Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 24, № 127, 2019

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам (распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html;
http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-76133 от 03 июля 2019 г.
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: Т.А. Сустина, М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, С.Ю. Можаров
Технический секретарь М.В. Борзова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2019. – Т. 24, № 127. – 104 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127

Подписано в печать 06.09.2019. Дата выхода в свет 23.10.2019
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 13. Усл. печ. л. 12,09. Тираж 1000 экз. Заказ № 19267. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2019
© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2019
При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.
Ответственность за содержание публикаций несет автор

16+

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 24, no. 127, 2019

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences".

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. G.I. Malaschonok (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasynkov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, French Republic), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portuguese Republic), Prof., Dr. A.V. Ponossov (Ås, Kingdom of Norway), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html;
http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИ no. ФС77-76133 of July 3, 2019
Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency "Rospechat" is 83372

Editors: T.A. Sustina, M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, S.Y. Mozharov
Technical editor M.V. Borzova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2019. – Vol. 24, no. 127. – 104 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127

Podpisano v pechat' 6.09.2019. Data vykhoda v svet 23.10.2019
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.
Pech. list 13. Usl. pech. list 12,09. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 19267. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,
FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy"
of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

© FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University", 2019
© The journal "Russian Universities Reports. Mathematics", 2019
The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.
The author is responsible for the contents of publications

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Andersen N.B., Flensted-Jensen M., 2019
DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-241-251
УДК 517.986.66

Asymptotics for the Radon transform on hyperbolic spaces

Nils Byrial ANDERSEN[1], **Mogens FLENSTED-JENSEN**[2]
[1] Aarhus University
1 Nordre Ringgade, Århus C DK-8000, Denmark
e-mail: byrial@imf.au.dk
[2] University of Copenhagen
10 Nørregade, Copenhagen K DK-1017, Denmark
e-mail: mfj@life.ku.dk

Асимптотика преобразования Радона на гиперболических пространствах

Нильс Бириал АНДЕРСЕН[1], **Могенс ФЛЕНСТЕД-ЙЕНСЕН**[2]
[1] Орхусский университет
DK-8000, Дания, Орхус С, Северная кольцевая улица, 1
e-mail: byrial@imf.au.dk
[2] Копенгагенский университет
DK-1017, Дания, Копенгаген К, Северная улица, 10
e-mail: mfj@life.ku.dk

Abstract. Let G/H be a hyperbolic space over $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$, and let K be a maximal compact subgroup of G. Let D denote a certain explicit invariant differential operator, such that the non-cuspidal discrete series belong to the kernel of D. For any L^2-Schwartz function f on G/H, we prove that the Abel transform $\mathcal{A}(Df)$ of Df is a Schwartz function. This is an extension of a result established in [2] for K-finite and $K \cap H$-invariant functions.

Keywords: hyperbolic spaces; Radon transform; cuspidal discrete series; Abel transform

For citation: Andersen N.B., Flensted-Jensen M. Asymptotics for the Radon transform on hyperbolic spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 241–251. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-241-251.

Аннотация. Пусть G/H — гиперболическое пространство над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$, пусть K — максимальная компактная подгруппа группы G. Пусть D обозначает некоторый явно выписываемый дифференциальный оператор — такой, что некаспидальные дискретные серии принадлежат ядру оператора D. Мы доказываем, что для всякой функции f из пространства L^2-Шварца на G/H преобразование Абеля $\mathcal{A}(Df)$ функции Df есть функция Шварца. Это — расширение результата, установленного в [2] для K-финитных и $K \cap H$-инвариантных функций.

Ключевые слова: гиперболические пространства; преобразование Радона; каспидальные дискретные серии; преобразование Абеля

Для цитирования: *Андерсен Н.Б., Фленстед-Йенсен М.* Асимптотика преобразования Радона на гиперболических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 241–251. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-241-251. (In Engl., Abstr. in Russian)

§ 1. Introduction

The *Radon transform* R on the hyperbolic spaces G/H,

$$Rf = \int_{N^*} f(\cdot\, nH)\, dn,$$

where $N^* \subset G$ is a certain unipotent subgroup, and the associated *Abel transform* $\mathcal{A}$, were introduced and studied in [1] and [2]. Generalizing Harish-Chandra's notion of cusp forms for real semisimple Lie groups, a discrete series is said to be *cuspidal* if it is annihilated by the Radon transform. In contrast with the Lie group case, however, *non-cuspidal* discrete series exist. For the projective hyperbolic spaces, these are precisely the spherical discrete series, but for some real non-projective hyperbolic spaces, there also exist non-spherical non-cuspidal discrete series.

Let $\mathcal{C}^2(G/H)$ denote the space of L^2-Schwartz functions on G/H. Except for some boundary cases, $\mathcal{A}$ maps $\mathcal{C}^2(G/H)$ into Schwartz functions in the absence of non-cuspidal discrete series. On the other hand, $\mathcal{A}f$ can be explicitly calculated for functions f belonging to the non-cuspidal discrete series. To complete the picture, we prove below that $\mathcal{A}$ essentially maps the orthocomplement in $\mathcal{C}^2(G/H)$ of the non-cuspidal discrete series into Schwartz functions. To be more precise, let $\Delta_\rho = \Delta + \rho_{\mathfrak{q}}^2$, where Δ denotes the Laplace–Beltrami operator on G/H, and consider the G-invariant differential operator $D = \Delta_\rho(\Delta_\rho - \lambda_1^2)\ldots(\Delta_\rho - \lambda_r^2)$, where $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ are the parameters of the non-cuspidal discrete series. Then $\mathcal{A}(Df)$ is a Schwartz function. This extends our previous result, [2, Theorem 6.1], valid only for the dense G-invariant subspace of $\mathcal{C}^2(G/H)$ generated by the K-irreducible $(K \cap H)$-invariant functions, to all Schwartz functions.

In [2] we also considered the exceptional case corresponding to the Cayley numbers $\mathbb{O}$. We expect our new result to hold for this case as well, but we have not been through the rather cumbersome details.

The second author wants to thank Professor Vladimir Molchanov for the invitation to visit Tambov University, where our results were first reported, in October 2012. We would also like to thank Henrik Schlichtkrull and Job Kuit for helpful discussions and comments.

§ 2. The Radon transform

In this section, we define the Radon transform and the Abel transform for the projective hyperbolic spaces over the classical fields $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ and $\mathbb{H}$. We have tried to keep the presentation and notation to a minimum, see [1] and [2] for further details (including results and proofs).

Let $x \mapsto \overline{x}$ be the standard (anti-) involution of $\mathbb{F}$. Let $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$ be two integers, and consider the Hermitian form $[\cdot,\cdot]$ on $\mathbb{F}^{p+q+2}$ given by

$$[x, y] = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_{p+1}\overline{y}_{p+1} - x_{p+2}\overline{y}_{p+2} - \ldots - x_{p+1+q+1}\overline{y}_{p+1+q+1}\,,$$

where $x, y \in \mathbb{F}^{p+q+2}$. Let $G = \mathrm{U}\,(p+1, q+1; \mathbb{F})$ denote the group of $(p+q+2)\times(p+q+2)$ matrices over $\mathbb{F}$ preserving $[\cdot\,,\,\cdot]$. Thus $\mathrm{U}\,(p+1, q+1; \mathbb{R}) = \mathrm{O}(p+1, q+1)$, $\mathrm{U}\,(p+1, q+1; \mathbb{C}) = \mathrm{U}\,(p+1, q+1)$ and $\mathrm{U}\,(p+1, q+1; \mathbb{H}) = \mathrm{Sp}\,(p+1, q+1)$ in standard notation. Put $\mathrm{U}\,(p\,; \mathbb{F}) = \mathrm{U}\,(p, 0; \mathbb{F})$, and let $K = \mathrm{U}\,(p+1; \mathbb{F}) \times \mathrm{U}\,(q+1; \mathbb{F})$ be the maximal compact subgroup of G fixed by the Cartan involution on G.

Let $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)^T$, where superscript T indicates transpose. Let H be the subgroup $\mathrm{U}\,(p+1, q; \mathbb{F}) \times \mathrm{U}\,(1; \mathbb{F})$ of G stabilizing the line $\mathbb{F}\cdot x_0$ in $\mathbb{F}^{p+q+2}$. The reductive symmetric space G/H can be identified with the projective hyperbolic space $\mathbb{X} = \mathbb{X}(p+1, q+1; \mathbb{F})$,

$$\mathbb{X} = \{z \in \mathbb{F}^{p+q+2} : [z, z] = -1\}/\sim,$$

where $\sim$ is the equivalence relation $z \sim zu$, $u \in \mathbb{F}^*$.

Let X_t, for $t \in \mathbb{R}$, denote the following element in the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G:

$$X_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a matrix of order $p+q+2$). Let $\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ denote the Abelian subalgebra given by X_t, $t \in \mathbb{R}$, let $a_t = \exp(X_t)$ denote the exponential of X_t, and also define $A_{\mathfrak{q}} = \exp(\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}})$.

Let (considered as row vectors)

$$u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{F}^p \quad \text{and} \quad v = (v_q, \ldots, v_1) \in \mathbb{F}^q,$$

and let $w \in \operatorname{Im}\mathbb{F}$ (i. e., $w = 0$ for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Define $N_{u,v,w} \in \mathfrak{g}$ as the matrix given by

$$N_{u,v,w} = \begin{pmatrix} -w & u & v & w \\ -\overline{u}^T & 0 & 0 & \overline{u}^T \\ \overline{v}^T & 0 & 0 & -\overline{v}^T \\ -w & u & v & w \end{pmatrix}.$$

Then

$$\exp(N_{u,v,w}) = I + N_{u,v,w} + \frac{1}{2} \cdot N_{u,v,w}^2 \,,$$

and a small calculation yields that

$$\begin{aligned} & a_t \exp(N_{u,v,w}) \cdot x_0 = \\ & = \Big(\sinh t + \frac{1}{2} \cdot e^t \, (|u|^2 - |v|^2) + e^t \, w, \ \overline{u}; \\ & -\overline{v}, \ \cosh t + \frac{1}{2} \cdot e^t \, (|u|^2 - |v|^2) + e^t \, w \Big)^T , \end{aligned} \tag{1}$$

for any $t \in \mathbb{R}$.

Define the nilpotent subalgebra $\mathfrak{n}^*$ as follows, for $p \geqslant q$,

$$\mathfrak{n}^* = \{ N_{u,v,w} : u = (-\overline{v^r}, u'), \ v \in \mathbb{F}^q, \ u' \in \mathbb{F}^{p-q} \}, \tag{2}$$

and, for $p < q$,

$$\mathfrak{n}^* = \{ N_{u,v,w} : v = (-\overline{u^r}, v'), \ u \in \mathbb{F}^p, \ v' \in \mathbb{F}^{q-p} \}, \tag{3}$$

where u^r, v^r means that the order of the indices is reversed. By abuse of notation, we leave out the superscript ^{r} in what follows.

We finally also define the following ρ-factors. Let $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$, and let

$$\rho_{\mathfrak{q}} = (1/2)(dp + dq + 2(d-1)) \in \mathbb{R}, \quad \rho_1 = (1/2)(|dp - dq| + 2(d-1)) \in \mathbb{R}.$$

Let $N^* = \exp(\mathfrak{n}^*)$ denote the nilpotent subgroup generated by $\mathfrak{n}^*$. For functions f on G/H, we define, assuming convergence,

$$Rf(g) = \int_{N^*} f(gn^*H) \, dn^* \qquad (g \in G). \tag{4}$$

Let $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$, the space of L^2-Schwartz functions on G/H. From [1] and [2], we know that the Radon transform Rf is a smooth function. Also, the integral defining R converges uniformly on compact sets, and R is G- and $\mathfrak{g}$-equivariant.

We define the associated Abel transform $\mathcal{A}$ by $\mathcal{A}f(a) = a^{\rho_1} Rf(a)$, for $a \in A_{\mathfrak{q}}$. We are mainly interested in the values of Rf and $\mathcal{A}f$ on the elements a_s, and thus define $Rf(s) = Rf(a_s)$, and, similarly, $\mathcal{A}f(s) = \mathcal{A}f(a_s)$, for $s \in \mathbb{R}$. Let Δ denote the Laplace–Beltrami operator on G/H. Then, for $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$,

$$\mathcal{A}(\Delta f) = \left(\frac{d^2}{ds^2} - \rho_{\mathfrak{q}}^2 \right) \mathcal{A}f \qquad (s \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Finally, for $R > 0$, let $C_R^\infty(G/H)$ denote the subspace of smooth functions on G/H with support in the (K-invariant) 'ball' $\{ka_s \cdot x_0 \mid |s| \leqslant R\}$ of radius R. Similarly, let $C_R^\infty(\mathbb{R})$ denote the subspace of smooth functions on $\mathbb{R}$ with support in $[-R, R]$, and let $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ denote the Schwartz space on $\mathbb{R}$.

§ 3. The discrete series and the Abel transform

Let $q > 1$, or $d > 1$. The discrete series for the projective hyperbolic spaces can then be parametrized as

$$\{T_\lambda \mid \lambda = \frac{1}{2}(dq - dp) - 1 + \mu_\lambda > 0,\ \mu_\lambda \in 2\mathbb{Z}\},$$

see [1] and [2]. The spherical discrete series are given by the parameters λ for which $\mu_\lambda \leqslant 0$, including the 'exceptional' discrete series corresponding to $\lambda > 0$ for which $\mu_\lambda < 0$.

For $q = d = 1$, the discrete series is parameterized by $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ such that $|\lambda| + \rho_{\mathfrak{q}} \in 2\mathbb{Z}$, and there are no spherical discrete series.

The parameters λ are, via the formula $\Delta f = (\lambda^2 - \rho_{\mathfrak{q}}^2)f$, related to the eigenvalues of Δ acting on functions f in the corresponding representation space in $L^2(G/H)$.

Let D be the G-invariant differential operator $\Delta_\rho(\Delta_\rho - \lambda_1^2)\dots(\Delta_\rho - \lambda_r^2)$, where $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ are the parameters of the non-cuspidal discrete series, and $\Delta_\rho = \Delta + \rho_{\mathfrak{q}}^2$.

We have a complete classification of the cuspidal and non-cuspidal discrete series for the projective hyperbolic spaces, also including information about the asymptotics of the Radon and Abel transforms:

Theorem 1. *Let G/H be a projective hyperbolic space over $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, with $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$.*

(i) *If $d(q-p) \leqslant 2$, then all discrete series are cuspidal.*

(ii) *If $d(q-p) > 2$, then non-cuspidal discrete series exists, given by the parameters $\lambda > 0$ with $\mu_\lambda \leq 0$. More precisely, if $0 \neq f \in \mathcal{C}^2(G/H)$ belongs to T_λ, then $\mathcal{A}f(s) = Ce^{\lambda s}$, with $C \neq 0$.*

(iii) *T_λ is non-cuspidal if and only if T_λ is spherical.*

(iv) *If $p \geqslant q$, and $f \in C_R^\infty(G/H)$, for $R > 0$, then $\mathcal{A}f \in C_R^\infty(\mathbb{R})$.*

(v) *If $d(q-p) \leqslant 1$, and $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$, then $\mathcal{A}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

(vi) *Assume $d(q-p) > 1$. Then $\mathcal{A}(Df) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, for $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$.*

The above theorem is almost identical to [2, Theorem 6.1], except for item (vi), which was only proved for functions in the (dense) G-invariant subspace $\mathcal{V}$ of $\mathcal{C}^2(G/H)$ generated by the K-irreducible $(K \cap H)$-invariant functions. Additionally, [2, Theorem 6.1] furthermore included the exceptional case corresponding to the Cayley numbers $\mathbb{O}$.

Theorem 1 (including the reformulation of (vi)) also holds for the real non-projective spaces $\mathrm{SO}\,(p+1, q+1)_e/\mathrm{SO}\,(p+1, q)_e$, except for item (iii), due to the existence of non-cuspidal non-spherical discrete series corresponding to negative and odd values of μ_λ in the exceptional series, see [1, Section 5].

The conditions in (vi) essentially state that $\mathcal{A}f$ is a Schwartz function if f is perpendicular to all non-cuspidal discrete series. The factor Δ_ρ, however, seems to be necessary (except in the real case with $q-p$ odd), even for the case $d(q-p)=2$, where there are no non-cuspidal discrete series.

In the next section, we prove Theorem 1(vi).

§ 4. Proof of Theorem 1(vi)

First we note, following [2, Section 10], that the Schwartz decay conditions are satisfied near $-\infty$ for $\mathcal{A}(f)$, and thus also for $\mathcal{A}(Df)$. This leaves us to study the Abel transform near $+\infty$.

Let $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$, and write $f[x]=f(gH)$, where $x=g\cdot x_0$. From (1) and (3), we get

$$\begin{aligned} Rf(s) &= \int_{N^*} f(a_s n^* H)dn^* \\ &= \int_{\mathbb{R}^{dq-dp}\times\mathbb{R}^{dp}\times\mathbb{R}^{d-1}} f\left[(\sinh s - 1/2e^s|v'|^2+e^s w, u;\right. \\ &\qquad \left. -u, -v', \cosh s - 1/2e^s|v'|^2+e^s w)\right]\, dv'\,du\,dw. \end{aligned}$$

Let $v'=|v'|\overline{v}$, $v=-\sinh s+1/2e^s|v'|^2$, such that $|v'|^2=1+2e^{-s}v-e^{-2s}$, and $\overline{w}=e^s w$. Then,

$$\begin{aligned} Rf(s) = e^{-ds}\int_{-\sinh s}^{\infty} d\overline{w}\int_M f\left[(\overline{w}-v, u; -u, -(1+2e^{-s}v-e^{-2s})^{1/2}\overline{v}, e^{-s}-v+\overline{w})\right]\times \\ \times(1+2e^{-s}v-e^{-2s})^{(dq-dp)/2-1}\,dv\,d\overline{v}\,du\,, \end{aligned}$$

where $M=\mathbb{S}^{dq-dp-1}\times\mathbb{R}^{dp}\times\mathbb{R}^{d-1}$ and $\mathbb{S}^r$ is the unit sphere in $\mathbb{R}^r$.

We will use the identification of $\mathbb{X}=\mathbb{X}(p+1,q+1;\mathbb{F})$ with

$$\mathbb{X}=\{z\in\mathbb{F}^{p+q+2} : [z,z]<0\}/\sim,$$

and identify a function f on $\mathbb{X}$ with a homogeneous function of z of degree zero on $\{z\in\mathbb{F}^{p+q+2} : [z,z]<0\}$.

We now identify $\mathbb{F}^{p+q+2}$ with $\mathbb{R}^{d(p+q+2)}$ such that the coordinates satisfy $\operatorname{Re} z_j = x_{dj}$, for $j=1,\dots,p+q+2$. Consider the real hyperbolic space

$$\widetilde{\mathbb{X}}=\{z\in\mathbb{F}^{p+q+2} : [z,z]=-1\}.$$

The group $\widetilde{G}=\mathrm{O}(d(p+1),d(q+1))$ acts transitively on $\widetilde{\mathbb{X}}$. Let $\tilde{K}$ denote the standard maximal compact subgroup $\mathrm{O}(d(p+1))\times\mathrm{O}(d(q+1))$ of $\widetilde{G}$. Let $U(\widetilde{\mathfrak{k}})$, respectively $U(\mathfrak{k})$, denote the universal enveloping algebra of the Lie algebra $\widetilde{\mathfrak{k}}$ of $\widetilde{K}$, respectively of the Lie algebra $\mathfrak{k}$ of K.

Lemma 1. *Let $U \in U(\tilde{\mathfrak{k}})$, then U maps $\mathcal{C}^2(G/H)$ into itself.*

Proof. The lemma is obvious for $d = 1$. So assume $d > 1$. We note that any element $x \in \widetilde{\mathbb{X}}$ can be written as $x = ka \cdot x_0$, where $k \in K$, and $a = a_s, s \geq 0$. Let $\widetilde{H} = \mathrm{O}(d(p+1), d(q+1)-1)$, and let $\tilde{\mathfrak{m}}$ denote the commutator of $A_{\mathfrak{q}}$ in the Lie algebra of $\widetilde{K} \cap \widetilde{H}$. Then $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + \tilde{\mathfrak{m}}$.

Let $U_k = \mathrm{Ad}\,(k)U$, for $k \in K$, then $Uf = (\mathrm{Ad}\,(k^{-1})U_k)f$. By the Campbell–Baker–Hausdorff formula, there exists an element $U_k^0 \in U(\mathfrak{k})$, such that $U_k = U_k^0$ modulo the left ideal generated by $\tilde{\mathfrak{m}}$. This implies that

$$Uf[ka \cdot x_0] = (\mathrm{Ad}\,(k^{-1})U_k^0)f[ka \cdot x_0].$$

The map $k \mapsto \mathrm{Ad}\,(k^{-1})U_k^0$ is continuous into a finite dimensional subspace of $U(\mathfrak{k})$, and we can write $Uf[ka \cdot x_0] = (\mathrm{Ad}\,(k^{-1})U_k^0)\, f[ka \cdot x_0] = \Sigma_i u_i(k) U_i f[ka \cdot x_0]$, for a finite set of elements $U_i \in U(\mathfrak{k})$ and continuous coefficients $u_i(k)$. It follows that Uf is in $\mathcal{C}^2(G/H)$. $\square$

Define for $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$, the auxiliary function

$$G_f(t_1, t_2, t_3) = \int_M f\left[(\overline{w} + t_1, u; -u, t_2\overline{v}, t_3 + \overline{w})\right] d\overline{v}\, du\, d\overline{w},$$

and, with the identification $z = e^{-s}$, define the function $F(z) = e^{ds} Rf(s)$. Then, since $\sinh s = -(z - z^{-1})/2$, we get

$$F(z) = \int\limits_{(z-z^{-1})/2}^{\infty} G_f\left(-v, -(1 + 2zv - z^2)^{1/2}, z - v\right) (1 + 2zv - z^2)^{(dq-dp)/2-1}\, dv. \tag{6}$$

Lemma 2. *The function G_f is homogeneous of degree $dp + d - 1$ on the cone $t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 < 0$, it is even in t_2, and satisfies $G_f(-t_1, t_2, -t_3) = G_f(t_1, t_2, t_3)$.*

Let X be the differential operator on $\mathbb{R}^3$ given by $t_3\partial/\partial t_2 - t_2\partial/\partial t_3$. For all $f \in \mathcal{C}^2(G/H)$, and all $k, N \in \mathbb{N}$, there exists a constant C, such that

$$|X^k G_f(t)| \leq C(t_2^2 + t_3^2)^{-d(q-p)/4}(1 + \log(t_2^2 + t_3^2))^{-N},$$

on the hyperboloid $t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 = -1$.

Proof. The first statement follows from the homogeneity of f and the definition of G_f.

As before we identify $\mathbb{F}^{p+q+2}$ with $\mathbb{R}^{d(p+q+2)}$. For $i = d(1+2p)+1, \ldots, d(1+p+q)$, we define the differential operator

$$D_i f[x] = x_{d(p+q+2)} \frac{\partial}{\partial x_i} f[x] - x_i \frac{\partial}{\partial x_{d(p+q+2)}} f[x].$$

This operator is defined by the left action of an element T_i in $\mathrm{O}(d(q+1))$ (with value 1 in the last entry of the i'th row, value -1 in the last entry of the i'th column, and 0 otherwise), and Lemma 1 thus gives that D_i maps $\mathcal{C}^2(G/H)$ into itself.

Let now $\overline{v} = (v_{d(1+2p)+1}, \ldots, v_{d(1+p+q)}) \in \mathbb{S}^{d(q-p)-1}$. The operator

$$Y_{\overline{v}} = \sum_{i=2+2p}^{1+p+q} v_i D_i,$$

also maps $\mathcal{C}^2(G/H)$ into itself, and

$$\left|Y_{\overline{v}} f[x]\right| \leqslant d(q-p) \max_i(\left|D_i f[x]\right|).$$

Applying the operator X to the integrand in the definition of G_f, we get

$$\begin{aligned} Xf[t_1, u; -u, t_2\overline{v}, t_3] &= t_3 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} f[.] v_i - t_2 \frac{\partial}{\partial x_{d(p+q+2)}} f[.] \\ &= t_3 \sum \frac{\partial}{\partial x_i} f[.] v_i - t_2 \sum v_i^2 \frac{\partial}{\partial x_{d(p+q+2)}} f[.] \\ &= Y_{\overline{v}} f[t_1, u; -u, t_2\overline{v}, t_3] \end{aligned}$$

the summations are taken over $i = d(1+2p)+1, \ldots, d(1+p+q)$. The inequality for $X^k f$ follows from repeated use of this formula and from the asymptotic estimates of functions in $\mathcal{C}^2(G/H)$. □

In particular, it follows that the function $v \mapsto X^k G_f(-v, -1, -v)$ has the same parity as k.

Lemma 3. *Let k_0 be the largest integer such that $k_0 < (dq - dp)/2$, and let $\epsilon = (dq-dp)/2 - k_0$. Define $t = t(z, v) = (-v, -(1+2zv-z^2)^{1/2}, z-v)$. Then*

(i) For $k \leqslant k_0$, the function

$$v \mapsto \frac{\partial^k}{\partial z^k} \Big(G_f(t(z,v)) \big|(1+2zv-z^2)\big|^{(dq-dp)/2-1} \Big)$$

is uniformly integrable over $\mathbb{R}$ for $z < 1$.

(ii) For $k \leqslant k_0$ odd, this function is an odd function of v for $z = 0$.

