}; \\ 3)\ \phi^{(1)}_{n_{p+1}}, \ldots, \phi^{(2\ell-r_{p+1})}_{n_{p+1}} \in \operatorname{Ker} S; & 4)\ \widetilde{\phi}^{(1)}_{n_{p+1}-1}, \ldots, \widetilde{\phi}^{(2\ell-r_{p+1})}_{n_{p+1}-1} \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}, \end{array} \tag{5.16}$$

причем все вектор-полиномы ядра и коядра в (5.16) *линейно независимы.*

5) *Кроме того, пусть разрешима алгебраическая система* $\widehat{Q}_{n_{p+1}}\widehat{c}_{n_{p+1}} = \alpha_{n_{p+1}}$ *в* (2.5). *Тогда разрешима (алгоритмически) и неоднородная задача* $\operatorname{Re}\phi_{n_{p+1}}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t)$.

6) *Соответственно, пусть разрешима алгебраическая система* $\widetilde{Q}_{n_{p+1}}\widehat{c}_{n_{p+1}-1} = \alpha_{n_{p+1}}$ *в* (4.6). *Тогда разрешима (алгоритмически) и неоднородная задача* $\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\phi_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t)$.

Доказательство. Докажем пункт 1) «от противного»: пусть $\det\widetilde{Q}_m = 0$, где $n_p < m < n_{p+1}$. При этом m — минимальное такое число. Тогда в силу теоремы 5.3 существует полином $\widetilde{\phi}_{m-1}(z) \in \operatorname{Ker}\widetilde{S}$. Так как $\det e^*_{J^{\mathrm{T}}}(t) \neq 0$, то $\operatorname{Im} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \psi_m + \ldots$. Поэтому для некоторой функции ψ'_m имеем: $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. т. е. с учетом (5.2) $\psi'_m \not\vdash \widetilde{\phi}_{m-1}$. Поэтому в силу пункта 2) теоремы 3.1 задача $\operatorname{Re}\phi_m(z)\big|_\Gamma = \psi'_m$ неразрешима теоретически. Но в силу (5.15) и теоремы 5.2 она разрешима алгоритмически. Противоречие означает, что $\det\widetilde{Q}_k \neq 0$, $n_p < k < n_{p+1}$.

Пусть теперь $\det\widetilde{Q}_k \neq 0$, $n_p < k \le n_{p+1}$. Согласно теореме 5.3 задача

$$\operatorname{Re} e^*_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \psi'_{n_{p+1}}(t)$$

разрешима (алгоритмически) для любой функции $\psi'_{n_{p+1}}(t)$. С учетом (4.2) тот же самый вектор-полином $\widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)$ есть решение задачи

$$\operatorname{Re} e_{J^{\mathrm{T}}}\widetilde{\phi}_{n_{p+1}-1}(z)\big|_\Gamma = \frac{\psi'_{n_{p+1}}(t)}{p(t)}.$$

Но в силу теоремы 5.2 и условия (5.15) существует полином $\phi_{n_{p+1}}(z) \in \operatorname{Ker} S$. Следовательно,

$$\operatorname{Im}\phi_{n_{p+1}}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_{p+1}}(t) + \ldots .$$

Тогда для некоторой функции $\psi'_{n_{p+1}}$ имеем: $(\psi'_{n_{p+1}}, \operatorname{Im}\phi_{n_{p+1}}) = (\psi'_{n_{p+1}}, \psi_{n_{p+1}}) \neq 0$, откуда с учетом (5.3) $\psi'_{n_{p+1}} \not\vdash \phi_{n_{p+1}}$, т. е. указанная выше задача для функции $\psi'_{n_{p+1}}/p$ согласно пункту 3) теоремы 3.1 неразрешима (теоретически). Противоречие означает, что $\det\widetilde{Q}_{n_{p+1}} = 0$.

Таким образом, схема доказательства пункта 1) с точностью до обозначений совпадает с доказательством импликации $1) \Longrightarrow 2)$ в лемме 5.1. С той разницей, что роль теорем 2.1, 2.2 здесь играет теорема 5.2, а вместо теоремы 4.1, 4.2 используется теорема 5.3. Доказательства остальных утверждений настоящей теоремы проводится аналогичным образом, по схеме леммы 5.2 и теоремы 5.1. □

Замечание 5.2. В результате доказательства теоремы 5.4 предположение (5.7) стало утверждением (5.7).

Приведем две заключительные теоремы о структуре ядра и коядра.

Теорема 5.5. *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости. Тогда ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ состоят только из вектор-полиномов.*

Доказательство. Из теорем 5.2, 5.3 и 3.1 следует, что существует только конечный набор чисел $\{n_1, \ldots, n_p\}$ такой, что

$$\det \widehat{Q}_k = 0, \quad k \in \{n_1, \ldots, n_p\}; \quad \det \widehat{Q}_k \neq 0, \quad k \notin \{n_1, \ldots, n_p\}. \tag{5.17}$$

Действительно, в противном случае ядро (или коядро) задачи Шварца были бы бесконечномерными, что противоречит пункту 1) теоремы 3.1.

Допустим, что для некоторой функции $\phi(z) \in \operatorname{Ker} S$ имеем: $\operatorname{Im} \phi(z)\big|_\Gamma = \psi_m(t) + \ldots$, где $m \notin \{n_1, \ldots, n_p\}$. Пусть $(\psi'_m, \psi_m) \neq 0$. Тогда согласно пункту 3) теоремы 3.1 и (5.3) союзная задача

$$\operatorname{Re} e_{J^\mathrm{T}} \widetilde{\phi}_{m-1}(z)\big|_\Gamma = \frac{\psi'_m(t)}{p(t)} \tag{5.18}$$

неразрешима (теоретически). Но поскольку $m \notin \{n_1, \ldots, n_p\}$, то в силу (5.17), (5.7) и замечания 5.2 $\det \widetilde{Q}_m \neq 0$. Поэтому алгебраическая система $\widetilde{Q}_m \widehat{c}_{m-1} = \alpha_m$ разрешима для любой правой части. Тогда согласно теореме 5.3 алгоритмически разрешима и задача (5.14) для любой граничной функции $\psi'_m(t)$. Деля обе части (5.14) на $p(t) \neq 0$, получаем разрешимость задачи (5.18). Полученное противоречие означает, что разложение в ряд Фурье на Γ любого нетривиального элемента ядра задачи Шварца может содержать только функции $\psi_k(t)$, где $k \in \{n_1, \ldots, n_p\}$. Проводя аналогичные рассуждения для коядра, получаем то же самое утверждение и для любой функции $\phi(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$.

Таким образом, с учетом (5.17) для любого элемента ядра и коядра справедливо разложение

$$\phi(z)\big|_\Gamma = \sum_{k \in \{n_1, \ldots, n_p\}} \psi_k(t), \quad \phi(z) \in \operatorname{Ker} S, \quad \phi(z) \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}. \tag{5.19}$$

Из (5.19) вытекает в частности, что ядро и коядро задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ состоят только из вектор-полиномов. □

Таким образом, в условиях теоремы 5.5 справедливы формулы (5.17) и (5.19).

Теорема 5.6. *Пусть все собственные числа матрицы J лежат в верхней полуплоскости и пусть выполнены условия (5.17). Обозначим $r_l = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_l}$. Тогда базисы ядра и коядра задачи Шварца в эллипсе в классах функций $\phi(z) \in H^\sigma(\overline{D})$ имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} S &= \big\{ i\alpha,\ \phi_{n_1}^{(1)}, \ldots, \phi_{n_1}^{(2\ell - r_1)}, \ldots, \phi_{n_p}^{(1)}, \ldots, \phi_{n_p}^{(2\ell - r_p)} \big\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^\ell; \\ \operatorname{Ker} \widetilde{S} &= \big\{ \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\phi}_{n_1-1}^{(2\ell - r_1)}, \ldots, \widetilde{\phi}_{n_p-1}^{(1)}, \ldots, \widetilde{\phi}_{n_p-1}^{(2\ell - r_p)} \big\}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Доказательство. В силу замечания 5.2 вектор-полиномы вида (5.20) входят в ядро и в коядро. При этом, согласно теореме 5.5 $\operatorname{Ker} S$, $\operatorname{Ker} \widetilde{S}$ состоят только из вектор-полиномов. Кроме того, в ядро входят вектор-константы $\phi = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$.

Согласно [3] любой J-аналитический вектор-полином $\phi_{n_l}(z)$ представи́м в виде (1.2). Поэтому, если $\phi_{n_l}(z) \in \operatorname{Ker} S$, то он является решением однородной задачи (2.4). Отсюда следует, что $\phi_{n_l}(z)$ может иметь только степень $n_l \in \{n_1, \ldots, n_p\}$. Соответственно, с учетом (5.17), (4.4) и (4.5) вектор-полиномы коядра могут иметь только степени $n_l \in$

$\{n_1 - 1, \ldots, n_p - 1\}$. Вектор-полиномы в (5.20) определены неоднозначно. Покажем для ядра, что это действительно его базис.

Обозначим для функций из (5.20): $\phi_{n_l}^{(k)}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_l}^{(k)}(t)$, $k = 1, \ldots, 2\ell - r_l$, где $r_l = \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_l}$. Тогда с учетом алгоритма решения однородной задачи (2.4) при $n = n_l$ имеем:

$$\phi_{n_l}(z)\big|_\Gamma = \psi_{n_l}(t) = \alpha_1 \psi_{n_l}^{(1)}(t) + \ldots + \alpha_{2\ell - r_l} \psi_{n_l}^{(2\ell - r_l)}(t), \quad \alpha_k \in \mathbb{R}. \tag{5.21}$$

Из (5.21) следует, что вектор-полином

$$\phi_{m_l}(z) = \phi_{n_l}(z) - \left[\alpha_1 \phi_{n_l}^{(1)}(z) + \ldots + \alpha_{2\ell - r_l} \phi_{n_l}^{(2\ell - r_l)}(z)\right], \quad m_l < n_l \tag{5.22}$$

принадлежит $\operatorname{Ker} S$ и имеет степень $m_l < n_l$. Действительно, в его разложении на Γ не будет функций вида $\psi_{n_l}^{(k)}(t)$. Таким образом, из (5.22) имеем:

$$\phi_{n_l}(z) = \left[\alpha_1 \phi_{n_l}^{(1)}(z) + \ldots + \alpha_{2\ell - r_l} \phi_{n_l}^{(2\ell - r_l)}(z)\right] + \phi_{m_l}(z), \quad m_l < n_l. \tag{5.23}$$

Далее применим ту же схему рассуждений для вектор-полинома $\phi_{m_l}(z)$ в (5.23). Повторяя это процесс необходимое количество раз, получим разложение $\phi_{n_l}(z)$ по базису (5.20), причем с вещественными коэффициентами. Аналогичная схема применяется для вектор-полиномов коядра.

Рассмотрим отдельно тот случай, когда $\det \widehat{Q}_1 = 0$, т. е. $n_1 = 1$. Согласно лемме 5.1 имеем $\det \widetilde{Q}_1 = 0$. Тогда в коядро входят вектор-константы $\phi_{n_1 - 1} = \phi_0 = c$, $c \in \mathbb{C}^\ell$. Размерность подпространства $F_1 = \{\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_1^{(2\ell - r_1)}\} \in \operatorname{Ker} S$ равна $2\ell - r_1$. Несложно показать, что размерности F_1 над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ совпадают, поскольку элементы F_1 — вектор-полиномы (первой степени).

При этом подпространство $\widetilde{F}_0 = \{c_1, \ldots, c_{2\ell - r_1}\} \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$, $c_k \in \mathbb{C}^\ell$ состоит из комплексных вектор-констант, *линейно независимых над полем* $\mathbb{R}$. Поскольку $\widetilde{F}_0 \in \operatorname{Ker} \widetilde{S}$, то размерность $\widetilde{F}_0$ вычисляется над полем $\mathbb{R}$. Эта размерность согласно теореме 4.2 и леммам 5.1, 5.2 так же равна $2\ell - r_1$ (но над полем $\mathbb{C}$ она другая). Случай $n_1 = 1$ уже́ включен в формулы (5.20). Из (5.20) вытекают следующие равенства:

$$\dim \operatorname{Ker} S = (2p + 1)\ell - \sum_{k=1}^{p} \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_k}, \quad \dim \operatorname{Ker} \widetilde{S} = 2p\ell - \sum_{k=1}^{p} \operatorname{rang} \widehat{Q}_{n_k}. \tag{5.24}$$

В свою очередь, из (5.24) следует равенство $\operatorname{Ind} S = \dim \operatorname{Ker} S - \dim \operatorname{Ker} \widetilde{S} = \dim \mathbb{R}^\ell = \ell$, которое согласуется с пунктом 4) теоремы 3.1. □

В заключение вернемся к примеру 1.1. В работе [8] были изучены матрицы $J \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ с кратным собственным числом λ, где $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Показано, что нетривиальное ядро задачи Шварца в эллипсе может содержать только один вектор-полином. Но при этом не было доказано, что в ядро могут входить только вектор-полиномы. Теперь же на основании теоремы 5.5 можно утверждать, что для функций, аналитических по Дуглису с матрицей J (1.5), квадратичный вектор-полином $\phi_2(z)$ (1.5) есть единственный нетривиальный элемент ядра задачи Шварца в эллипсе $\Gamma: 7x^2 + 9y^2 = 1$.

References

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, М., 1977. [F. D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian)].

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Краевые задачи*, Наука, М., 1968. [N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian)].

[3] A. P. Soldatov, *Douglis Analytic Functions*, Publishing House BelGU, Belgorog, 2016.

[4] А. П. Солдатов, "Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису", *Современная математика и ее приложения*, **67** (2010), 99–102; англ. пер.:A. P. Soldatov, "The Schwarz problem for douglis analytic functions", *Journal of Mathematical Sciences*, **173** (2011), 221–224.

[5] V. B. Vasilyev, "General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations", *Advances in Difference Equations*, **289** (2013), 1–7.

[6] V. B. Vasilyev, "Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries", *Differential and Difference Equations and Applications*, **47** (2013), 625–637.

[7] V. G. Nikolaev, "Solutions to the schwarz problem with diagonalizable matrices in ellipse", *Journal of Mathematical Sciences*, **244**:4 (2020), 655–670.

[8] V. G. Nikolaev, "Schwarz problem in ellipse for nondiagonalizable matrices", *Journal of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 876–901.

Информация об авторе

Николаев Владимир Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии. Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Российская Федерация. E-mail: vg14@inbox.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

Поступила в редакцию 17.02.2025 г.
Поступила после рецензирования 28.05.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

Information about the author

Vladimir G. Nikolaev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Algebra and Geometry Department. Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russian Federation. E-mail: vg14@inbox.ru.
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-0274-5826

Received 17.02.2025
Reviewed 28.05.2025
Accepted for press 06.06.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-160-169

Characterizations of geometric tripotents in strongly facially symmetric spaces

Jumabek Kh. SEYPULLAEV[1,2] , **Dilfuza A. ESHNIYAZOVA**[1] , **Damir D. DILMURATOV**[1]

[1] Karakalpak State University named after Berdakh
1 Ch. Abdirov St., Nukus 230112, Uzbekistan
[2] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
9 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan

Abstract. The concept of a geometric tripotent is one of the key concepts in the theory of strongly facially symmetric spaces. This paper studies the properties of geometric tripotents. We establish necessary and sufficient conditions under which a norm-one element of the dual space (real or complex) of a strongly facially symmetric space is a geometric tripotent. We prove that two geometric tripotents in such a space are mutually orthogonal if and only if both their sum and difference have norm one. Furthermore, we show that the set of extreme points of the unit ball coincides with the set of maximal geometric tripotents in the dual of a strongly facially symmetric space. Finally, we examine the relationship between M-orthogonality and ordinary orthogonality in the dual of a complex strongly facially symmetric space, providing a geometric characterization of geometric tripotents.

Keywords: geometric tripotent, norm exposed face, Peirce projection, strongly facially symmetric space

Mathematics Subject Classification: 46B20, 46E30.

For citation: Seypullaev J.Kh., Eshniyazova D.A., Dilmuratov D.D. Characterizations of geometric tripotents in strongly facially symmetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 160–169.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-160-169

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-160-169
УДК 517.98

Характеризация геометрических трипотентов в сильно гранево симметричных пространствах

Жумабек Хамидуллаевич СЕЙПУЛЛАЕВ[1,2] ,
Дилфуза Айназар кызы ЕШНИЯЗОВА[1] ,
Дамир Даулетмурат улы ДИЛМУРАТОВ[1]

[1] «Каракалпакский государственный университет им. Бердаха»
230112, Республика Узбекистан, г. Нукус, ул. Ч. Абдирова, 1
[2] «Институт математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан»
100174, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9

Аннотация. Понятие геометрического трипотента является одним из ключевых в теории сильно гранево симметричных пространств. В данной статье исследуются свойства геометрических трипотентов. Определены необходимые и достаточные условия для того, чтобы элемент с единичной нормой сопряженного пространства действительного или комплексного сильно гранево симметричного пространства являлся геометрическим трипотентом. Доказано, что два геометрических трипотента в сильно гранево симметричном пространстве взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда и норма их суммы, и норма их разности равны единице. Кроме того, показано, что множества экстремальных точек единичного шара и максимальных геометрических трипотентов сопряженного пространства сильно гранево симметричного пространства совпадают. В заключение, исследованы связи между M-ортогональностью и ортогональностью в сопряженном пространстве комплексного сильно гранево симметричного пространства, а также дана геометрическая характеристика геометрических трипотентов.

Ключевые слова: геометрический трипотент, выставленная по норме грань, Пирсовский проектор, сильно гранево симметричные пространства

Для цитирования: *Сейпуллаев Ж.Х., Ешниязова Д.А., Дилмуратов Д.Д.* Характеризация геометрических трипотентов в сильно гранево симметричных пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 160–169.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-160-169

Introduction

In the early 1980s, the development of JB^*-triple theory was initiated by Kaup, establishing a framework that parallels the functional-analytic aspects of operator algebra theory [1, 2]. These triples, distinguished by the holomorphic properties of their unit balls, constitute a broad class of Banach spaces based on ternary algebraic structures, encompassing C^*-algebras, Hilbert spaces, and spaces of rectangular matrices. The axiomatic approach developed by Alfsen and Schultz suggests the existence of unordered analogs of JB^*-triples [3]. A significant advancement in this direction was the introduction of facially symmetric spaces by Friedman and Russo in [4, 5], motivated by the geometric characterization of predual spaces of Banach spaces admitting an algebraic structure. Many of the properties required for such characterizations arise naturally in state spaces of physical systems, making these spaces a compelling geometric model for quantum mechanics.

In [6], it was established that the predual space of a complex von Neumann algebra, as well as that of a general JB^*-triple, forms a neutral strongly facially symmetric space. Further developments in [7] demonstrated that the predual of the real part of a von Neumann algebra is a strongly facially symmetric space if and only if the algebra is the direct sum of an Abelian algebra and a type I_2 algebra. A similar result was obtained for JBW-algebras in [8], where it was shown that the predual space of a JBW-algebra is a strongly facially symmetric space if and only if the algebra is the direct sum of an Abelian algebra and an algebra of type I_2.

Subsequent studies provided further geometric characterizations: in [9], a characterization of complex Hilbert spaces and spin factors was given, while in [10], a description of atomic facially symmetric spaces was presented, establishing that a neutral strongly facially symmetric space is isometrically isomorphic to the predual of one of the Cartan factors of types 1-6. Neal and Russo [11] identified geometric conditions under which a facially symmetric space is isometric to the predual of a complex JBW^*-triple. A complete description of strongly facially symmetric spaces that are isometrically isomorphic to the predual of an atomic commutative von Neumann algebra was obtained in [12]. In [13], a classification of finite dimensional real neutral strongly facially symmetric spaces with property (JP) (joint Peirce decomposition property) was proposed. It was shown that every real neutral strongly facially symmetric space with a unitary tripotent is isometrically isomorphic to $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, where (Ω, Σ, μ) is a measure space satisfying the direct sum property.

It is worth noting that the study of the relationship between M-orthogonality and orthogonality in strongly facially symmetric spaces within their dual space was presented in [14], where a geometric characterization of geometric tripotents in reflexive complex strongly facially symmetric spaces was provided. In the present work, we establish necessary and sufficient conditions under which an element of the dual space of a strongly facially symmetric space is geometric tripotent.

1. Preliminaries

We present necessary information from the theory of facially symmetric spaces, [4, 5]. Let Z be a real or complex normed space, and let Z^* denote its dual space. We say that elements $f, g \in Z$ are orthogonal and write $f \diamond g$ if $\|f+g\| = \|f-g\| = \|f\| + \|g\|$. We say subsets $S, T \subset Z$ are orthogonal and write $S \diamond T$, if $f \diamond g$ for all $(f, g) \in S \times T$. For a subset S of Z, we put $S^\diamond = \{f \in Z : \forall g \in S \ f \diamond g\}$; the set $S^\diamond$ is called the orthogonal complement of S. Recall that a face F of a convex set K is a non-empty convex subset of K such that if

$g, h \in K$ satisfy $\lambda g + (1-\lambda)h \in F$ for some $\lambda \in (0,1)$, then $g, h \in F$.

A norm exposed face of the unit ball $Z_1 = \{f \in Z : \|f\| \le 1\}$ of Z is a non-empty set (necessarily $\neq Z_1$) of the form $F_u = \{f \in Z_1 : u(f) = 1\}$, where $u \in Z^*$ with $\|u\| = 1$. While every norm exposed face is a face, the converse does not hold in general.

E x a m p l e 1.1. Let the set Z_1 be the unit ball of the space $Z = \mathbb{R}^2$ with respect to some norm. A point f on this ball is a face, but not a norm exposed face, since there is no hyperplane H such that $H \cap Z_1 = \{f\}$ (see Fig. 1).

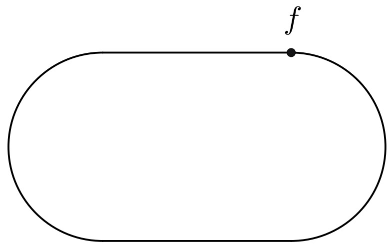

Fig. 1

An element $u \in Z^*$ is called a projective unit if $\|u\| = 1$ and $u(g) = 0$ for all $g \in F_u^{\diamond}$.

D e f i n i t i o n 1.1. A norm exposed face F_u in Z_1 is called a symmetric face if there exists a linear isometry S_u from Z to Z such that $S_u^2 = I$ whose fixed point set coincides with the topological direct sum of the closure $\overline{\mathrm{sp}} F_u$ of the linear hull of the face F_u and its orthogonal complement $F_u^{\diamond}$, i. e., with $\overline{\mathrm{sp}} F_u \oplus F_u^{\diamond}$.

D e f i n i t i o n 1.2. A space Z is said weakly facially symmetric (WFS) if each norm exposed face in Z_1 is symmetric.

For each symmetric face F_u, contractive projections (i. e., linear operator $P : Z \to Z$ such that $P^2 = P$ and $\|P\| \le 1$) $P_k(u), k = 0, 1, 2$ on Z are defined as follows (see [5]). First, $P_1(u) = (I - S_u)/2$ is the projection on the eigenspace corresponding to the eigenvalue -1 of the symmetry S_u. Next, $P_2(u)$ and $P_0(u)$ are defined as projections of Z onto $\overline{\mathrm{sp}} F_u$ and $F_u^{\diamond}$, respectively; i. e., $P_2(u) + P_0(u) = (I + S_u)/2$. The projections $P_k(u)$ are called geometric Peirce projections.

E x a m p l e 1.2. Let A be a C^*-algebra. If v is a partial isometry from A then the elements $l = vv^*$ and $r = v^*v$ are projections. For each partial isometry v, we define projections $E(v)$, $F(v)$ and $G(v)$ on the Banach space A. We put

$$E(v)x = lxr, \quad F(v)x = (1-l)x(1-r), \quad G(v)x = lx(1-r) + (1-l)xr.$$

We call $E(v)$, $F(v)$ and $G(v)$ the Peirce projections corresponding to v.

Let v is a partial isometry from a von Neumann algebra A and A_* is a predual space of A. Then the operator

$$S_v = E(v) - G(v) + F(v)$$

defined in terms of the Peirce projections is a linear isometry from A_* onto A_* such that $S_v^2 = I$ and the set of fixed points coincides with $E(v)A_* \oplus F(v)A_*$ (see [6, Lemma 2.8]). Hence, A_* is a weakly facially symmetric space (see [6]).

Definition 1.3. A WFS-space Z is said to be strongly facially symmetric (SFS) if for each norm exposed face F_u of Z_1 and each $y \in Z^*$ satisfying the conditions $\|y\| = 1$ and $F_u \subset F_y$, we have $S_u^* y = y$, where S_u is the symmetry corresponding to F_u.

A projective unit $u \in Z^*$ is called geometric tripotent if F_u is a symmetric face and $S_u^* u = u$ for the symmetry S_u corresponding to F_u. It should be noted that some properties of geometric tripotents were established in [15]. By $\mathcal{GT}$ and $\mathcal{SF}$ we denote the sets of all geometric tripotents and symmetric faces, respectively; the correspondence $\mathcal{GT} \ni u \mapsto F_u \in \mathcal{SF}$ is one-to-one [5, Proposition 1.6].

Geometric tripotents u and v are said to be orthogonal if $u \in P_0(v)^* Z^*$ (which implies $v \in P_0(u)^* Z^*$) or, equivalently, $u \pm v \in \mathcal{GT}$ (see [4, Lemma 2.5]). More generally, elements x and y of Z^* are said to be orthogonal, denoted $x \diamond y$, if one of them belongs to $P_2(u)^* Z^*$ and the other belongs to $P_0(u)^* Z^*$ for some geometric tripotent u. The orthogonal complement $X^\diamond$ of a $X \subset Z^*$ is defined as $X^\diamond = \{y \in Z^* : \forall x \in X \ x \diamond y\}$. For a singleton set $\{x\}$ we write $x^\diamond$ instead of $\{x\}^\diamond$.

We present examples of SFS-spaces.

Example 1.3. Endowing $\mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\| = |x_1| + \ldots + |x_n|$, where $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, we obtain a strongly facially symmetric space (see [13]).

Example 1.4. Every Hilbert space H is a SFS-space (see [13]). Each element $u \in H$ with $\|u\| = 1$ is a geometric tripotent and $F_u = u$. Moreover, the symmetry S_u corresponding to a face F_u is defined as follows:

$$S_u(\lambda u + x) = \lambda u - x, \quad \lambda u + x \in \operatorname{sp} u \oplus u^\perp = H,$$

where $u^\perp$ is the orthocomplement of u in the Hilbert space H.

Example 1.5. The predual space of a von Neumann algebra A is a strongly facially symmetric space. Notice that there exists a bijective correspondence between the set of geometric tripotents and the set of nonzero partial isometries, (see [6, Theorem 2.11]). If v is a geometric tripotent then the geometric Peirce projections corresponding to v are defined in terms of the Peirce projections corresponding to v, i. e., we have

$$P_2(v) = E(v), \quad P_1(v) = G(u), \quad P_0(v) = F(v).$$

Example 1.6. The predual space of a JB*-triple U is a strongly facially symmetric space in which the set of geometric tripotents coincides with the set of tripotents (see [6, Theorem 3.1]).

2. Main results

Let Z be a real or complex normed space and $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$. For x consider sets $D_1(x)$ and $D_2(x)$ defined as

$$D_1(x) = \{y \in Z^* : \exists \alpha > 0 \ \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1\},$$

$$D_2(x) = \big\{y \in Z^* : \forall \beta \in \mathbb{C} \ \|x + \beta y\| = \max\{1, \|\beta y\|\}\big\}.$$

Theorem 2.1. *Let Z be a real or complex strongly facially symmetric space and $x \in Z^*$ norm-one element. Then x is a geometric tripotent if and only if $F_x \neq \emptyset$ and $D_1(x) = D_2(x)$.*

P r o o f. *Necessity.* Let $x \in Z^*$ be a geometric tripotent. Then we have already noted that $F_x \neq \emptyset$. Let us assume that $y \in D_2(x)$, $y \neq 0$, and put $\alpha = \|y\|^{-1}$. Then it follows from the definition of the set $D_2(x)$ that

$$\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1.$$

This shows that $D_2(x) \subset D_1(x)$.

Let now $y \in D_1(x)$. Then for every $g \in F_x$ we have

$$|1 \pm \alpha y(g)| = |(x \pm \alpha y)(g)| \leq \|x \pm \alpha y\| = 1.$$

But this inequality is true only when $y(g) = 0$. Therefore, $F_x \subset F_{x+\alpha y}$. Then, by [4, Lemma 2.8], we get

$$x + \alpha y = x + P_0(x)^*(x + \alpha y) = x + \alpha P_0(x)^* y,$$

i. e., $y = P_0(x)^* y$. So, $x \diamondsuit y$. Then it follows from [4, Lemma 2.8(i)] that

$$\|x + \beta y\| = \max\{\|x\|, \|\beta y\|\} = \max\{1, \|\beta y\|\},$$

for every $\beta \in \mathbb{C}$. Therefore, $D_1(x) \subset D_2(x)$. Thus, if x is a geometric tripotent, then $D_1(x) = D_2(x)$.

Sufficiency. Suppose that $F_x \neq \emptyset$ and $D_1(x) = D_2(x)$, but x is not a geometric tripotent. Since Z is a strongly facially symmetric space, F_x is a symmetric face. Consequently, by [5, Proposition 1.6] there u is a geometric tripotent such that $F_u = F_x$. Therefore, by [4, Lemma 2.8] we have $x = u + P_0(u)^* x$.

Set $y = \big(\|P_2(u)^* x\| - 1\big)\dfrac{P_2(u)^* x}{\|P_2(u)^* x\|}$. Then by [4, Lemma 2.1(i)] it follows that

$$\|x + y\| = \left\| u + \big(2\|P_0(u)^* x\| - 1\big)\frac{P_0(u)^* x}{\|P_0(u)^* x\|}\right\| = \max\big\{\|u\|, |2\|P_0(u)^* x\| - 1|\big\} = 1,$$

$$\|x - y\| = \left\| u + \frac{P_0(u)^* x}{\|P_0(u)^* x\|}\right\| = \max\big\{\|u\|, 1\big\} = 1.$$

So, $y \in D_1(x)$.

On the other hand, again according to [4, Lemma 2.1(i)], the following equalities hold for every $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} a = \|x + \beta y\| &= \left\| u + \big(\|P_0(u)^* x\| + \beta\|P_0(u)^* x\| - \beta\big)\frac{P_0(u)^* x}{\|P_0(u)^* x\|}\right\| \\ &= \max\big\{\|u\|, \big|\|P_0(u)^* x\| - \beta\|P_0(u)^* x\| - \beta\big|\big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \max\big\{\|u\|, \|\beta y\|\big\} &= \max\left\{\|u\|, \left\| \|P_0(u)^* x\|\beta - \beta\big)\frac{P_0(u)^* x}{\|P_0(u)^* x\|}\right\|\right\} \\ &= \max\big\{\|u\|, \big|\|P_0(u)^* x\|\beta - \beta\big|\big\}. \end{aligned}$$

Since $\|P_0(u)^* x\| > 0$, then $a \neq b$. From here

$$\|x + \beta y\| \neq \max\{1, \|\beta y\|\}.$$

This contradicts the assumption that $D_1(x) = D_2(x)$, hence x must be a geometric tripotent. $\square$

Corollary 2.1. *Let Z be a reflexive SFS-space, and let x be a norm-one element of Z^*. Then x is a geometric tripotent if and only if $D_1(x) = D_2(x)$.*

The following corollary follows directly from the proof of necessity in Theorem 2.1.

Corollary 2.2. *Let Z be a SFS-space and $u \in \mathcal{GT}$. Then $P_0(u)^*Z^* = D_1(u)$.*

Corollary 2.3. *Elements $u, v \in \mathcal{GT}$ are orthogonal if and only if $\|u \pm v\| = 1$.*

The geometric tripotent u is called maximal if $P_0(u) = 0$.

Corollary 2.4. *Let Z be a strongly facially symmetric space and $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$, $F_x \neq \emptyset$. Then the following statements are equivalent:*
1) *x is a maximal geometric tripotent,*
2) *x is an extreme point in Z_1^*,*
3) *$D_1(x) = \{0\}$.*

Two elements x and y of Z^* are said to be M-orthogonal (see [16]) and denoted as $x \Box y$ if $\|x \pm y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

The M-orthogonal complement (M-complement) $H^{\Box}$ of a subset H of Z^* is defined as $H^{\Box} = \{y \in Z^* : \forall x \in H \ x \Box y\}$. For a singleton set $\{x\}$ we write $x^{\Box}$ instead of $\{x\}^{\Box}$.

For each element $x \in Z^*$ with unit norm, the tangent disc S_x is defined as

$$S_x = \big\{y \in Z^* : \forall \alpha \in \mathbb{C} \ |\alpha| \leq 1 \Rightarrow \|x + \alpha y\| = 1\big\}.$$

Theorem 2.2. *Let Z is a complex strongly facially symmetric space and $x \in Z^*$, $\|x\| = 1$, $F_x \neq \emptyset$. Then the following conditions are equivalent:*
1) *$x \in \mathcal{GT}$,*
2) *$x^{\Box} \cap Z_1^* = x^{\diamond} \cap Z_1^*$,*
3) *$x^{\Box} \cap Z_1^* = ix^{\Box} \cap Z_1^*$,*
4) *$S_x = x^{\diamond} \cap Z_1^*$.*

P r o o f. The implication 1) $\Rightarrow$ 2) follows from [14, Lemma 3].