Proof. Notice that $t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 = -1$ and $t_2^2 + t_3^2 = 1 + v^2$, for $t = t(z,v)$, and that the integral (6) is uniformly convergent for $0 \leqslant z \leqslant k < \infty$. The same holds with G_f replaced by $X^k G_f$.

Repeated use of the formula

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^\alpha = &- X G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{\alpha-1/2} \\ &+ 2\alpha G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{\alpha-1}(z-v) \end{aligned}$$

yields (i), and together with the parity properties of $X^k G_f$ also gives (ii). □

We notice that $\epsilon = 1$ if $d(q-p)$ is even, and $\epsilon = 1/2$ if $d(q-p)$ is odd, i. e., if $d = 1$ and $q-p$ is odd.

For $k < k_0$, the derivatives $\partial^k/\partial z^k$ of $G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{(dq-dp)/2-1}$ are zero at $v = -\sinh s = (z - z^{-1})/2$, whence the integrand is at least k_0 times differentiable near $z = 0$, and we can compute the derivatives $d^k/dz^k F(z)$ by differentiating under the integral sign in (6).

If $k_0 > 0$, we can use Taylors formula to express $F(z)$ as a polynomial of degree $k_0 - 1$, plus a remainder term involving $d^{k_0}/dz^{k_0} F(\xi)$, for some $0 < \xi(z) < z$,

$$F(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_{k_0-1} z^{k_0-1} + R_{k_0}(\xi) z^{k_0},$$

where $0 < \xi < z$, and

$$c_j = \frac{1}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^j}{dz^j}\bigg|_{z=0} (G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{(dq-dp)/2-1})\, dv,$$

for $j \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$. The remainder term is given by:

$$R_{k_0}(\xi) = \frac{1}{k_0!} \int_{(\xi-\xi^{-1})/2}^{\infty} \frac{d^{k_0}}{dz^{k_0}}\bigg|_{z=\xi} (G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{(dq-dp)/2-1})\, dv.$$

Consider $\mathcal{A}f(s) = e^{\rho_1 s} Rf(s) = z^{-(\rho_1-d)} F(z)$, which is equal to

$$c_0 z^{-(\rho_1-d)} + c_1 z^{-(\rho_1-d-1)} + c_2 z^{-(\rho_1-d-2)} + ... + c_{k_0-1} z^{-\epsilon} + z^{(-\epsilon+1)} R_{k_0}(\xi).$$

Here we have used that $\rho_1 - d = d(q-p)/2 - 1$. For j even, the exponents $-d(q-p)/2-1-j$, for $j \in \{0, \dots, k_0-1\}$, correspond to the parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ for the non-cuspidal discrete series, and $c_j = 0$ for j odd, since the integrand is an odd function.

For the real non-projective hyperbolic spaces the condition concerning the parity j does not hold, but in that case *all* the exponents $-d(q-p)/2 - 1 - j$, for $j \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$, correspond to parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ for the non-cuspidal discrete series, see [1, Section 3].

From the definition of the differential operator D and (5), we see that $\mathcal{A}(Df)$ at most has a contribution from the remainder term, and further that $\mathcal{A}(Df)$ does not have a constant term at ∞, due to the term d^2/ds^2. If $\epsilon = 1/2$, the remainder term $e^{-1/2s} R_{k_0}(\xi(s))$ is clearly rapidly decreasing, and we are thus left to consider the case $\epsilon = 1$, in which case $k_0 = d(q-p)/2 - 1$.

Consider the constant term $C_{R_{k_0}} = \lim_{s\to\infty} R_{k_0}(e^{-s})$, which could be non-zero. We want to show that $R_{k_0}(\xi) - C_{R_{k_0}}$ is rapidly decreasing at $+\infty$, where $\xi = \xi(s)$, with $0 < \xi < e^{-s}$. We also include the case $k_0 = 0$, where we put $\xi = e^{-s}$.

Define

$$H(z,v) = \frac{d^{k_0}}{dz^{k_0}} (G_f(t(z,v))(1+2zv-z^2)^{k_0}).$$

Then, for $\xi < z < 1$,

$$R_{k_0}(\xi) - C_{R_{k_0}} = \int\limits_{(\xi-\xi^{-1})/2}^{\infty} (H(\xi,v) - H(0,v))\,dv + \int\limits_{-\infty}^{(\xi-\xi^{-1})/2} H(0,v)\,dv \;=\; I_1(\xi) + I_2(\xi).$$

For $I_1(\xi)$, there exists $\xi_1 = \xi_1(\xi, v) < \xi$, such that

$$H(\xi,v) - H(0,v) = \xi \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=\xi_1} H(z,v),$$

and we get:

$$I_1(\xi) < z \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left.\frac{d}{dz}\right|_{z=\xi_1} H(z,v) \right| dv.$$

By Lemma 3, the integrand is uniformly integrable for $z < 1$, and we conclude that $I_1(\xi)$ is bounded by Ce^{-s}.

For s large, the function $H(0,v)$ is for every $N \in \mathbb{N}$ bounded by

$$|H(0,v)| \le C(1+v^2)^{-d(q-p)/4} |v|^{k_0} \log(1+v^2)^{-N},$$

for some positive constant C. Using this, we find that

$$I_2(z) < C \int_{\sinh s}^{\infty} v^{-1}(\log(v))^{-N}\,dv = C(N-1)^{-1}(\log(\sinh s))^{-N+1} \leqslant Cs^{-N+1}.$$

It follows that $R_{k_0}(\xi) - C_{R_{k_0}}$ is rapidly decreasing at $+\infty$, whence $\mathcal{A}(Df)$ is rapidly decreasing at $+\infty$, which finishes the proof of Theorem 1.

References

[1] N. B. Andersen, M. Flensted-Jensen and H. Schlichtkrull, “Cuspidal discrete series for semisimple symmetric spaces”, *Journal of Functional Analysis*, **263**:8 (2012), 2384–2408.

[2] N. B. Andersen, M. Flensted-Jensen, “Cuspidal discrete series for projective hyperbolic spaces”, *Contemporary Mathematics*. V. 598: *Geometric Analysis and Integral Geometry*, Amer Mathematical Society, Providence, 2013, 59–75.

Список литературы

[1] N. B. Andersen, M. Flensted-Jensen and H. Schlichtkrull, “Cuspidal discrete series for semisimple symmetric spaces”, *Journal of Functional Analysis*, **263**:8 (2012), 2384–2408.

[2] N. B. Andersen, M. Flensted-Jensen, “Cuspidal discrete series for projective hyperbolic spaces”, *Contemporary Mathematics*. V. 598: *Geometric Analysis and Integral Geometry*, Amer Mathematical Society, Providence, 2013, 59–75.

Information about the authors

Nils Byrial Andersen, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department. Århus University, Århus, Denmark. E-mail: byrial@imf.au.dk

Mogens Flensted-Jensen, Professor of Mathematics (Emeritus). University of Copenhagen, Copenhagen, Denmark. E-mail: mfj@life.ku.dk

Информация об авторах

Андерсен Нильс Бириал, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики. Орхусский университет, г. Орхус, Дания. E-mail: byrial@imf.au.dk

Фленстед-Йенсен Могенс, профессор математики (почетный). Копенгагенский университет, г. Копенгаген, Дания. E-mail: mfj@life.ku.dk

There is no conflict of interests.

Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
Nils Byrial Andersen
E-mail: byrial@imf.au.dk

Для контактов:
Андерсен Нильс Бириал
E-mail: byrial@imf.au.dk

Received 21 May 2019
Reviewed 19 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

Поступила в редакцию 21 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 19 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Butkovič P., Schneider H., Sergeev S., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-252-271

УДК 512.643

Core of a matrix in max algebra and in nonnegative algebra: A survey

Peter BUTKOVIČ[1] **, Hans SCHNEIDER**[2] **, Sergeĭ SERGEEV**[1]

[1] University of Birmingham, School of Mathematics
Watson Building, Birmingham B15 2TT, United Kingdom
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3912-9250, e-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk
e-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk
[2] University of Wisconsin-Madison
480 Lincoln Drive, Madison WI 53706-1313, USA
e-mail: hans@math.wisc.edu

Сердцевина матрицы в макс-алгебре и в неотрицательной алгебре: Обзор

Петер БУТКОВИЧ[1] **, Ганс ШНАЙДЕР**[2] **, Сергей СЕРГЕЕВ**[1]

[1] Университет Бирмингема, Школа Математики,
B15 2TT Великобритания, г. Бирмингем, Здание Ватсона
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3912-9250, e-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk
e-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk
[2] Университет Мадисона, штат Висконсин
53706-1313, США, Мадисон WI, Аллея Линкольна, 480
e-mail: hans@math.wisc.edu

Abstract. This paper presents a light introduction to Perron–Frobenius theory in max algebra and in nonnegative linear algebra, and a survey of results on two cores of a nonnegative matrix. The (usual) core of a nonnegative matrix is defined as $\cap_{k\geqslant 1}\text{span}_+(A^k)$, that is, intersection of the nonnegative column spans of matrix powers. This object is of importance in the (usual) Perron-Frobenius theory, and it has some applications in ergodic theory. We develop the direct max-algebraic analogue and follow the similarities and differences of both theories.

Keywords: max algebra; nonnegative matrix theory; Perron–Frobenius theory; matrix power; eigenspace; core

Acknowledgements: The work is partially supported by EPSRC (project no. RRAH15735), S. Sergeev also acknowledges the support of RFBR-CNRS (project no. 11-0193106) and RFBR (project no. 12-01-00886).

For citation: Butkovič P., Schneider H., Sergeev S. Core of a matrix in max algebra and in nonnegative algebra: A survey. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 252–271. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-252-271.

Аннотация. Эта статья предлагает краткое введение в теорию Перрона–Фробениуса в макс-алгебре и в неотрицательной линейной алгебре, а также обсуждение результатов, касающихся сердцевин неотрицательных матриц, понимаемых в двух смыслах. Обычная сердцевина неотрицательной матрицы определяется как $\cap_{k\geqslant 1}\mathrm{span}_+(A^k)$, то есть как пересечение подпространств, натянутых на неотрицательные столбцы степеней этой матрицы. Этот объект важен для обычной теории Перрона–Фробениуса. Он имеет приложения в эргодической теории. Мы прослеживаем прямую макс-алгебраическую аналогию и проявляем совпадения и различия обеих теорий.

Ключевые слова: макс-алгебра; теория неорицательных матриц; теория Перрона–Фробениуса; степень матрицы; собственнное подпространство; сердцевина

Благодарности: Работа выполнена при поддержке EPSRC (проект № RRAH15735), С. Сергеев также благодарит за поддержку РФФИ-CNRS (проект № 11-0193106) и РФФИ (проект № 12-01-00886).

Для цитирования: *Буткович П., Шнайдер Г., Сергеев С.* Сердцевина матрицы в макс-алгебре и в неотрицательной алгебре: Обзор // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 252–271. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-252-271. (In Engl., Abstr. in Russian)

1. Introduction

1.1. Basic Perron-Frobenius theory

We study the matrices with nonnegative entries, such as the following one:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

The set of matrices of dimension n with real nonnegative entries will be denoted by $\mathbb{R}_+^{n\times n}$.

With a matrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ we associate a weighted (di)graph $\mathcal{G}(A)$ with the set of nodes $N=\{1,\ldots,n\}$ and set of edges $E\subseteq N\times N$ containing a pair (i,j) if and only if $a_{ij}\neq 0$; the weight of an edge $(i,j)\in E$ is defined to be $w(i,j):=a_{ij}$. A graph with just one node and no edge will be called *trivial.* The digraph associated with (1.1.1) is shown on Figure 1.

A path P in $\mathcal{G}(A)$ is a sequence of nodes $i_0,i_1,...,i_t$ such that each pair $(i_0,i_1),(i_1,i_2)$, ..., (i_{t-1},i_t) is an edge in $\mathcal{G}(A)$. It has *length* $l(P):=t$ and *weight* $w(P):=w(i_0,i_1)\cdot w(i_1,i_2)\cdots w(i_{t-1},i_t)$, and is called an $i-j$ path if $i_0=i$ and $i_t=j$. A path P is called a *cycle* if $i_0=i_t$, and a cycle is called *elementary* if all nodes of the cycle are different. In particular, consider the following elementary cycles on the digraph on Figure 1: “ $3,2,1,3$ ”, “ $3,4,2,1,3$ ”, “ $4,4$ ”

$A=(a_{ij})\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ is irreducible if $\mathcal{G}(A)$ is trivial or for any $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ there is an $i-j$ path. Otherwise A is reducible.

We do not actually list all the cycles here. As defined above, two cycles may have the same set of edges but different start and end nodes.

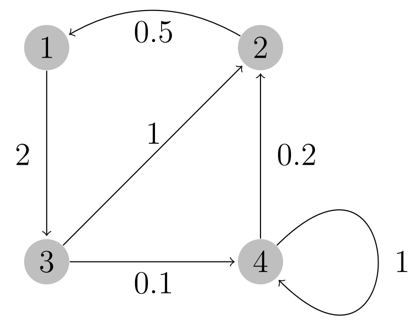

Figure 1: The weighted digraph associated with (1.1.1).

Observe that (1.1.1) is irreducible. For instance, both $3, 2, 1$ and $3, 4, 2, 1$ are $3{-}1$ paths.

By the Perron–Frobenius theorem, any irreducible matrix $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ has a positive eigenvalue, which is of the largest modulus among all the eigenvalues of A. This eigenvalue ρ is simple, that is, all eigenvectors associated with it are multiples of just one eigenvector (nonzero x satisfying $Ax = \rho x$). This eigenvalue is called the Perron root of A and denoted by $\rho^+(A)$.

Notation $A^{\times k}$ will stand for the usual kth power of a nonnegative matrix.

An irreducible nonnegative matrix does not have any other eigenvalues with a nonnegative eigenvector. Indeed, let $\rho := \rho^+(A)$, and let λ be such an eigenvalue, then $\lambda < \rho$. Let x, resp. y be two nonzero eigenvectors associated with ρ, resp. λ. The irreducibility of A then implies that both x and y have all components positive, and then there exists a number s such that $x \leqslant sy$. Then we also have $A^{\times t}x \leqslant sA^{\times t}y$ for all t, so $\rho^t x \leqslant s\lambda^t y$ for all t. However, if $\rho > \lambda$, then this is impossible.

In the case of (1.1.1), applying the MATLAB function "eig (A)" we can find that the four eigenvalues (over complex field) are equal, approxiamately, to $-0.4966+0.8641i$, $-0.4966-0.8641i$, 1.0785 and 0.9147. The first two eigenvalues are complex conjugates of each other, with the absolute value (approximately) 0.9967, and the corresponding eigenvectors are also complex. The last two eigenvalues are real positive, but only the bigger eigenvalue 1.0785 has a positive eigenvector: approximately $(0.5873\ 0.2723\ 0.3167\ 0.6933)$. So 1.0785 is the Perron root of (1.1.1), with essentially unique (real positive) Perron eigenvector.

In the general (reducible) case, a matrix A may have several eigenvalues with nonnegative eigenvectors, but in general, not all eigenvalues of A have this property. The structure of the set of eigenvectors associated with a particular eigenvalue may be also not so trivial. The set of nonnegative eigenvectors associated with a particular eigenvalue ρ is denoted by $V_+(A, \rho)$, and it is a convex cone.

Recall that a set $V \subseteq \mathbb{R}_+^n$ is called a *convex cone* if 1) $\alpha v \in V$ for all $v \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}_+$, 2) $u + v \in V$ for $u, v \in V$. Convex sets and convex polytopes can be viewed as section of convex cones by planes (for instance, requiring some coordinate to be constant). A convex cone V is said to be *generated* by $S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ if each $v \in V$ can be represented as

The reasons for this unusual notation for (usual) matrix power will soon become clear a nonnegative linear combination $v = \bigoplus_{x\in S} \alpha_x x$ where only finitely many nonnegative α_x are different from zero. When V is generated by the columns of a matrix A, this is denoted by $V = \mathrm{span}_+(A)$.

The Perron-Frobenius theorem and its extensions have many different proofs and applications. There are well-known applications in mathematical biology, say, in population dynamics [34], and most recently and notably, to Google PageRank. See Wikipedia, an original work of Frobenius [26], the survey of Schneider [45] and the textbooks of Berman-Plemmons [12] and Brualdi-Ryser [14].

Note that in what follows we are concerned only with nonnegative eigenvalues and nonnegative eigenvectors of a nonnegative matrix. In order to bring our terminology into line with the corresponding theory for max algebra we use the terms eigenvalue and eigenvector in a restrictive fashion. That is, we shall further call ρ an *eigenvalue* of a nonnegative matrix A (only) if there is a nonnegative eigenvector x of A for ρ. Further x will be called an *eigenvector* (only) if it is nonnegative.

1.2. Max-algebraic Perron-Frobenius

By max algebra we understand the set of nonnegative numbers $\mathbb{R}_+$ where the role of addition is played by taking maximum of two numbers: $a \oplus b := \max(a,b)$, and the multiplication is as in the usual arithmetics. This is carried over to matrices and vectors like in the usual linear algebra so that for two matrices $A = (a_{ij})$ and $B = (b_{ij})$ of appropriate sizes, $(A \oplus B)_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}$ and $(A \otimes B)_{ik} = \bigoplus_k a_{ik}b_{kj}$. Notation $A^{\otimes k}$ will stand for the k th max-algebraic power.

In particular, we have $2 \times 2 = 4$ but $2 \oplus 2 = 2$, and

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 15 & 25 \end{pmatrix}.$$

A set $V \subseteq \mathbb{R}^n_+$ will be called a *max cone* if 1) $\alpha v \in V$ for all $v \in V$ and $\alpha \in \mathbb{R}_+$, 2) $u \oplus v \in V$ for $u, v \in V$. Max cones are a special case of idempotent semimodules, see [8, 35]. A max cone V is said to be *generated* by $S \subseteq \mathbb{R}^n_+$ if each $v \in V$ can be represented as a max combination $v = \bigoplus_{x\in S} \alpha_x x$ where only finitely many (nonnegative) α_x are different from zero. When V is generated by the columns of a matrix A, this is denoted $V = \mathrm{span}_\oplus(A)$. Max cones are max-algebraic analogues of convex cones.

A vector z in a max cone $V \subseteq \mathbb{R}^n_+$ is called an *extremal* if $z = u \oplus v$ and $u, v \in V$ imply $z = u$ or $z = v$. Any finitely generated max cone is generated by its extremals, see Wagneur [53], and [18, 28] for more recent extensions (for instance, the tropical Minkowski theorem). The *maximum cycle geometric mean* of A is defined by

$$\rho^\oplus(A) = \max\{w(C)^{1/l(C)};\ C \text{ is a cycle in } \mathcal{G}(A)\} \ . \tag{1.2.2}$$

Recall that $w(C)$ denotes the product of all weights of the edges in C, and $l(C)$ is the number of edges (that is, the length). The *critical graph* of A, denoted by $\mathcal{C}(A)$, consists

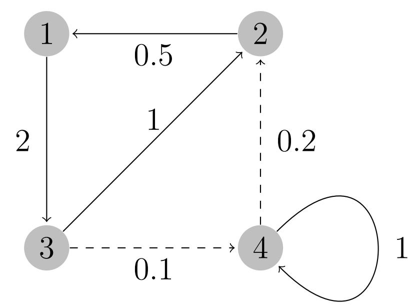

Figure 2: The critical graph of matrix (1.1.1).

of all nodes and edges belonging to the cycles which attain the maximum in (1.2.2). The set of such nodes will be called *critical* and denoted by N_c; the set of such edges will be called *critical* and denoted by E_c. Observe that the critical graph, defined as above, consists of several strongly connected subgraphs of $\mathcal{G}(A)$. Maximal such subgraphs are the *strongly connected components* of $\mathcal{C}(A)$. For example, the critical graph of (1.1.1) is shown on Figure 2 (the bold arcs).

If for $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ we have $A \otimes x = \rho x$ with $\rho \in \mathbb{R}_+$ and a nonzero $x \in \mathbb{R}_+^n$, then ρ is a *max(-algebraic) eigenvalue* and x is a *max(-algebraic) eigenvector* associated with ρ. The set of max eigenvectors x associated with ρ, with the zero vector adjoined to it, is a max cone further denoted by $V_\oplus(A,\rho)$. It is called the *eigencone* of A associated with ρ.

In general (reducible) case, a matrix $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ may have several max eigenvalues. The greatest max eigenvalue is equal to $\rho^\oplus(A)$ (see [11, 16, 24, 32]), and it is called the *principal eigenvalue*. The corresponding eigencone is called the *principal eigencone*. It is also known that if A is irreducible then $\rho^\oplus(A)$ is the only eigenvalue, which we call the *max-(algebraic) Perron root* of A (the proof of this uniqueness is the same as in the classical argument writen above for the nonnegative case). However, unlike in the usual nonnegative Perron-Frobenius theory discussed above, an irreducible matrix A may have several eigenvectors. For instance, (1.1.1) has the following non-proportional eigenvectors:

$$v^{(1)} = (1\ 0.5\ 0.5\ 0.1), \quad v^{(2)} = (0.2\ 0.1\ 0.1\ 1).$$

Roughly speaking, extremal vectors of $V_\oplus(A,\rho^\oplus(A))$ correspond to the components of the critical graph. For explicit description of $V_\oplus(A,\rho^\oplus(A))$, see Theorem 3.4.2 below. It uses the *Kleene star*

$$A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots, \tag{1.2.3}$$

where I denotes the identity matrix. Series (1.2.3) converges if and only if $\rho^\oplus(A) \leqslant 1$, in which case $A^* = I \oplus A \oplus \ldots \oplus A^{n-1}$. Note that if $\rho^\oplus(A) \neq 0$, then $\rho^\oplus(A/\rho^\oplus(A)) = 1$, and so $(A/\rho^\oplus(A))^*$ always converges.

The *path interpretation* of max-algebraic matrix powers $A^{\otimes l}$ is that each entry $a_{ij}^{\otimes l}$ is equal to the greatest weight of $i-j$ paths with length l. Consequently, for $i \neq j$, the entry a_{ij}^* of A^* is equal to the greatest weight of $i-j$ paths (with no length restrictions).

1.3. Max algebra: historical notes

The max-algebraic eigenproblem is perhaps one of the most well-known efficiently resolved problems of max algebra. Its theory was initiated, in particular, by Cuninghame–Green [24, 25] and Vorobyev [1–3], with scheduling and economic motivations in mind. The full description of eigenvector cone in the irreducible case was written by Gondran and Minoux [30], and the reducible case was described by Gaubert [27], see also [17] for a complete exposition. Further evolution of max algebra and its applications in scheduling and discrete event systems can be learnt from [5, 11, 32]. In Russia, max algebra was developed by academician Maslov and his school [7, 8, 39] as algebraic foundation of *idempotent analysis*, a new area of mathematics with applications in mathematical physics and optimal control. In particular, Dudnikov and Samborkiĭ [4] and later Shpiz [9] extended the max-algebraic eigenvector existence theorem to more general idempotent semimodules. Litvinov, Maslov and Sobolevskiĭ [6] developed idempotent interval analysis. For the current developments in max algebra, idempotent analysis, tropical convexity and related areas, see, e.g., survey of Akian, Bapat and Gaubert [10], monographs of Butkovič [16] and McEneaney [40], collections of papers [36–38].

1.4. Core of nonnegative matrix

The main topic of this paper, which is mostly a shorter version of [19], is the core of nonnegative matrix, defined in nonnegative algebra as $\operatorname{core}_+(A) := \cap_{k\geqslant 1}\operatorname{span}_+(A^{\times k})$, and in max algebra as, $\operatorname{core}_\oplus(A) := \cap_{k\geqslant 1}\operatorname{span}_\oplus(A^{\otimes k})$ (so that we can write

$$\operatorname{core}(A) := \cap_{k\geqslant 1}\operatorname{span}(A^k)$$

to unite both definitions). The concept of matrix core was introduced by Pullman in [44]. This led to a geometric approach to the proof of the Perron-Frobenius theorem based on the properties of the core. Pullman investigated the action of a matrix on its core showing that it is bijective and that the extremal rays of the core can be partitioned into periodic orbits. In other words, extremal rays of the core of A are nonnegative eigenvectors of the powers of A (associated with positive eigenvalues).

Our main purpose in [19] was to extend Pullman's core to max algebra, thereby investigating the periodic sequence of eigencones of max-algebraic matrix powers. However, following the line of [18, 21, 33], we developed the theory in max algebra and nonnegative algebra simultaneously, in order to emphasize common features as well as differences, to provide general (simultaneous) proofs where this is possible. We did not aim to obtain new results on the usual core of a nonnegative matrix with respect to [44, 52] (although our unifying approach possibly led to new and more elementary proofs). Our motivation is closely related to the Litvinov-Maslov correspondence principle [35], viewing the idempotent mathematics (in particular, max algebra) as a "shadow" of the "traditional" mathematics over real and complex fields.

Pullman's core can be also seen as closely related to the limits of powers of nonnegative matrices. However it is a different concept. Consider the simple example

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Then, for any nonnegative x, $A^k x$ will tend to a multiple of $(1,\ 0)^T$ while the core of A is the entire nonnegative orthant $\mathbb{R}^2_+$.