1) $\Rightarrow$ 3). Suppose $x \in \mathcal{GT}$ and $y \in x^{\Box} \cap Z_1^*$. Then, from [16, Lemma 2.2(i)], it follows that

$$x^{\Box} \cap Z_1^* = \{y \in Z^* : \forall t \in [-1;1] \ \|x + ty\| = 1\} \subset D_1(x).$$

Therefore, from Theorem 2.1, we have $y \in D_2(x)$. Specifically,

$$\|iu \pm y\| = \|u \mp iy\| = \max\{\|u\|, \|iy\|\} = \max\{\|iu\|, \|y\|\}.$$

Thus, $y \in ix^{\Box} \cap Z_1^*$, i. e., $x^{\Box} \cap Z_1^* \subset ix^{\Box} \cap Z_1^*$. The reverse implication follows from similar reasoning. Hence, $x^{\Box} \cap Z_1^* = ix^{\Box} \cap Z_1^*$.

1) $\Rightarrow$ 4). Assume $x \in \mathcal{GT}$ and $y \in x^{\diamond} \cap Z_1^*$. From Corollary 2.2, $y \in D_1(x)$, and from Theorem 2.1, $y \in D_2(x)$. Therefore, for all $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| \leq 1$, we have

$$\|x + \alpha y\| = \max\{\|x\|, \|\alpha y\|\} = 1,$$

i. e., $y \in S_x$.

Let $x \in \mathcal{GT}$ and $y \in S_x$. Then $y \in D_1(x)$, and from Corollary 2.2, $y \in P_0(x)^*Z^*$, i. e., $y \in x^{\diamond} \cap Z_1^*$. Thus, $S_x = x^{\diamond} \cap Z_1^*$.

To prove the reverse implications, assume x is not a geometric tripotent, leading to a contradiction with the problem's conditions in each case. Since Z is strongly facially symmetric, F_x is a symmetric face. Therefore, by [5, Proposition 1.6], there exists a geometric tripotent u such that $F_u = F_x$. From [4, Lemma 2.8], we have $x = u + P_0(u)^*x$.

3) $\Rightarrow$ 1). Suppose $x^\square \cap Z_1^* = ix^\square \cap Z_1^*$ and

$$y = i\sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}.$$

Since $\|P_0(u)^*x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. According to [4, Lemma 2.1(i)],

$$\begin{aligned}\|x \pm y\| &= \left\|u + \left(\|P_0(u)^*x\| \pm i\sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right)\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\| \\ &= \max\left\{\|u\|, \left|\|P_0(u)^*x\| \pm i\sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right|\right\} = 1.\end{aligned}$$

Thus,

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} = \max\left\{1, \sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right\} = 1 = \|x \pm y\|.$$

This means x and y are M-orthogonal. On the other hand, by [4, Lemma 2.1(i)],

$$\max\{\|x\|, \|iy\|\} = \max\{\|x\|, \|y\|\} = \max\left\{1, \sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right\} = 1,$$

$$\begin{aligned}\|x - iy\| &= \left\|u + \left(\|P_0(u)^*x\| + \sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right)\right\| \\ &= \max\left\{1, \|P_0(u)^*x\| + \sqrt{1 - \|P_0(u)^*x\|^2}\right\} > 1.\end{aligned}$$

Thus, x and iy are not M-orthogonal, and y is not in $ix^\square$.

2) $\Rightarrow$ 1). Assume $x^\square \cap Z_1^* = x^\diamond \cap Z_1^*$ and $y = (1 - \|P_0(u)^*x\|)\dfrac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}$. Then $\|y\| = 1 - \|P_0(u)^*x\| < 1$. From [4, Lemma 2.1(i)],

$$\|x - y\| = \left\|u + (2\|P_0(u)^*x\| - 1)\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\| = \max\left\{\|u\|, |2\|P_0(u)^*x\| - 1|\right\} = 1,$$

$$\|x + y\| = \left\|u + \frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\| = \max\{\|u\|, 1\} = 1.$$

Thus,

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} = \max\{1, 1 - \|P_0(u)^*x\|\} = 1 = \|x \pm y\|.$$

This shows x and y are M-orthogonal, i. e., $y \in x^\square \cap Z_1^*$. Assume $x \diamond y$. Then $x \diamond \alpha y$ for every $\alpha \in \mathbb{C}$. By [4, Lemma 2.1(i)],

$$\|x + \alpha y\| = \max\{1, \|\alpha y\|\}. \tag{2.1}$$

On the other hand, from [4, Lemma 2.1(i)], for every $\alpha \in \mathbb{C}$, we have

$$\begin{aligned}\|x + \alpha y\| &= \left\|u + \left(\|P_0(u)^*x\| + \alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\|\right)\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\| \\ &= \max\{1, |\|P_0(u)^*x\| + \alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\||\},\end{aligned}$$

$$\max\{\|x\|, \|\alpha y\|\} = \max\left\{1, \|(\alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\|)\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\}$$
$$= \max\{1, |\alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\||\}.$$

Hence, $\|x + \alpha y\| \neq \max\{1, \|\alpha y\|\}$, contradicting equality (2.1). Therefore, y is not in $x^\diamond$.

4) $\Rightarrow$ 1). Suppose $S_x = x^\diamond \cap Z_1^*$ and $y = (1 - \|P_0(u)^*x\|)\dfrac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}$. By [4, Lemma 2.1(i)], for each $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$,

$$\|x + \alpha y\| = \left\|u + \left(\|P_0(u)^*x\| + \alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\|\right)\frac{P_0(u)^*x}{\|P_0(u)^*x\|}\right\|$$
$$= \max\{1, |\|P_0(u)^*x\| + \alpha - \alpha\|P_0(u)^*x\||\} = 1.$$

Thus, $y \in S_x$. However, y is not in $x^\diamond$ as in case 2) $\Rightarrow$ 1). $\square$

References

[1] W. Kaup, “Contractive projections on Jordan C^*-algebras and generalizations”, *Mathematica Scandinavica*, **54**:1 (1984), 95–100.

[2] W. Kaup, “A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces”, *Mathematische Zeitschrift*, **183**:4 (1983), 503–529.

[3] E. M. Alfsen, F. W. Shultz, “State spaces of Jordan algebras”, *Acta Mathematica*, **140**:3 (1978), 155–190.

[4] Y. Friedman, B. Russo, “A geometric spectral theorem”, *The Quarterly Journal of Mathematics*, **37**:3 (1986), 263–277.

[5] Y. Friedman, B. Russo, “Affine structure of facially symmetric spaces”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **106**:1 (1989), 107–124.

[6] Y. Friedman, B. Russo, “Some affine geometric aspects of operator algebras”, *Pacific Journal of Mathematics*, **137**:1 (1989), 123–144.

[7] М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов, Ж. Х. Сейпуллаев, “Гранево симметричные и предсопряженные эрмитовой части алгебр фон Неймана пространства”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, 2018, №5, 33–40; англ. пер.:M. M. Ibragimov, K. K. Kudaybergenov, J. Kh. Seypullaev, “Facially symmetric spaces and predual ones of hermitian part of von Neumann algebras”, *Russian Mathematics*, **62**:5 (2018), 27–33.

[8] К. К. Кудайбергенов, Ж. Х. Сейпуллаев, “Характеризация JBW-алгебр с сильно гранево симметричным предсопряженным пространством”, *Математические заметки*, **107**:4 (2020), 539–549; англ. пер.:K. K. Kudaybergenov, J. Kh. Seypullaev, “Characterization of JBW-Algebras with strongly facially symmetric predual space”, *Mathematical Notes*, **107**:4 (2020), 600–608.

[9] Y. Friedman, B. Russo, “Geometry of the dual ball of the spin factor”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **65**:1 (1992), 142–174.

[10] Y. Friedman, B. Russo, “Classification of atomic facially symmetric spaces”, *Canadian Journal of Mathematics*, **45**:1 (1993), 33–87.

[11] M. Neal, B. Russo, “State space of JB^*-triples”, *Mathematische Annalen*, **328**:4 (2004), 585–624.

[12] М. М. Ибрагимов, К. К. Кудайбергенов, С. Ж. Тлеумуратов, Ж. Х. Сейпуллаев, “Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана”, *Математические заметки*, **93**:5 (2013), 728–735; англ. пер.:M. M. Ibragimov, K. K. Kudaybergenov, S. Zh. Tleumuratov, J. Kh. Seypullaev, “Geometric description of the preduals of atomic commutative von Neumann algebras”, *Mathematical Notes*, **93**:5 (2013), 715–721.

[13] K. K. Kudaybergenov, J. Kh. Seypullaev, “Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents”, *Siberian Advances in Mathematics*, **30**:2 (2020), 117–123.

[14] J. Kh. Seypullaev, “Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **40**:12 (2019), 2111–2115.

[15] J. Kh. Seypulaev, “Finite strongly facially symmetric spaces”, *Uzbek Mathematical Journal*, 2020, № 4, 140–148.

[16] C. M. Edwards, R. V. Hugli, “M-orthogonality and holomorphic rigidity in complex Banach spaces”, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **70** (2004), 237–264.

Information about the authors

Jumabek Kh. Seypullaev, Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor of Algebra and Functional Analysis Department, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan; Leading Researcher, V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan.
E-mail: jumabek81@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2938-2199

Dilfuza A. Eshniyazova, Assistant Professor of Algebra and Functional Analysis Department, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan. E-mail: dilfuz.4152@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2291-0304

Damir D. Dilmuratov, Student, Mathematics Faculty, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan.
E-mail: dilmuratovdamir@gmail.com

Информация об авторах

Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и функционального анализа, Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г. Нукус, Узбекистан; ведущий научный сотрудник, Институт математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан.
E-mail: jumabek81@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2938-2199

Ешниязова Дилфуза Айназар кызы, ассистент кафедры алгебры и функционального анализа, Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г. Нукус, Узбекистан.
E-mail: dilfuz.4152@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0003-2291-0304

Дилмуратов Дамир Даулетмурат улы, студент, факультет математики, Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, г. Нукус, Узбекистан.
E-mail: dilmuratovdamir@gmail.com

There is no conflict of interests.

Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
Dilfuza A. Eshniyazova
E-mail: dilfuz.4152@gmail.com

Для контактов:
Дилфуза Айназар кызы Ешниязова
E-mail: dilfuz.4152@gmail.com

Received 27.03.2025
Reviewed 20.05.2025
Accepted for press 06.06.2025

Поступила в редакцию 27.03.2025 г.
Поступила после рецензирования 20.05.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182

УДК 517.93

Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова

Иван Анатольевич ФИНОГЕНКО

ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН»

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Аннотация. Для неавтономных дифференциальных включений рассматриваются вопросы притяжения и асимптотического поведения решений. Основой исследований служит развитие метода предельных дифференциальных уравнений в сочетании с прямым методом Ляпунова с несколькими функциями Ляпунова. Это дает возможность более точно проводить локализацию и определять структуру ω-предельных множеств решений. Основными проблемами исследований являются отсутствие свойств типа инвариантности ω-предельных множеств неавтономных систем и построение предельных дифференциальных соотношений. Они решаются с использованием предельных дифференциальных включений, построенных с использованием сдвигов (трансляций) исходных дифференциальных включений. Результаты имеют форму обобщений принципа инвариантности Ла-Салля и дают предварительную информацию о предельном поведении решений. Набор дополнительных функций Ляпунова позволяет уточнять это поведение и выделять те точки из множества нулей производной основной функции Ляпунова, которые заведомо ω-предельным множествам не принадлежат. Результаты иллюстрируются на примере линейного осциллятора с сухим трением.

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение, функция Ляпунова, принцип инвариантности, асимптотическое поведение решений, притяжение

Благодарности: Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (прект № 1210401300060-4).

Для цитирования: *Финогенко И.А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 170–182.
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182

On the asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential inclusions with a set of several Lyapunov functions

Ivan A. FINOGENKO

V. M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS

134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. For non-autonomous differential inclusions, the issues of attraction and asymptotic behavior of solutions are considered. The basis of the research is the development of the method of limit differential equations in combination with the direct Lyapunov method with several Lyapunov functions. This makes it possible to more accurately localize and determine the structure of ω-limit sets of solutions. The main problems of the research are the absence of properties of the invariance type of ω-limit sets of non-autonomous systems and the construction of limit differential relations. They are solved using limit differential inclusions constructed using shifts (translations) of the main differential inclusions. The results have the form of generalizations of the LaSalle invariance principle and provide preliminary information on the limit behavior of solutions. A set of additional Lyapunov functions allows one to refine this behavior and to single out those points from the set of zeros of the derivative of the main Lyapunov function that obviously do not belong to the ω-limit sets. The results are illustrated by the example of a linear oscillator with dry friction.

Keywords: limit differential inclusion, Lyapunov function, invariance principle, asymptotic behavior of solutions, attraction

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1210401300060-4).

Mathematics Subject Classification: 34A60

For citation: Finogenko I.A. On the asymptotic behavior of solutions of nonautonomous differential inclusions with a set of several Lyapunov functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 170–182. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-170-182

Введение

Исследования асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений в рамках прямого метода функций Ляпунова со знакопостоянными производными восходят к известным теоремам Барбашина–Красовского [1] для автономных систем

$$\dot{x} = f(x), \tag{0.1}$$

где функция $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ определена на некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. При этом требовался анализ множества $E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ на наличие в нем целых траекторий уравнения (0.1). Впоследствии выводы, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были аккумулированы в теореме Ла-Салля [2], известной в настоящее время, как принцип инвариантности.

Эти исследования в том или ином виде распространены и на другие классы автономных систем, в частности — на автономные дифференциальные включения.

При рассмотрении неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{0.2}$$

на этом пути возникает ряд трудностей, связанных с описанием множества нулей знакопостоянной производной функции Ляпунова и с отсутствием свойств типа инвариантности у ω-предельных множеств решений неавтономных систем.

Попытки распространить принцип инвариантности на системы (0.2) привели к рассмотрению сдвигов (трансляций) $f^\tau(t,x) = f(t+\tau, x)$ функции $f(t,x)$. При условии, что существуют в том или ином смысле пределы $f'(t,x)$ последовательностей вида $f(t+t_k, x)$, $t_k \to +\infty$, аналоги принципа инвариантности исходной системы (0.2) были получены в терминах предельных уравнений

$$\dot{x} = f'(t, x). \tag{0.3}$$

Такой подход в настоящее время известен как метод предельных уравнений, начало которому положили работы Дж. Селла [3,4] и З. Артштейна [5] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений.

При рассмотрении неавтономных дифференциальных включений

$$\dot{x}(t) \in F(t, x) \tag{0.4}$$

или неавтономных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, представленных в форме дифференциальных включений, возникают еще проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений на основе последовательностей сдвигов многозначных отображений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей. Впервые эти проблемы были рассмотрены в [6] и для разрывных систем — в [7,8].

В настоящее время принцип инвариантности и его обобщения являются эффективными методами исследования асимптотической динамики различных систем. При этом для локализации ω-предельных множеств во множестве нулей производной функции Ляпунова могут использоваться различные средства, в том числе наборы вспомогательных функций Ляпунова $V_i(t,x)$.

Идея использования в теории устойчивости нескольких функций Ляпунова является весьма содержательной и рассматривалась в работах многих авторов. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с использованием двух функций Ляпунова впервые дана В. М. Матросовым [9].

Целью данной статьи является использование метода предельных дифференциальных включений и обобщений принципа инвариантности с набором вспомогательных функций Ляпунова для изучения асимптотических свойств решений неавтономных дифференциальных включений.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Для любого непустого множества A и точки a из пространства $\mathbb{R}^n$ через $d(a,A)=\inf_{b\in A}\|b-a\|$ обозначается расстояние от точки a до множества A, $A^\epsilon=\{x: d(x,A)<\epsilon\}$ — ϵ-окрестность множества A (где $\epsilon>0$). Через $\overline{A}$ обозначим замыкание множества A, символом $\overline{co}\,A$ обозначим выпуклую оболочку множества A и $conv\,\mathbb{R}^n$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$.

Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$ обозначается $\rho(B,A)=\sup_{b\in B} d(b,A)$. Очевидно, что значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество B или A заменить на его замыкание, а неравенство $\rho(B,A)<\epsilon$ равносильно вложению $B\subset A^\epsilon$. Через $dist\,(A,B)=\max\{\rho(B,A),\,\rho(A,B)\}$ в пространстве $conv\,\mathbb{R}^n$ обозначается метрика Хаусдорфа.

Определение 1.1. Пусть X — метрическое пространство с метрикой $\varrho(\cdot,\cdot)$. Отображение $G: X\to conv\,\mathbb{R}^n$ называется *полунепрерывным сверху* в точке x_0, если для любого $\epsilon>0$ существует $\delta=\delta(\epsilon,x_0)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $\varrho(x,x_0)<\delta$, выполняется $G(x)\subset G^\epsilon(x_0)$.