To the authors' knowledge, the core of a nonnegative matrix has not received much attention in linear algebra. However, a more detailed study has been carried out by Tam and Schneider [52], who extended the concept of core to linear mappings preserving a proper cone. The case when the core is a polyhedral (i. e., finitely generated) cone was examined in detail in [52, Section 3], and the results were applied to study the case of nonnegative matrix in [52, Section 4]. This work has found further applications in the theory of dynamic systems acting on the path space of a stationary Bratteli diagram. In particular, Bezuglyi et al. [13] describe and exploit a natural correspondence between ergodic measures and extremals of the core of the incidence matrix of such a diagram. The perspectives of a max-algebraic analogue of this theory are yet to be explored.

There is also much more literature on the related but distinct question of the limiting sets of homogeneous and non-homogeneous Markov chains in nonnegative algebra; see the books by Hartfiel [31] and Seneta [47] and, e.g., the works of Chi [22] and Sierksma [51]. In max algebra, see the results on the ultimate column span of matrix powers for irreducible matrices [16, Theorem 8.3.11], [48], and by Merlet [41] on the invariant max cone of non-homogeneous matrix products.

1.5. Organization

The rest of the paper is divided into two main sections: Preliminaries and Main results. Preliminaries are occupied with the rest of prerequisites, to understand the situation even better. The proofs of Main results can be found in [19]. In some cases, some hints for the proofs are given. Examples illustrating our results can be found in [19] (the last section).

2. Preliminaries

2.1. Ultimate periodicity and immediate periodicity

For a strongly connected graph $\mathcal{G}$, define its *cyclicity* σ as the gcd (greatest common divisor) of the lengths of all elementary cycles and the cyclicity of a trivial graph to be 1. For a (general) graph containing several maximal strongly connected components (such as the critical graph $\mathcal{C}(A)$), cyclicity is defined as the lcm of the cyclicities of the strongly connected components. A graph with cyclicity 1 is called *primitive*. The following result demonstrates importance of cyclicity of critical graph in max algebra. See also [11].

Theorem 2.1.1. *[23, Cyclicity Theorem, Cohen et al.]. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ be irreducible and let σ be the cyclicity of $\mathcal{C}(A)$. Then σ is the smallest p such that there exists $T(A)$ with $A^{\otimes(t+p)} = (\rho^{\oplus})^p(A)A^{\otimes t}$ for all $t \geqslant T(A)$.*

In the case when A is (1.1.1), we have $T(A)=5$, and $A^{\otimes t}$, for $t=5,6,7$ are shown below:

$$\begin{pmatrix} 0.02 & 2 & 0.04 & 0.2 \\ 0.01 & 0.02 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.02 & 0.02 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0.04 & 0.04 & 0.2 \\ 0.01 & 1 & 0.02 & 0.1 \\ 0.01 & 0.02 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0.02 & 0.04 & 2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.02 & 0.02 & 0.1 \\ 0.01 & 1 & 0.02 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Theorem 2.1.1 is closely related to the theory of graph exponents as presented, for instance, in Brualdi-Ryser [14]. We will need the following formal definition.

A sequence $\{\aleph_k\}_{k\geqslant 1}$ is called *periodic* if there exists an integer p such that $\aleph_{k+p}$ is identical with $\aleph_k$ for all k. The least such p is called the *period* of $\{\aleph_k\}_{k\geqslant 1}$. A sequence $\{\aleph_k\}_{k\geqslant 1}$ is called *ultimately periodic* if the sequence $\{\aleph_k\}_{k\geqslant T}$ is periodic for some $T\geqslant 1$. The least such T is called the *periodicity threshold* of $\{\aleph_k\}_{k\geqslant 1}$.

In terms of the ultimate periodicity, Theorem 2.1.1 can be formulated as follows: for any irreducible nonnegative matrix $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, the sequence of matrix powers $\{(A/\rho^{\oplus}(A))^{\otimes t}\}$ with $t\geqslant 1$ is ultimately periodic with the period equal to the cyclicity of critical graph. Slightly generalizing the notion of ultimate periodicity, it can be also said that $\{A^{\otimes t}\}$ with $t\geqslant 1$ is ultimately periodic with growth rate $\rho^{\oplus}(A)$.

We also note that for a general reducible matrix $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$, not all the sequences $\{a_{ij}^{(t)}\}_{t\geqslant 1}$ for $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, are ultimately periodic in the sense of the definition given above. Such sequences can be decomposed into ultimately periodic subsequences with different growth rates, and the reader is referred to De Schutter [46], Gavalec [29] and Molnárová [42], Sergeev-Schneider [49] for more details.

2.2. Frobenius normal form

Every matrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ can be transformed by simultaneous permutations of the rows and columns in almost $O(n\log n)$ time to a *Frobenius Normal Form* (FNF) [12,14]

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & A_{\mu\mu} & \ldots \\ A_{r1} & A_{r2} & \ldots & A_{rr} \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

where $A_{11},\ldots,A_{rr}$ are irreducible square submatrices of A. They correspond to the sets of nodes $N_1,\ldots,N_r$ of the strongly connected components of $\mathcal{G}(A)$. Note that in (2.2.1) an edge from a node of N_μ to a node of N_ν in $\mathcal{G}(A)$ may exist only if $\mu\geqslant\nu$.

Generally, A_{KL} denotes the submatrix of A extracted from the rows with indices in $K\subseteq N$ and columns with indices in $L\subseteq N$, and $A_{\mu\nu}$ is a shorthand for $A_{N_\mu N_\nu}$.

Frobenius normal form of a matrix is not uniquely defined. Here is an example of a nonnegative matrix (left) and its Frobenius form (right)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

If A is in the Frobenius Normal Form (2.2.1) then the *reduced graph*, denoted $R(A)$, is the (di)graph whose nodes correspond to N_μ, for $\mu = 1, \ldots, r$, and the set of arcs is $\{(\mu,\nu); (\exists k \in N_\mu)(\exists \ell \in N_\nu) a_{k\ell} > 0\}$. In max algebra and in nonnegative algebra, the nodes of $R(A)$ are *marked* by the corresponding eigenvalues (Perron roots), denoted by $\rho_\mu^\oplus := \rho^\oplus(A_{\mu\mu})$ (max algebra), $\rho_\mu^+ := \rho^+(A_{\mu\mu})$ (nonnegative algebra), and by ρ_μ when both algebras are considered simultaneously.

A class μ is trivial if $A_{\mu\mu}$ is the 1×1 zero matrix. Class μ *accesses* class ν, denoted $\mu \to \nu$, if $\mu = \nu$ or if there exists a $\mu \to \nu$ path in $R(A)$. A class is called *initial*, resp. *final*, if it is not accessed by, resp. if it does not access, any other class. Node i of $\mathcal{G}(A)$ accesses class ν, denoted by $i \to \nu$, if i belongs to a class μ such that $\mu \to \nu$.

2.3. Elements of reducible spectral theory

In this section we recall some elements of the spectral theory of reducible matrices in max algebra and in nonnegative linear algebra. All results are standard: the nonnegative part goes back to Frobenius [26], Sect. 11, and the max-algebraic counterpart is due to Gaubert [27], Ch. IV (see [16] for other references).

A class ν of A is called a *spectral class* of A associated with eigenvalue $\rho \neq 0$, or sometimes (A,ρ)-spectral class for short, if

$$\begin{aligned} &\rho_\nu^\oplus = \rho, \text{ and } \mu \to \nu \text{ implies } \rho_\mu^\oplus \leqslant \rho_\nu^\oplus \text{ (max algebra)}, \\ &\rho_\nu^+ = \rho, \text{ and } \mu \to \nu, \mu \neq \nu \text{ implies } \rho_\mu^+ < \rho_\nu^+ \text{ (nonnegative algebra)}. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

In both algebras, note that there may be several spectral classes associated with the same eigenvalue. In nonnegative algebra, spectral classes are known as *distinguished classes* [45],

Denote by $\Lambda_+(A)$, resp. $\Lambda_\oplus(A)$, the set of **nonzero** eigenvalues of $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ in nonnegative linear algebra, resp. in max algebra. It will be denoted by $\Lambda(A)$ when both algebras are considered simultaneously, as in the following standard description.

Theorem 2.3.1. *[16, Th. 4.5.4], [45, Th. 3.7]. Let $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Then*

$$\Lambda(A) = \{\rho_\nu \neq 0;\ \nu \textit{ is spectral}\}.$$

Theorem 2.3.1 encodes the following **two** statements:

$$\Lambda_\oplus(A) = \{\rho_\nu^\oplus \neq 0;\ \nu \text{ is spectral}\}, \quad \Lambda_+(A) = \{\rho_\nu^+ \neq 0;\ \nu \text{ is spectral}\}, \tag{2.3.3}$$

where the notion of spectral class is defined in two different ways by (2.3.2), in two algebras.

See the illustrations of spectral classes of marked reduced graph in [16,17] (in max algebra) and in [21] (also in nonnegative algebra).

In both algebras, for each $\rho \in \Lambda(A)$ define

$$\begin{aligned} &A_\rho := \rho^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{M_\rho M_\rho} \end{pmatrix}, \text{ where} \\ &M_\rho := \{i;\ i \to \nu,\ \nu \text{ is spectral with Perron root } \rho\}\ . \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Then the case of an eigencone associated with any eigenvalue can be reduced to the case of principal eigenvalue, as follows:

Proposition 2.3.1. *[16, 27]. For $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ and each $\rho \in \Lambda(A)$, we have $V(A,\rho) = V(A_\rho, 1)$, where 1 is the principal eigenvalue of A_ρ.*

2.4. Access relations in matrix powers

In [19] we demonstrated that access relations and spectral classes of all matrix powers are similar, and that the case of an arbitrary eigenvalue reduces to the case of the principal eigenvalue. These results have simultaneous proofs in both algebras, which is due to the fact that the definitions of spectral classes are similar and that the associated **unweighted** digraphs of $A^{\times t}$ and $A^{\otimes t}$ are the same. Their nonnegative part goes back to Frobenius [26], and in some cases, is explicitly formulated in Tam-Schneider [52].

Lemma 2.4.1. *[19], [26, 52]. Let A be irreducible with the (unique) eigenvalue ρ, let $\mathcal{G}(A)$ have cyclicity σ and t be a positive integer. Then, A^t is a direct sum of gcd(t,σ) irreducible blocks with eigenvalues ρ^t, and A^t does not have eigenvalues other than ρ^t. The cyclicity of each block is $\sigma/$ gcd(t,σ). In particular, all blocks of A^σ are primitive.*

Recall that each class μ of A corresponds to an irreducible submatrix $A_{\mu\mu}$. It is easy to see that $(A^t)_{\mu\mu} = (A_{\mu\mu})^t$ for any positive integer t. Suppose that the cyclicity of $\mathcal{G}(A_{\mu\mu})$ is σ. Applying Lemma 2.4.1 to $A_{\mu\mu}$ we see that μ gives rise to gcd(t,σ) classes in A^t, which are said to be *derived* from their common *ancestor* μ. The classes of A^t and A^l derived from the common ancestor will be called *related*. Note that this is an equivalence relation on the set of classes of all powers of A.

It can be checked that the same notions can be defined for the components of critical graphs, see [19].

Let us recall the following results on the similarity of access relations in matrix powers.

Lemma 2.4.2. *[19], [26, 52]. For all $t, l \geqslant 1$ and $\rho > 0$, an index $i \in \{1,\dots,n\}$ accesses (resp. is accessed by) a class with Perron root ρ^t in A^t if and only if it accesses (resp. is accessed by) a related class with Perron root ρ^l in A^l.*

Similar results holds for the strongly connected components of the critical graphs of matrix powers [19].

All eigenvalues and spectral classes of matrix powers are derived from those of A.

Theorem 2.4.1. *[19], [26, 52]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *and* $t \geqslant 1$ *.*

(i) $\Lambda(A^t) = \{\rho^t;\ \rho \in \Lambda(A)\}$.

(ii) For each spectral class μ *of* A *with cyclicity* σ *there are* $gcd(t,\sigma)$ *spectral classes of* A^t *derived from it. Conversely, each spectral class of* A^t *is derived from a spectral class of* A *.*

As in the case of eigencones of a matrix, when working with $V(A^t,\rho^t)$ we can assume that $\rho = 1$ is the principal eigenvalue of A, and hence of all A^t.

Theorem 2.4.2. *[19], [26, 52]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, $t \geqslant 1$ *and* $\rho \in \Lambda(A)$ *.*

(i) $(A^t)_{M_\rho M_\rho} = (\rho^t (A_\rho)^t)_{M_\rho M_\rho}$.

(ii) $V(A^t,\rho^t) = V((A_\rho)^t, 1)$.

3. Core and eigencones

3.1. The main concepts

The notions given in this subsection are the central notions of [19]. They are defined in two algebras simultaneously.

Once again, the *core* of a nonnegative matrix A is defined as the intersection of the column spans (in other words, images) of its powers:

$$\operatorname{core}(A) := \cap_{i=1}^{\infty} \operatorname{span}(A^i). \tag{3.1.1}$$

The *(Minkowski) sum of eigencones* of a nonnegative matrix A is the cone consisting of all sums of vectors in all $V(A,\rho)$:

$$V^{\Sigma}(A) := \sum_{\rho\in\Lambda(A)} V(A,\rho). \tag{3.1.2}$$

If $\Lambda(A) = \emptyset$, which happens when $\rho(A) = 0$, then we assume that the sum on the right-hand side is $\{0\}$.

Further, the following notations can be seen as the "global" definition of cyclicity in nonnegative algebra and in max algebra.

1. σ_ρ is the the lcm of all cyclicities of spectral classes associated with $\rho \in \Lambda_+(A)$ (**nonnegative algebra**), or the cyclicity of critical graph associated with $\rho \in \Lambda_\oplus(A)$ (**max algebra**).

2. σ_Λ is the lcm of all σ_ρ where $\rho \in \Lambda(A)$.

3.2. Two cores of a nonnegative matrix

One of our main results relates the core with the sum of eigencones. The nonnegative part of this result can be found in Tam-Schneider [52, Th. 4.2, part (iii)], and the proof of it (in the nonnegative case) goes back to Pullman [44].

Theorem 3.2.1. *[19], [44, 52]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. *Then*

$$\operatorname{core}(A) = \sum_{k\geqslant 1, \rho\in\Lambda(A)} V(A^k, \rho^k) = V^{\Sigma}(A^{\sigma_\Lambda}).$$

The following observations were used in the proof, and they are also of independent interest. They hold in both algebras with simultaneous proofs where only elementary analytic arguments are used.

Proposition 3.2.1. *[19], [44]. Assume that* $\{K_l\}$ *for* $l \geqslant 1$, *is a sequence of cones in* $\mathbb{R}_+^n$ *such that* $K_{l+1} \subseteq K_l$ *for all* l, *and each of them generated by no more than* k *nonzero vectors. Then the intersection* $K = \cap_{l=1}^{\infty} K_l$ *is also generated by no more than* k *vectors.*

Proposition 3.2.1 seems to be an interesting geometric observation, which could be applied in a more general situation (for instance, in the context of tropical or nonnegative matrix semigroups).

Proposition 3.2.2. *[19], [44]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, *then*

(i) $\operatorname{core}(A)$ *is generated by no more than* n *vectors,*

(ii) the mapping induced by A *on* $\operatorname{core}(A)$ *is a surjection,*

(iii) the mapping induced by A *on the scaled extremals of* $\operatorname{core}(A)$ *is a permutation (i.e., a bijection).*

In the case of nonnegative algebra, the action of matrix on its core is not only surjective but also bijective. However, this does not hold in the case of max algebra, which leads us to the problem statements and results of [20].

3.3. Periodicity of the eigencone sequence

The following main result was obtained both in max and nonnegative algebra (Explicit publication of the (usual) nonnegative part of this result is unknown to us).

Theorem 3.3.1. *[19]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. *Then*

(i) σ_ρ, *for* $\rho \in \Lambda(A)$, *is the period of the sequence* $\{V(A^k, \rho^k)\}_{k\geqslant 1}$, *and* $V(A^k,\rho^k) \subseteq V(A^{\sigma_\rho}, \rho^{\sigma_\rho})$ *for all* $k \geqslant 1$;

(ii) σ_Λ *is the period of the sequence* $\{V^{\Sigma}(A^k)\}_{k\geqslant 1}$, *and* $V^{\Sigma}(A^k) \subseteq V^{\Sigma}(A^{\sigma_\Lambda})$ *for all* $k \geqslant 1$.

More precise results can be formulated in the form of equivalence.

Theorem 3.3.2. *[19]. Let* $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *and* σ *be either the cyclicities of spectral classes of* A **(nonnegative algebra)** *or the cyclicities of critical components of* A **(max algebra)**. *The following are equivalent for all positive* k, l:

(i) $gcd(k,\sigma)$ *divides* $gcd(l,\sigma)$ *for all cyclicities* σ;

(ii) $gcd(k,\sigma_\rho)$ *divides* $gcd(l,\sigma_\rho)$ *for all* $\rho \in \Lambda(A)$;

(iii) *$gcd(k,\sigma_\Lambda)$ divides $gcd(l,\sigma_\Lambda)$;*

(iv) *$V(A^k,\rho^k)\subseteq V(A^l,\rho^l)$ for all $\rho\in\Lambda(A)$ and*
(v) *$V^\Sigma(A^k)\subseteq V^\Sigma(A^l)$.*

Theorem 3.3.3. *Let $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ and σ be either the cyclicities of spectral classes (***nonnegative algebra***) or the cyclicities of critical components (***max algebra***) associated with some $\rho\in\Lambda(A)$. The following are equivalent for all positive k,l :*

(i) *$gcd(k,\sigma)$ divides $gcd(l,\sigma)$ for all cyclicities σ ;*
(ii) *$gcd(k,\sigma_\rho)$ divides $gcd(l,\sigma_\rho)$;*
(iii) *$V(A^k,\rho^k)\subseteq V(A^l,\rho^l)$.*

The proof of Theorems 3.3.2 and 3.3.3 (and hence, Theorem 3.3.1 which can be obtained as their corollary) are based on the so-called Frobenius-Victory theorems, which are written, for both algebras, in the next subsection.

3.4. Perron-Frobenius and description of extremals

We now describe the principal eigencones in nonnegative linear algebra and then in max algebra. By means of Proposition 2.3.1, this description can be obviously extended to the general case. As in Section 2.3., both descriptions are essentially known: see [16, 26, 27, 45].

We emphasize that the vectors $x^{(\mu)}$ and $x^{(\widetilde{\mu})}$ appearing below are **full-size**.

Theorem 3.4.1. *Frobenius-Victory [45, Th. 3.7] Let $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ have $\rho^+(A)=1$.*

(i) *Each spectral class μ with $\rho_\mu^+=1$ corresponds to an eigenvector $x^{(\mu)}$, whose support consists of all indices in the classes that have access to μ , and all vectors x of $V_+(A,1)$ with $\mathrm{supp}x=\mathrm{supp}x^{(\mu)}$ are multiples of $x^{(\mu)}$.*
(ii) *$V_+(A,1)$ is generated by $x^{(\mu)}$ of* (i)*, for μ ranging over all spectral classes with $\rho_\mu^+=1$.*
(iii) *$x^{(\mu)}$ of* (i) *are extremals of $V_+(A,1)$. (Moreover, $x^{(\mu)}$ are linearly independent.)*

Note that the extremality and the **usual** linear independence of $x^{(\mu)}$ (involving linear combinations with possibly negative coefficients) can be deduced from the description of supports in part (i), and from the fact that in nonnegative algebra, spectral classes associated with the same ρ do not access each other. This linear independence also means that $V_+(A,1)$ is a simplicial cone. See also [45, Th. 4.1].

Theorem 3.4.2. *[16, Th. 4.3.5] [50, Th. 2.8] Let $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ have $\rho^\oplus(A)=1$.*

(i) *Each component $\widetilde{\mu}$ of $\mathcal{C}(A)$ corresponds to an eigenvector $x^{(\widetilde{\mu})}$ defined as one of the columns $A^*_{\cdot i}$ with $i\in N_{\widetilde{\mu}}$, all columns with $i\in N_{\widetilde{\mu}}$ being multiples of each other.*
(ii) *$V_\oplus(A,1)$ is generated by $x^{(\widetilde{\mu})}$ of* (i)*, for $\widetilde{\mu}$ ranging over all components of $\mathcal{C}(A)$.*
(iii) *$x^{(\widetilde{\mu})}$ of* (i) *are extremals in $V_\oplus(A,1)$. (Moreover, $x^{(\widetilde{\mu})}$ are strongly linearly independent in the sense of [15].)*

Using this description of extremals we can now describe extremals of the core, since we know that $\mathrm{core}(A) = V^{\Sigma}(A^{\sigma_\Lambda})$ in both algebras, that the spectral classes of A^{σ_Λ} are derived from those of A, and that the access relations between classes of A^{σ_Λ} are similar to those between the classes of A (see Subsect. 2.4.).

Lemma 3.4.1. *For each $k \geqslant 1$, the set of extremals of $V^{\Sigma}(A^k)$ is the union of the sets of extremals of $V(A^k, \rho^k)$ for $\rho \in \Lambda(A)$.*

The following result describes extremals of the core in nonnegative algebra. It is not new (see the quotation). A vector $y \in \mathbb{R}^n_+$ is called normalized if $\max_i y_i = 1$ (but any other norm could be used as well).

Theorem 3.4.3. *[52, Theorem 4.7], [19]. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$.*

(i) *The set of extremals of* $\mathrm{core}_+(A)$ *is the union of the sets of extremals of $V_+(A^{\times\sigma}, \rho^{\sigma})$ for all $\rho \in \Lambda_+(A)$, with $\sigma = \sigma_\rho$.*
(ii) *Each spectral class μ with cyclicity σ_μ corresponds to a set of distinct σ_μ normalized extremals of* $\mathrm{core}_+(A)$*, such that there exists an index in their support that belongs to μ, and each index in their support has access to μ.*
(iii) *Each set of extremals described in* (ii) *forms a simple cycle under the action of A.*
(iv) *There are no normalized extremals other than those described in* (ii)*. The total number of normalized extremals equals the sum of cyclicities of all spectral classes of A.*

In [19] we obtained a similar description of extremals of the max-algebraic core.

Theorem 3.4.4. *[19]. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$.*

(i) *The set of extremals of* $\mathrm{core}_\oplus(A)$ *is the union of the sets of extremals of $V_\oplus(A^{\otimes\sigma}, \rho^{\sigma})$ for all $\rho \in \Lambda(A)$, with $\sigma = \sigma_\rho$.*
(ii) *Each critical component $\widetilde{\mu}$ with cyclicity $\sigma_{\widetilde{\mu}}$ associated with some $\rho \in \Lambda_\oplus(A)$ corresponds to a set of distinct $\sigma_{\widetilde{\mu}}$ normalized extremals x of* $\mathrm{core}_\oplus(A)$*, which are (normalized) columns of $(A_\rho{}^{\otimes\sigma_\rho})^*$ with indices in $N_{\widetilde{\mu}}$.*
(iii) *Each set of extremals described in* (ii) *forms a simple cycle under the action of A.*
(iv) *There are no normalized extremals other than those described in* (ii)*. The total number of normalized extremals equals the sum of cyclicities of all critical components of A.*

3.5. Ultimate periodicity and finite stabilization

In max algebra there are wide classes of matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$ where we have

$$\mathrm{span}_\oplus(A^{\otimes t}) = \mathrm{core}_\oplus(A)$$

for all big enough t. This is called the *finite stabilization of the core.* We list some special cases where this takes place.

- $\mathcal{S}_1$: **Irreducible matrices**.
- $\mathcal{S}_2$: **Ultimately periodic matrices.** This is when we have $A^{\otimes(t+\sigma)} = \rho^\sigma A^{\otimes t}$ for all sufficiently large t, with $\rho^\oplus(A)$. As shown in [43], this happens if and only if the Perron roots of all nontrivial classes of A equal $\rho^\oplus(A)$.
- $\mathcal{S}_3$: **Robust matrices.** For any nonzero vector $x \in \mathbb{R}^n_+$ the orbit $\{A^{\otimes t}x\}_{t\geqslant 1}$ hits an eigenvector of A, implying that the whole remaining part of the orbit consists of multiples of that eigenvector. The notion of robustness was introduced and studied in [17].
- $\mathcal{S}_4$: **Orbit periodic matrices:** For any nonzero vector $x \in \mathbb{R}^n_+$ the orbit $\{A^{\otimes t} \otimes x\}_{t\geqslant 1}$ hits an eigenvector of $A^{\otimes\sigma}$, implying that the remaining part of the orbit is periodic with some growth rate. See [49], Section 7 for characterization.
- $\mathcal{S}_5$: **Column periodic matrices.** This is when for any $i = 1, \dots, n$ we have $(A^{\otimes(t+\sigma)})_{\cdot i} = \rho_i^\sigma A^{\otimes t}_{\cdot i}$ for all large enough t and some ρ_i.

Observe that $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_4 \subseteq \mathcal{S}_5$ and $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_4$ (see, e.g., [19], Section 4). To see that $\operatorname{span}_\oplus(A^{\otimes t}) = \operatorname{core}_\oplus(A)$ for all large enough t in all these cases, observe that in the column periodic case ($\mathcal{S}_5$) all sequences of columns end up with periodically repeating eigenvectors of $A^{\otimes\sigma}$, which implies that $\operatorname{span}_\oplus(A^{\otimes t}) \subseteq \operatorname{core}_\oplus(A)$ for all large enough t, and hence also $\operatorname{span}_\oplus(A^{\otimes t}) = \operatorname{core}_\oplus(A)$. So finite stabilization of the core occurs in all these classes.

A necessary and sufficient condition for the finite stabilization can be formulated as follows.