Здесь и далее для многозначных отображений используем символ $G^\epsilon(x)$ для обозначения ϵ-окрестности $(G(x))^\epsilon$ множества $G(x)$ в каждой точке x.

Полунепрерывность сверху означает, что $\lim\limits_{x\to x_0}\rho(G(x),G(x_0))=0$ и для ограниченного многозначного отображения необходимым и достаточным условием полунепрерывности сверху является замкнутость графика (см. [10, с. 35–40]).

Будем рассматривать дифференциальное включение (0.4) с многозначным отображением $F:\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n\to\mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$, для которого с помощью многозначного оператора сдвига $F(t+\tau,x)$ вводится два типа многозначных отображений:

$$F'(t,x)=\bigcap_{n\geq 1}\overline{co}\bigcup_{k\geq n}F(t+t_k,x),\quad F^*(t,x)=\bigcap_{b\geq 0}\overline{co}\bigcup_{\tau>b}F(t+\tau,x). \tag{1.1}$$

Они называются *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ и, соответственно, *предельным*. Оказывается, что отображение $F^*(t,x)$ не зависит от переменной t, поэтому можно полагать, например, что $F^*(x)=F^*(0,x)$ при всех $x\in\mathbb{R}^n$. Соответствующие этим предельным отображениям дифференциальные включения

$$\dot{x}\in F'(t,x) \tag{1.2}$$

и

$$\dot{x}\in F^*(x) \tag{1.3}$$

будем называть *предельными дифференциальными включениями*.

Как обычно, точка $z \in \mathbb{R}^n$ называется ω-предельной для решения $x(t)$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая, что $x(t_k) \to z$. Множество всех ω-предельных точек называется ω-предельным множеством решения $x(t)$ и обозначается $\Lambda^+(x)$.

Следующие свойства ω-предельных множеств (см., например, [11, с. 98]) справедливы для любой непрерывной кривой L ($\phi(t)$, $t_0 \le t < +\infty$) в $\mathbb{R}^n$.

1. Множество $\Lambda^+(L)$ замкнуто и

$$\Lambda^+(L) = \bigcap_{\tau' \ge 0} \overline{\big(\bigcup_{t \ge \tau'} (z(t)\big)}.$$

2. Множество $\Lambda^+(L)$ пусто тогда и только тогда, когда $\|\phi(t)\| \to +\infty$ при $t \to +\infty$.

3. Множество $\Lambda^+(L)$ ограничено тогда и только тогда, когда кривая $\Lambda^+(L)$ ограничена.

4. Если кривая L ограничена, то множество $\Lambda^+(L)$ непусто, компактно, связно и $d(\phi(t), \Lambda^+(L)) \to 0$ при $t \to +\infty$.

5. Если $\phi(t)$ является решением дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x) \tag{1.4}$$

с полунепрерывной сверху, выпуклозначной и ограниченной многозначной функцией $F(x)$, то через каждую точку $z \in \Lambda^+(x)$ проходит целая траектория решения включения (1.4) (свойство инвариантности для автономных систем).

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что множество $D \subset \mathbb{R}^n$ *полуинвариантно* (*квазиинвариантно*), если для любой точки $y \in D$ существует решение $y(t)$ включения (1.3) (включения (1.2) с некоторым отображением $F'(t,x)$ в правой части), такое, что $y(0) = y$ и $y(t) \in D$ для всех $t \ge 0$.

Заметим, что свойство квазиинвариантности влечет свойство полуинвариантности для любого множества D, в том числе — для множества $\Lambda^+(x)$.

Сформулируем общие условия, при которых будет изучаться дифференциальное включение (0.4).

A1. *Для каждых (t,x) множество $F(t,x)$ непусто, выпукло и компактно.*

A2. *Многозначное отображение $(t,x) \to F(t,x)$ полунепрерывно сверху.*

A3. *Для любого компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ многозначное отображение $F(t,x)$ ограничено на множестве $\mathbb{R}^1 \times K$, т. е. существует константа M, такая, что для любых $(t,x) \in \mathbb{R}^1 \times K$ и $v \in F(t,x)$ выполняется неравенство $\|v\| \le M$.*

При выполнении условий A1–A3 для любых начальных условий (t_0, x_0) существует локальное решение задачи Коши включения (0.4), которое может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования $[t_0, \omega)$, и любое ограниченное, непродолжимое вправо решение определено на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Сформулируем дополнительное условие, при котором будут изучаться предельные дифференциальные включения (1.2) и (1.3).

A4. *Для любых x и $\epsilon > 0$ существуют числа $\delta > 0$ и γ, такие, что*

$$F(t,x') \subset F^{\epsilon}(t,x)$$

для всех $t > \gamma$ *и* $\|x' - x\| < \delta$.

Отметим, что условие A4 означает $\lim\limits_{t\to+\infty,\, x'\to x} \rho(F(t,x'), F(t,x)) = 0$. Оно выполняется, если отображение $F(t,x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке x равномерно относительно t.

Пусть $x(t)$ — решение включения (0.4). Если при некоторых условиях предел $y(t)$ последовательности функций $y_k(t) = x(t + t_k)$ является решением дифференциального включения (1.2) или (1.3), то это позволяет устанавливать для ω-предельных множеств исходного включения (0.4) свойства типа инвариантности, которое лежит в основе доказательства аналогов принципа инвариантности для неавтономных дифференциальных включений.

Справедлива следующая

Теорема 1.1 (см. [7]). *Пусть для многозначного отображения* F *выполняются условия* A1–A4. *Тогда:*

1. *Для предельных многозначных отображений* F^* *и* F', *определенных равенствами* (1.1), *выполняются условия* A1–A3.

2. *Дифференциальное включение* (0.4) *и предельные дифференциальные включения* (1.2), (1.3) *для любых начальных данных* (t_0, x_0) *имеют решения, и любое их ограниченное непродолжимое вправо решение определено на правом максимальном промежутке существования* $[t_0, +\infty)$.

3. *Любое решение включения* (1.2) *является одновременно решением включения* (1.3).

4. *Если* $x(t)$ *— ограниченное решение включения* (0.4) *и* $y^k(t) = x(t + t_k)$, *то для любой последовательности* $t_k \to +\infty$ *и для любого числа* $T > 0$ *из последовательности функций* $y^k(t)$ *можно выделить равномерно сходящуюся на отрезке* $I = [0, T]$ *подпоследовательность.*

5. *Предел* $y(t)$ *любой равномерно сходящейся на отрезке* I *последовательности функций* $y^k(t)$ *является решением включения* (1.2) *с предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ *многозначным отображением* $F'(t,x)$ *в правой части, и выполняется начальное условие* $y(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} x(t_k)$.

6. *Для любого ограниченного решения* $x(t)$ *включения* (0.4) *множество* $\Lambda^+(x)$ *непусто, компактно, квазиинвариантно и* $d(x(t), \Lambda^+(x)) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Для применения теоремы 1.1 важным является вопрос о построении и о свойствах предельных многозначных отображений F' и F^*. Для этого может быть полезным следующее

Утверждение 1.1 (см. [7]). *Пусть* x *фиксировано и многозначное отображение* $t \mapsto F(t,x)$ *с выпуклыми компактными значениями ограничено. Обозначим* $H(t) = F(t,x)$, $H^* = F^*(x)$ *и для последовательности точек* $t_n \to +\infty$ *обозначим* $H'(t) = F'(t,x)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Множества* H^* *и* $H'(t)$ *— непустые, выпуклые, компактные и справедливы равенства*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\overline{co}\bigcup_{s\ge t} H(s), H^*) = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} dist(\overline{co}\bigcup_{k\ge n} H(t+t_k)), H'(t)) = 0.$$

2. *Если* $\lim\limits_{t\to+\infty} dist(H(t), P)) = 0$, *то* $H'(t) = H^* = P$ *для любого отображения* $H'(t)$ *и для любого* t.

3. *Если* $\lim\limits_{t_n\to+\infty} dist(H(t+t_n), P(t)) = 0$, *то* $H'(t) = P(t)$ *для любого* t.

4. *Если отображение* $H(t)$ *однозначно, то отображение* $H'(t)$ *в общем случае многозначно. При этом множество* H^* *одноточечно* (*соответственно, множество* $H'(t)$ *одноточечно*) *тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t\to+\infty} H(t) = H^*$ (*соответственно, тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t_n\to+\infty} H(t+t_n) = H'(t)$).

5. *Если отображение* $H(t)$ *однозначно и непрерывно, то* $H^* = [a, b]$, *где* a *и* b — *нижний и, соответственно, верхний пределы функции* $H(t)$ *при* $t \to +\infty$.

6. *Множество* H^* *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций* $h(t) \in H(t)$ *при условии, что* $t \to +\infty$.

7. *При любом фиксированном* t *множество* $H'(t)$ *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов* $z_n \in H(t+t_n)$, *где* $\{t_n\}$ — *последовательность, которая определяет отображение* $H'(t)$.

Пусть $V : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывно дифференцируемая функция. Обозначим

$$\dot V^+(t,x) = \sup_{y\in F(t,x)} (\langle \nabla_x V, y\rangle + V_t), \quad \dot V^-(t,x) = \inf_{y\in F(t,x)} (\langle \nabla_x V, y\rangle + V_t),$$

где $\nabla_x V$ — градиент функции V по переменной x, V_t — частная производная по t, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Утверждение 1.2. *Пусть* $x(t)$ — *решение включения* (0.4), *определенное на некотором промежутке* $[t_0, t_1)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\dot V^-(t, x(t)) \le D_* v(t) \le D^* v(t) \le \dot V^+(t, x(t))$$

для всех $t \in [t_0, t_1)$, *где* $D_*v(t)$ *и* $D^*v(t)$ — *правое нижнее и, соответственно, правое верхнее производные числа Дини функции* $v(t) = V(t, x(t))$.

Утверждение 1.2 представляет собой переформулировку теоремы 3 для функционально-дифференциальных включений из [8] применительно к дифференциальному включению (0.4).

Через $w : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ будем обозначать измеримую по t, непрерывную по x и ограниченную на каждом множестве $\mathbb{R}^1 \times K$ неотрицательную функцию, где множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для любого x справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty,\, x'\to x} |w(t,x') - w(t,x)| = 0,$$

которое означает, что для функции w выполняется условие A4.

Сформулируем две теоремы, которые являются аналогами принципа инвариантности для неавтономных дифференциальных включений и будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 1.2 (см. [6]). *Пусть для дифференциального включения выполняются условия* A1–A4 *и существует непрерывно дифференцируемая функция* $V(t, x)$, *ограниченная снизу на каждом множестве вида* $\mathbb{R}^1 \times K$, *где* $K \subset \mathbb{R}^n$ — *компактное множество, такая, что выполняется условие*

$$\dot V^+(t,x) \le -w(t,x).$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (0.4) *множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\}, \tag{1.5}$$

где $\alpha(x)$ *— нижний предел функции* $t \to w(t,x)$ *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что для каждого фиксированного x значение функции $\alpha(x)$ реализуется на некоторой последовательности $w(t_k, x)$ при $t_k \to +\infty$. Поэтому формуле (1.5) можно придать вид

$$E_w = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t_k \to +\infty,\ \lim_{k\to+\infty} w(t_k, x) = 0\}.$$

Теорема 1.3 (см. [7]). *Пусть функция* $V(t,x)$ *не зависит от переменной* t *и является непрерывно дифференцируемой. Введем обозначения:*

$$\dot V^*(x) = \sup_{u\in F^*(x)} \langle \nabla V, u\rangle, \quad \dot V'(t,x) = \sup_{u\in F'(t,x)} \langle \nabla V, u\rangle$$

и через $\alpha(x)$ *обозначим нижний предел при фиксированном* x *функции* $-\dot V'(t,x)$ *при* $t \to +\infty$.

Тогда для любого ограниченного решения включения (0.4) *с* ω*-предельным множеством* $\Lambda^+(x)$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой точки* $y \in \Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t,x)$ *и решение* $y(t)$ *включения* (1.2) *с начальным условием* $y(0) = y$, *такие, что выполняется равенство*

$$\dot V'(t, y(t)) = 0$$

для п. в. $t \ge 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества* $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot V^*(x) = 0\}$.

2. Теоремы о притяжении

Пусть $V_j(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j \in \{1, \dots, m\}$. Введем обозначения:

$$\dot V_j'^{+}(t,x) = \sup_{u\in F'(t,x)} \langle \nabla V, u\rangle, \quad \dot V_j^{*+}(x) = \sup_{u\in F^*(x)} \langle \nabla V, u\rangle$$

и

$$\dot V_j'^{-}(t,x) = \inf_{u\in F'(t,x)} \langle \nabla V, u\rangle, \quad \dot V_j^{*-}(x) = \inf_{u\in F^*(x)} \langle \nabla V, u\rangle.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.2, $M \subset E_w$ *— замкнутое множество, и существуют непрерывно дифференцируемые функции* $V_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, *такие, что для любого* $x \in E_w \backslash M$ *найдется индекс* $j \in \{1, \dots, m\}$ *такой, что*

$$V_j(x) = 0, \tag{2.1}$$

и для любого предельного отображения $F'(t,x)$ *выполняется одно из условий:*

$$\dot V_j'^{+}(0,x) < 0, \quad \dot V_j'^{-}(0,x) > 0 \tag{2.2}$$

для всех $\in E_w \backslash M$.

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (0.4) *выполняется*

$$\Lambda^+(x) \subset M. \tag{2.3}$$

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существует точка $y_0 \in \Lambda^+(x)\backslash M$. В соответствии с теоремой 1.2 множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно. Тогда существует решение $y^1(t)$ включения (1.2) с начальным условием $y^1(0) = y_0$, удовлетворяющее соотношению $y^1(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Поскольку множество M замкнуто, то $y^1(t) \notin M$ для всех $t \in [0, h_0)$ для некоторого достаточно малого $h_0 > 0$, а в соответствии с теоремой 1.2 выполняется $y^1 \in E_w$ для всех $t \geq 0$. Тогда в соответствии с неравенствами (2.2) и утверждением 1.2, примененным к включению (1.2), найдутся функция V_{j_1} и достаточно малое число $0 < h_1 < h_0$ такие, что

$$V_{j_1}(y^1(0)) = 0, \quad V_{j_1}(y^1(h_1)) \neq 0, \quad y^1(h_1) \in \Lambda^+(x)\backslash M.$$

Аналогично вышесказанному, существуют решение $y^2(t)$ включения (1.2) с начальным условием $y^2(0) = y^1(h_1)$, удовлетворяющее соотношению $y^2(t) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$, число $h_2 > 0$ и функция V_{j_2}, $j_1 \neq j_2$, такие, что

$$V_{j_2}(y^2(h_1)) = 0, \; V_{j_2}(y^2(h_2)) \neq 0, \; y^2(h_2) \in \Lambda^+(x)\backslash M.$$

Так как $V_{j_1}(y^1(h_1)) \neq 0$, то число h_2 можно взять настолько малым, что $V_{j_1}(y^2(h_2)) \neq 0$. Продолжая этот процесс, получим точку h_m такую, что $y(t_m)) \in E_w\backslash M$ и $V_j(y(h_m) \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Последнее противоречит условию (2.1) и теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1.2, $M \subset E_w$ *— замкнутое множество и существуют непрерывно дифференцируемые функции* $V_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, *такие, что для любого* $x \in E^*\backslash M$ *выполняется* (2.1) *и одно из условий:*

$$\dot{V}_j^{*+}(0, x) < 0, \quad \dot{V}_j^{*-}(0, x) > 0. \tag{2.4}$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (0.4) *выполняется* (2.3).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.1 с заменой производных $\dot{V}'^{+}(t, x)$ $= \dot{V}'^{-}(t, x)$ на $\dot{V}^{*+}(x)$ и $\dot{V}^{*-}(x)$, соответственно, и использовании неравенств (2.4).

Следствие 2.1. *В рамках предположений теоремы* 2.1 *или теоремы* 2.2 *для любого ограниченного решения дифференциального включения* (0.4) *выполняется* $d(x(t), M) \to M$.

Отметим, что в теоремах 2.1 и 2.2 множество $\Lambda^+(x)$ можно заменить на любое квазиинвариантное или полуинвариантное множество $D \subset E_w$.

Пример 2.1. Уравнение движения линейного осциллятора (материальной точки единичной массы) с сухим трением под действием упругой силы $F(x) = -kx$ ($k > 0$) на горизонтальной прямой Ox имеет вид.

$$\ddot{x} = -kx - f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}. \tag{2.5}$$

Здесь $P = mg$ — вес тела, $F^T(t, \dot{x}) = -f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}$ — сила сухого трения Кулона при условии $\dot{x} \neq 0$, $f(t) \geq 0$ — коэффициент трения, $\operatorname{sgn} \dot{x}$ — функция знака скорости $v = \dot{x}$.

Задача состоит в наиболее полном описании множества точек, к которому стремятся решения уравнения (2.5) при $t \to +\infty$.