Theorem 3.5.1. *[20]. Finite stabilization of* $\operatorname{core}_\oplus(A)$ *occurs if and only if all nontrivial classes of* A *are spectral.*

The action of A on its core in max algebra will be studied in more detail in [20].

References

[1] N. N. Vorob'ev, "The extremal matrix algebra", *Soviet Mathematics Doklady*, **4** (1963), 1220–1223.

[2] N. N. Vorob'ev, "Extremal Algebra of Positive Matrices", *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **3**:1 (1967), 39–71 (In Russian).

[3] N. N. Vorob'ev, "Extremal Algebra of Non-Negative Matrices", *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **6**:4–5 (1970), 303–312 (In Russian).

[4] P. I. Dudnikov, S. N. Samborskiĭ, "Endomorphisms of finitely generated free semimodules", *Math. USSR-Izv.*, **38**:1 (1992), 91–105.

[5] N. K. Krivulin, *Methods of Idempotent Algebra in Problems of Modeling and Analysis of Complex Systems*, Publ. St. Petersburg State. University, St. Petersburg, 2009 (In Russian).

[6] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, A. N. Sobolevskiĭ, "Idempotent interval analysis and optimization problems", *Reliable Computing*, **7**:5 (2001), 353–377, arXiv: org/abs/math.SC/0101080.

[7] V. P. Maslov, “On new principle of superposition for optimization problems”, *Russian Math. Surveys*, **42**:3 (1987), 43–54.

[8] V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, *Idempotent Analysis and Its Applications*, Kluwer Academic Pub., 1997.

[9] G. B. Shpiz, “An eigenvector existence theorem in idempotent analysis”, *Math. Notes*, **82**:3 (2007), 410–417.

[10] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, “Max-plus algebras”, *Handbook of Linear Algebra*. V. 39: *Discrete Mathematics and its Applications*, eds. L. Hogben, R. Brualdi, A. Greenbaum, and R. Mathias, Chapman and Hall, London; New York, 2007.

[11] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, “Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems”, *Journal of the Operational Research Society*, **45**:1 (1994).

[12] A. Berman, R .J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

[13] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, B. Solomyak, “Invariant measures on stationary Bratteli diagrams”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **30**:4 (2010), 973–1007.

[14] R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[15] P. Butkovič, “Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?”, *Linear Alg. Appl.*, **367** (2003), 313–335.

[16] P. Butkovič, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer, London, 2010.

[17] P. Butkovič, R. A. Cuninghame-Green, S. Gaubert, “Reducible spectral theory with applications to the robustness of matrices in max-algebra”, *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications*, **31**:3 (2009), 1412–1431.

[18] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Generators, extremals and bases of max cones”, *Linear Alg. Appl.*, **421** (2007), 394–406, arXiv: org/abs/math.RA/0604454.

[19] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Two cores of a nonnegative matrix, submitted”, 2012, arXiv: org/abs/math.RA/1208.1939.

[20] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “On the max-algebraic core of a nonnegative matrix”, 2013, arXiv: org/abs/1305.7339.

[21] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Z-matrix equations in max algebra, nonnegative linear algebra and other semirings”, *Linear and Multilin. Alg.*, **60**:10 (2012), 1191-1210, arXiv: org/abs/1110.4564.

[22] M.-H. Chi, “The long-run behaviour of Markov chains”, *Linear Alg. Appl.*, **244** (1996), 111–121.

[23] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat, M. Viot, “Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes”, *Rapport de Recherche*, 1983, № 191.

[24] R. A. Cuninghame-Green, “Minimax Algebra”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. V. 166, Springer, Berlin, 1979.

[25] R. A. Cuninghame-Green, “Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour”, *Operations Research*, **13**:1 (1962), 95–100.

[26] G. F. Frobenius, “Über Matrizen aus nicht negativen Elementen”, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **23**, Sitzungsberichte, Berlin, 1912, 456–477.

[27] S. Gaubert, *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, PhD thesis, Thèse de l’Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Juillet, 1992, 304 pp.

[28] S. Gaubert, R. D. Katz, “The Minkowski theorem for max-plus convex sets”, *Linear Alg. Appl.*, **421**:2-3 (2007), 356–369, arXiv: org/abs/math.GM/0605078.

[29] M. Gavalec, *Periodicity in Extremal Algebras*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2004.

[30] M. Gondran, M. Minoux, "Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes", *EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. Serie C. Mathematiques Informatique*, **2** (1977), 25–41.

[31] D. J. Hartfiel, *Nonhomogeneous Matrix Products*, World Scientific, Singapore, 2002.

[32] B. Heidergott, G.-J. Olsder, J. van der Woude, *Max-plus at Work*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

[33] R. D. Katz, H. Schneider, S. Sergeev, "On commuting matrices in max algebra and in classical nonnegative algebra", *Linear Alg. Appl.*, **436** (2012), 276–292, arXiv: org/abs/1005.1424.

[34] C.-K. Li, H. Schneider, "Applications of Perron-Frobenius theory to population dynamics", *J. of Mathematical Biology*, **44**:5 (2002), 450–462, arXiv: org/abs/math.RA/0109008.

[35] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, "The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications", *Idempotency*, ed. J. Gunawardena, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 420–443, arXiv: org/abs/math/0101021.

[36] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, **307**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2005.

[37] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, S. N. Sergeev, *Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics.* V. 1,2, Independent University of Moscow, Moscow, 2007, arXiv: org/abs/0709.4119.

[38] G. L. Litvinov, S. N. Sergeev, *Tropical and Idempotent Mathematics*, **495**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2009.

[39] *Advances in Soviet Mathematics.* V. 13: *Idempotent analysis*, ed. V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ, AMS, Providence, 1992.

[40] W. M. McEneaney, *Max-plus Models for Nonlinear Control and Estimation*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser, Boston, 2006.

[41] G. Merlet, "Semigroup of matrices acting on the max-plus projective space", *Linear Alg. Appl.*, **432**:8 (2010), 1923–1935.

[42] M. Molnárová, "Generalized matrix period in max-plus algebra", *Linear Alg. Appl.*, **404** (2005), 345–366.

[43] M. Molnárová, J. Pribiš, "Matrix period in max-algebra", *Discrete Appl. Math.*, **103** (2000), 167–175.

[44] N. J. Pullman, "A geometric approach to the theory of nonnegative matrices", *Linear Alg. Appl.*, **4** (1971), 297–312.

[45] H. Schneider, "The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and on related properties: A survey", *Linear Alg. Appl.*, **84** (1986), 161–189.

[46] B. De Schutter, "On the ultimate behaviour of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra", *Linear Alg. Appl.*, **307** (2000), 103–117.

[47] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 1981.

[48] S. Sergeev, "Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes", *Linear Alg. Appl.*, **431**:6 (2009), 1325–1339, arXiv: org/abs/0903.3960.

[49] S. Sergeev, H. Schneider, "CSR expansions of matrix powers in max algebra", *Transactions of AMS*, **364** (2012), 5969–5994, arXiv: org/abs/0912.2534.

[50] S. Sergeev, H. Schneider, P. Butkovič, "On visualization scaling, subeigenvectors and Kleene stars in max algebra", *Linear Alg. Appl.*, **431**:12 (2009), 2395–2406, arXiv: org/abs/0808.1992.

[51] G. Sierksma, "Limiting polytopes and periodic Markov chains", *Linear and Multilinear Algebra*, **46** (1999), 281–298.

[52] B.-S. Tam, H. Schneider, "On the core of a cone-preserving map", *Transactions of the AMS*, **343**:2 (1994), 479–524.

[53] E. Wagneur, “Moduloïds and pseudomodules. 1. Dimension theory”, *Discrete Math.*, **98** (1991), 57–73.

Список литературы

[1] Н. Н. Воробьев, “Экстремальная алгебра матриц”, *Докл. АН СССР*, **152**:1 (1963), 24–27.

[2] Н. Н. Воробьев, “Экстремальная алгебра положительных матриц”, *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **3**:1 (1967), 39–71.

[3] Н. Н. Воробьев, “Экстремальная алгебра неотрицательных матриц”, *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, **6**:4–5 (1970), 303–312.

[4] П. И. Дудников, С. Н. Самборский, “Эндоморфизмы полумодулей над полукольцами с идемпотентной операцией”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:1 (1991), 93–109.

[5] Н. К. Кривулин, *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем*, Изд. Санкт-Петербургского Гос. Ун-та, Санкт-Петербург, 2009.

[6] Г. Л. Литвинов, В. П. Маслов, А. Н. Соболевский, “Идемпотентная математика и интервальный анализ”, *Вычислительные технологии*, **6**:6 (2001), 47–70.

[7] В. П. Маслов, “О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации”, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 39–48.

[8] В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*, Физматлит, М., 1994.

[9] Г. Б. Шпиз, “Теорема о существовании собственного вектора в идемпотентном анализе”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 459–468.

[10] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, “Max-plus algebras”, *Handbook of Linear Algebra.* V. 39: *Discrete Mathematics and its Applications*, eds. L. Hogben, R. Brualdi, A. Greenbaum, and R. Mathias, Chapman and Hall, London; New York, 2007.

[11] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J. P. Quadrat, “Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems”, *Journal of the Operational Research Society*, **45**:1 (1994).

[12] A. Berman, R .J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.

[13] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, B. Solomyak, “Invariant measures on stationary Bratteli diagrams”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **30**:4 (2010), 973–1007.

[14] R. A. Brualdi, H. J. Ryser, *Combinatorial Matrix Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[15] P. Butkovič, “Max-algebra: the linear algebra of combinatorics?”, *Linear Alg. Appl.*, **367** (2003), 313–335.

[16] P. Butkovič, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer, London, 2010.

[17] P. Butkovič, R. A. Cuninghame-Green, S. Gaubert, “Reducible spectral theory with applications to the robustness of matrices in max-algebra”, *SIAM J. on Matrix Analysis and Applications*, **31**:3 (2009), 1412–1431.

[18] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Generators, extremals and bases of max cones”, *Linear Alg. Appl.*, **421** (2007), 394–406, arXiv: org/abs/math.RA/0604454.

[19] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Two cores of a nonnegative matrix, submitted”, 2012, arXiv: org/abs/math.RA/1208.1939.

[20] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “On the max-algebraic core of a nonnegative matrix”, 2013, arXiv: org/abs/1305.7339.

[21] P. Butkovič, H. Schneider, S. Sergeev, “Z-matrix equations in max algebra, nonnegative linear algebra and other semirings”, *Linear and Multilin. Alg.*, **60**:10 (2012), 1191-1210, arXiv: org/abs/1110.4564.

[22] M.-H. Chi, “The long-run behaviour of Markov chains”, *Linear Alg. Appl.*, **244** (1996), 111–121.

[23] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat, M. Viot, “Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes”, *Rapport de Recherche*, 1983, № 191.

[24] R. A. Cuninghame-Green, “Minimax Algebra”, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. V. 166, Springer, Berlin, 1979.

[25] R. A. Cuninghame-Green, “Describing industrial processes with interference and approximating their steady-state behaviour”, *Operations Research*, **13**:1 (1962), 95–100.

[26] G. F. Frobenius, “Über Matrizen aus nicht negativen Elementen”, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **23**, Sitzungsberichte, Berlin, 1912, 456–477.

[27] S. Gaubert, *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, PhD thesis, Thèse de l’Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Juillet, 1992, 304 pp.

[28] S. Gaubert, R. D. Katz, “The Minkowski theorem for max-plus convex sets”, *Linear Alg. Appl.*, **421**:2-3 (2007), 356–369, arXiv: org/abs/math.GM/0605078.

[29] M. Gavalec, *Periodicity in Extremal Algebras*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2004.

[30] M. Gondran, M. Minoux, “Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes”, *EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. Serie C. Mathematiques Informatique*, **2** (1977), 25–41.

[31] D. J. Hartfiel, *Nonhomogeneous Matrix Products*, World Scientific, Singapore, 2002.

[32] B. Heidergott, G.-J. Olsder, J. van der Woude, *Max-plus at Work*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

[33] R. D. Katz, H. Schneider, S. Sergeev, “On commuting matrices in max algebra and in classical nonnegative algebra”, *Linear Alg. Appl.*, **436** (2012), 276–292, arXiv: org/abs/1005.1424.

[34] C.-K. Li, H. Schneider, “Applications of Perron-Frobenius theory to population dynamics”, *J. of Mathematical Biology*, **44**:5 (2002), 450–462, arXiv: org/abs/math.RA/0109008.

[35] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, “The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications”, *Idempotency*, ed. J. Gunawardena, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 420–443, arXiv: org/abs/math/0101021.

[36] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, **307**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2005.

[37] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, S. N. Sergeev, *Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics*. V. 1,2, Independent University of Moscow, Moscow, 2007, arXiv: org/abs/0709.4119.

[38] G. L. Litvinov, S. N. Sergeev, *Tropical and Idempotent Mathematics*, **495**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2009.

[39] *Advances in Soviet Mathematics*. V. 13: *Idempotent analysis*, ed. V. P. Maslov, S. N. Samborskiĭ, AMS, Providence, 1992.

[40] W. M. McEneaney, *Max-plus Models for Nonlinear Control and Estimation*, Systems & Control: Foundations & Applications, Birkhäuser, Boston, 2006.

[41] G. Merlet, “Semigroup of matrices acting on the max-plus projective space”, *Linear Alg. Appl.*, **432**:8 (2010), 1923–1935.

[42] M. Molnárová, “Generalized matrix period in max-plus algebra”, *Linear Alg. Appl.*, **404** (2005), 345–366.

[43] M. Molnárová, J. Pribiš, “Matrix period in max-algebra”, *Discrete Appl. Math.*, **103** (2000), 167–175.

[44] N. J. Pullman, "A geometric approach to the theory of nonnegative matrices", *Linear Alg. Appl.*, **4** (1971), 297–312.

[45] H. Schneider, "The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and on related properties: A survey", *Linear Alg. Appl.*, **84** (1986), 161–189.

[46] B. De Schutter, "On the ultimate behaviour of the sequence of consecutive powers of a matrix in the max-plus algebra", *Linear Alg. Appl.*, **307** (2000), 103–117.

[47] E. Seneta, *Non-negative Matrices and Markov Chains*, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 1981.

[48] S. Sergeev, "Max algebraic powers of irreducible matrices in the periodic regime: An application of cyclic classes", *Linear Alg. Appl.*, **431**:6 (2009), 1325–1339, arXiv: org/abs/0903.3960.

[49] S. Sergeev, H. Schneider, "CSR expansions of matrix powers in max algebra", *Transactions of AMS*, **364** (2012), 5969–5994, arXiv: org/abs/0912.2534.

[50] S. Sergeev, H. Schneider, P. Butkovič, "On visualization scaling, subeigenvectors and Kleene stars in max algebra", *Linear Alg. Appl.*, **431**:12 (2009), 2395–2406, arXiv: org/abs/0808.1992.

[51] G. Sierksma, "Limiting polytopes and periodic Markov chains", *Linear and Multilinear Algebra*, **46** (1999), 281–298.

[52] B.-S. Tam, H. Schneider, "On the core of a cone-preserving map", *Transactions of the AMS*, **343**:2 (1994), 479–524.

[53] E. Wagneur, "Moduloïds and pseudomodules. 1. Dimension theory", *Discrete Math.*, **98** (1991), 57–73.

Information about the authors

Peter Butkovič, Professor, Researcher (Academic) of the Mathematics School. University of Birmingham, Birmingham, United Kingdom.
E-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3912-9250

Hans Schneider, Professor, University of Wisconsin-Madison. Madison, USA.
E-mail: hans@math.wisc.edu

Sergeĭ Sergeev, Associate Professor of the Mathematics School. University of Birmingham, Birmingham, United Kingdom.
E-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Peter Butkovič
E-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk

Received 21 June 2019
Reviewed 29 July 2019
Accepted for press 23 August 2019

Информация об авторах

Буткович Петер, профессор, научный сотрудник Школы математики. Университет Бирмингема, г. Бирмингем, Великобритания.
E-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3912-9250

Шнайдер Ганс, профессор. Висконсинский университет в Мадисоне, г. Мадисон, штат Висконсин, США. E-mail: hans@math.wisc.edu

Сергеев Сергей, доцент Школы математики. Университет Бирмингема, г. Бирмингем, Великобритания.
E-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Буткович Петер
E-mail: P.Butkovic@bham.ac.uk

Поступила в редакцию 21 июня 2019 г.
Поступила после рецензирования 29 июля 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Жуковская Т.В., Филиппова О.В., Шиндяпин А.И., 2019
DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280
УДК 517.911, 517.929, 517.988.6

О распространении теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения нейтрального типа

Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ[1] **, Ольга Викторовна ФИЛИППОВА**[2] **, Андрей Игоревич ШИНДЯПИН**[3]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880, e-mail: philippova.olga@rambler.ru
[3] Университет имени Эдуардо Мондлане
3453, Мозамбик, г. Мапуто, ул. Джулиуса Нейрере
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8750-1534, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

On the extension of Chaplygin's theorem to the differential equations of neutral type

Tatiana V. ZHUKOVSKAIA[1] **, Olga V. FILIPPOVA**[2] **, Andrey I. SHINDIAPIN**[3]
[1] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] Derzhavin Tambov State University
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880, e-mail: philippova.olga@rambler.ru
[3] Eduardo Mondlane University
Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8750-1534, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Аннотация. Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение $\dot{x}((g(t)) = f\big(t, x(h(t))\big),\ t \in [0,1],$ где функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, но возможно не обеспечивает действие соответствующего оператора суперпозиции из пространства существенно ограниченных функций в пространство суммируемых функций. Вследствие этого, к интегральному уравнению, которое равносильно задаче Коши, не удается применить стандартные результаты анализа, в частности, теоремы о неподвижной точке. Используемый в работе подход к исследованию разрешимости такого уравнения основан не на теоремах о неподвижной точке, а на полученных в [A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications, 2015, v. 179, № 1, 13–33] результатах о точках совпадения отображений частично упорядоченных пространств. Использование этих результатов позволило в данной работе получить утверждение о существовании и оценке решения задачи Коши для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения, аналогичное известной теореме Чаплыгина. Основными предположениями в доказанном утверждении являются неубывание функции $f(t,\cdot)$ и существование двух абсолютно непрерывных функций v,w, удовлетворяющих при п.в. $t\in[0,1]$ неравенствам $\dot v(g(t))\geq f\big(t,v(h(t))\big)$, $\dot w(g(t))\leq f\big(t,w(h(t))\big)$. Приведен пример применения полученного утверждения.

Ключевые слова: точка совпадения отображений; частично упорядоченное пространство; функционально-дифференциальное уравнение; задача Коши; существование решения; теорема о дифференциальном неравенстве

Благодарности: Работа выполнена при поддержке SIDA-UEM (проект «Развитие математики, статистики и их приложений»), РФФИ (проекты № 19-01-00080а, 17-41-680975р_а, 18-31-00227мол_а).

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Филиппова О.В., Шиндяпин А.И.* О распространении теоремы Чаплыгина на дифференциальные уравнения нейтрального типа // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 272–280. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280.

Abstract. We consider functional-differential equation $\dot x((g(t))=f\big(t,x(h(t))\big)$, $t\in[0,1]$, where function f satisfies the Caratheodory conditions, but not necessarily guarantee the boundedness of the respective superposition operator from the space of the essentially bounded functions into the space of integrable functions. As a result, we cannot apply the standard analysis methods (in particular the fixed point theorems) to the integral equivalent of the respective Cauchy problem. Instead, to study the solvability of such integral equation we use the approach based not on the fixed point theorems but on the results received in [A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications, 2015, v. 179, № 1, 13–33] on the coincidence points of mappings in partially ordered spaces. As a result, we receive the conditions on the existence and estimates of the solutions of the Cauchy problem for the corresponding functional-differential equation similar to the well-known Chaplygin theorem. The main assumptions in the proof of this result are the non-decreasing function $f(t,\cdot)$ and the existence of two absolutely continuous functions v,w, that for almost each $t\in[0,1]$ satisfy the inequalities $\dot v(g(t))\geq f\big(t,v(h(t))\big)$, $\dot w(g(t))\leq f\big(t,w(h(t))\big)$. The main result is illustrated by an example.

Keywords: coincidence point of mappings; partially ordered space; functional-differential equation; Cauchy problem; existence of solution; differential inequality theorem

Acknowledgements: The work is partially supported by SIDA-UEM under the subprogramme Capacity building in Mathematics, Statistics and Its Applications, the Russian Fundation for Basic Research (projects no. 19-01-00080a, 17-41-680975р_а, 18-31-00227мол_а).

For citation: Zhukovskaia T.V., Filippova O.V., Shindyapin A.I. O rasprostranenii teoremy Chaplygina na differentsial'nye uravneniya nejtral'nogo tipa [On the extension of Chaplygin's theorem to the differential equations of neutral type]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 272–280. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-272-280. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Для исследования функционально-дифференциальных уравнений в случае, если соответствующие отображения не действуют в пространствах суммируемых функций, стандартные методы анализа часто бывают неэффективными, либо для их применения требуются дополнительные построения, в частности, определение специальных подпространств пространства абсолютно непрерывных функций, в которых соответствующие операторы становятся регулярными. Такие уравнения называют сингулярными. Сингулярности могут быть вызваны, например, несуммируемыми коэффициентами. Сингулярными часто являются уравнения нейтрального типа, то есть уравнения, содержащие композицию $\dot{x}(g(\cdot))$ производной искомой функции x и заданной функции g. Эта композиция не обязательно будет суммируемой для произвольной суммируемой функции $\dot{x}$ без достаточно обременительных требований на функцию g (см. [1, с. 707], [2, §1.3]). Для линейных функционально-дифференциальных уравнений с несуммируемыми коэффициентами такое пространство было предложено в [3]. Нелинейные неявные (не разрешенные относительно производной) сингулярные дифференциальные уравнения с несуммируемыми особенностями рассматривались в [4,5], исследование основывалось на утверждениях о липшицевых возмущениях накрывающих отображений метрических пространств (см., например, [6]). Отметим, что начало применению таких утверждений в теории дифференциальных уравнений положила работа [7].

В данной работе рассматривается уравнение нейтрального типа, в котором композиция $\dot{x}(g(\cdot))$ может быть несуммируемой, а уравнение может иметь и другие сингулярности. Предлагается подход, отличный от использованного в цитируемых работах, основанный на результатах [8,9] о точках совпадения накрывающего и изотонного отображений, действующих в частично упорядоченных пространствах. Идея исследования дифференциальных и интегральных уравнений на основании результатов об упорядоченно накрывающих отображениях была предложена Е.С. Жуковским в [10,11].

Статья состоит из двух разделов. В первом разделе приведены необходимые для исследования сведения об упорядоченно накрывающих отображениях и теоремы о точке совпадения, полученные в [8]. Во втором разделе доказывается теорема о существовании и оценке решения задачи Коши для сингулярного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, аналогичная известной теореме Чаплыгина.

1. Точки совпадения отображений в упорядоченных пространствах

Пусть заданы частично упорядоченные пространства $X = (X, \preceq_X)$, $Y = (Y, \preceq_Y)$ и определены отображения $\psi, \varphi : X \to Y$. Сформулируем полученные в [8] условия существования точки совпадения отображений ψ, φ — решения уравнения $\psi(x) = \varphi(x)$. Обозначим $O_X(u) := \{x \in X : x \preceq_X u\}$, $[v, u]_X := \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}$, где u, v — заданные элементы пространства X такие, что $v \preceq u$.

О п р е д е л е н и е 1. Отображение $\varphi : X \to Y$ называется *изотонным на множестве* $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ таких, что $x \preceq_X u$, выполнено $\varphi(x) \preceq_Y \varphi(u)$.

О п р е д е л е н и е 2. [8] Отображение $\psi : X \to Y$ называется (*упорядоченно*) *накрывающим множество* $W \subset Y$, если

$$\forall u \in X \quad \forall y \in W \quad y \preceq_Y \psi(u) \ \Rightarrow \ \exists x \in X \ \psi(x) = y \ \text{и} \ x \preceq_X u.$$

Определим совокупность $\mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ цепей $S \subset X$, удовлетворяющих условиям:

$$S \subset U, \quad \psi(S) \subset W, \quad \forall\, x \in S \quad \varphi(x) \preceq_Y \psi(x),$$
$$\forall\, x, u \in S \quad x \prec_X u \ \Rightarrow \ \psi(x) \preceq_Y \varphi(u).$$

Теорема 1. *[8] Пусть существует такой элемент $x_0 \in X$, что $\varphi(x_0) \preceq_Y \psi(x_0)$ и выполнены условия:*

(1.a) *отображение φ является изотонным на множестве $U := O_X(x_0)$;*

(1.b) *отображение ψ упорядоченно накрывает множество $W := \varphi(O_X(x_0))$;*

(1.c) *произвольная цепь $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ имеет нижнюю границу $u \in X$, для которой справедливо неравенство $\varphi(u) \preceq_Y \psi(u)$.*

Тогда в множестве U существует точка совпадения отображений ψ и φ, и в множестве $\{x \in U : \psi(x) = \varphi(x)\}$ существует минимальный элемент.