Простейшее выпуклое доопределение силы трения в точке $\dot{x} = 0$ правой части уравнения (2.5) по Филиппову приводит к дифференциальному включению

$$\ddot{x} \in -kx + F^{fr}(t, \dot{x}), \tag{2.6}$$

где $F^{fr}(t, \dot{x}) = -f(t)P \operatorname{sgn} \dot{x}$ при условии $\dot{x} \neq 0$ и $F^{fr}(t, 0) = [-f(t)P, f(t)P]$.

Функция $f(t)$ предполагается непрерывной и ограниченной на всей числовой прямой с условием

$$\lim_{\xi \to +\infty,\, t \to +0} (f(t+\xi) - f(\xi)) = 0, \tag{2.7}$$

которое обеспечивает выполнение для дифференциального включения (2.6) условия А4. Неравенство (2.7) выполняется, если, например, функция $f(t)$ равномерно непрерывна.

Обозначим

$$\lim_{t \to +\infty} \inf_{s \in (t, +\infty)} f(s) = a, \quad \lim_{t \to +\infty} \sup_{s \in (t, +\infty)} f(s) = b. \tag{2.8}$$

Для произвольной последовательности $t_k \to +\infty$ через $f'(t)$ обозначим предельное (вообще говоря, многозначное) отображение для функции $f(t)$, порожденное последовательностью точек t_k. Согласно утверждению 1.1 множество $f'(t)$ в каждой точке $t \geq 0$ представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательности значений $f(t + t_k)$. Тогда значением отображения $f'(t)$ в каждой точке t является некоторый отрезок $f'(t) = [m'(t), M'(t)]$, и выполняется $a \leq m'(t) \leq M'(t) \leq b$. Обозначим $f^* = [a, b]$. Тогда предельными дифференциальными включениями для (2.6) будут

$$m\ddot{x} \in -kx + F'(t, \dot{x}), \quad m\ddot{x} \in -kx + F^*(\dot{x}), \tag{2.9}$$

где

$$F'(t, \dot{x}) = \begin{cases} [-M'(t)P, -m'(t)P], & \text{если } \dot{x} > 0, \\ [-M'(t)P, M'(t)P], & \text{если } \dot{x} = 0, \\ [m'(t)P, M'(t)P], & \text{если } \dot{x} < 0, \end{cases} \quad F^*(\dot{x}) = \begin{cases} [-bP, aP], & \text{если } \dot{x} > 0, \\ [-bP, bP], & \text{если } \dot{x} = 0, \\ [aP, bP], & \text{если } \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + kx^2).$$

Тогда $\dot{V}^+(t, x, \dot{x}) = -f(t)P|\dot{x}| \leq 0$ и, полагая $w(t, x, \dot{x}) = f(t)P|\dot{x}|$, из первого равенства (2.8) получаем

$$\lim_{t \to +\infty} \inf_{s \in (t, +\infty)} w(s, x, \dot{x}) = aP|\dot{x}|.$$

Сделаем некоторые выводы.

1. Так как функция $V(x, \dot{x})$ является ограниченной снизу и бесконечно большой при $\|(x, \dot{x})\| \to +\infty$, то все решения уравнения (2.5) ограничены. Поэтому в соответствии с теоремой 2.1 ω-предельное множество $\Lambda^+(x, \dot{x})$ любого решения $(x(t), \dot{x}(t))$ включения (2.6) принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества E_w.

2. Если $a > 0$, то $\Lambda^+(x, \dot{x}) \subset \{(x, \dot{x}) : \dot{x} = 0\}$.

3. Для любого решения $(x(t), \dot{x}(t)$ включения (2.6) функция $t \mapsto V(x(t), \dot{x}(t))$ является невозрастающей и поэтому имеет предел $\lim_{t\to+\infty} V(x(t), \dot{x}(t)) = c \geq 0$. Следовательно, $\Lambda^+(x, \dot{x})$ принадлежит линии уровня функции Ляпунова $V(x, \dot{x})$ и является параболой при $\dot{x} = 0$. Поэтому $\Lambda^+(x, \dot{x})$ содержит не более двух точек, которые определяются из уравнения $kx^2 = c$ и являются положениями равновесия предельных дифференциальных включений (2.9). Таким образом, множество $\Lambda^+(x, \dot{x})$ состоит из точек $(x, \dot{x})$, для которых $|x| \leq M'(t) \leq b$ для всех $t \leq 0$ и $\dot{x} = 0$.

4. В силу связности множества $\Lambda^+(x, \dot{x})$ оно всегда состоит лишь из одной точки $(x_0, 0)$ или $(-x_0, 0)$. Очевидно, это может быть точка $(0, 0)$.

5. Существует последовательность $t_k^{inf} \to +\infty$, такая, что $f(t_k^{inf}) \to a$. При этом для любого $t \geq 0$ выполняется $(x(t + t_k), \dot{x}(t + t_k)) \to (x_0, 0)$ для любой последовательности такой, что $t_k \to +\infty$ и в том числе — для последовательности $\{t_k^{inf}\}$. Поэтому выполнено $a = m'(0) = M'(0)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию Ляпунова $V_1(x, \dot{x}) = \dot{x}$ и множество $M = \{(x, \dot{x}) : |x| \leq aP/k,\ \dot{x} = 0\}$. Тогда $V_1(x, 0) = 0$ и для первого включения из (2.9) выполняется $\dot{V}_1'^{+}(x, 0) = -kx + aP$ для любого x. Следовательно, если окажется, что $|x| > aP/k$, то выполняется одно из неравенств: $\dot{V}_1'^{+}(x, 0) < 0$ или $\dot{V}_1'^{-}(x), 0) > 0$, и тогда в силу теоремы 2.1 выполняется $\Lambda^+(x, \dot{x}) \subset M$.

Проведенный анализ показывает, что при условии $a > 0$ любое решение $(x(t), \dot{x}(t))$ уравнения (2.5) стремится к точке $(x_0, 0)$ такой, что $|x_0| \leq aP/k$, где a — нижний предел функции $f(t)$ при $t \to +\infty$.

В ситуации, когда $b = a > 0$, предельные дифференциальные включения (2.9) совпадают, и любое решение уравнения (2.5) стремится к точке $(x, 0)$, которая удовлетворяет условию $|x| \leq fP/k$ и является положением равновесия автономного уравнения

$$\ddot{x} = -kx - f\mathrm{sgn}\,\dot{x}. \tag{2.10}$$

Множество всех таких точек (неизолированных положений равновесия уравнения (2.10) линейного осциллятора с постоянным коэффициентом трения $f = a = b$) называется «зоной застоя».

Если же $b = 0$, то зона застоя отсутствует, и любое решение уравнения (2.5) стремится к какой-либо замкнутой траектории периодического решения уравнения $\ddot{x} = -kx$ линейного математического маятника.

3. Заключение

Теоремы 2.1 и 2.2 не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (0.4), так как множество M заранее неизвестно и может формироваться, по сути, лишь в ходе анализа множеств E_w и V^*. Набор вспомогательных функций V_j не однозначен, и чем он будет богаче, тем точнее определяется притягивающее множество M. Отметим также, что в теоремах 2.1 и 2.2 требуется ограниченность решений дифференциального включения (0.4).

Теория ограниченности решений систем дифференциальных уравнений на основе метода функций Ляпунова развита в работе Т. Иосидзавы [12].

Различные типы ограниченности решений и их сравнительный анализ имеется в [2]. В [9] к теории ограниченности решений применяются методы вектор-функций Ляпунова. Здесь мы сформулируем лишь одно простое заключение: если для любого числа $A > 0$

существует число $B > 0$ такое, что $|V(t,x)| > A$ для всех $t > B$, $\|x\| > B$, то любое решение включения (0.4) ограничено.

Вопрос о справедливости теорем 2.1 и 2.2 остается открытым для неограниченных решений. В этой ситуации может оказаться полезной теория ограниченности решений по Пуассону, развитая в [13].

Сделаем несколько замечаний о механических системах с кулоновым трением.

Вопросы притяжения для механических систем в форме уравнений Лагранжа второго рода с использованием набора вспомогательных функций Ляпунова в автономном случае рассмотрены в [14]. Здесь наибольший интерес представляет вопрос притяжения для множества положений равновесия. Если к качестве основной функции Ляпунова рассматривать полную энергию системы, то исследования сведутся к анализу множества нулей производной этой функции. В статье [15] это множество удалось описать достаточно конструктивно. Вопрос о том, стремится ли ограниченное решение исходной системы к какому-либо конкретному положению равновесия, остается открытым и требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться какие-либо предположения и любые подходящие для этой цели средства и факты, свойства ω-предельных множеств, структура исходных и предельных дифференциальных включений. В общем виде такие исследования не всегда возможны и вряд ли целесообразны. В данной статье это проделано в примере.

Наконец отметим, что если $F(t,x) = f(t,x)$ — однозначное отображение, то отображения $F'(t,x)$ и $F^*(t,x)$ в общем случае многозначны. Но при этом, если последовательность $f^{t_k}(t,x)$ сходится поточечно, то ее предельное отображение $f'(t,x)$ из правой части уравнения (0.3) совпадает с $F'(t,x)$, а множество $F^*(x)$ для каждой точки x по сути является ω-предельным множеством для отображения $t \to F(t,x)$. Таким образом, предлагаемый подход может быть использован в равной степени для дифференциальных уравнений (0.2).

References

[1] Е. А. Барбашин, *Функции Ляпунова*, Наука, М., 1970. [E. A. Barbashin, *Lyapunov Functions*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[2] J. P. LaSalle, “Stability theory for ordinary differential equations”, *Journal of Differential Equations*, **4**:1 (1968), 57–65.

[3] G. R. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I. The basic theory”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 241–262.

[4] G. R. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II. Limiting equation”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127** (1967), 263–283.

[5] Z. Artstein, “Topological dynamics of an ordinary differential equation”, *Journal of Differential Equations*, **23**:2 (1977), 216–223.

[6] И. А. Финогенко, “Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем”, *Сибирский математический журнал*, **55**:2 (2014), 454–471; англ. пер.:I. A. Finogenko, “Limit differential inclusions and the principle of invariance of nonautonomous systems”, *Siberian Mathematical Journal*, **55**:2 (2014), 372–386.

[7] И. А. Финогенко, “Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями”, *Сибирский математический журнал*, **57**:4 (2016), 913–927; англ. пер.:I. A. Finogenko, “Invariance principle for non-autonomous differential equations with discontinuous right-hand sides”, *Siberian Mathematical Journal*, **57**:4 (2016), 715–725.

[8] И. А. Финогенко, "Проблемы и методы исследования функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью", *Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления*, **522**:2 (2025) (в печати). [I. A. Finogenko, "Problems and methods of studying functional-differential equations with discontinuous right-hand side", *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, Informatics, Control Processes*, **522**:2 (2025), In Russian (to appear)].

[9] В. М. Матросов, *Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств систем*, Физматлит, М., 2001. [V. M. Matrosov, *Method of Vector Lyapunov Functions: Analysis of Dynamic Properties of Systems*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russian)].

[10] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, КомКнига, М., 2005. [by Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky , *Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions*, KomKniga Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].

[11] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985. [A. F. Filippov, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side*, Nauka Publ., Moscow, 1985 (In Russian)].

[12] T. Yoshizawa, "Liapunov's function and boundedness of solutions", *Funkcialaj Ekvacioj*, **2** (1959), 95–142.

[13] К. С. Лапин, *Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений*, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева, Саранск, 2022, 165 с. [K. S. Lapin, *Poisson boundedness of solutions of systems of differential equations*, Mordovian State Pedagogical University named after M. E. Evseviev, Saransk, 2022 (In Russian), 165 pp.]

[14] В. М. Матросов, И. А. Финогенко, "О принципе инвариантности и притягивающих множествах для автономных систем", *Доклады РАН*, **349**:1 (1996), 46–48; англ. пер.:V.Ṁ. Marrosov, I. A. Finogenko, "The invariance principle and attracting sets for autonomous systems", *Dokl. Math.*, **41**:7 (1996), 313–315.

[15] И. А. Финогенко, "Об асимптотическом поведении механических систем с трением", *Сибирский математический журнал*, **63**:5 (2022), 1158–1169; англ. пер.:I. A. Finogenko, "On the asymptotic behavior of mechanical systems with friction", *Siberian Mathematical Journal*, **63**:5 (2022), 974–982.

Информация об авторе

Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0001-6821-3385

Поступила в редакцию 07.04.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.06.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.

Information about the author

Ivan A. Finogenko, Doctor of Physics and Mathematics Sciences, Chief Researcher, V.M. Matrosov Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russian Federation. E-mail: fin@icc.ru
ORCID: https:/orcid.org/0000-0001-6821-3385

Received 07.04.2025
Reviewed 02.06.2025
Accepted for press 06.06.2025

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 150 2025

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-183-204

Two parameter C_0-semigroups of linear operators on locally convex spaces

Jawad ETTAYB

Regional Academy of Education and Training Casablanca–Settat,
Hamman Al–Fatawaki Collegiate High School
Road to Berrechid, Had Soualem 26402, Morocco

Abstract. The purpose of this paper is to study two parameter (resp. n-parameter) exponentially equicontinuous C_0-semigroups of continuous linear operators on sequentially complete locally convex Hausdorff spaces. In particular, we demonstrate the Hille–Yosida theorem for two parameter (resp. n-parameter) exponentially equicontinuous C_0-semigroups of continuous linear operators on sequentially complete locally convex Hausdorff spaces. Moreover, the n-parameter C_0-semigroups of continuous linear operators on Banach spaces are studied.

Keywords: C_0-semigroups of continuous linear operators, two parameter semigroups of continuous linear operators, locally convex spaces

Mathematics Subject Classification: 47D03.

For citation: Ettayb J. Two parameter C_0-semigroups of linear operators on locally convex spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:150 (2025), 183–204. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-183-204

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-183-204
УДК 517.98, 512.53

Двухпараметрические C_0-полугруппы линейных операторов на локально выпуклых пространствах

Джавад ЭТТАЙБ
Региональная академия образования и обучения Касабланка–Сеттат,
Университетская средняя школа Колледжа Хаммана Аль–Фатаваки
26402, Марокко, г. Хад Суалем, дорога в Беррешид

Аннотация. Целью данной работы является изучение двухпараметрических (соответственно n-параметрических) экспоненциально равностепенно непрерывных C_0-полугрупп непрерывных линейных операторов на секвенциально полных локально выпуклых хаусдорфовых пространствах. В частности, мы демонстрируем теорему Хилле–Иосиды для двухпараметрических (соответственно n-параметрических) экспоненциально равностепенно непрерывных C_0-полугрупп непрерывных линейных операторов на секвенциально полных локально выпуклых хаусдорфовых пространствах. Кроме того, изучаются n-параметрические C_0-полугруппы непрерывных линейных операторов на банаховых пространствах.

Ключевые слова: C_0-полугруппы непрерывных линейных операторов, двухпараметрические полугруппы непрерывных линейных операторов, локально выпуклые пространства

Для цитирования: *Эттайб Дж.* Двухпараметрические C_0-полугруппы линейных операторов на локально выпуклых пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 150. С. 183–204. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-150-183-204

1. Introduction

Abdelaziz [1] obtained a criterion for commutativity of the semigroups in terms of the generators and their domains. His criterion used to demonstrate the converse of a theorem of Hille and Phillips related to n-parameter semigroups of continuous linear operators on a Banach space. Recently, Al-Sharif and Khalil [2] gave a new definition of the infinitesimal generator for two parameter semigroups that gave the results in Trotter [3] and Abdelaziz [1] as special cases.

Semigroups of continuous linear operators in locally convex spaces were studied by several authors [4–7]. As an application of C_0-semigroups of continuous linear operators on sequentially complete locally convex Hausdorff spaces is the abstract Cauchy problem for differential equations on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X given by

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0) = x, \end{cases}$$

where $A : D(A) \subset X \to X$ is a densely defined closed linear operator on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X and $x \in X$.

Throughout this paper, X is a sequentially complete locally convex Hausdorff space over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ under the family of seminorms Γ_X and $\mathcal{L}(X)$ denotes the collection of continuous linear operators on X.

2. Preliminaries

In this section, we recall some preliminaries.

Definition 2.1. [8, p. 116] Let X be a vector space over $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C})$. A function $p : X \to \mathbb{R}_+$ is called seminorm if

(i) For any $x \in X$ and for all $\lambda \in \mathbb{K}$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,

(ii) For all $x, y \in X$, $p(x + y) \le p(x) + p(y)$.

Definition 2.2. [8, Definition 4.1.2] Let $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Let E be a subset of a vector space X over $\mathbb{K}$. Then

(i) E is said to be balanced if $\lambda x \in E$ for all $x \in E$ and for any $\lambda \in \mathbb{K}$ such that $|\lambda| \le 1$,

(ii) E is said to be absorbent or absorbing if for all $x \in X$, there is a positive number r such that $\lambda x \in E$ for all $|\lambda| \le r$.