Теорема 2. *[8] Пусть существуют такие элементы $x_0, z_0 \in X$, что $z_0 \preceq_X x_0$, $\psi(z_0) \preceq_Y \varphi(z_0)$, $\varphi(x_0) \preceq_Y \psi(x_0)$ и выполнены условия:*

(2.a) *отображение φ является изотонным на отрезке $U := [z_0, x_0]$;*

(2.b) *сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок $W := [\varphi(z_0),\, \varphi(x_0)]$;*

(2.c) *любая цепь $S \in \mathcal{S}(\psi, \varphi, U, W)$ имеет нижнюю границу $u \in U$, для которой справедливо неравенство $\varphi(u) \preceq_Y \psi(u)$.*

Тогда на отрезке U существует точка совпадения отображений ψ и φ, и в множестве точек совпадения $\{x \in U : \psi(x) = \varphi(x)\}$ существует минимальный элемент.

2. Функционально-дифференциальное уравнение нейтрального типа

Обозначим через μ меру Лебега на $[0, 1]$, символами M и L обозначим пространства измеримых и, соответственно, суммируемых по Лебегу функций $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Считаем, что на пространствах M, L определен естественный порядок: $y \le z$, если $y(t) \le z(t)$, при п.в. $t \in [0, 1]$. Пусть определены измеримые функции $g, h : [0, 1] \to [0, 1]$ и функция $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям Каратеодори, то есть измеримая по первому аргументу и непрерывная по второму аргументу. Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}((g(t)) = f\big(t, x(h(t))\big), \ t \in [0, 1]. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) называем абсолютно непрерывную функцию функцию, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [0, 1]$. Задачей Коши для уравнения (1) называют задачу нахождения решения, которое удовлетворяет начальному условию

$$x(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Отметим, что для функции f не предполагаются выполненными условия, обеспечивающие действие соответствующего оператора суперпозиции (называемого «оператором Немыцкого») из пространства существенно ограниченных функций в пространство суммируемых функций. В силу условий Каратеодори можно лишь гарантировать, что для любой непрерывной функции x функция $t \mapsto f\big(t, x(h(t))\big)$ измерима.

Пусть функция g удовлетворяет следующему условию (называемому в литературе «условием независания графика»)

$$\forall e \subset [0,1] \ \ \mu(e) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(g^{-1}(e)) = 0 \tag{3}$$

Условие (3) необходимо и достаточно для выполнения включения $y(g(\cdot)) \in M$ при всех $y \in M$ (см. [2, §1.3]).

Теорема 3. *Пусть абсолютно непрерывные функции* $v, w : [0,1] \to \mathbb{R}$ *удовлетворяют соотношению* $v(0) = w(0) = \alpha$ *и при п.в.* $t \in [0,1]$ *неравенствам*

$$\dot{w}(t) \le \dot{v}(t), \quad \dot{v}(g(t)) \ge f\big(t, v(h(t))\big), \quad \dot{w}(g(t)) \le f\big(t, w(h(t))\big).$$

Пусть при п.в. $t \in [0,1]$ *сужение функции* $f(t,\cdot)$ *на отрезок* $D(t) := [w(h(t)),\, v(h(t))]$ *является неубывающей функцией, функция* g *инъективна п.в на* $[0,1]$ *и наряду с условием* (3) *для нее справедливо еще условие*

$$\forall e \subset [0,1] \ \ \mu(e) = 0 \ \Rightarrow \ \mu(g(e)) = 0. \tag{4}$$

Тогда существует решение x *задачи Коши* (1), (2), *удовлетворяющее п.в. на* $[0,1]$ *неравенству* $\dot{w}(t) \le \dot{x}(t) \le \dot{v}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем задачу (1), (2) относительно $y = \dot{x}$ в виде уравнения

$$y(g(t)) = f\Big(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, y(s)\, ds\Big), \ t \in [0,1], \tag{5}$$

где символом $\chi_e(\cdot) : [0,1] \to [0,1]$ обозначена характеристическая функция множества $e \subset [0,1]$. Уравнение (5) — это уравнение вида $\psi y = \varphi y$, в котором отображения $\psi, \varphi : L \to M$ определены формулами

$$(\psi y)(t) := y(g(t)), \quad (\varphi y)(t) := f\Big(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, y(s)\, ds\Big), \ y \in L$$

Покажем, что эти отображения удовлетворяют условиям теоремы 2.

Вследствие предположений на функции v, w справедливы неравенства

$$\dot{w} \le \dot{v}, \quad \psi\dot{w} \le \varphi\dot{w}, \quad \psi\dot{v} \ge \varphi\dot{v}.$$

Обозначим через $U := [\dot{w}, \dot{v}] \subset L$ множество измеримых сечений измеримого многозначного отображения $t \in [0,1] \mapsto U(t) := [\dot{w}(t), \dot{v}(t)]$. Так как функция $f(t,\cdot) : D(t) \to \mathbb{R}$ не убывает, отображение φ является изотонным на U, то есть справедливо условие **(2.a)**.

Покажем, что сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок $W := [\varphi\dot{w}, \varphi\dot{v}] \subset M$. Вначале докажем, что область определения $g([0,1])$ функции g^{-1} есть измеримое множество, а сама функция является измеримой. Обозначим $I_0 := [0,1]$. Согласно теореме Лузина (см. [12, теорема VI.6.4]) существует замкнутое множество $I_1 \subset I_0$ такое, что $\mu(I_0 \setminus I_1) < 2^{-1}$ и сужение функции g на I_1 непрерывно. Из компактности множества I_1 следует, что множество $g(I_1)$ компактно и поэтому измеримо. Далее, вновь в силу теоремы Лузина существует замкнутое множество $I_2 \subset I_0 \setminus I_1$ такое, что $\mu(I_0 \setminus (I_1 \cup I_2)) < 2^{-2}$ и сужение функции g на I_2 непрерывно, следовательно множество $g(I_2)$ измеримо. Повторяя эту процедуру, при каждом $n = 1, 2, \ldots$ определим замкнутое множество $I_n \subset I_0 \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n-1} I_j\Big)$ такое, что $\mu(I_0 \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{n} I_j\Big) < 2^{-n}$ и сужение функции g на I_n непрерывно, а множество $g(I_n)$ измеримо. Определим множество $\widehat{I} := I_0 \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\Big)$, для которого, очевидно, выполнено $\mu(\widehat{I}) = 0$. Из предположения (4) следует, что множество $g([0,1])$ измеримо и его мера равна

$$\mu(g(I_0)) = \mu(g(\widehat{I})) + \sum_{j=0}^{\infty} \mu(g(I_j)) = \mu(g(I_0)).$$

Для доказательства измеримости функции $g^{-1} : g(I_0) \to I_0$ выберем произвольное число $A \in I_0$ и заметим, что множество Лебега $\{t : g^{-1}(t) \geq A\} = g([A,1])$ измеримо. Доказательство этого факта повторяет доказательство измеримости множества $g(I_0)$.

Обозначим через $W := [\varphi\dot{w}, \varphi\dot{v}] \subset M$. Для доказательства условия **(2.b)** определим произвольные функции $u \in U$, $y \in W$ такие, что $y \leq \psi u$, то есть

$$\dot{w}(g(t)) = (\psi\dot{w})(t) \leq (\varphi\dot{w})(t) \leq y(t) \leq u(g(t)) \leq (\varphi\dot{v})(t) \leq (\psi\dot{v})(t) = \dot{v}(g(t)), \quad t \in [0,1].$$

Определим функцию

$$z(t) = \begin{cases} y(g^{-1}(t), & \text{при } t \in g([0,1]), \\ u(t), & \text{при } t \notin g([0,1]). \end{cases}$$

Поскольку функция g^{-1} измерима и справедливо условие (4), функция z измерима. Имеем $\dot{v} \leq z \leq u$ и $(\psi z)(t) = z(g(t)) = y(t)$. Итак, сужение отображения ψ на множество U упорядоченно накрывает отрезок W.

Проверим условие **(2.c)**. Пусть задана произвольная цепь $S \subset U$ такая, что для каждого элемента $u \in S$ справедливо $u(g(t)) = (\psi u)(t) \leq (\varphi u)(t)$. Эта цепь, очевидно, имеет точную нижнюю границу, положим $\zeta := \inf S$. При в.в. $t \in [0,1]$ выполнено $\zeta(t) = \inf\{u(t) : u \in S\}$ и существует невозрастающая последовательность элементов $u_j \in S$, для которой $\lim_{j\to\infty} u_j(t) = \zeta(t)$. Очевидно, справедливо соотношение

$$\zeta(g(t)) \leq u_j(g(t)) = (\psi u_j)(t) \leq (\varphi u_j)(t), \quad j = 1, 2, \ldots .$$

Согласно теореме Леви (см. [12, теорема VIII.4.2]) при в.в. $t \in [0,1]$ имеет место сходимость

$$\int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, u_j(s)\, ds\Big) \to \int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, \zeta(s)\, ds\Big).$$

Следовательно, так как функция f удовлетворяет условиям Каратеодори, получаем

$$(\varphi u_j)(t) = f\Big(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, u_j(s)\, ds\Big) \to f\Big(t, \alpha + \int_0^1 \chi_{[0,h(t)]}(s)\, \zeta(s)\, ds\Big) = (\varphi\zeta)(t).$$

А поскольку при предельном переходе для числовых последовательностей неравенство сохраняется, получаем $(\psi\zeta)(t) \le (\varphi\zeta)(t)$.

Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Таким образом, существует решение ξ уравнения (5), принадлежащее множеству U. Тогда задача Коши также разрешима и производная ее решения — это функция $\xi \in U$. $\square$

Проиллюстрируем применение теоремы 3.

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t^2) = \frac{x^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}, \quad t \in [0,1], \tag{6}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{7}$$

Заметим, что в рассматриваемом уравнении правая часть для некоторых абсолютно непрерывных x может быть несуммируемой функций, композиция $\dot{x}(t^2)$ тоже возможно является несуммируемой функцией.

Используя теорему 3, покажем, что при достаточно малых $\lambda > 0$ задача (6), (7) разрешима. Положим $w(t) \equiv 0$, $v(t) = k\sqrt{t}$, где коэффициент $k > 0$ будет определен ниже так, чтобы выполнялись условия теоремы 3. Для данных функций w, v имеем

$$0 = \dot{w}(t^2) \le \frac{w^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \frac{\lambda}{\sqrt{t}};$$

$$\dot{v}(t^2) = \frac{k}{2t}, \quad \frac{v^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \frac{k^2}{t} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}.$$

Легко видеть, что при $\lambda < 1/8$ будет выполнено неравенство

$$\dot{v}(t^2) \ge \frac{v^2(t)}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \;\Leftrightarrow\; \frac{k}{2t} \ge \frac{k^2}{t} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}},$$

если значение k выбрать любым из интервала $\big(4^{-1}(1-\sqrt{1-8\lambda}),\, 4^{-1}(1+\sqrt{1-8\lambda})\big)$. Остается заметить, что функция

$$f(t,x) = \frac{x^2}{t^2} + \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$$

является возрастающей по x при $x \in [0, k\sqrt{t}]$.

Список литературы

[1] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.*, ИЛ, М., 1962.

[2] Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1957, 1991.

[3] A. Shindiapin, "On linear singular functional-differential equations in one functional space", *Abstract and Applied Analysis*, **179**:1 (2015), 13–33.

[4] Е. А. Плужникова, А. И. Шиндяпин, "Об одном методе исследования неявных сингулярных дифференциальных включений", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6-1 (2017), 1314–1320 DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320.

[5] A. I. Shindiapin, E. S. Zhukovskiy, "Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **21**:6 (2016), 2107–2112 DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112.

[6] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об антитонных возмущениях накрывающих отображений упорядоченных пространств", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **21**:2 (2016), 371–374 DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374.

[7] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, "Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной", *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634.

[8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **7** (2004), 567–575.

[9] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах", *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478.

[10] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127.

[11] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах", *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627.

[12] Б. З. Вулих, *Краткий курс теории функций вещественной переменной*, Наука, М., 1973.

References

[1] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part I: General Theory, Interscience publishers, New York, London, 1958.

[2] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations*, Nauka, Moscow, 1957, 1991 (In Russian).

[3] A. Shindiapin, "On linear singular functional-differential equations in one functional space", *Abstract and Applied Analysis*, **179**:1 (2015), 13–33.

[4] E. A. Pluzhnikova, A. I. Shindyapin, "On one method of studying implicit singular differential inclusions", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6-1 (2017), 1314–1320 (In Russian DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1314-1320).

[5] A. I. Shindiapin, E. S. Zhukovskiy, "Covering mappings in the theory of implicit singular differential equations", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:6 (2016), 2107–2112 DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2107-2112.

[6] T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy, "About antitone perturbations of covering mappings of ordered spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **21**:2 (2016), 371–374 (In Russian DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374).

[7] E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, "Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative", *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[8] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces", *Topology and its Applications*, **7** (2004), 567–575.

[9] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On coincidence points of mappings in partially ordered spaces", *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[10] E. S. Zhukovskiĭ, "About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities", *Algebra i Analiz*, **30**:1 (2018), 96–127 (In Russian).

[11] E. S. Zhukovskiy, "On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities", *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[12] B. Z. Vulikh, *A Short Course in the Theory of Functions of a Real Variable*, Nauka, Moscow, 1973.

Информация об авторах

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Филиппова Ольга Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Шиндяпин Андрей Игоревич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет имени Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик. E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8750-1534

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Жуковская Татьяна Владимировна
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Поступила в редакцию 23 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 27 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the authors

Tatiana V. Zhukovskaia, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4374-4336

Olga V. Filippova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: philippova.olga@rambler.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1612-9880

Andrey I. Shindiapin, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Computer Science Department. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8750-1534

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Tatiana V. Zhukovskaia
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Received 23 May 2019
Reviewed 27 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

Том 24, № 127 2019

© Yoshioka A., 2019
DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-281-292
УДК 517.9

Star product and star function

Akira YOSHIOKA
Tokyo University of Science
162-8601, Japan, Tokyo, Kagurazaka, Shinjuku, 1–3
e-mail: yoshioka@rs.kagu.tus.ac.jp

Звездочное умножение и звездочные функции

Акира ЙОШИОКА
Токийский научный университет
1–3 Кагуразака, Синдзюку, Токио 162-8601, Япония
e-mail: yoshioka@rs.kagu.tus.ac.jp

Abstract. We give a brief review on star products and star functions [8, 9]. We introduce a star product on polynomials. Extending the product to functions on complex space, we introduce exponential element in the star product algebra. By means of the star exponential functions we can define several functions called star functions in the algebra. We show certain examples.

Keywords: Moyal product; star product; star product algebra; star exponential functions

Acknowledgements: The work is partially supported by Grant-in-Aid for JSPS № 24540097.

For citation: Yoshioka A. Star product and star function. *Vestnik rossiyskih universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 281–292. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-281-292.

Аннотация. Мы даем короткий обзор звездочных умножений и звездочных функций, см. [8, 9]. Сначала мы вводим звездочное умножение для многочленов. Затем, распространяя произведение на функции, заданные на комплексном пространстве, мы вводим экспоненты в алгебрах с звездочным умножением. С помощью звездочно показательных функций мы можем определить некоторые функции в этих алгебрах, называемые звездочными функциями. Мы также указываем некоторые примеры.

Ключевые слова: умножение Мойяла; звездочное умножение; алгебры со звездочным умножением; звездочно показательные функции

Благодарности: Работа частично поддержана грантом Grant-in-Aid for JSPS № 24540097.

Для цитирования: *Йошиока А.* Звездочное умножение и звездочные функции // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 281–292. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-281-292. (In Engl., Abstr. in Russian)

1. Star product on polynomials

1.1. Moyal product

The Moyal product is a well-known example of star product [2,3].

For polynomials f,g of the variables $(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_m)$, the Moyal product $f *_O g$ is given by the power series of the bidifferential operators $\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}$ such that

$$\begin{aligned} f *_O g &= f\exp\frac{i\hbar}{2}\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right)\, g = f\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right)^k g \\ &= fg+\frac{i\hbar}{2}f\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right) g+\frac{1}{2!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 f\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right)^2 g \\ &\quad+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^k f\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right)^k g+\cdots \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

where $\hbar$ is a positive number and the overleft arrow $\overleftarrow{\partial}$ means that the partial derivative is acting on the polynomial on the left and the overright arrow similar, for example

$$f\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}-\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right) g=\sum_{j=1}^{m}\left(\partial_{v_j}f\ \partial_{u_j}g-\partial_{u_j}f\ \partial_{v_j}g\right).$$

Although the Moyal product is defined as a formal power series of bidifferential operators, this becomes a finite sum on polynomials.

P r o p o s i t i o n 1.1.1. *The Moyal product is well-defined on polynomials, and associative.*

Other typical star products are normal product $*_N$, anti-normal product $*_A$ given similarly by

$$f *_N g = f\exp i\hbar\left(\overleftarrow{\partial_v}\cdot\overrightarrow{\partial_u}\right)\, g,\quad f *_A g = f\exp\left\{-i\hbar\left(\overleftarrow{\partial_u}\cdot\overrightarrow{\partial_v}\right)\right\}\, g.$$

These are also well-defined on polynomials and associative.

By direct calculation we see easily

P r o p o s i t i o n 1.1.2.

(i) *For these star products, the generators $(u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_m)$ satisfy the canonical commutation relations*

$$[u_k,v_l]_{*_L}=-i\hbar\delta_{kl},\ [u_k,u_l]_{*_L}=[v_k,v_l]_{*_L}=0,\quad (k,l=1,2,\dots,m)$$

where $*_L$ stands for $*_O$, $*_N$ and $*_A$.

(ii) *Then the algebras $(\mathbb{C}[u,v],*_L)$ $(L=O,N,A)$ are mutually isomorphic and isomorphic to the Weyl algebra.*

Actually the algebra isomorphism

$$I_O^N : (\mathbb{C}[u,v], *_O) \to (\mathbb{C}[u,v], *_N)$$

is given explicitly by the power series of the differential operator such as

$$I_N^O\,(f) = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\partial_u\partial_v\right)(f) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{i\hbar}{2}\right)^l(\partial_u\partial_v)^l\,(f). \tag{1.1.2}$$

And other isomorphisms are given in the similar form.

R e m a r k 1.1.1. We remark here that these facts are well-known as ordering problem in physics [1].

1.2. Star product

Now we define a star product on complex domain by generalizing the previous products.

Let Λ be an arbitrary $n \times n$ complex matrix. We consider a bidifferential operator

$$\overleftarrow{\partial_w}\Lambda\overrightarrow{\partial_w} = (\overleftarrow{\partial_{w_1}}, \cdots, \overleftarrow{\partial_{w_n}})\Lambda(\overrightarrow{\partial_{w_1}}, \cdots, \overrightarrow{\partial_{w_n}}) = \sum_{k,l=1}^{n}\Lambda_{kl}\overleftarrow{\partial_{w_k}}\overrightarrow{\partial_{w_l}} \tag{1.2.3}$$

where $(w_1, \cdots, w_n)$ is a generators of polynomials.

Now we define a star product similar to (1) by

D e f i n i t i o n 1.2.1.

$$f *_{\Lambda} g = f \exp\left(\overleftarrow{\partial_w}\Lambda\overrightarrow{\partial_w}\right)\, g. \tag{1.2.4}$$

R e m a r k 1.2.1. [9]

(i) The star product $*_{\Lambda}$ is a generalization of the previous products. Actually

- if we put $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$ then we have the Moyal product
- if $\Lambda = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}$, then we have the normal product
- if $\Lambda = 2\begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ then we have the anti-normal product

(ii) If Λ is a symmetric matrix, the star product $*_{\Lambda}$ is commutative.

Then similarly as before we see easily

Theorem 1.2.1. *For an arbitrary Λ, the star product $*_{\Lambda}$ is well-defined on polynomials, and associative.*

1.3. Equivalence and geometric picture of Weyl algebra

In this section, we take Λ as a special class of matrices in order to represent Weyl algebra, cf. [4, 7]. We consider the following complex matrices Λ:

$$\Lambda = J + K,$$

where K is an arbitrary $2m \times 2m$ complex symmetric matrix and

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Since Λ is determined by K, we denote the star product by $*_{K}$ instead of $*_{\Lambda}$.

We consider polynomials in variables $(w_1, \cdots, w_{2m}) = (u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m)$. By a easy calculation one obtains

P r o p o s i t i o n 1.3.1.

(i) *For a star product* $*_{K}$, *the generators* $(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m)$ *satisfy the canonical commutation relations*

$$[u_k, v_l]_{*_K} = -i\hbar\delta_{kl}, \quad [u_k, u_l]_{*_K} = [v_k, v_l]_{*_K} = 0, \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

(ii) *Then the algebra* $(\mathbb{C}[u, v], *_{K})$ *is isomorphic to the Weyl algebra, and the algebra is regarded as a polynomial representation of the Weyl algebra.*

Equialence As in the case of typical star products, we have algebra isomorphisms as follows.

P r o p o s i t i o n 1.3.2. *For arbitrary star product algebras* $(\mathbb{C}[u, v], *_{K_1})$ *and* $(\mathbb{C}[u, v], *_{K_2})$ *we have an algebra isomorphism* $I_{K_1}^{K_2} : (\mathbb{C}[u, v], *_{K_1}) \to (\mathbb{C}[u, v], *_{K_2})$ *given by the power series of the differential operator* $\partial_w (K_2 - K_1) \partial_w$ *such that*

$$I_{K_1}^{K_2}(f) = \exp\left(\frac{i\hbar}{4}\, \partial_w (K_2 - K_1) \partial_w\right)(f),$$

where $\partial_w (K_2 - K_1) \partial_w = \sum_{kl} (K_2 - K_1)_{kl} \partial_{w_k} \partial_{w_l}$.

R e m a r k 1.3.1.

1. By the previous proposition we see the algebras $(\mathbb{C}[u, v], *_{K})$ are mutually isomorphic and isomorphic to the Weyl algebra. Hence we have a family of star product algebras $\{(\mathbb{C}[u, v], *_{K})\}_K$ where each element is regarded as a polynomial representation of the Weyl algebra.

2. The above equivalences are also possible to make for star products $*_{\Lambda}$ for arbitrary Λ's with a common skew symmetric part.

By a direct calculation we have

Theorem 1.3.1. *Isomorphisms satisfy the following chain rule:*

1. $I_{K_3}^{K_1} I_{K_2}^{K_3} I_{K_1}^{K_2} = Id\,, \quad \forall K_1, K_2, K_3$
2. $\left(I_{K_1}^{K_2}\right)^{-1} = I_{K_2}^{K_1}\,, \quad \forall K_1, K_2$

According to the previous theorem, we introduce an infinite dimensional bundle and a connection over it and using parallel sections of this bundle we have a geometric picture for the family of the star product algebras $\{(\mathbb{C}[u,v], *_{K})\}_K$.

Algebra bundle We set $\mathcal{S} = \{K\}$ the space of all $2m \times 2m$ symmetric complex matrices. We consider a trivial bundle over $\mathcal{S}$ whose fibers are the star product algebras

$$\pi : E = \prod_{K \in \mathcal{S}} (\mathbb{C}[u,v], *_{K}) \to \mathcal{S}, \quad \pi^{-1}(K) = (\mathbb{C}[u,v], *_{K}).$$

Then the previous proposition shows that fibers $(\mathbb{C}[u,v], *_{K})$ are mutually isomorphic and are isomorphic to the Weyl algebra, and the isomorphisms $I_{K_1}^{K_2}$ give an isomorphism between fibers.

Connection and parallel sections For a curve $C : K = K(t)$ in the base space $\mathcal{S}$, starting from $K(0) = K$, we define a parallel translation of a polynomial $f \in (\mathbb{C}[u,v], *_{K})$ by

$$f(t) = \exp \frac{i\hbar}{4}\, \partial_w (K(t) - K) \partial_w (f).$$

It is easy to see $f(0) = f$. By differentiating the parallel translation we have a connection of this bundle such that

$$\nabla_X f(K) = \frac{d}{dt} f(t)|_{t=0}(K) = \frac{i\hbar}{4}\, \partial_w X \partial_w\ f(K)|_{t=0}, \quad X = \dot{K}(t)|_{t=0},$$

where $f(K)$ is a smooth section of the bundle E.

We set $\mathcal{P}$ the space of all parallel sections of this bundle. Since $I_{K_1}^{K_2}$ are algebra isomorphisms

$$I_{K_1}^{K_2}(f(K_1) *_{K_1} g(K_1)) = \left(I_{K_1}^{K_2}(f(K_1)\right) *_{K_2} \left(I_{K_1}^{K_2}(g(K_1)\right),$$

we have a star product on the space of parallel sections $f, g \in \mathcal{P}$ by

$$f * g(K) = f(K) *_{K} g(K).$$

Then we have

Theorem 1.3.2.

(i) *The space of the parallel sections* $\mathcal{P}$ *consists of the sections such that*

$$\nabla_X f = \frac{i\hbar}{4}\, \partial_w X \partial_w \; f = 0, \quad \forall X.$$

(ii) *The space* $\mathcal{P}$ *is canonically equipped with the star product* $*$, *and the associative algebra* $(\mathcal{P}, *)$ *is isomorphic to the Weyl algebra.*

R e m a r k 1.3.2. The algebra $(\mathcal{P}, *)$ is regarded as a geometric realization of the Weyl algebra.

2. Extension to functions

We want to extend the star products $*_{_\Lambda}$ for an arbitrary complex matrix Λ from polynomials to functions, cf. [6].

2.1. Star product on certain holomorphic function space

We want to transfer the star products $*_{_\Lambda}$ from polynomials to functions. However, the product is not necessarily convergent for ordinary smooth functions, hence we need to restrict the product to certain subset of smooth functions.

There may be many such spaces. In this note we consider the following space of certain entire functions.