Definition 2.3. [8, (a) of p. 6] A topological vector space X is said to be Hausdorff if for any two distinct points $x, y \in X$, there exist a neighbourhood U of x and a neighbourhood V of y such that $U \cap V = \emptyset$.

Definition 2.4. [9, Definition 2] A complex linear topological vector space X is called a locally convex space, if any if its open sets contains a convex, balanced and absorbing open set.

Theorem 2.1. [8, (a) of Theorem 5.5.1] *A locally convex space X is Hausdorff if and only if for all non-zero $x \in X$, there is a continuous seminorm p on X such that $p(x) \neq 0$.*

D e f i n i t i o n 2.5. [10, p. 294] Let X be a sequentially complete locally convex space. A one-parameter family $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ of continuous linear operators on X is an exponentially equicontinuous C_0-semigroup if

(i) $J(0) = I$,

(ii) For any $t, s \in \mathbb{R}_+$, $J(t+s) = J(t)J(s)$,

(iii) $\lim\limits_{h\to 0^+} J(h)x = x$ for any $x \in X$,

(iv) There exists a real number $\omega > 0$ such that $\{e^{-\omega t}J(t);\ t \in \mathbb{R}_+\}$ is equicontinuous.

The linear operator A defined by

$$D(A) = \big\{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{J(t)x - x}{t} \text{ exists}\big\}$$

and

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{J(t)x - x}{t} \text{ for any } x \in D(A),$$

is called the infinitesimal generator of the semigroup $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Theorem 2.2. [11, Theorem 1] *Let A be a closed linear densely defined operator on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X. Then in order that A be the infinitesimal generator of an equicontinuous C_0-semigroup $(J(s))_{s\in\mathbb{R}_+}$ it is necessary and sufficient that the family*

$$\{\lambda^n R(\lambda, A)^n;\ \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}\} \tag{2.1}$$

is equicontinuous where $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Theorem 2.3. [11, Theorem 2] *Let A be a closed linear densely defined operator on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X. Then in order that A be the infinitesimal generator of a continuous semigroup $(J(s))_{s\in\mathbb{R}_+}$ with $\{e^{-\omega s}J(s);\ s \in \mathbb{R}_+\}$ is equicontinuous for some $\omega > 0$ it is necessary and sufficient that the family*

$$\{(\lambda - \omega)^n R(\lambda, A)^n;\ \lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}\} \tag{2.2}$$

is equicontinuous where $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

We continue with the following definitions.

D e f i n i t i o n 2.6. [12, Definition 2.8] Let X be a locally convex space. A two-parameter family $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ of continuous linear operators on X is said to be a two-parameter semigroup if

(i) $J(0, 0) = I$,

(ii) For every $t_1,\ t_2,\ s_1$ and $s_2 \in \mathbb{R}_+$, $J(s_1 + s_2, t_1 + t_2) = J(s_1, t_1)J(s_2, t_2)$.

D e f i n i t i o n 2.7. [12, Definition 2.9] Let X be a sequentially complete locally convex space. A two-parameter semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ on X is a two-parameter strongly continuous semigroup or a two parameter C_0-semigroup if $\lim\limits_{(s,t)\to(0^+,0^+)} J(s,t)x = x$ for all $x \in X$.

D e f i n i t i o n 2.8. [12, Definition 2.10] Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. A two-parameter C_0-semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ on X is equicontinuous if for any continuous seminorm p on X, there exists a continuous seminorm q on X such that for all $x\in X$ and for each $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$, $p(J(s,t)x)\le q(x)$.

D e f i n i t i o n 2.9. [12, Definition 2.11] Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. A two-parameter C_0-semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ on X is exponentially equicontinuous if there exist $\omega_1,\omega_2>0$ such that $\{e^{-\omega_1 s-\omega_2 t}J(s,t);\ s,t\in\mathbb{R}_+\}$ is equicontinuous.

3. Main results

In this section, we start with the following remark.

R e m a r k 3.1. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X. Then for all $x\in X$, the map $(s,t)\mapsto J(s,t)x$ is continuous on $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ into X. Let A_1 and A_2 be two linear operators defined by

$$D(A_1)=\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{J(h,0)x-x}{h}\ \text{exists in}\ X\},$$

$$D(A_2)=\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{J(0,h)x-x}{h}\ \text{exists in}\ X\},$$

and

$$A_1x=\lim_{h\to 0^+}\frac{J(h,0)x-x}{h}=\frac{\partial J(s,t)}{\partial s}\Big|_{(s,t)=(0,0)},\ \text{for each}\ x\in D(A_1),$$

$$A_2x=\lim_{h\to 0^+}\frac{J(0,h)x-x}{h}=\frac{\partial J(s,t)}{\partial t}\Big|_{(s,t)=(0,0)},\ \text{for each}\ x\in D(A_2).$$

It is easy to see that A_1 and A_2 are the infinitesimal generators of the one parameter semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively.

Theorem 3.1. *Let $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be an exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X, where X is a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Then for all $x\in X$ and for each $t\in\mathbb{R}_+$,*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}J(u)x\,du=J(t)x.$$

P r o o f. Let $x\in X$, $t\in\mathbb{R}_+$ and $\varepsilon>0$. From $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+}$ is an exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X, then for all $\varepsilon>0$, there exists $\delta>0$ such that for each $u\in(0,\delta)$, we have

$$p(J(u)x-x)<\varepsilon\ \text{for all}\ x\in X\ \text{and for each}\ p\in\Gamma_X.$$

Hence for all $h\in(0,\delta)$, $x\in X$ and for any $p\in\Gamma_X$,

$$p\Big(\frac{1}{h}\int_0^h J(u)x\,du-x\Big)=p\Big(\frac{1}{h}\int_0^h[J(u)x-x]du\Big)\le\frac{1}{h}\int_0^h p\big(J(u)x-x\big)du<\frac{1}{h}\int_0^h\varepsilon\,du=\varepsilon.$$

Thus

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h J(u)x\,du=x.$$

Since $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+}$ is continuous on X, we have

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} J(u)x\,du = J(t)\Big(\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h J(u)x\,du\Big) = J(t)x,$$

for all $t\in\mathbb{R}_+$ and for each $x\in X$. $\square$

We extend the Corollary 2.5 of [13] in a sequentially complete locally convex Hausdorff space as follows.

Corollary 3.1. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be an exponentially equicontinuous C_0-semigroup of continuous linear operators on X with infinitesimal generator A. Then A is a closed operator with dense domain in X.*

We extend the Theorem 2.6 of [13] in a sequentially complete locally convex Hausdorff space as follows.

Theorem 3.2. *Let $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be two exponentially equicontinuous C_0-semigroups of continuous linear operators on X, where X is a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Suppose that both has the same generator A. Then $J(t)=S(t)$ for any $t\in\mathbb{R}_+$.*

We define the infinitesimal generator of a two parameter semigroup in a locally convex space as follows.

Definition 3.1. Let X be a locally convex space. Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two-parameter semigroup on X. The infinitesimal generator of the two parameter semigroup $(J(s,t))_{s,t\in\mathbb{R}_+}$ is the derivative of J at $(0,0)$.

From the definition of the infinitesimal generator, we have.

Theorem 3.3. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. If $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ is a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X. Then the infinitesimal generator of the two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ is the linear transformation $L:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathcal{L}(D(A_1)\cap D(A_2),X)$ defined by for all $x\in D(A_1)\cap D(A_2)$ and $(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $L(a,b)x=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}x=aA_1x+bA_2x$. Furthermore if $x\in D(A_1)\cap D(A_2)$, we have for all $(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $DJ(s,t)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}x=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}J(s,t)x$, where A_1 and A_2 are the infinitesimal generators of the one parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ on X respectively.*

Proof. Let $x\in D(A_1)\cap D(A_2)$ and $(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Then $DJ(s,t)|_{(s,t)=(0,0)}$ the derivate of $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ at $(0,0)$ as a function of two variables exists if there exists a linear transformation L from $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ into $\mathcal{L}(D(A_1)\cap D(A_2),X)$ such that $J(s,t)=L(s,t)+R(s,t)$ where

$$\lim_{(s,t)\to(0^+,0^+)}\frac{p(R(s,t)x)}{\|(s,t)\|}=0 \text{ for all } p\in\Gamma_X.$$

Let A_1, A_2 be infinitesimal generators of the one parameter semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively. Since $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ are exponentially equicontinuous C_0-semigroups on X, then for any continuous seminorm p on X, there exist a continuous seminorm q on X and $\omega_1, \omega_2 > 0$ such that for all $x \in X$ and for each $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$p(J(s,0)x) \leq e^{\omega_1 s} q(x) \text{ and } p(J(0,t)x) \leq e^{\omega_2 t} q(x). \tag{3.1}$$

Setting $J = J(s,t) - J(0,0) - (A_1,\ A_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$. Then for any continuous seminorm p on X, there exists a continuous seminorm q on X such that

$$\begin{aligned} p(Jx) &= p(J(s,t)x - x - sA_1x - tA_2x) \\ &= p(J(s,0)J(0,t)x - J(s,0)x - tA_2x + J(s,0)x - x - sA_1x) \\ &= p\Big(tJ(s,0)\Big(\frac{J(0,t)x - x}{t} - A_2x\Big) + t\big(J(s,0)A_2x - A_2x\big) + s\Big(\frac{J(s,0)x - x}{s} - A_1x\Big)\Big) \\ &\leq \Big\{|t|e^{\omega_1 s}q\Big(\frac{J(0,t)x - x}{t} - A_2x\Big) + |t|p\big(J(s,0)A_2x - A_2x\big);\ |s|p\Big(\frac{J(s,0)x - x}{s} - A_1x\Big)\Big\} \end{aligned}$$

by (3.1). Divide both sides by $\|(s,t)\| = \sqrt{s^2+t^2}$, it follows that

$$\lim_{(s,t)\to(0^+,0^+)} \frac{p(Jx)}{\|(s,t)\|} = 0 \text{ for all } p \in \Gamma_X.$$

Hence $DJ(s,t)|_{(s,t)=(0,0)} = (A_1, A_2)$ as a linear transformation on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ is the derivative of the two parameter semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$. Thus the linear transformation $L = (A_1, A_2)$ is the infinitesimal generator of the two parameter semigroup $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$. Let $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ and $x \in D(A_1) \cap D(A_2)$. Then it is easy to see that

$$\begin{aligned} DJ(s,t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x = \Big(\frac{\partial J(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial J(s,t)}{\partial t}\Big)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x &= \Big(a\frac{\partial J(s,t)}{\partial s} + b\frac{\partial J(s,t)}{\partial t}\Big)x \\ &= \Big(a\Big(\frac{\partial J(s,0)}{\partial s}\Big)J(0,t) + b\Big(\frac{\partial J(0,t)}{\partial t}\Big)J(s,0)\Big)x. \end{aligned}$$

By Remark 3.1, we get

$$\begin{aligned} DJ(s,t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x &= \Big(aA_1J(s,0)J(0,t) + bA_2J(0,t)J(s,0)\Big)x \\ &= (aA_1J(s,t) + bA_2J(s,t))x = (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} J(s,t)x. \end{aligned}$$

□

D e f i n i t i o n 3.2. Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two parameter semigroup of continuous linear operators on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X. For $u = (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, the directional derivative D_uJ of $J(s,t)$ at $(0,0)$ in the direction of $u = (a,b)$ is defined as

$$Domain(D_uJ) = \{x \in X : \lim_{h\to 0^+} \frac{J(ah,bh)x - x}{h} \text{ exists in } X\} \tag{3.2}$$

and for all $x \in Domain(D_uJ)$,

$$D_uJx = \lim_{h\to 0^+} \frac{J(ah,bh)x - x}{h}.$$

P r o p o s i t i o n 3.1. *Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup of continuous linear operators on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X. Then for $u=(a,b)\in\mathbb{R}^2_+, D_uJ = aA_1 + bA_2$ is the infinitesimal generator of the one parameter product semigroup $J(at,0)J(0,bt)$, where A_1, A_2 are the infinitesimal generators of the one parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively.*

P r o o f. Let $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$ and $x\in Domain(D_uJ)$, we get

$$\begin{aligned} D_uJx &= \lim_{h\to 0^+} \frac{J(ah,bh)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{J(ah,0)J(0,bh)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{J(ah,0)J(0,bh)x - J(ah,0)x + J(ah,0)x - x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \Big(bJ(ah,0)\frac{J(0,bh)x - x}{bh} + a\Big(\frac{J(ah,0)x - x}{ah}\Big)\Big) = aA_1x + bA_2x. \end{aligned}$$

$\square$

Theorem 3.4. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup of continuous linear operators on X with infinitesimal generator (A_1,A_2). Then the followings hold:*

(i) $DJ(s,t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x = (A_1,A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} J(s,t)x$ *for all $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$ and all $x\in D\Big((A_1,A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$, where A_1, A_2 are the infinitesimal generators of the one parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively.*

(ii) *For any $x\in X$ and for each $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$, we have*

$$\lim_{(h,k)\to(0^+,0^+)} \frac{1}{hk}\int_t^{t+h}\int_s^{s+k} J(u,v)x\,du\,dv = J(s,t)x.$$

(iii) *For each $x\in X$ and for all $t,s\in\mathbb{R}_+$, we have*

$$\int_0^t\int_0^s J(u,v)x\,du\,dv \in D\Big((A_1,A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big).$$

P r o o f. (i) Let $(a,b)\in\mathbb{R}^2_+$ and $(s,t)\in\mathbb{R}^2_+$. Since $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ is a function of two variables, we have

$$\begin{aligned} DJ(s,t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x &= \Big(\frac{\partial J(s,t)}{\partial s}, \frac{\partial J(s,t)}{\partial t}\Big)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x = \Big(a\frac{\partial J(s,t)}{\partial s} + b\frac{\partial J(s,t)}{\partial t}\Big)x \\ &= \Big(a\Big(\frac{\partial J(s,0)}{\partial s}\Big)J(0,t) + b\Big(\frac{\partial J(0,t)}{\partial t}\Big)J(s,0)\Big)x. \end{aligned}$$

By Remark 3.1, we get

$$DJ(s,t)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}x=\Big(aA_1J(s,0)J(0,t)+bA_2J(0,t)J(s,0)\Big)x$$
$$=(aA_1J(s,t)+bA_2J(s,t))x=(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}J(s,t)x.$$

(ii) Set for all $x\in X$ and for each $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$,

$$J_1(s,t)x=\lim_{(h,k)\to(0^+,0^+)}\frac{1}{hk}\int_t^{t+h}\int_s^{s+k}J(u,v)xdudv.$$

Utilizing Theorem 3.1, we have for each $(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$ and for all $x\in X$,

$$\begin{aligned}J_1(s,t)x&=\lim_{(h,k)\to(0^+,0^+)}\frac{1}{hk}\int_t^{t+h}\int_s^{s+k}J(0,v)J(u,0)xdudv\\&=\lim_{(h,k)\to(0^+,0^+)}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}J(0,v)\frac{1}{k}\int_s^{s+k}J(u,0)xdudv\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}J(0,v)\lim_{k\to0^+}\frac{1}{k}\int_s^{s+k}J(u,0)xdudv\\&=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}J(0,v)J(s,0)xdv=J(0,t)J(s,0)x=J(s,t)x.\end{aligned}$$

(iii) Let $x\in X$ and $(a,b),(s,t)\in\mathbb{R}_+^2$. Put $J_2(s,t)x=(aA_1+bA_2)\int_0^t\int_0^sJ(u,v)xdudv$. Hence

$$\begin{aligned}J_2(s,t)x&=(aA_1+bA_2)\int_0^t\int_0^sJ(u,v)xdudv\\&=(aA_1+bA_2)\int_0^tJ(u,0)\Big(\int_0^sJ(0,v)xdv\Big)du\\&=aA_1\int_0^tJ(u,0)\Big(\int_0^sJ(0,v)xdv\Big)du+bA_2\int_0^tJ(u,0)\Big(\int_0^sJ(0,v)xdv\Big)du\\&=a\int_0^sJ(0,v)\Big(J(t,0)x-x\Big)dv+b\int_0^tJ(u,0)\Big(J(0,s)x-x\Big)du.\end{aligned}$$

Then

$$\int_0^t\int_0^sJ(u,v)xdudv\in D\Big((A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Big)$$

for all $(a,b),(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ and for any $x\in X$. □

Theorem 3.5. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup of continuous linear operators on X with infinitesimal generator (A_1,A_2). Then $(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ is a closed operator with dense domain in X for any $(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.*

P r o o f. Since $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ is an exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X, then $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ are one parameter C_0-semigroups on X. Utilizing Theorem 3.1, it follows that their infinitesimal generators A_1 and A_2 are both closed in X. Then for all $u=(a,b)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$,

$$(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}x=\lim_{h\to 0}\frac{J(ah,bh)x-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{J_1(h)x-x}{h},$$

where $J_1(h)=J(hu)$. Since $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ is an exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X, then $(J_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ is a C_0-semigroup on X. From Theorem 3.1, $(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}x=aA_1x+bA_2x$ is a closed operator. Being the infinitesimal generator of a C_0-semigroup, aA_1+bA_2 has a dense domain in X. $\square$

Theorem 3.6. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ and $(S(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroups of continuous linear operators on X. Suppose that both has the same generator (A_1,A_2). Then $J(s,t)=S(s,t)$ for any $s,t\in\mathbb{R}_+$.*

P r o o f. Since A_1 is the infinitesimal generator of the one parameter C_0-semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$, then from Theorem 3.2, $J(s,0)=S(s,0)$ for any $s\in\mathbb{R}_+$. Similarly $J(0,t)=S(0,t)$ for any $t\in\mathbb{R}_+$. $\square$

Let $A\in\mathcal{L}(X)$, then the resolvent set $\rho(A)$ of A is defined by

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\}. \tag{3.3}$$

Set for all $\lambda\in\rho(A)$, $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$, then $R(\lambda,A)$ is called the resolvent of A. For more details, see [7, p. 236].