Semi-norm Let $f(w)$ be a holomorphic function on $\mathbb{C}^n$. For a positive number p, we consider a family of semi-norms $\{|\cdot|_{p,s}\}_{s>0}$ given by

$$|f|_{p,s} = \sup_{w \in \mathbb{C}^n} |f(w)| \exp(-s|w|^p), \quad |w| = \sqrt{|w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2}.$$

Space We put

$$\mathcal{E}_p = \{f : \text{entire} \mid |f|_{p,s} < \infty, \forall s > 0\}.$$

With the semi-norms the space $\mathcal{E}_p$ becomes a Fréchet space. As to the star products, we have for any matrix Λ.

Theorem 2.1.1.

(i) *For* $0 < p \leqslant 2$, $(\mathcal{E}_p, *_{_\Lambda})$ *is a Frechét algebra. That is, the product converges for any elements, and the product is continuous with respect to this topology.*

(ii) *Moreover, for any* Λ' *with the common skew symmetric part with* Λ, *the map*

$$I_{_\Lambda}^{\Lambda'} = \exp\left(\frac{i\hbar}{4}\, \partial_w(\Lambda' - \Lambda)\partial_w\right)$$

is a well-defined algebra isomorphism from $(\mathcal{E}_p, *_{_\Lambda})$ *to* $(\mathcal{E}_p, *_{_{\Lambda'}})$. *That is, the expansion convergies for every element, and the operator is continuous with respect to this topology.*

(iii) *For* $p > 2$, *the multiplication* $*_\Lambda : \mathcal{E}_p \times \mathcal{E}_q \to \mathcal{E}_p$ *is a well-defined for* q *such that* $(1/p) + (1/q) = 2$, *and* $(\mathcal{E}_p, *_\Lambda)$ *is a* $\mathcal{E}_q$*-bimodule.*

3. Star exponentials

Since we have a complete topological algebra, we can consider exponential elements in the star product algebra $(\mathcal{E}_p, *_\Lambda)$, cf. [9].

3.1. Definition

For a polynomial H_*, we want to define a star exponential $\exp_* (tH_*/i\hbar)$. However, except special cases, the expansion

$$\sum_n \frac{t^n}{n!}\left(\frac{H_*}{i\hbar}\right)^n$$

is not convergent, so we define a star exponential by means of a differential equation.

D e f i n i t i o n 3.1.1. The star exponential $\exp_* (tH_*/i\hbar)$ is given as a solution of the following differential equation

$$\frac{d}{dt}F_t = H_* *_\Lambda F_t, \quad F_0 = 1. \tag{3.1.1}$$

3.2. Examples

We are interested in the star exponentials of linear, and quadratic polynomials. For these, we can solve the differential equation and obtain explicit form. For simplicity, we take Λ as above: $\Lambda = K + J$ where K is a complex symmetric matrix.

First we remark the following. For a linear polynomial $l = \sum_{j=1}^{2m} a_j w_j$, we see directly that an ordinary exponential function e^l satisfies

$$e^l \notin \mathcal{E}_1, \quad \in \mathcal{E}_{1+\epsilon}, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Then put a Fréchet space

$$\mathcal{E}_{p+} = \cap_{q>p}\mathcal{E}_q.$$

Linear case

P r o p o s i t i o n 3.2.1. *For* $l = \sum_j a_j w_j =< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{w} >$, $a_j \in \mathbb{C}$, *we have*

$$\exp_* t\frac{l}{i\hbar} = \exp t^2 \frac{\boldsymbol{a}K\boldsymbol{a}}{4i\hbar} \cdot \exp t\frac{l}{i\hbar} \in \mathcal{E}_{1+}.$$

Quadratic case

P r o p o s i t i o n 3.2.2. *For* $Q_* = \langle \boldsymbol{w}A, \boldsymbol{w}\rangle_*$ *where* A *is a* $2m\times 2m$ *complex symmetric matrix,*

$$\exp_* t(Q_*/i\hbar) = \frac{2^m}{\sqrt{\det M}} \ \exp\frac{1}{i\hbar}\left\langle \boldsymbol{w}\, \frac{J - e^{-2t\alpha}J}{M}\, \boldsymbol{w}\right\rangle,$$

where $M = I - KJ + e^{-2t\alpha}(I + KJ)$ *and* $\alpha = AJ$.

R e m a r k 3.2.1. The star exponentials of linear functions are belonging to $\mathcal{E}_{1+}$ then the star products are convergent and continuous. But it is easy to see

$$\exp_* t(Q_*/i\hbar) \in \mathcal{E}_{2+}, \quad \notin \mathcal{E}_2$$

and hence star exponentials $\exp_* t(Q_*/i\hbar)$ are difficult to treat. Some anomalous phenomena happen, cf. [5].

4. Star functions

There are many applications of star exponential functions, cf. [8]. In this note we show examples using a linear star exponentials.

In what follows, we consider the star product for the simple case where

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{C}.$$

Then we see easily that the star product is commutative and explicitly given by

$$p_1 *_{\Lambda} p_2 = p_1 \exp\left(\frac{i\hbar\rho}{2}\overleftarrow{\partial_{w_1}}\,\overrightarrow{\partial_{w_1}}\right) p_2.$$

This means that the algebra is essentially reduced to the space of functions of one variable w_1. Thus, we consider functions $f(w)$, $g(w)$ of one variable $w \in \mathbb{C}$ and we consider a commutative star product $*_\tau$ with complex parameter τ such that

$$f(w) *_\tau g(w) = f(w)\exp\left\{\frac{\tau}{2}\overleftarrow{\partial}_w\overrightarrow{\partial}_w\right\} g(w).$$

4.1. Star Hermite function

Recall the identity

$$\exp\left(\sqrt{2}tw - \frac{1}{2}t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(w)\frac{t^n}{n!},$$

where $H_n(w)$ is an Hermite polynomial. We remark here that

$$\exp\left(\sqrt{2}tw - \frac{1}{2}t^2\right) = \exp_*(\sqrt{2}tw_*)_{\tau=-1}.$$

Since $\exp_*(\sqrt{2}tw_*) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2}tw_*)^n\dfrac{t^n}{n!}$ we have

$$H_n(w) = (\sqrt{2}tw_*)^n\Big|_{\tau=-1}.$$

We define $*$-Hermite function by

$$H_n(w,\tau) = (\sqrt{2}tw_*)^n, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

with respect to $*_\tau$ product. Then we have

$$\exp_*(\sqrt{2}tw_*) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(w,\tau)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Trivial identity $\dfrac{d}{dt}\exp_*(\sqrt{2}tw_*) = \sqrt{2}w{*}\exp_*(\sqrt{2}tw_*)$ yields at every $\tau\in\mathbb{C}$ the identity

$$\frac{\tau}{\sqrt{2}}H_n'(w,\tau) + \sqrt{2}wH_n(w,\tau) = H_{n+1}(w,\tau), \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

The exponential law $\exp_*(\sqrt{2}sw_*){*}\exp_*(\sqrt{2}tw_*) = \exp_*(\sqrt{2}(s+t)w_*)$ yields at every $\tau\in\mathbb{C}$ the identity

$$\sum_{k+l=n}\frac{n!}{k!\,l!}H_k(w,\tau)*_\tau H_l(w,\tau) = H_n(w,\tau).$$

4.2. Star theta function

In this note we consider the Jacobi's theta functions by using star exponentials as an application.

A direct calculation gives

$$\exp_{*_\tau} i\ tw = \exp(i\ tw - (\tau/4)t^2).$$

Hence for $\mathrm{Re}\,\tau>0$, the star exponential $\exp_{*_\tau} ni\ w = \exp(ni\ w-(\tau/4)n^2)$ is rapidly decreasing with respect to integer n and then we can consider summations for τ satisfying $\mathrm{Re}\,\tau>0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp_{*_\tau} 2ni\ w = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(2ni\ w-\tau\,n^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2ni\ w}, \quad (q=e^{-\tau}).$$

This is Jacobi's theta function $\theta_3(w,\tau)$. Then we have expression of theta functions as

$$\begin{aligned}
\theta_{1*_\tau}(w) &= \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp_{*_\tau}(2n+1)i\ w,\\
\theta_{2*_\tau}(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp_{*_\tau}(2n+1)i\ w,\\
\theta_{3*_\tau}(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp_{*_\tau}2ni\ w,\\
\theta_{4*_\tau}(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\exp_{*_\tau}2ni\ w.
\end{aligned}$$

Remark that $\theta_{k*_\tau}(w)$ is the Jacobi's theta function $\theta_k(w,\tau)$, $k=1,2,3,4$, respectively. It is obvious by the exponential law

$$\exp_{*_\tau} 2i\ w *_\tau \theta_{k*_\tau}(w) = \theta_{k*_\tau}(w) \quad (k=2,3),$$
$$\exp_{*_\tau} 2i\ w *_\tau \theta_{k*_\tau}(w) = -\theta_{k*_\tau}(w) \quad (k=1,4).$$

Then using $\exp_{*_\tau} 2i\ w = e^{-\tau} e^{2i\ w}$ and the product formula directly we have

$$e^{2i\ w-\tau}\theta_{k*_\tau}(w+i\tau) = \theta_{k*_\tau}(w) \quad (k=2,3),$$
$$e^{2i\ w-\tau}\theta_{k*_\tau}(w+i\tau) = -\theta_{k*_\tau}(w) \quad (k=1,4).$$

4.3. $*$-delta functions

Since the $*_\tau$-exponential $\exp_*(itw_*) = \exp(itw-(\tau/4)t^2)$ is rapidly decreasing with respect to t when $\mathrm{Re}\,\tau>0$, then the integral of $*_\tau$-exponential

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp_*(it(w-a)_*)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\exp_*(it(w-a)_*)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\exp(it(w-a)-(\tau/4)t^2)dt$$

converges for any $a\in\mathbb{C}$. We put a star δ-function

$$\delta_*(w-a) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp_*(it(w-a)_*)dt,$$

which has a meaning at τ with $\mathrm{Re}\,\tau>0$. It is easy to see that for any element $p_*(w)\in\mathcal{P}_*(\mathbb{C})$, we have

$$p_*(w)*\delta_*(w-a) = p(a)\delta_*(w-a),\ w_* * \delta_*(w) = 0.$$

Using the Fourier transform we have

P r o p o s i t i o n 4.3.1.

$$\theta_{1*}(w) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_*(w+\tfrac{\pi}{2}+n\pi)$$
$$\theta_{2*}(w) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\delta_*(w+n\pi)$$
$$\theta_{3*}(w) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_*(w+n\pi)$$
$$\theta_{4*}(w) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_*(w+\tfrac{\pi}{2}+n\pi).$$

Now, we consider the τ with the condition $\mathrm{Re}\,\tau>0$. Then we calculate the integral and obtain

$$\delta_*(w-a) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{1}{\tau}(w-a)^2\right).$$

Then we have

$$\begin{aligned}\theta_3(w,\tau) &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_*(w+n\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{1}{\tau}(w+n\pi)^2\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(-2n\frac{1}{\tau}w-\frac{1}{\tau}n^2\tau^2\right)\\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{1}{\tau}\right)\theta_{3*}(\frac{2\pi w}{i\tau},\frac{\pi^2}{\tau}).\end{aligned}$$

We also have similar identities for other $*$-theta functions by the similar way.

The author is grateful to V. F. Molchanov and S. Berceanu for valuable discussions and also grateful to the organizers for warm hospitality.

References

[1] G. S. Agarwal, E. Wolf, "Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics I. Mapping Theorems and ordering of functions of noncommuting operators", *Physical Review D*, **2**:10 (1970), 2161–2186.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, "Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures", *Annals of Physics*, **111**:1 (1978), 61–110.

[3] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45** (1949), 99–124.

[4] H. Omori, "Toward geometric quantum theory", *Progress in Mathematics*. V. 252: *From Geometry to Quantum Mechanics*, eds. Y. Maeda, T. Ochiai, P. Michor, A. Yoshioka, Birkhäuser, Boston, 2007, 213–251.

[5] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Strange phenomena related to ordering problems in quantizations", *Journal Lie Theory*, **13**:2 (2003), 481–510.

[6] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Orderings and non-formal deformation quantization", *Letters in Mathematical Physics*, **82** (2007), 153–175.

[7] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Geometric objects in an approach to quantum geometry", *Progress in Mathematics*. V. 252: *From Geometry to Quantum Mechanics*, eds. Y. Maeda, T. Ochiai, P. Michor, A. Yoshioka, Birkhäuser, Boston, 2007, 303–324.

[8] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Deformation Expression for Elements of Algebra", arXiv: math.ph/1104.1708v1.

[9] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Deformation Expression for Elements of Algebras (II)", arXiv: math.ph/1105.1218v2.

Список литературы

[1] G. S. Agarwal, E. Wolf, "Calculus for functions of noncommuting operators and general phase-space methods in quantum mechanics I. Mapping Theorems and ordering of functions of noncommuting operators", *Physical Review D*, **2**:10 (1970), 2161–2186.

[2] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, "Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures", *Annals of Physics*, **111**:1 (1978), 61–110.

[3] J. E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45** (1949), 99–124.

[4] H. Omori, "Toward geometric quantum theory", *Progress in Mathematics.* V. 252: *From Geometry to Quantum Mechanics*, eds. Y. Maeda, T. Ochiai, P. Michor, A. Yoshioka, Birkhäuser, Boston, 2007, 213–251.

[5] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Strange phenomena related to ordering problems in quantizations", *Journal Lie Theory*, **13**:2 (2003), 481–510.

[6] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Orderings and non-formal deformation quantization", *Letters in Mathematical Physics*, **82** (2007), 153–175.

[7] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Geometric objects in an approach to quantum geometry", *Progress in Mathematics.* V. 252: *From Geometry to Quantum Mechanics*, eds. Y. Maeda, T. Ochiai, P. Michor, A. Yoshioka, Birkhäuser, Boston, 2007, 303–324.

[8] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Deformation Expression for Elements of Algebra", arXiv: math.ph/1104.1708v1.

[9] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki, A. Yoshioka, "Deformation Expression for Elements of Algebras (II)", arXiv: math.ph/1105.1218v2.

Information about the author

Akira Yoshioka, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. Tokyo University of Science, Tokyo, Japan. E-mail: yoshioka@rs.kagu.tus.ac.jp

Received 14 June 2019
Reviewed 25 July 2019
Accepted for press 23 August 2019

Информация об авторе

Йошиока Акира, доктор физико-математических наук, профессор. Токийский научный университет, г. Токио, Япония. E-mail: yoshioka@rs.kagu.tus.ac.jp

Поступила в редакцию 14 июня 2019 г.
Поступила после рецензирования 25 июля 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Кулманакова М.М., Ульянова Е.Л., 2019
DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315
УДК 517.927

О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием

Марина Михайловна КУЛМАНАКОВА[1] **, Елена Леонидовна УЛЬЯНОВА**[2]

[1] ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»
394064, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54А
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. 20 лет Октября, 84
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159, e-mail: ulhelen@mail.ru

On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay

Marina M. KULMANAKOVA[1] **, Elena L. ULIANOVA**[2]

[1] "N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy"
54A Staryih bolshevikov St., Voronezh 394064, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704, e-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

[2] Voronezh State Technical University
84, 20 letiya Oktyabrya St., Voronezh 394006, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159, e-mail: ulhelen@mail.ru

Аннотация. В данной статье развиваются результаты работ, посвященных исследованию задач для функционально-дифференциальных уравнений и включений с каузальными операторами, на случай бесконечного запаздывания. Во введении обосновывается актуальность темы исследования и приведены ссылки на соответствующие работы А. Н. Тихонова, C. Corduneanu, А. И. Булгакова, Е. С. Жуковского, В. В. Обуховского и P. Zecca. Во втором разделе представлена необходимая информация из теории уплотняющих многозначных отображений и мер некомпактности, также вводится понятие многозначного каузального оператора с бесконечным запаздыванием, которое иллюстрируется примерами. В следующем разделе формулируется задача Коши для функционального включения, содержащего композицию многозначного и однозначного каузальных операторов; изучаются свойства мультиоператора, неподвижные точки которого являются решениями задачи. В частности, для этого мультиоператора получены достаточные условия уплотняемости относительно соответствующей меры некомпактности. На этой основе в четвертом разделе получаем локальную и глобальную теоремы существования решений и показываем непрерывную зависимость множества решений от начальных данных. Далее рассматривается случай включений с полунепрерывными снизу мультиоператорами. В последнем разделе обобщаются некоторые результаты для полулинейных дифференциальных включений и интегро-дифференциальных включений Вольтерры с бесконечным запаздыванием.

Ключевые слова: каузальный оператор; функциональное включение; задача Коши; интегро-дифференциальное включение Вольтерры; мера некомпактности; неподвижные точки; уплотняющие отображения

Для цитирования: *Кулманакова М.М., Ульянова Е.Л.* О разрешимости каузальных функциональных включений с бесконечным запаздыванием // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 293–315. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315.

Abstract. In the present article we develop the results of works devoted to the study of problems for functional differential equations and inclusions with causal operators, in case of infinite delay. In the introduction of the article we substantiates the relevance of the research topic and provides links to relevant works A. N. Tikhonov, C. Corduneanu, A. I. Bulgakov, E. S. Zhukovskii, V. V. Obukhovskii and P. Zecca. In section two we present the necessary information from the theory of condensing multivalued maps and measures of noncompactness, also introduced the concept of a multivalued causal operator with infinite delay and illustrated it by examples. In the next section we formulate the Cauchy problem for functional inclusion, containing the composition of multivalued and single-valued causal operators; we study the properties of the multiopera-tor whose fixed points are solutions of the problem. In particular, sufficient conditions under which this multioperator is condensing on the respective measures of noncompacness. On this basis, in section four we prove local and global results and continuous dependence of the solution set on initial data. Next the case of inclusions with lower semicontinuous causal multioperators is considered. In the last section we generalize some results for semilinear differential inclusions and Volterra integro-differential inclusions with infinite delay.

Keywords: causal operator; functional inclusion; Cauchy problem; Volterra integro-differential inclusion; measure of noncompactness; fixed point; condensing map

For citation: Kulmanakova M.M., Ulianova E.L. O razreshimosti kauzalnyh funkcionalnyh vklyuchenij s beskonechnym zapazdyvaniem [On the solvability of causal functional inclusions with infinite delay]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 293–315. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-293-315. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение

Исследование систем, описываемых дифференциальными и функциональными уравнениями с каузальными операторами, привлекает внимание многих исследователей. Понятие каузального (или вольтеррового по А.Н. Тихонову [1]) оператора берет свое начало в математической физике и технике и оказывается весьма эффективным при решении задач в дифференциальных уравнениях, интегро-дифференциальных уравнениях, функционально-дифференциальные уравнениях с конечным или бесконечным запаздыванием, интегральных уравнениях Вольтерры, функциональных уравнениях нейтрального типа и др. (см., например, [2]).

Исследованию каузальных операторов различного типа посвящены работы [3], [4], уравнений с каузальными операторами — [5], [6], включений с каузальными операторами — [7], [8], теоремам существования решений и описанию их качественных свойств и различным приложениям [9], [10] и др. Отметим также ряд работ, в которых изучались различные задачи для операторных и функционально-дифференциальных уравнений и включений с каузальными операторами (см., например, [2], [11] и имеющиеся там ссылки).

В настоящей статье, развивая результаты работы [11], мы вводим понятие многозначного каузального оператора с бесконечным запаздыванием и рассматриваем задачу Коши в банаховом пространстве для различных классов функциональных включений с каузальными операторами. Методы теории топологической степени уплотняющих отображений применяются к получению результатов о существовании локальных и глобальных решений для этой задачи и исследования непрерывной зависимости множества решений от начальных данных. В качестве приложения мы получаем обобщения некоторых теорем существования для полулинейных функционально-дифференциальных включений и интегро-дифференциальных включений Вольтерры с бесконечным запаздыванием.

2. Предварительные сведения

2.1. Многозначные отображения и меры некомпактности

Пусть X — метрическое пространство, Y — нормированное пространство, символом $P(Y)$ обозначим совокупность всех непустых подмножеств Y. Обозначим

$$C(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ замкнутое множество}\};$$

$$Cv(Y) = \{W \in C(Y) : W \text{ выпуклое множество}\};$$

$$K(Y) = \{W \in P(Y) : W \text{ компактное множество}\};$$

$$Kv(Y) = \{W \in K(Y) : W \text{ выпуклое множество}\}.$$

Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ будем также обозначать $\mathcal{F} : X \multimap Y$. Напомним некоторые понятия (см., например, [12], [13]).

О п р е д е л е н и е 2.1.1. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \to P(Y)$ называется

(i) *полунепрерывным сверху (пн.св.),* если $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset \mathcal{V}\}$ является открытым подмножеством X для каждого открытого множества $\mathcal{V} \subset Y$;

(ii) *полунепрерывным снизу (пн.сн.),* если $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{W})$ является замкнутым подмножеством X для каждого замкнутого множества $\mathcal{W} \subset Y$;

(iii) *замкнутым,* если его график $G_F = \{(x,y) : x \in X,\, y \in F(x)\}$ является замкнутым подмножеством $X \times Y$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства.

Лемма 2.1.1. *[13, Theorem 1.1.12]. Пусть замкнутое мультиотображение $\mathcal{F} : X \to K(Y)$ является квазикомпактным, т. е. для каждого компактного множества $K \subset X$ множество $\mathcal{F}(K) = \cup_{x \in K} F(x)$ относительно компактно в Y. Тогда мультиотображение $\mathcal{F}$ пн.св.*

О п р е д е л е н и е 2.1.2. Мультифункция $\mathcal{F} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to K(Y)$ называется *ступенчатой*, если существует такое разбиение отрезка $[a,b]$ на конечное семейство непересекающихся измеримых подмножеств $\{I_j\}$, $\bigcup_j I_j = [a,b]$, что $\mathcal{F}$ постоянно на каждом I_j.

О п р е д е л е н и е 2.1.3. Мультифункция $\mathcal{F} : [a,b] \subset \mathbb{R} \to K(Y)$ называется *сильно измеримой*, если существует последовательность $\mathcal{F}_n : [a,b] \to K(Y)$, $n = 1, 2, \ldots$ ступенчатых мультифункций, таких что

$$\lim_{n\to\infty} h(\mathcal{F}_n(t), \mathcal{F}(t)) = 0 \quad \text{для} \quad \mu - \text{п.в. } t \in [a,b],$$

где μ — мера Лебега на $[a,b]$ и h — хаусдорфова метрика на $K(Y)$.

О п р е д е л е н и е 2.1.4. Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : P(\mathcal{E}) \to \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности (МНК)* в $\mathcal{E}$, если

$$\beta(\overline{co}\,\Omega) = \beta(\Omega) \quad \text{для каждого } \Omega \in P(\mathcal{E}),$$

где $\overline{co}\,\Omega$ обозначает выпуклое замыкание множества Ω.

Мера некомпактности β называется

1) *монотонной*, если для $\Omega_0, \Omega_1 \in P(\mathcal{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
2) *несингулярной*, если $\beta(\{e\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для каждого $e \in \mathcal{E}$, $\Omega \in P(\mathcal{E})$;
3) *инвариантной относительно объединения с компактным множеством*, если $\beta(\{K\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ для каждого относительно компактного множества $K \subset \mathcal{E}$, $\Omega \in P(\mathcal{E})$;
4) *вещественной*, если $\mathcal{A} = [0, +\infty]$ с естественным порядком и для любого ограниченного множества $\Omega \in P(\mathcal{E})$ выполнено $\beta(\Omega) < \infty$.

Если $\mathcal{A}$ — конус в нормированном пространстве, то мера некомпактности β называется

5) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in P(\mathcal{E})$;
6) *правильной*, если $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности Ω.

Мерой некомпактности, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является *мера некомпактности Хаусдорфа*

$$\chi_{\mathcal{E}}(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

В качестве других примеров рассмотрим меры некомпактности, определенные на пространстве непрерывных функций $C([a,b]; E)$ со значениями в банаховом пространстве E:

(1) *модуль послойной некомпактности:*

$$\varphi(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} \chi_E(\Omega(t)),$$

где χ_E — мера некомпактности Хаусдорфа в E и $\Omega(t) = \{y(t) : y \in \Omega\}$;

(2) *затухающий модуль послойной некомпактности:*

$$\gamma(\Omega) = \sup_{t\in[a,b]} e^{-Lt} \chi_E(\Omega(t)),$$

где $L > 0$ заданное число;

(3) *модуль равностепенной непрерывности:*

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{y\in\Omega} \max_{|t_1-t_2|\le\delta} \|y(t_1) - y(t_2)\|.$$

Эти меры некомпактности удовлетворяют всем вышеперечисленным свойствам, кроме правильности.

Определение 2.1.5. Мультиотображение $\mathcal{F} : X \subseteq \mathcal{E} \to K(\mathcal{E})$ называется *уплотняющим относительно меры некомпактности* β (или β*-уплотняющим*), если для каждого ограниченного множества $\Omega \subseteq X$, которое не является относительно компактным, выполняется $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega)$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ — непустое выпуклое замкнутое множество, V — непустое ограниченное (относительно) открытое подмножество $\mathcal{D}$, β — монотонная несингулярная МНК в $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \overline{V} \to Kv(\mathcal{D})$ — пн.св., β-уплотняющее мультиотображение, такое, что $x \notin \mathcal{F}(x)$ для всех $x \in \partial V$, где $\overline{V}$ и ∂V обозначают замыкание и границу множества V в индуцированной топологии $\mathcal{D}$.