Let A_1 and A_2 be two linear operators on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X, then the domain of the composite operator A_1A_2 is

$$D(A_1A_2)=\{x\in D(A_2):A_2x\in D(A_1)\}.$$

We consider the following conditions on A_1 and A_2 :

(a) $D(A_1A_2)\cap D(A_1)=D(A_2A_1)\cap D(A_2)=D\neq\{0\}$.

(b) $D(A_2(\lambda_0-A_1))\subset D(A_2A_1)$ for some $\lambda_0\in\rho(A_1)$.

(c) $A_1A_2x=A_2A_1x$ for any $x\in D$.

Lemma 3.1. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Suppose that A_1 and A_2 satisfy $(a),(b)$ and (c), hence*

(i) $D=R(\lambda,A_1)R(\mu,A_2)X$ *and* $R(\lambda,A_1),R(\mu,A_2)$ *commute for any* $\lambda\in\rho(A_1)$ *and* $\mu\in\rho(A_2)$,

(ii) $A_2R(\lambda,A_1)x=R(\lambda,A_1)A_2x$, $x\in D$ *and* $\lambda\in\rho(A_1)$.

P r o o f. Let λ_0 be as in (b). It is easy to see that

$$D=D(A_2(\lambda_0-A_1))=R(\lambda_0,A_1)R(\mu,A_2)X.$$

Let $x \in X$ and set $z = R(\lambda_0, A_1)R(\mu, A_2)x$, then z is in D. Using (c),

$$x = (\lambda_0 I - A_1)(\mu I - A_2)z,$$

then $R(\lambda_0, A_1), R(\mu, A_2)$ commute. Since $D(A_1) = R(\lambda_0, A_1)X = R(\lambda, A_1)X$ for all $\lambda \in \rho(A_1)$, we obtain $D = R(\mu, A_2)R(\lambda, A_1)X$. Now (i) follows by the preceding argument with λ_0 replaced by λ. Next, we note by (i) that $R(\lambda, A_1)D \subset D$. Hence from (c), we have

$$(\mu - A_2)x = (\mu - A_2)(\lambda - A_1)R(\lambda, A_1)x = (\lambda - A_1)(\mu - A_2)R(\lambda, A_1)x, \quad x \in D. \tag{3.4}$$

Then for all $x \in D(A_2)$,

$$(\mu - A_2)x = (\lambda - A_1)R(\lambda, A_1)(\mu - A_2)x, \quad x \in D. \tag{3.5}$$

From (3.4) and (3.5), it follows (ii). □

Let us recall that the generator of an exponentially equicontinuous C_0-semigroup $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfying for any $p \in \Gamma_X$, there exist $\omega \in \mathbb{R}_+$ and $q \in \Gamma_X$ such that for all $x \in X$, $t \in \mathbb{R}_+$, $p(J(t)x) \le e^{\omega t} q(x)$ is a densely defined closed linear operator such that its resolvent operator given by

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} J(t)x dt, \quad x \in X, \quad Re(\lambda) > \omega$$

and

$$J(t)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda, \quad x \in X, \tag{3.6}$$

where $\gamma > \max\{0, \omega\}$.

Theorem 3.7. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be two exponentially equicontinuous C_0-semigroups on X with generators A_1 and A_2 respectively. Then $(J(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ commute if and only if A_1 and A_2 satisfy conditions (a), (b) and (c).*

P r o o f. First we demonstrate that D is dense in X. It suffices to prove that it is dense in $D(A_1)$ since the latter is dense in X. Let $x \in D(A_1)$, hence $x = R(\lambda, A_1)y$ for some $y \in X$ and $\lambda \in \rho(A_1)$. Since $D(A_2)$ is dense in X, there is a sequence $(y_n)_n$ in $D(A_2)$ such that $y_n \to y$ as $n \to \infty$. So $R(\lambda, A_1)y_n \to R(\lambda, A_1)y = x$, where $R(\lambda, A_1)y_n \in D$ from Lemma 3.1.

Sufficiency. Let $x \in D$ and $\gamma > \max\{0, \omega\}$. Utilizing (3.6), (ii) of Lemma 3.1 and A_2 is closed, we have

$$J(t)A_2 x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} A_2(e^{\lambda t} R(\lambda, A)x) d\lambda = A_2 J(t)x.$$

In particular $J(t)$ maps D into $D(A_2)$ and since $R(\mu, A_2)$ maps D into itself (Lemma 3.1), $J(t)R(\mu, A_2)$ maps D into $D(A_2)$. Hence for $x \in D$,

$$(\mu I - A_2)J(t)R(\mu, A_2)x = J(t)(\mu I - A_2)R(\mu, A_2)x = J(t)x$$

then $J(t)$ and $R(\mu, A_2)$ commute on D. From (3.6), we have $J(t)S(t)x = S(t)J(t)x$ for any $x \in D$ and $t \in \mathbb{R}_+$. Since D is dense, we obtain $J(t)S(t)x = S(t)J(t)x$ for any $x \in X$ and $t \in \mathbb{R}_+$.

Necessity. Suppose that $J(t)S(t) = S(t)J(t)$ for any $t \in \mathbb{R}_+$. Let $A_2(h) = h^{-1}(S(t) - I)$, then $A_2(h)$ and $J(t)$ commute for any sufficiently small h. From A_2 is closed and letting $h \to 0^+$, we have $J(t)A_2x = A_2J(t)x$ for all $x \in D(A_2)$. By (3.6), we have $R(\lambda, A_1)A_2x = A_2R(\lambda, A_1)x$. In particular, $R(\lambda, A_1)D(A_2) \subset D(A_2)$. Hence (b) holds. To demonstrate (a) and (c), let $x \in D(A_1A_2) \cap D(A_1)$, hence

$$A_1A_2x = \lim_{h\to 0^+} A(h)A_2x = \lim_{h\to 0^+} A_2A(h)x = A_2A_1x,$$

where $A(h) = h^{-1}(J(h) - I)$. So $A_1x \in D(A_2)$, then $x \in D(A_2A_1) \cap D(A_2)$. The converse inclusion follows from symmetry. □

Now, we try to see the form of the resolvent of two parameter semigroups.

Theorem 3.8. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X satisfying for any $p \in \Gamma_X$, there exist $\omega_1, \omega_2 > 0$ and $q \in \Gamma_X$ such that for all $x \in X$, $p(J(s,t)x) \le e^{\omega_1 s + \omega_2 t}q(x)$ with infinitesimal generator (A_1, A_2). If in addition $\lambda \in \rho\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$ and $\lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$, then*

$$R\Big(\lambda, (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt.$$

P r o o f. Let $x \in X$ and $\lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$, define

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt.$$

Since the map $t \mapsto J(at, bt)$ is continuous and $\lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$, the integral exists as an improper Riemann integral and defines a continuous linear operator on X. Moreover, for $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{J(ah, bh) - I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(J(a(t+h), b(t+h))x - J(at, bt)x)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}J(at, bt)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}J(at, bt)xdt.
\end{aligned}$$

Letting $h \to 0^+$, we obtain

$$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Hence $R(\lambda)x \in D\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$ for any $x \in X$. Then

$$\Big(\lambda I - (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)R(\lambda) = I.$$

Now, for $x \in D\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$, we obtain

$$R(\lambda)(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} J(at, bt)x dt.$$

Moreover, $(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ is closed, then

$$R(\lambda)(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x = (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \int_0^\infty e^{-\lambda t} J(at, bt)x dt = (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} R(\lambda)x.$$

Thus

$$R(\lambda)\Big(\lambda I - (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)x = x$$

for all $x \in D\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$. Since $D\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)$ is dense in X, we have

$$R(\lambda)\Big(\lambda I - (A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big) = I.$$

□

As an extension of Trotter's theorem [3] to sequentially complete locally convex spaces.

Theorem 3.9. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be two exponentially equicontinuous C_0-semigroups on X with generators A_1 and A_2 respectively. If the semigroups commute, then the product $U(t) = T(t)S(t)$ is a C_0-semigroup, whose generator is the closure of $A_1 + A_2$.*

R e m a r k 3.2. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Let $(T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ and $(S(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be two exponentially equicontinuous C_0-semigroups on X with generators A_1 and A_2 respectively. It is clear that if A_1 and A_2 satisfy (a), (b) and (c), hence the conclusion of Trotter's theorem holds.

Now, we demonstrate one of the main results of this paper (Generalization of the Hille–Yosida Theorem to two parameter semigroups).

Theorem 3.10. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X satisfying for any $p \in \Gamma_X$, there exist $\omega_1, \omega_2 > 0$ and $q \in \Gamma_X$ such that for all $x \in X$, $p(J(s,t)x) \le e^{\omega_1 s + \omega_2 t} q(x)$. Then the linear transformation (A_1, A_2) on $\mathbb{R}_+^2$ into $\mathcal{L}(X)$ defined by*

$(A_1, A_2)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} x = sA_1x + tA_2x$ is the infinitesimal generator of $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ on X if and only if the following statements hold:

(i) $(A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *is a closed operator and* $\overline{D\Big((A_1, A_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Big)} = X$ *for all* $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$.

(ii) $(\omega_i, \infty) \subseteq \rho(A_i)$ *for* $i = 1, 2$.

(iii) *The families* $\{(\lambda-\omega_i)^n R(\lambda, A_i)^n;\ \lambda>\omega_i,\ n\in\mathbb{N}\}$, $i=1,2$, *are equicontinuous.*

(iv) A_i *satisfy conditions* $(a),(b)$ *and* (c) *for* $i=1,2$.

P r o o f. Let $(J(s,t))_{(s,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}$ be two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X. By Theorem 3.1, (i) holds. Since A_1 and A_2 are the infinitesimal generators of the one parameter semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively, hence from Theorem 2.3, (ii) and (iii) hold. Since $(J(s,t))_{s,t\in\mathbb{R}_+}$ is a semigroup of operators on X, then $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ commute for all $s,t\in\mathbb{R}_+$. Using Theorem 3.7, (iv) is satisfied.

Conversely, let $(a,b)\in\mathbb{R}_+$. Then $(A_1,A_2)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=aA_1+bA_2$. In particular if $(a,b)=(1,0)$ and from (i), it follows that A_1 is a closed operator and $\overline{D(A_1)}=X$. Similarly if $(a,b)=(0,1)$, we get A_2 is a closed operator and $\overline{D(A_2)}=X$. From (ii),(iii) and Theorem 2.3, then A_1 and A_2 are the infinitesimal generators of one parameter C_0-semigroups $(J(s,0))_{s\in\mathbb{R}_+}$ and $(J(0,t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ respectively. Since A_1 and A_2 satisfy (iv), hence from Theorem 3.7, $J(0,t)$ and $J(s,0)$ commute for all $s,t\in\mathbb{R}_+$. Thus for all $s,t\in\mathbb{R}_+$, $J(s,t)=J(s,0)J(0,t)$ is a two parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X with infinitesimal generator (A_1,A_2). $\square$

4. Genaration theorem for n-parameter semigroups of operators in locally convex spaces

In this section, we set $u=(s_1,\cdots,s_n)$, $v=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$, then we have the following definition.

D e f i n i t i o n 4.1. Let X be a locally convex space. An n-parameter family $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ of continuous linear operators on X is said to be an n-parameter semigroup if

(i) $J(0,\dots,0)=I$ where $(0,\dots,0)\in\mathbb{R}_+^n$,

(ii) For all $u,v\in\mathbb{R}_+^n$, $J(u+v)=J(u)J(v)$.

D e f i n i t i o n 4.2. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. An n-parameter semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X is an n-parameter strongly continuous semigroup or an n-parameter C_0-semigroup if $\lim_{u\to(0^+,\dots,0^+)}J(u)x=x$ for all $x\in X$.

D e f i n i t i o n 4.3. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. An n-parameter C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ is equicontinuous if for any continuous seminorm p on X, there exists a continuous seminorm q on X such that for all $x\in X$ and for each $u\in\mathbb{R}_+^n$, $p(J(u)x)\le q(x)$.

D e f i n i t i o n 4.4. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. An n-parameter C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ is exponentially equicontinuous if there exist $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n>0$ such that $\{e^{-\sum_{k=1}^n\omega_k s_k}J(u);\ u\in\mathbb{R}_+^n\}$ is equicontinuous.

R e m a r k 4.1. Let X be a sequentially complete locally convex space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter semigroup on X, then for all $u=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}_+^n$,

$$J(u)=\prod_{k=1}^n J(u_k),\quad u_k=(0,\dots,s_k,0\dots)=s_ke_k,$$

where $(e_k)_{1\le k\le n}$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^n$.

D e f i n i t i o n 4.5. Let X be a locally convex space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter semigroup on X. The infinitesimal generator of the n-parameter semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ is the derivative of J at $(0,\ldots,0)$.

R e m a r k 4.2. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X. Then for any $x\in X$, the map $(s_1,\ldots,s_n)\mapsto J(s_1,\ldots,s_n)x$ is continuous on $\mathbb{R}_+^n$ into X. Let $(A_k)_{1\le k\le n}$ be a sequence of linear operators defined by for all $k\in\{1,\ldots,n\}$,

$$D(A_k)=\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{J(he_k)x-x}{h}\ \text{exists in}\ X\}$$

and

$$A_kx=\lim_{h\to 0^+}\frac{J(he_k)x-x}{h}=\frac{\partial J(u)}{\partial s_k}\Big|_{u=(0,\ldots,0)}\ \text{for each}\ x\in D(A_k).$$

It is easy to see that $A_1,\ldots,A_n$ are the infinitesimal generators of the one parameter semigroups $(J(s_1e_1))_{s_1\in\mathbb{R}_+},\ \ldots,\ (J(s_ne_n))_{s_n\in\mathbb{R}_+}$ respectively. From the definition of the infinitesimal generator, we have.

Theorem 4.1. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup on X. Then the infinitesimal generator of $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ is the linear transformation $L:\mathbb{R}_+^n\to\mathcal{L}(\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k),X)$ defined by for any $x\in\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k)$ and $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$,*

$$L(a_1,\ldots,a_n)x=(A_1,\ldots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=\sum_{k=1}^{n}a_kA_kx.$$

Furthermore if $x\in\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k)$, we have for all $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$,

$$DJ(s,t)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=(A_1,\ldots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}J(s,t)x,$$

where $A_1,\ldots,A_n$ are the infinitesimal generators of the one parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroups $(J(s_1e_1))_{s_1\in\mathbb{R}_+},\ \ldots,\ (J(s_ne_n))_{s_n\in\mathbb{R}_+}$ respectively.

P r o o f. The proof is similar to the proof of Theorem 3.3. □

D e f i n i t i o n 4.6. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter semigroup of continuous linear operators on a sequentially complete locally convex Hausdorff space X. Then the directional derivative D_wJ of $J(u)$ at $(0,\ldots,0)$ in the direction of $w=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$ is defined by

$$Domain(D_wJ)=\{x\in X:\lim_{h\to 0^+}\frac{J(hw)x-x}{h}\ \text{exists in}\ X\}$$

and for all $x\in Domain(D_wJ)$,

$$D_wJx=\lim_{h\to 0^+}\frac{J(hw)x-x}{h}.$$

Similarly to the Proposition 3.1, we have

Proposition 4.1. *Let* $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ *be an* n*-parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroup of continuous linear operators on a sequentially complete locally convex Hausdorff space* X. *Then for* $w=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $D_wJx=\sum_{k=1}^{n}a_kA_kx$ *is the infinitesimal generator of the one parameter product semigroup* $\prod_{k=1}^n J(a_ks_ke_k)$, *where* A_k *are the infinitesimal generator of the one parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroup* $(J(s_ke_k))_{s_k\in\mathbb{R}_+}$, $k=1,\dots,n$.