В таких предположениях определена относительная топологическая степень

$$\deg_{\mathcal{D}}\left(i - \mathcal{F}, \overline{V}\right)$$

соответствующего многозначного векторного поля $i-\mathcal{F}$, удовлетворяющая стандартным свойствам (см., например, [13], [14]). В частности, условие

$$\deg_{\mathcal{D}}\left(i - \mathcal{F}, \overline{V}\right) \neq 0$$

равносильно тому, что множество неподвижных точек $Fix\mathcal{F} = \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ непустое компактное подмножество V.

Применение теории топологической степени приводит к следующим принципам неподвижной точки, которые будут использованы в дальнейшем.

Теорема 2.1.1. *[13, Corollary 3.3.1]. Пусть $\mathcal{M}$ — непустое ограниченное выпуклое замкнутое подмножество $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to Kv(\mathcal{M})$ — пн.св., β-уплотняющее мультиотображение. Тогда множество $Fix\mathcal{F}$ его неподвижных точек не пусто.*

Теорема 2.1.2. *[13, Theorem 3.3.4]. Пусть $a \in V$ — внутренняя точка; пн.св. β-уплотняющее мультиотображение $\mathcal{F} : \overline{V} \to Kv(D)$ удовлетворяет граничному условию*

$$x - a \notin \lambda\left(\mathcal{F}(x) - a\right)$$

для всех $x \in \partial V$ и $0 < \lambda \le 1$. Тогда $Fix\mathcal{F}$ — непустое компактное множество.

2.2. Фазовое пространство бесконечных запаздываний

Мы будем использовать аксиоматическое определение фазового пространства $\mathcal{B}$, введенное J.K. Hale и J. Kato (см. [15], [16]). Пространство $\mathcal{B}$ будет рассматриваться как линейное топологическое пространство функций, заданных на $(-\infty, 0]$, со значениями в банаховом пространстве E, наделенное полунормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$.

Для любой функции $x\colon (-\infty, T] \to E$, где $T > 0$, и каждого $t \in [0, T]$ x_t представляет собой функцию из $(-\infty, 0]$ в E, заданную как

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0].$$

Будем предполагать, что $\mathcal{B}$ удовлетворяет следующим аксиомам:

($\mathcal{B}1$) если функция $x : (-\infty; T] \to E$ непрерывна на $[0; T]$ и $x_0 \in \mathcal{B}$, то для любого $t \in [0; T]$ выполнено:

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$;
- (ii) функция $t \mapsto x_t$ непрерывна;
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \le K(t) \sup_{0 \le \tau \le t} \|x(\tau)\| + M(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$, где функции $K, M : [0; T] \to [0; +\infty)$ не зависят от x, функция K строго положительна и непрерывна, а M локально ограничена.

($\mathcal{B}0$) существует $l > 0$ такое, что $\|\psi(0)\|_E \le l\|\psi\|_{\mathcal{B}}$, для всех $\psi \in \mathcal{B}$.

Отметим, что при данных условиях пространство C_{00} всех непрерывных функций из $(-\infty,0]$ в E с компактным носителем входит в любое фазовое пространство $\mathcal{B}$ [16, Proposition 1.2.1].

Будем предполагать дополнительно, что выполнено следующее условие:

($\mathcal{BC}1$) если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C_{00}$ сходится к функции ψ компактно (т. е. равномерно на каждом компактном подмножестве $(-\infty, 0]$), то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$.

Из условия ($\mathcal{BC}1$) вытекает, что банахово пространство ограниченных непрерывных функций $BC = BC((-\infty, 0]; E)$ непрерывно вложено в $\mathcal{B}$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2.1. *[16, Proposition 7.1.1].*

- (i) *$BC \subset \overline{C_{00}}$, где $\overline{C_{00}}$ обозначает замыкание C_{00} в $\mathcal{B}$;*
- (ii) *если равномерно ограниченная последовательность $\{\psi_n\}$ в BC сходится к функции ψ компактно на $(-\infty, 0]$, то $\psi \in \mathcal{B}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\psi_n - \psi\|_{\mathcal{B}} = 0$;*
- (iii) *найдется константа $L > 0$ такая, что $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \le L\|\psi\|_{BC}$ для всех $\psi \in BC$.*

Наконец, будем предполагать выполненным следующее условие:

($\mathcal{BC}2$) если $\psi \in BC$ и $\|\psi\|_{BC} \ne 0$, то $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \ne 0$.

Из этого предположения вытекает, что пространство BC, наделенное $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, является нормированным пространством. Мы будем обозначать его $\mathcal{BC}$.

Рассмотрим примеры фазовых пространств, удовлетворяющих всем вышеуказанным условиям.

(1) Для $\gamma > 0$ пусть $\mathcal{B} = C_\gamma$ — пространство непрерывных функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$, имеющих предел $\lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$ и

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-\infty<\theta\le 0} e^{\gamma\theta}\|\varphi(\theta)\|.$$

(2) (Пространства с «затухающей памятью») Пусть $\mathcal{B} = C_\rho$ — пространство таких функций $\varphi : (-\infty; 0] \to E$, что при некотором $k > 0$ выполнено:

(a) функция φ непрерывна на $[-k; 0]$;

(b) функция φ измерима по Лебегу на $(-\infty; -k)$ и найдется положительная интегрируемая по Лебегу функция $\rho : (-\infty; -k) \to \mathbb{R}_+$ такая, что функция $\rho\varphi$ интегрируема по Лебегу на $(-\infty; -k)$; более того, найдется локально ограниченная функция $P : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $\xi \le 0$ справедливо $\rho(\xi + \theta) \le P(\xi)\rho(\theta)$ при п.в. $\theta \in (-\infty; -k)$.

Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup_{-k \le \theta \le 0} \|\varphi(\theta)\| + \int_{-\infty}^{-k} \rho(\theta)\|\varphi(\theta)\| d\theta.$$

Простой пример последнего пространства получается, если положить $\rho(\theta) = e^{d\theta}$, $d \in \mathbb{R}$.

2.3. Каузальные мультиоператоры с бесконечным запаздыванием

Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $L^1([0,T]; E)$ — банахово пространство всех суммируемых по Бохнеру функций $f : [0,T] \to E$ с обычной нормой

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^T \|f(s)\|_E \, ds.$$

В обозначении данного пространства при $E = \mathbb{R}$ будем опускать этот символ, а конус неотрицательных суммируемых функций в пространстве $L^1([0,T])$ будем обозначать $L^1_+([0,T])$.

Для произвольного $\mathcal{N} \subset L^1([0,T]; E)$ и любого $\tau \in (0,T)$ определим сужение $\mathcal{N}$ на $[0,\tau]$ как множество

$$\mathcal{N}|_{[0,\tau]} = \{f|_{[0,\tau]} : f \in \mathcal{N}\}.$$

Обозначим символом $\mathcal{C}((-\infty; T]; E)$ нормированное пространство ограниченных непрерывных функций $x : (-\infty; T] \to E$, наделенное нормой

$$\|x\|_{\mathcal{C}} = \|x_0\|_{\mathcal{B}} + \|x|_{[0;T]}\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C$ — обычная sup-норма пространства $C([0;T]; E)$.

О п р е д е л е н и е 2.3.1. Мультиотображение $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \multimap L^1([0,T]; E)$ будем называть *каузальным мультиоператором*, если для каждого $\tau \in (0,T)$ и для любых $u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ условие $u|_{(-\infty,\tau]} = v|_{(-\infty,\tau]}$ влечет $\mathcal{Q}(u)|_{[0,\tau]} = \mathcal{Q}(v)|_{[0,\tau]}$.

Приведем примеры каузальных мультиоператоров.

П р и м е р 2.3.1. Предположим, что мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(F1)$ для любого $\psi \in \mathcal{BC}$ мультифункция $F(\cdot, \psi) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает измеримое сечение;

$(F2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ мультиотображение $F(t, \cdot) : \mathcal{BC} \to Kv(E)$ пн.св.;

$(F3)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\alpha_r \in L^1_+[0,T]$ такая, что

$$\|F(t,\psi)\|_E := \sup\left\{\|z\|_E : z \in F(t,\psi)\right\} \leq \alpha_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r$.

Из условий $(F1) - (F3)$ и $(\mathcal{B}1)$ вытекает, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty;T];E) \to P(L^1([0,T];E))$, заданный как

$$\mathcal{P}_F(x) = \{f \in L^1([0,T];E) : f(t) \in F(t,x_t) \text{ при п.в. } t \in [0,T]\} \tag{2.3.1}$$

корректно определен (см., например, [12], [13]). Ясно, что мультиоператор $\mathcal{P}_F$ является каузальным.

П р и м е р 2.3.2. Пусть $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ — мультиотображение, удовлетворяющее условиям $(F1)$–$(F3)$ Примера 2.3.1. Предположим, что $\{K(t,s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ является непрерывным (с соответствующей нормой) семейством ограниченных линейных операторов в E и $m \in L^1([0,T];E)$ — заданная функция. Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерры $\mathcal{G} : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \multimap L^1\left([0,T];E\right)$, определенный соотношением

$$\mathcal{G}(u)(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)F(s,u_s)ds,$$

т. е.

$$\mathcal{G}(u) = \left\{y \in L^1\left([0,T];E\right) : y(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds,\ f \in \mathcal{P}_F(u)\right\}. \tag{2.3.2}$$

Также очевидно, что мультиоператор $\mathcal{G}$ является каузальным.

П р и м е р 2.3.3. Пусть фазовое пространство $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию $(\mathcal{B}1)$, мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to K(E)$ удовлетворяет условию $(F3)$ и следующему условию *почти полунепрерывности снизу*:

(F_L) существует последовательность непересекающихся компактных подмножеств $\{J_n\}$, $J_n \subseteq [0,T]$, $n = 1,2,...$ такая, что $\mu\left([0,T] \setminus \bigcup_n J_n\right) = 0$ и сужение F на каждое множество $J_n \times \mathcal{BC}$ пн.сн.

Тогда (см., например, [12], [13], [17]) суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \multimap L^1\left([0,T];E\right)$ корректно определен и является каузальным.

3. Функциональные включения с каузальными операторами

Будем предполагать, что каузальный оператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right) \to C\left(L^1\left([0,T];E\right)\right)$ удовлетворяет следующим условиям:

$(\mathcal{Q}1)$ $\mathcal{Q}$ является слабо замкнутым в следующем смысле: условия $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}\left((-\infty,T];E\right)$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1\left([0,T];E\right)$, $f_n \in \mathcal{Q}(u_n)$, $n \geq 1$, $u_n \to u_0$, $f_n \rightharpoonup f_0$ влекут $f_0 \in \mathcal{Q}(u_0)$;

$(\mathcal{Q}2)$ для любого $r > 0$ найдется функция $\delta_r(\cdot) \in L^1_+\left([0,T]\right)$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}(u)(t)\|_E \leq \delta_r(t)$$

для п.в. $t \in [0,T]$ и $\|u\|_{\mathcal{C}} \leq r$.

$(\mathcal{Q}3)$ существует функция $\omega : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что

- $(\omega 1)$ для любого $x \in \mathbb{R}_+$ $\omega(\cdot, x) \in L^1_+([0,T])$;
- $(\omega 2)$ для п.в. $t \in [0,T]$ функция $\omega(t,\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной, неубывающей и однородной в том смысле, что $\omega(t, \lambda x) = \lambda \omega(t,x)$ для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \geq 0$;
- $(\omega 3)$ для каждого ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ выполнено

$$\chi\left(\mathcal{Q}\left(\Delta\right)(t)\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\Delta_s\right)\Big) \text{ для п.в. } t \in [0,T],$$

где $\Delta_s = \{y_s : y \in \Delta\} \subset \mathcal{BC}$ и φ — модуль послойной некомпактности в $\mathcal{BC}$.

Заметим, что условие $(\omega 2)$ означает, что $\omega(t,0) = 0$ для п.в. $t \in [0,T]$, и в качестве примера такой функции мы можем рассмотреть $\omega(t,x) = k(t) \cdot x$, где $k(\cdot) \in L^1_+([0,T])$.

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$, который является каузальным в том смысле, что для каждого $\tau \in (0,T]$ и $f, g \in L^1([0,T];E)$ условие $f(t) = g(t)$ для п.в. $t \in [0,\tau]$ влечет $(\mathcal{S}f)(t) = (\mathcal{S}g)(t)$ для всех $t \in [0,\tau]$. Следуя [13], наложим следующие условия на оператор $\mathcal{S}$:

$(\mathcal{S}1)$ существует $D \geq 0$ такое, что

$$\|\mathcal{S}f(t) - \mathcal{S}g(t)\|_E \leq D \int_0^t \|f(s) - g(s)\|_E ds$$

для любых $f, g \in L^1([0,T];E)$, $\quad 0 \leq t \leq T$;

$(\mathcal{S}2)$ для любого компакта $K \subset E$ и последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1([0,T];E)$ такой, что $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty \subset K$ для п.в. $t \in [0,T]$ слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.

Предположим также, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет соотношению

$(\mathcal{S}3)$ $\quad (\mathcal{S}f)(0) = 0$ для каждой функции $f \in L^1([0,T];E)$.

Заметим, что из условия $(\mathcal{S}1)$ следует, что оператор $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию Липшица

$(\mathcal{S}1')$ $\quad \|\mathcal{S}f - \mathcal{S}g\|_C \leq D\|f-g\|_{L^1}$.

В качестве примера рассмотрим следующий важный класс операторов.

Пусть замкнутый (не обязательно ограниченный) линейный оператор $A\colon D(A) \subset E \to E$ является производящим оператором C_0-полугруппы ограниченных линейных операторов $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. Оператор $\mathcal{L} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$, определенный формулой

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, \tag{3.0.1}$$

называется *оператором Коши.*

Заметим, что, взяв $A = 0$, мы получим, как частный случай, «обычный» интегральный оператор $\mathcal{L}_I : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$,

$$\mathcal{L}_I f(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Лемма 3.0.1. *[13, Lemma 4.2.1]. Оператор Коши $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)-(\mathcal{S}3)$.*

Предположим, что $\psi \in \mathcal{BC}$ заданная функция. Для каждого $h \in (0,T]$ и функции $y \in C([0,h];E)$ такой, что $y(0)=\psi(0)$, определим функцию $y[\psi] \in \mathcal{C}((-\infty,h];E)$ равенством

$$y[\psi](t) = \begin{cases} \psi(t), & -\infty \le t < 0, \\ y(t), & 0 \le t \le h\,. \end{cases} \tag{3.0.2}$$

Обозначим $\mathcal{D}_h$ замкнутое выпуклое подмножество $C([0,h];E)$, состоящее из всех функций y, удовлетворяющих условию $y(0)=\psi(0)$.

Из каузальности операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$ следует, что для каждого $h \in (0,T]$ корректно определены и каузальны сужения $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,h];E) \multimap L^1([0,h];E)$ и $\mathcal{S} : L^1([0,h];E) \to C([0,h);E)$. Для простоты обозначаем эти сужения теми же символами.

Рассмотрим следующую задачу Коши для функциональных включений с каузальными операторами $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}$. При вышеуказанных предположениях будем искать функцию $y \in \mathcal{D}_h$, $0 < h \le T$, удовлетворяющую включению

$$y \in g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]), \tag{3.0.3}$$

где $g \in \mathcal{D}_h$ заданная функция.

Очевидно, что для каждого y, удовлетворяющего включению (3.0.3), функция $y[\psi]$ имеет вид

$$y[\psi](t) = \begin{cases} \psi(t), & -\infty \le t \le 0, \\ g(t) + (\mathcal{S}f)(t), & 0 < t \le h\,, \end{cases} \tag{3.0.4}$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[\psi])$.

Для описания свойств оператора $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}$ нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и утверждения.

Определение 3.0.1. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ называется *полукомпактной*, если она интегрально ограничена, т. е. существует функция $\xi \in L^1_+([0,T])$ такая, что $\|f_n(t)\|_E \le \xi(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$, $n = 1,2\ldots$ и множество $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактно для п.в. $t \in [0,T]$.

Лемма 3.0.2. *[13, Proposition 4.2.1.]. Каждая полукомпактная последовательность слабо компактна в $L^1([0,T];E)$.*

Лемма 3.0.3. *[13, Theorem 5.1.1.]. Пусть оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T);E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1')$ и $(\mathcal{S}2)$. Тогда для каждой полукомпактной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ относительно компактна в $C([0,T];E)$ и, более того, слабая сходимость $f_n \rightharpoonup f_0$ влечет $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.*

Теперь мы можем рассмотреть следующие свойства мультиоператора $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}$.

Теорема 3.0.1. *Пусть мультиоператор $\mathcal{Q}$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}3)$ а оператор $\mathcal{S}$ — условиям $(\mathcal{S}1)$, $(\mathcal{S}2)$. Тогда композиция $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \multimap C([0,T];E)$ является пн.св. мультиотображением с компактными значениями.*

Доказательство. Покажем, что мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ является замкнутым. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$, $x_n \to x_0$, $y_n \in \mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(x_n)$, $n \geq 1$, и $y_n \to y_0$. Возьмем произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ такую, что $f_n \in \mathcal{Q}(x_n)$, $y_n = \mathcal{S}(f_n)$, $n \geq 1$. Из условия $(\mathcal{Q}2)$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрально ограничена. Условие $(\mathcal{Q}3)$ означает, что для п.в. $t \in [0,T]$ выполнено

$$\chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\{(x_n)_s\}_{n=1}^{\infty}\right)\Big) = \omega(t,0) = 0$$

и, следовательно, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна.

Из леммы 3.0.2 следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо компактна, поэтому мы можем предположить, без ограничения общности, что $f_n \rightharpoonup f_0$. Лемма 3.0.3 влечет $y_n = \mathcal{S}f_n \to Sf_0 = y_0$. С другой стороны, применяя условие $(\mathcal{Q}1)$, получаем $f_0 \in \mathcal{Q}(x_0)$ и, более того, $y_0 \in \mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(x_0)$, то есть мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ замкнут.

Условия $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$ означают, что для каждого $x \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$ замкнутая в $\mathcal{Q}(x)$ последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полукомпактной и, по лемме 3.0.3, последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна. Компактность множества $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}(u)$ следует из его замкнутости.

И наконец, если рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$, произвольную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E,)$ такую, что $f_n \in \mathcal{Q}(x_n)$, то последовательность $\{\mathcal{S}f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$ относительно компактна. Следовательно, мультиотображение $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ квазикомпактно и согласно лемме 2.1.1 оно пн.св. □

Замечание 3.0.1. Согласно [13, теорема 1.1.8] из каузальности мультиоператора $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ следует, что при выполнении условий теоремы 3.0.1 для каждого $h \in (0,T)$ отображение $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,h];E) \multimap C([0,h];E)$ обладает теми же свойствами.

Теперь перейдем к нахождению условий, при которых мультиоператор $\mathcal{S}\circ\mathcal{Q}$ будет являться уплотняющим относительно соответствующей вещественной МНК. Предположим, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию $(\mathcal{S}1)$. Тогда очевидно, что сужение $\mathcal{S} : L^1([0,h];E) \to C([0,h];E)$ для каждого $h \in (0,T)$ удовлетворяет этому же условию. Это также верно и для условия $(\mathcal{S}2)$.

В самом деле, пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,h];E)$ — такая последовательность, что для п.в. $t \in [0,h]$ выполнено $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset K$ для заданного компакта $K \subset E$, и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является слабо сходящейся к функции $f_0 \in L^1([0,h];E)$. Легко видеть, что последовательность продолжений $\{\widetilde{f}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,T];E)$ определенная как

$$\widetilde{f}_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & 0 \leq t \leq h, \\ 0 & h < t \leq T, \end{cases}$$

слабо сходится к функции $\widetilde{f}_0 \in L^1([0,T];E)$, определенной таким же образом. Тогда по условию $(\mathcal{S}2)$ имеем $\mathcal{S}\widetilde{f}_n \to \mathcal{S}\widetilde{f}_0$, из чего в силу каузальности следует, что $\mathcal{S}f_n \to \mathcal{S}f_0$.

Выполнение условия $(\mathcal{S}3)$ для сужения $\mathcal{S} : L^1([0,h];E) \to C([0,h];E)$ очевидно.

Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 3.0.4. *[13, Theorem 4.2.2.]. Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1([0,h];E)$, $h \in (0,T]$, интегрально ограничена и существует функция $\upsilon \in L^1_+([0,h])$ такая, что*

$$\chi\big(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \leq \upsilon(t) \text{ для п.в. } t \in [0,h].$$

Если оператор $\mathcal{S}$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{S}1)$ *и* $(\mathcal{S}2)$, *то*

$$\chi\big(\{\mathcal{S}f_n\,(t)\}_{n=1}^{\infty}\big) \le 2D\int_0^t \upsilon(s)ds \tag{3.0.5}$$

для всех $t \in [0, h]$, *где* D *— константа из условия* $(\mathcal{S}1)$.

Для заданного $h \in (0, T]$ рассмотрим меру некомпактности ν в пространстве $C([0, h]; E)$ со значениями в конусе $\mathbb{R}^2_+$. На ограниченном подмножестве $\Omega \subset C([0, h]; E)$ значения ν определим следующим образом:

$$\nu(\Omega) = \max_{\mathfrak{D}\in\Xi(\Omega)} \left(\gamma\left(\mathfrak{D}\right), mod_{\mathcal{C}}\left(\mathfrak{D}\right)\right),$$

где $\Xi(\Omega)$ — семейство всех счетных подмножеств Ω, mod_C — модуль равностепенной непрерывности и γ — затухающий модуль послойной некомпактности

$$\gamma(\mathfrak{D}) = \sup_{t\in[0,h]} e^{-Lt}\chi(\mathfrak{D}(t)).$$

Здесь константа $L > 0$ выбрана так, что

$$q = \sup_{t\in[0,h]} \big[2D\int_0^t e^{-L(t-s)}\omega(s, 1)ds\big] < 1, \tag{3.0.6}$$

где константа D взята из условия $(\mathcal{S}1)$, а функция ω — из условия $(\mathcal{Q}3)$.

Легко видеть, что МНК ν монотонна, несингулярна и алгебраически полуаддитивна. Из теоремы Арцела-Асколи следует, что она также правильная.

Для заданного $h \in (0, T]$ рассмотрим мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D}_h \multimap \mathcal{D}_h$ определенный соотношением

$$\Gamma(y) = g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]).$$

Теорема 3.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор* $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \multimap L^1\left([0, T]; E\right)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}2)$, $(\mathcal{Q}3)$, *каузальный оператор* $\mathcal{S} : L^1\left([0, T]; E\right) \to C\left([0, T]; E\right)$ *— условиям* $(\mathcal{S}1)$ *–* $(\mathcal{S}3)$. *Тогда мультиоператор* Γ *является* ν*-уплотняющим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как МНК ν является алгебраически полуаддитивной и правильной, достаточно доказать утверждение для композиции $\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}$. Для некоторого $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}_h$ обозначим $\mathcal{N}[\psi]$ подмножество $\mathcal{C}((-\infty, h]; E)$ определенное равенством

$$\mathcal{N}[\psi] = \{y[\psi] : y \in D\}.$$

Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}_h$ ограниченное множество такое, что

$$\nu\left(\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}\left(\Omega[\psi]\right)\right) \ge \nu\left(\Omega\right). \tag{3.0.7}$$

Покажем, что тогда множество Ω является относительно компактным.

Пусть максимум левой части неравенства (3.0.7) достигается на счетном множестве $\mathfrak{D}' = \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0, h]; E)$. Тогда

$$s_n = \mathcal{S}f_n, \quad f_n \in \mathcal{Q}(y_n[\psi]), \quad n \ge 1,$$

где $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$.

Неравенство (3.0.7) означает, что

$$\gamma(\{\mathcal{S} f_n\}_{n=1}^{\infty}) \geq \gamma(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}). \tag{3.0.8}$$

Применяя условие $(\mathcal{Q}3)$ и используя свойства функции ω, для п.в. $t \in [0,h]$ получаем

$$\chi\left(\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq \omega\Big(t, \sup_{s\in[0,t]} \varphi\left(\{y_n[\psi]_s\}_{n=1}^{\infty}\right)\Big) = \omega\left(t, \varphi\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) =$$

$$= \omega\left(t, e^{Lt} e^{-Lt} \varphi\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq \omega\left(t, e^{Lt} \gamma\left(\{y_n|_{[0,t]}\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq$$

$$\leq \omega\left(t, e^{Lt} \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\right) \leq \omega\left(t, e^{Lt}\right) \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

По лемме 3.0.4 для каждого $t \in [0,h]$ имеем

$$\chi\left(\{\mathcal{S} f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2D \int_0^t \omega\left(s, e^{Ls}\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \leq 2D \int_0^t e^{Ls} \omega\left(s, 1\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right). \tag{3.0.9}$$

Теперь из неравенств (3.0.8) и (3.0.9) следует, что

$$\gamma(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq 2D \sup_{t\in[0,h]} \int_0^t e^{-L(t-s)} \omega\left(s, 1\right) ds \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = q \cdot \gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right),$$

то есть

$$\gamma\left(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0,$$

и следовательно

$$\varphi\left(\{y_n[\psi]_t\}_{n=1}^{\infty}\right) = 0$$

для всех $t \in [0,h]$.