Similarly to the Theorem 3.4, we have

Theorem 4.2. *Let* X *be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let* $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ *be an* n*-parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroup of continuous linear operators on* X. *Then the followings hold:*

(i) $DJ(u)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}J(u)x$ *for all* $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$ *and all* $x\in X$, *where* $A_1,\dots,A_n$ *are the infinitesimal generators of the one parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroups* $(J(s_1e_1))_{s_1\in\mathbb{R}_+},\dots,(J(s_ne_n))_{s_n\in\mathbb{R}_+}$ *respectively.*

(ii) *For any* $x\in X$ *and* $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$, *we have*

$$\lim_{h\to(0^+,\dots,0^+)}\frac{1}{h_1\dots h_n}\int_{t_n}^{t_n+h_n}\dots\int_{t_1}^{t_1+h_1}J(u)x\,ds_1\dots ds_n=J(t)x,$$

where $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

(iii) *For any* $x\in X$ *and* $(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}_+^n$, *we have*

$$\int_0^{h_n}\dots\int_0^{h_1}J(u)x\,ds_1\dots ds_n\in D\Big((A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\Big).$$

As a generalization of Theorem 3.5, we have

Theorem 4.3. *Let* X *be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let* $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ *be an* n*-parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroup of continuous linear operators on* X *with infinitesimal generator* $(A_1,\dots,A_n)$. *Then* $(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ *is a closed operator with dense domain in* X *for any* $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$

As a generalization of Theorem 3.6, we obtain.

Theorem 4.4. *Let* X *be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let* $(T(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ *and* $(S(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ *be two parameter exponentially equicontinuous* C_0*-semigroups of continuous linear operators on* X. *Suppose that both has the same generator* $(A_1,\dots,A_n)$. *Then* $T(u)=S(u)$ *for any* $u=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

Now, we obtain a generalization of Theorem 3.9.

Theorem 4.5. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, \ldots, (J_n(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be exponentially equicontinuous C_0-semigroups with generators $A_1,\ldots,A_n$ respectively. If for all $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ and for any $t\in\mathbb{R}_+$, $J_i(t)J_j(t)=J_j(t)J_i(t)$, then the product $U(t)=\prod_{k=1}^n J_k(t)$ is a C_0-semigroup, whose generator is the closure of* $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.

R e m a r k 4.3. Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, \ldots, (J_n(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be exponentially equicontinuous C_0-semigroups with generators $A_1,\ldots,A_n$ respectively. It is clear that if $A_1,\ldots,A_n$ satisfy (a), (b) and (c), hence the conclusion of Trotter's theorem holds.

Now, we demonstrate one of the main results of this paper (Generalization of the Hille–Yosida Theorem to n-parameter semigroups).

Theorem 4.6. *Let X be a sequentially complete locally convex Hausdorff space, and let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter C_0-semigroup on X satisfying for any $p\in\Gamma_X$, there exist $\omega_1,\ldots,\omega_n>0$ and $q\in\Gamma_X$ such that for all $x\in X$, $p(J(u)x)\le e^{\sum_{k=1}^n \omega_k s_k} q(x)$. Then the linear transformation $(A_1,\ldots,A_n)$ on $\mathbb{R}_+^n$ into $\mathcal{L}(X)$ defined by $(A_1,\ldots,A_n)\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} x = \sum\limits_{k=1}^n a_k A_k$ is the infinitesimal generator of an n-parameter exponentially equicontinuous C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X if and only if the following assertions hold:*

(i) $(A_1,\ldots,A_n)\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}$ *is a closed operator and* $\overline{D\Big((A_1,\ldots,A_n)\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}\Big)} = X$ *for all* $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

(ii) $(\omega_i,\infty)\subseteq\rho(A_i)$ *for all* $i\in\{1,\ldots,n\}$.

(iii) *The families* $\{(\lambda-\omega_i)^n R(\lambda,A_i)^n; \lambda>\omega_i, n\in\mathbb{N}\}$ *are equicontinuous for all* $i\in\{1,\ldots,n\}$.

(iv) *For all* $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ $(i\ne j)$, A_i *and* A_j *satisfy conditions* (a), (b) *and* (c).

5. Genaration theorem for n-parameter semigroups of operators in Banach spaces

In this section, we put $u=(s_1,\ldots,s_n)$, $v=(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$, then we get the following definition.

D e f i n i t i o n 5.1. [1] Let X be a Banach space. An n-parameter family $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ of continuous linear operators on X is said to be an n-parameter semigroup if

(i) $J(0,\ldots,0)=I$ where $(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}_+^n$,

(ii) For all $u,v\in\mathbb{R}_+^n$, $J(u+v)=J(u)J(v)$.

D e f i n i t i o n 5.2. Let X be a Banach space. An n-parameter semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X is an n-parameter strongly continuous semigroup or an n-parameter C_0-semigroup if $\lim_{u\to(0^+,\ldots,0^+)} J(u)x=x$ for all $x\in X$.

R e m a r k 5.1. [1] Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ be an n-parameter semigroup on X, then for all $u=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}^n_+$,

$$J(u)=\prod_{k=1}^{n}J(u_k)\quad u_k=(0,\dots,s_k,0\dots)=s_ke_k,$$

where $(e_k)_{1\le k\le n}$ is the canonical basis of $\mathbb{R}^n$.

D e f i n i t i o n 5.3. Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ be an n-parameter semigroup on X. The infinitesimal generator of the n-parameter semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ is the derivative of J at $(0,\dots,0)$.

R e m a r k 5.2. Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ be an n-parameter C_0-semigroup on X. Then for any $x\in X$, the map $(s_1,\dots,s_n)\mapsto J(s_1,\dots,s_n)x$ is continuous on $\mathbb{R}^n_+$ into X. Let $A_1,\dots,A_n$ be the linear operators defined by for all $k\in\{1,\dots,n\}$,

$$D(A_k)=\{x\in X:\lim_{h\to0^+}\frac{J(he_k)x-x}{h}\text{ exists in }X\}$$

and

$$A_kx=\lim_{h\to0^+}\frac{J(he_k)x-x}{h}=\frac{\partial J(u)}{\partial s_k}\Big|_{u=(0,\dots,0)},\ \text{ for each } x\in D(A_k).$$

It is easy to see that $A_1,\dots,A_n$ are the infinitesimal generators of the one parameter semigroups $(J(s_1e_1))_{s_1\in\mathbb{R}_+}$, … $(J(s_ne_n))_{s_n\in\mathbb{R}_+}$, respectively. From the definition of the infinitesimal generator, we have.

Theorem 5.1. *Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ be an n-parameter C_0-semigroup on X. Then the infinitesimal generator of the n-parameter C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ is the linear transformation $L:\mathbb{R}^n_+\to\mathcal{L}(\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k),X)$ defined by for any $x\in\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k)$ and $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$,*

$$L(a_1,\dots,a_n)x=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=\sum_{k=1}^{n}a_kA_kx.$$

Furthermore if $x\in\bigcap_{k=1}^{n}D(A_k)$, we have for all $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n_+$,

$$DJ(s,t)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}J(s,t)x$$

where A_k are the infinitesimal generator of the one parameter C_0-semigroup $(J(s_ke_k))_{s_k\in\mathbb{R}_+}$, $k=1,\dots,n$.

P r o o f. The proof is similar to the proof of Theorem 3.3. ☐

D e f i n i t i o n 5.4. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter semigroup of continuous linear operators on a Banach space X. Then the directional derivative D_wJ of $J(u)$ at $(0,\dots,0)$ in the direction of $w=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$ is defined by

$$Domain(D_wJ)=\{x\in X:\lim_{h\to0^+}\frac{J(hw)x-x}{h}\text{ exists in }X\}$$

and for all $x\in Domain(D_wJ)$,

$$D_wJx=\lim_{h\to0^+}\frac{J(hw)x-x}{h}.$$

Similarly to the Proposition 3.1, we have

P r o p o s i t i o n 5.1. *Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter C_0-semigroup of continuous linear operators on a Banach space X. Then for $w=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $D_wJx=\sum_{k=1}^n a_kA_k$ is the infinitesimal generator of the one parameter product semigroup $\prod_{k=1}^n J(a_ks_ke_k)$ where A_k are the infinitesimal generator of the one parameter C_0-semigroup $(J(s_ke_k))_{s_k\in\mathbb{R}_+}$, $k=1,\dots,n$.*

Similarly to the Theorem 3.4, we have

Theorem 5.2. *Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter C_0-semigroup of continuous linear operators on X. Then the followings hold:*

(i) *$DJ(u)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}J(u)x$ for all $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$ and all $x\in\bigcap_{k=1}^n D(A_k)$, where $A_1,\dots,A_n$ are the infinitesimal generators of the one parameter C_0-semigroups $(J(s_1e_1))_{s_1\in\mathbb{R}_+}$, $\dots$, $(J(s_ne_n))_{s_n\in\mathbb{R}_+}$ respectively.*

(ii) *For any $x\in X$ and $t=(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$, we have*

$$\lim_{h\to(0^+,\dots,0^+)}\frac{1}{h_1\dots h_n}\int_{t_n}^{t_n+h_n}\dots\int_{t_1}^{t_1+h_1}J(u)x\,ds_1\dots ds_n=J(t)x,$$

where $h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

(iii) *For any $x\in X$ and $(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}_+^n$, we have*

$$\int_0^{h_n}\dots\int_0^{h_1}J(u)x\,ds_1\dots ds_n\in D\Big((A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\Big).$$

As a generalization of Theorem 3.5, we have

Theorem 5.3. *Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter C_0-semigroup of continuous linear operators on X with infinitesimal generator $(A_1,\dots,A_n)$. Then*

$(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ is a closed operator with dense domain in X for any $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

As a generalization of Theorem 3.6, we obtain.

Theorem 5.4. *Let X be a Banach space. Let $(T(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ and $(S(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be two parameter C_0-semigroups of continuous linear operators on X. Suppose that both has the same generator $(A_1,\dots,A_n)$. Then $T(u)=S(u)$ for any $u=(s_1,\dots,s_n)\in\mathbb{R}_+^n$.*

Now, we obtain a generalization of Theorem 3.9.

Theorem 5.5. *Let X be a Banach space. Let $(T_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, \dots, (T_n(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be C_0-semigroups with generators $A_1,\dots,A_n$ respectively. If for all $i,j\in\{1,\dots,n\}$ and for any $t\in\mathbb{R}_+$, $T_i(t)T_j(t)=T_j(t)T_i(t)$, then the product $U(t)=\prod_{k=1}^n T_k(t)$ is a C_0-semigroup, whose generator is the closure of $\displaystyle\sum_{k=1}^n A_k$.*

R e m a r k 5.3. Let X be a Banach space. Let $(T_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, \dots, (T_n(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ be C_0-semigroups with generators $A_1,\dots,A_n$ respectively. It is clear that if $A_1,\dots,A_n$ satisfy (a), (b) and (c), hence the conclusion of Trotter's theorem holds.

There exists a generalization of the Hille–Yosida Theorem for n-parameter semigroups in Banach spaces due to Abdelaziz see [1, Theorem 2]. Now, we get a another characterization used the definition of the infinitesimal generator for n-parameter semigroups in Banach spaces.

Theorem 5.6. *Let X be a Banach space. Let $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ be an n-parameter C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X satisfying for all $u\in\mathbb{R}_+^n$ and for each $x\in X$, $\|J(u)x\|\le Me^{\sum_{k=1}^n \omega_k s_k}$ for some $\omega_1,\dots,\omega_n,M>0$. Then the linear transformation $(A_1,\dots,A_n)$ on $\mathbb{R}_+^n$ into $\mathcal{L}(X)$ defined by*

$$(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}x=\sum_{k=1}^n a_kA_kx$$

is the infinitesimal generator of an n-parameter C_0-semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X if and only if the following hold:

(i) $(A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ *is a closed operator and* $\overline{D\Big((A_1,\dots,A_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\Big)}=X$ *for all* $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^n$.

(ii) $(\omega_i,\infty)\subseteq\rho(A_i)$ *for* $i=1,\dots,n$.

(iii) $\|R(\lambda,A_i)^n\|\le\frac{M_i}{(\lambda-\omega_i)^n}$ *for* $\lambda>\omega_i$ *and* $i=1,\dots,n$.

(iv) *For all* $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ $(i\ne j)$, A_i *and* A_j *satisfy conditions* (a), (b) *and* (c).

D e f i n i t i o n 5.5. Let X be a Banach space. An n-parameter semigroup $(J(u))_{u\in\mathbb{R}_+^n}$ on X is an n-parameter uniformly semigroup if

$$\lim_{u\to(0^+,\dots,0^+)}\|J(u)-I\|=0.$$

As a generalization of [2, Theorem 2.9], we have

Theorem 5.7. *Let X be a Banach space. Then the following are equivalent:*

(i) *The linear transformation* $A = (A_1, \dots, A_n)$ *on* $\mathbb{R}^n_+$ *into* $\mathcal{L}(X)$ *defined by*

$$(A_1, \dots, A_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} x = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k x$$

is the infinitesimal generator of an uniformly continuous n*-parameter semigroup* $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ *of continuous linear operators on* X.

(ii) A_i *and* A_j *are bounded linear operators on* X, *and* A_i *and* A_j *commute for all* $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$.

As a generalization of [2, Theorem 2.10], we have

Theorem 5.8. *Let* $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$ *be an uniformly continuous* n*-parameter semigroup of continuous linear operators on a Banach space* X. *Then*

(i) *There exist constants* $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ *such that* $\|J(u)x\| \leq e^{\sum_{k=1}^{n}\omega_k s_k}$ *for all* $u = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$.

(ii) *There exist bounded linear operators* $A_1, \dots, A_n$ *such that* $J(u) = \prod_{k=1}^{n} e^{s_k A_k}$ *for all* $u = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n_+$.

(iii) *The linear transformation* $A = (A_1, \dots, A_n)$ *on* $\mathbb{R}^n_+$ *into* $\mathcal{L}(X)$ *defined by*

$$(A_1, \dots, A_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} x = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k x$$

is the infinitesimal generator of the $(J(u))_{u\in\mathbb{R}^n_+}$.

(iv) *The map* $u \mapsto J(u)$ *is differentiable in the norm and*

$$DJ(u)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} x = (A_1, \dots, A_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} x.$$

R e m a r k 5.4. For $n = 2$, the results of this section due to Al-Sharif and Khalil [2].

References

[1] N. H. Abdelaziz, “Commutativity and generation of n-parameter semigroups of bounded linear operators”, *Houston Journal of Mathematics*, **9**:2 (1983), 151–156.

[2] Sh. Al-Sharif, R. Khalil, “On the generator of two parameter semigroups”, *Appl. Math. Comput.*, **156**:2 (2004), 403–414.

[3] H. F. Trotter, “On the product of semigroups of operators”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **10**:4 (1959), 545–551.

[4] V. A. Babalola, “Semigroups of operators on locally convex spaces”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **199** (1974), 163–179.

[5] S. Ouchi, “Semi-groups of operators in locally convex spaces”, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **25**:2 (1973), 265–276.

[6] H. Komatsu, "Semi-groups of operators in locally convex spaces", *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **16**:3 (1964), 230–262.

[7] T. Komura, "Semigroups of operators in locally convex spaces", *Journal of Functional Analysis*, **2**:3 (1968), 258–296.

[8] L. Naciri, E. Beckenstein, *Topological Vector Spaces*, 2-nd ed., Taylor & Francis Group, Boca Raton–London–New York, 2011.

[9] T. Granucci, "Integrated Semigroups on Fréchet space I : Bochner integral, Laplace integral and real representation theorem", *Journal of Mathematics Research*, **11**:1 (2019), 118–143.

[10] Y. H. Choe, "C_0-semigroups on a locally convex space", *J. Math. Anal. Appl.*, **106**:2 (1985), 293–320.

[11] K. Singbal–Vedak, "Semigroups of operators on a locally convex space", *Commentationes Mathematicae*, **16**:1 (1972), 53–74.

[12] J. Ettayb, "A Hille–Yosida theorem for two parameter equicontinuous C_0-semigroups on locally convex spaces", *Novi Sad J. Math.* (to appear).

[13] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. V. 44, Applied Mathematical Sciences, Springer–Verlag, New York, 1983.

Information about the author

Jawad Ettayb, Doctor of Mathematics, Professor at Hamman Al–Fatawaki Collegiate High School, Regional Academy of Education and Training of Casablanca–Settat, Had Soualem, Morocco. E-mail: jawad.ettayb@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4819-943X

Received 08.02.2025
Reviewed 26.05.2025
Accepted for press 06.06.2025

Информация об авторе

Эттайб Джавад, доктор математики, профессор университетской средней школы Колледжа Хаммана Аль–Фатаваки, Региональная академия образования и обучения Касабланка–Сеттат, г. Хад Суалем, Марокко. E-mail: jawad.ettayb@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4819-943X

Поступила в редакцию 08.02.2025 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2025 г.
Принята к публикации 06.06.2025 г.