Из условий $(\mathcal{Q}2)$, $(\mathcal{Q}3)$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ полукомпактна, и значит, по лемме 3.0.3, относительно компактностна последовательность $\{\mathcal{S} f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Следовательно

$$mod_{\mathcal{C}}(\{\mathcal{S} f_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0,$$

то есть

$$\nu\left(\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}\left(\Omega[\psi]\right)\right) = (0,0),$$

и из (3.0.7) мы имеем

$$\nu(\Omega) = (0,0),$$

завершая доказательство. □

4. Существование и непрерывная зависимость решений

Найдем условия, при которых задача Коши (3.0.3) имеет локальные и глобальные решения. Начнем со следующего утверждения.

Теорема 4.0.1. *Пусть каузальный оператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to Cv(L^1([0,T];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}1)$ – $(\mathcal{Q}3)$, а для линейного каузального оператора $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ выполнены условия $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда существует $h \in (0,T]$ такое, что включение (3.0.3) имеет решение $y \in \mathcal{D}_h$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $r = \max\left\{\|\psi\|_{\mathcal{B}}, \|g\|_C + \varepsilon\right\}$. Предположим, что $\delta_r \in L^1_+([0,T])$ является функцией, соответствующей r из условия $(\mathcal{Q}2)$, и возьмем $h \in (0,T]$ достаточно малое, для того чтобы

$$D\int_0^h \delta_r(t)dt \le \varepsilon,$$

где D константа из условия $(\mathcal{S}1)$.

Рассмотрим замкнутое ограниченное выпуклое множество

$$\mathcal{M} = \{y \in \mathcal{D}_h : \|y - g\|_C \le \varepsilon\} \subset \mathcal{D}_h.$$

Покажем, что мультиоператор Γ переводит множество $\mathcal{M}$ в себя.

Пусть $z \in \Gamma(y)$ для $y \in \mathcal{M}$. Тогда

$$z(t) = g(t) + \mathcal{S}f(t), \quad t \in [0,h],$$

где $f \in \mathcal{Q}(y)$. Заметим, что $\|y[\psi]\|_{\mathcal{C}} \le r$. Применяя $(\mathcal{Q}2)$, оценим

$$\|f(t)\|_E \le \delta_r(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,h].$$

Используя условие $(\mathcal{S}1)$ и тот факт, что оператор $\mathcal{S}$ является линейным, при всех $t \in [0,h]$ получим:

$$\|z(t) - g(t)\|_E = \|\mathcal{S}f(t)\|_E \le D\int_0^t \|f(s)\|_E ds \le D\int_0^h \delta_r(s)ds \le \varepsilon.$$

Таким образом, $z \in \mathcal{M}$.

Из линейности $\mathcal{S}$ и теоремы 3.0.1 следует, что мультиоператор Γ имеет компактные выпуклые значения и является пн.св., также из теоремы 3.0.2 следует, что он является ν-уплотняющим. Осталось применить теорему 2.1.1, чтобы завершить доказательство. □

Для получения условий существования глобального решения, заменим условие интегральной ограниченности $(\mathcal{Q}2)$ на следующее более сильное условие подлинейного роста:

$(\mathcal{Q}2')$ существует функция $\alpha \in L^1_+([0,T])$ такая, что

$$\|\mathcal{Q}\,(u)\,(t)\,\|_E \le \alpha\,(t)\,(1 + \|u\|_{\mathcal{C}}) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T]$$

для всех $u \in \mathcal{C}((-\infty,T];E)$.

Теорема 4.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор* $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to Cv(L^1([0,T];E))$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}1)$, $(\mathcal{Q}2')$, $(\mathcal{Q}3)$, *линейный каузальный оператор* $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. *Тогда множество* Σ_ψ *всех решений задачи* (3.0.3) *является непустым компактным подмножеством* $\mathcal{D}_T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что множество всех решений $y \in \mathcal{D}_T$ однопараметрического включения

$$y \in g + \lambda\mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]), \quad \lambda \in [0,1] \tag{4.0.1}$$

априори ограничено. Действительно, если $y \in \mathcal{D}_T$ удовлетворяет включению (4.0.1), то для каждого $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$\|y(t)\|_E \le \|g(t)\|_E + D\int_0^t \|f(s)\|_E ds,$$

где $f \in \mathcal{Q}(y[\psi])$, следовательно, по условию $(\mathcal{Q}2')$ выполнено неравенство

$$\|f(s)\|_E \leq \alpha(s)(1 + \|y[\psi]\|_{\mathcal{C}}).$$

Тогда

$$\|y(t)\|_E \leq \|g\,(t)\,\|_E + D\int_0^t \alpha\,(s)\,(1 + \|y[\psi]\|_{\mathcal{C}})\,ds$$

$$\leq \|g\|_C + D\int_0^t \alpha\,(s)\left(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \sup_{\tau\in[0,s]} \|y\,(\tau)\,\|_E\right) ds.$$

Последнее выражение является неубывающей функцией от t, таким образом получаем

$$\sup_{0\leq\tau\leq t} \|y\,(\tau)\,\| \leq \|g\|_C + D\int_0^t \alpha\,(s)\left(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}} + \sup_{\tau\in[0,s]} \|y\,(\tau)\,\|_E\right) ds.$$

Это означает, что функция $v(t) = \sup_{\tau\in[0,s]} \|y(\tau)\|_E$ удовлетворяет оценке

$$v(t) \leq \|g\|_C + D\,(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}})\,\|\alpha\|_{L^1} + D\int_0^t \alpha(s)v(s)ds.$$

Применяя неравенство Гроноулла, получаем искомую априорную ограниченность:

$$\|y\|_{\mathcal{C}} \leq Ne^{D\|\alpha\|_{L^1}},$$

где $N = \|g\|_C + D\,(1 + \|\psi\|_{\mathcal{B}})\,\|\alpha\|_{L^1}$.

Теперь возьмем $R > 0$ достаточно большое, чтобы гарантировать, что множество

$$V = \{y \in \mathcal{D}_T : \|y - g\|_C < R\} \subset \mathcal{D}_T$$

содержит все решения включения (4.0.1). Тогда мультиоператор Γ удовлетворяет на ∂V условию теоремы 2.1.2 с $a = g$. Применение этого утверждения завершает доказательство. □

Изучим зависимость множества решений задачи (3.0.3) от начальной функции ψ и функции g. Для заданного $\psi \in \mathcal{BC}$ обозначим

$$\mathcal{D}_T^\psi = \{y \in C([0,T];E) : y(0) = \psi(0)\}.$$

Определим замкнутые множества $\mathcal{V} \subset \mathcal{BC} \times C([0,T];E)$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{BC} \times C([0,T];E) \times C([0,T];E)$ соотношениями

$$\mathcal{V} = \{(\psi, g) : g \in \mathcal{D}_T^\psi\},\quad \mathcal{W} = \{(\psi, g, y) : g \in \mathcal{D}_T^\psi, y \in \mathcal{D}_T^\psi\}.$$

Для данных $(\psi, g) \in \mathcal{V}$ обозначим $\Sigma_{\psi,g}$ множество всех решений задачи (3.0.3) на $[0,T]$.

Теорема 4.0.3. *При выполнении условий теоремы 4.0.2 мультиотображение*

$$\Sigma : \mathcal{V} \to K\left(C\left([0,T];E\right)\right),\quad (\psi, g) \mapsto \Sigma_{\psi,g}$$

является пн.св.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим мультиоператор $\widetilde{\Gamma}: \mathcal{W} \multimap C([0,T];E)$

$$\widetilde{\Gamma}(\psi, g, y) = g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]).$$

Используя те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 3.0.1, можем проверить, что мультиотображение $\widetilde{\Gamma}$ является замкнутым.

Из теоремы 4.0.2 следует, что для любого $(\psi, g) \in \mathcal{V}$ множество $\Sigma_{\psi,g}$ непусто и компактно.

Предположим вопреки утверждению, что существует $\varepsilon_0 > 0$ и последовательности $\{(\psi_n, g_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{V}$, $(\psi_n, g_n) \to (\psi_0, g_0) \in \mathcal{V}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,T];E)$, $y_n \in \Sigma_{\psi_n, g_n}$, $n \geq 1$, $y_n \to y_0$ такие, что

$$y_0 \notin U_{\varepsilon_0}\left(\Sigma_{\psi_0, g_0}\right), \tag{4.0.2}$$

где U_{ε_0} обозначает открытую ε_0-окрестность множества.

Каждая функция y_n может быть представлена в виде

$$y_n(t) = g_n(t) + \mathcal{S} f_n(t), \;\; t \in [0,T],$$

где $f_n \in \mathcal{Q}(y_n[\psi_n])$, $n \geq 1$. Следовательно,

$$y_n \in \widetilde{\Gamma}(\psi_n, g_n, y_n), \;\; n \geq 1.$$

В силу замкнутости мультиотображения $\widetilde{\Gamma}$ выполнено включение

$$y_0 \in \widetilde{\Gamma}(\psi_0, g_0, y_0),$$

то есть

$$y_0 \in \Sigma_{\psi_0, g_0},$$

что противоречит (4.0.2). □

Следствие 4.0.1. *При выполнении условий теоремы 4.0.2 оператор сдвига* $P: \mathcal{V} \to K(\mathcal{C})$ *вдоль траектории задачи* (3.0.3), *определенный как*

$$P(\psi, g) = e \circ \Sigma_{\psi,g},$$

где $e(y) = y[\psi]_T$, *является пн.св.*

5. Включения с полунепрерывными снизу каузальными мультиоператорами

Напомним следующие понятия (см., например, [12], [13], [18], [19]).

О п р е д е л е н и е 5.0.1. Множество $\mathcal{N} \subset L^1([0,T];E)$ называется *разложимым*, если для каждых $f_0, f_1 \in \mathcal{N}$ и каждого измеримого подмножества $m \subset [0,T]$ функция

$$t \mapsto \kappa_m(t) f_0(t) + \kappa_{[0,T]\setminus m}(t) f_1(t),$$

где κ — характеристическая функция множества, принадлежит $\mathcal{N}$.

Семейство всех непустых замкнутых разложимых подмножеств $L^1([0,T];E)$ обозначим $D(L^1([0,T];E))$.

Нам понадобится следующее утверждение о непрерывном сечении.

Лемма 5.0.1. *[18], [19]. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство. Тогда каждое пн.сн. мультиотображение $\mathfrak{F} : X \to D(L^1([0,T];E))$ допускает непрерывное сечение $\mathfrak{f} : X \to L^1([0,T];E)$, $\mathfrak{f}(x) \in \mathfrak{F}(x)$ для любого $x \in X$.*

Рассмотрим задачу существования решений включения (3.0.3) при следующем предположении на каузальный оператор $\mathcal{Q}$:

$(\mathcal{Q}_L)$ мультиоператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ является пн.сн.

Очевидно, что для каждого $h \in (0,T]$, сужение $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,h];E))$ сохраняет то же свойство.

По лемме 5.0.1 $\mathcal{Q}$ допускает непрерывное сечение $q : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to L^1([0,h];E)$. Таким образом, соответствующий мультиоператор $\Gamma : \mathcal{D}_h \multimap \mathcal{D}_h$,

$$\Gamma(y) = g + \mathcal{S} \circ \mathcal{Q}(y[\psi]),$$

имеет непрерывное сечение $\gamma : \mathcal{D}_h \to \mathcal{D}_h$ вида

$$\gamma(y) = g + \mathcal{S} \circ q(y[\psi]).$$

Ясно, что q удовлетворяет условию $(\mathcal{Q}2)$.

Из монотонности МНК Хаусдорфа следует

$$\chi(q(\Delta)(t)) \leq \chi(\mathcal{Q}(\Delta)(t))$$

для каждого ограниченного множества $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty,T];E)$ и $t \in [0,h]$, и следовательно условие $(\mathcal{Q}3)$ также наследуется q. Но тогда из теоремы 3.0.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 5.0.1. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,h];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$, каузальный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,h] \to C([0,h];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда оператор Γ является ν-уплотняющим.*

Теперь мы можем сформулировать аналоги теорем 4.0.1 и 4.0.2, которые могут быть доказаны с использованием «однозначных» версий теорем 2.1.1 и 2.1.2.

Теорема 5.0.2. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$, линейный каузальный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда существует $h \in (0,T]$ такой, что задача (3.0.3) имеет решение $y \in \mathcal{D}_h$.*

Теорема 5.0.3. *Пусть каузальный мультиоператор $\mathcal{Q} : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \to D(L^1([0,T];E))$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{Q}_L)$, $(\mathcal{Q}2')$, $(\mathcal{Q}3)$, линейный каузальный оператор $\mathcal{S} : L^1([0,T];E) \to C([0,T];E)$ удовлетворяет условиям $(\mathcal{S}1)$ – $(\mathcal{S}3)$. Тогда существует решение $y \in \mathcal{D}_T$ задачи (3.0.3).*

6. Дифференциальные и интегро-дифференциальные включения с бесконечным запаздыванием

6.1. Полулинейные дифференциальные включения

Рассмотрим следующую задачу Коши в банаховом пространстве E :

$$y'(t) \in Ay(t) + F(t, y_t), \quad t \in [0, d]; \tag{6.1.1}$$

$$y(t) = \psi(t), \quad t \in (-\infty, 0]. \tag{6.1.2}$$

где $\psi \in \mathcal{BC}$ — заданная начальная функция.

Предположим, что выполнено условие

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ — замкнутый линейный оператор, порождающий C_0-полугруппу ограниченных линейных операторов $\{e^{At}\}_{t \geq 0}$.

Мультиотображение $F : [0, T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)$ – $(F3)$ примера 2.3.1 и следующему условию χ-регулярности:

$(F4)$ существует функция $\omega_F : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяющая условиям $(\omega 1) - (\omega 3)$ и такая, что для каждого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{BC}$ выполнено

$$\chi(F(t, \Omega)) \leq \omega_F(t, \varphi(\Omega)) \text{ для п.в. } t \in [0, T].$$

В соответствии с [13], скажем, что $y \in C((-\infty, h]; E)$, $0 < h \leq T$ является *интегральным решением задачи* (6.1.1)–(6.1.2), если оно представимо в виде:

$$y(t) = \begin{cases} e^{At}\psi(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s) ds, & t \in [0, h], \quad f \in \mathcal{P}_F(y[\psi]), \\ \psi(t), & t \in (-\infty, 0], \end{cases} \tag{6.1.3}$$

где $\mathcal{P}_F$ — суперпозиционный мультиоператор, определенный в (2.3.1).

Тот факт, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty, T]; E) \multimap L^1([0, T]; E)$ удовлетворяет условию $(\mathcal{Q}1)$ может быть проверен по [13, Лемма 5.1.1]. Условия $(\mathcal{Q}2)$ и $(\mathcal{Q}3)$ для $\mathcal{P}_F$ немедленно следуют из $(F3)$ и $(F4)$, соответственно. Принимая во внимание лемму 3.0.1, мы можем рассмотреть отношение (6.1.3) как частный случай функционального включения (3.0.3), где $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_F$; $\mathcal{S} = \mathcal{L}$ – оператор Коши и $g(t) = e^{At}\psi(0)$.

Как прямые следствия теорем 4.0.1 и 4.0.2 получим следующие результаты, которые обобщают [13, теоремы 5.2.1 и 5.2.2].

Теорема 6.1.1. *При выполнении условий* (A) *и* $(F1)$ – $(F4)$ *существует* $h \in (0, T]$ *такое, что задача* (6.1.1)–(6.1.2) *имеет интегральное решение на* $[0, h]$.

Теорема 6.1.2. *Пусть выполнены условия* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$ *и условие*

$(F3')$ *существует функция* $\alpha \in L^1_+([0, T])$ *такая, что для каждого* $c \in \mathcal{BC}$

$$\|F(t, c)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|c\|_{\mathcal{B}}) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Тогда множество интегральных решений задачи (6.1.1)–(6.1.2) — *непустое компактное подмножество пространства* $C((-\infty, T]; E)$.

Теперь предположим, что многозначная нелинейность $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to K(E)$ удовлетворяет условию почти пн.сн. (F_L) вместо условий Каратеодори $(F1)$ и $(F2)$. В этой ситуации известно (см., например, [13], [17]), что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F$ имеет замкнутые разложимые значения и является пн.сн. Тогда из теорем 5.0.2 и 5.0.3 вытекает следующие теоремы существования.

Теорема 6.1.3. *При выполнении условий* (A), (F_L), $(F3)$, $(F4)$ *существует интегральное решение задачи* (6.1.1)–(6.1.2) *на некотором интервале* $[0,h]$, $0 < h \le T$.

Теорема 6.1.4. *При выполнении условий* (A), (F_L), $(F3')$, $(F4)$ *существует интегральное решение задачи* (6.1.1)–(6.1.2) *на интервале* $(-\infty, T]$.

6.2. Интегро-дифференциальные включения Вольтерры

Рассмотрим следующую задачу в банаховом пространстве E :

$$y'(t) \in m(t) + \int_0^t K(t,s)F(s,y_s)ds, \qquad t \in [0,T], \tag{6.2.1}$$

с начальным условием

$$y(t) = \psi(t), \qquad t \in (-\infty, 0]. \tag{6.2.2}$$

Пусть мультиотображение $F : [0,T] \times \mathcal{BC} \to Kv(E)$ удовлетворяет условиям $(F1)-(F4)$, $\{K(t,s) : 0 \le s \le t \le T\}$ — непрерывное семейство ограниченных линейных операторов в E, $m \in L^1([0,T];E)$ — заданная функция и $\psi \in \mathcal{BC}$ — заданная начальная функция.

Для простоты предположим, что пространство E является сепарабельным, и ограничимся только локальным результатом.

Итак, под *решением задачи* (6.2.1)–(6.2.2) на интервале $[0,h]$, $0 < h \le T$ будем понимать функцию $y \in C([0,h];E)$, имеющую следующий вид:

$$y(t) = \psi(0) + \int_0^t z(s)ds, \quad t \in [0,h],$$

где

$$z(t) = m(t) + \int_0^t K(t,s)f(s)ds, \quad f \in \mathcal{P}_F(y[\psi]).$$

Рассмотрим интегральный мультиоператор Вольтерры $\mathcal{G}$, определенный в (2.3.2), как каузальный мультиоператор $\mathcal{Q}$.

Лемма 6.2.1. *Интегральный мультиоператор Вольтерры* $\mathcal{G}$ *удовлетворяет условиям* $(\mathcal{Q}1)-(\mathcal{Q}3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

(a) Очевидно, что достаточно проверить условие $(\mathcal{Q}1)$ для композиции

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{P}_F : \mathcal{C}((-\infty,T];E) \multimap C([0,T];E) \hookrightarrow L^1([0,T];E),$$

где $\mathcal{J}$ определен как интегральный оператор

$$\mathcal{J}f(t) = \int_0^t K(t,s)f(s)ds.$$

Предположим, что $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}\left((-\infty, T]; E\right)$, $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1\left([0,T]; E\right)$, $j_n \in \mathcal{J} \circ \mathcal{P}_F(x_n)$, $n \geq 1$, $x_n \to x_0$, и $j_n \rightharpoonup j_0$. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{P}_F(x_n)$, $n \geq 1$ такую, что $j_n = \mathcal{J}(f_n)$, $n \geq 1$. По условиям $(F3)$ и $(F4)$, из сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полукомпактной и значит, по лемме 3.0.2 является слабо компактной. Поэтому без ограничения общности можем предположить, что $f_n \rightharpoonup f_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$.

С другой стороны, линейный непрерывный оператор $\mathcal{J}$ также является непрерывным в слабой топологии, таким образом имеем $j_0 = \mathcal{J}(f_0)$, это означает, что $j_0 \in \mathcal{P}_F(x_0)$.

(б) Условие $(F3)$ означает, что для каждого $r > 0$ существует функция $\eta_r \in L^1_+([0,T])$ такая, что для любой функции $x \in \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ из неравенства $\|x\|_{\mathcal{C}} \leq r$ следует, что

$$\|f(t)\|_E \leq \eta_r(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T].$$

Но тогда, обозначая

$$M = \max\{\|K(t,s)\| : 0 \leq s \leq t \leq T\},$$

мы имеем

$$\|\mathcal{G}(x)(t)\|_E \leq \|m(t)\|_E + M \int_0^t \eta_r(s) ds := \delta_r(t).$$

(в) Пусть $\Delta \subset \mathcal{C}((-\infty, T]; E)$ непустое ограниченное подмножество. Согласно условию $(F4)$, для каждого $t \in [0,T]$ и п.в. $s \in [0,t]$ имеем

$$\chi\left(K\left(t,s\right) F\left(s, \Delta_s\right)\right) \leq M \chi\left(F\left(s, \Delta_s\right)\right) \leq M \omega_F\left(s, \varphi\left(\Delta_s\right)\right).$$

Применяя теорему о χ-оценке многозначного интеграла [13, Theorem 4.2.3], получаем

$$\chi\left(\mathcal{G}\left(\Delta\left(t\right)\right)\right) \leq \chi\left(\int_0^t K(t,s) F\left(s, \Delta_s\right) ds\right) \leq$$

$$\leq M \int_0^t \omega_F\left(s, \varphi_{\mathcal{C}}\left(\Delta\right)\right) ds \leq M \int_0^t \omega_F(s,1) ds \cdot \varphi_{\mathcal{C}}\left(\Delta\right).$$

Очевидно, что функция

$$\omega(t,x) = M \int_0^t \omega_F(s,1) ds \cdot x$$

удовлетворяет условиям $(\omega 1)-(\omega 3)$ из $(\mathcal{Q}3)$ и, следовательно, для $\mathcal{G}$ выполнено предположение $(\mathcal{Q}3)$. □

Доказанная лемма, лемма 3.0.1 и теорема 4.0.1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 6.2.1. *При вышеприведенных предположениях, задача* (6.2.1)–(6.2.2) *имеет решение на некотором интервале* $(-\infty, h]$, $0 < h \leq T$.

Список литературы

[1] А. Н. Тихонов, "О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики", *Бюлл. Моск. ун-та*, **1**, Секц. А. Вып.8 (1938), 1–25.

[2] C. Corduneanu, *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, 2002.

[3] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об операторах Вольтерра в банаховых функциональных пространствах", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **6**:2 (2001), 147–149.

[4] Е. С. Жуковский, М. Ж. Алвеш, "Абстрактные вольтерровы операторы", *Изв. вузов. Матем.*, 2008, № 3, 3–17.

[5] Е. С. Жуковский, "К теории уравнений Вольтерра", *Дифференциальные уравнения*, **25**:9 (1989), 1599–1605.

[6] Е. С. Жуковский, "Нелинейное уравнение Вольтерра в банаховом функциональном пространстве", *Изв. вузов. Матем.*, 2005, № 10, 17–28.

[7] А. И. Булгаков, А. А. Григоренко, Е. А. Панасенко, "Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами", *Известия Ин-та матем. и информ. УдГУ*, **1**:39 (2012), 17–20.

[8] А. И. Булгаков, В. П. Максимов, "Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами", *Дифференциальные уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374.

[9] Е. О. Бурлаков, Е. С. Жуковский, "Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра с локально сжимающими операторами", *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 8, 16–29.

[10] Е. С. Жуковский, "Обобщенно вольтерровые операторы в метрических пространствах", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **14**:3 (2009), 501–508.

[11] V. Obukhovskiii, P. Zecca, "On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **74**:8 (2011), 2765–2777.

[12] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2, ЛИБРОКОМ, М., 2011.

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[14] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, "Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений", *УМН*, **35**:1(211) (1980), 59–126.

[15] J. K. Hale, J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Funkc. Ekvac.*, 1978, № 21, 11–41.

[16] Y. Hito, S. Murakami, T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, **1473**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[17] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations*, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **1**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[18] A. Bressan, G. Colombo, "Extensions and selections of maps with decomposable values", *Studia Math.*, **90**:1 (1988), 69–86.

[19] A. Fryszkowski, "Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps", *Studia Math.*, **76**:2 (1983), 163–174.

References

[1] A. N. Tikhonov, "On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics", *Byull. Mosk. un-ta*, **1**, Sect A. Vyp 8 (1938), 1–25 (In Russian).

[2] C. Corduneanu, *Functional Equations with Causal Operators. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*, 2002.

[3] T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, "About Volterra operators in Banach function space", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **6**:2 (2001), 147–149 (In Russian).

[4] E. S. Zhukovskiy, M. Z. Alvesh, "Abstract Volterra operators", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:3 (2008), 1–14.

[5] E. S. Zhukovskiy, "On the theory of Volterra equations", *Differ. Equ.*, **25**:9 (1989), 1132–1137.

[6] E. S. Zhukovskiy, "Non-linear Volterra equation in a Banach functional space", *Izv. vuzov. Matem.*, 2005, № 10, 17–28 (In Russian).

[7] A. I. Bulgakov, A. A. Grigorenko, E. A. Panasenko, "Perturbations of Volterra inclusions by pulse operators", *Izvestiya In-ta matem. i inform. UdGU*, **1**:39 (2012), 17–20 (In Russian).

[8] A. I. Bulgakova, V. P. Maksimov, "Functional and functional-differential inclusions with Volterra operators", *Differ. Uravn.*, **17**:8 (1981), 1362–1374 (In Russian).

[9] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, "Continuous dependence on parameters of solutions Volterra equations with locally compressing operators", *Izv. vuzov. Matem.*, 2010, № 8, 16–29 (In Russian).

[10] E. S. Zhukovskiy, "Generalized Volterra operators in metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **14**:3 (2009), 501–508 (In Russian).

[11] V. Obukhovskiii, P. Zecca, "On certain classes of functional inclusions with causal operators in Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **74**:8 (2011), 2765–2777.

[12] Y. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the theory multivalued mappings and differential inclusions*, Moscow, 2, LIBROKOM, 2011 (In Russian).

[13] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[14] Y. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, "Topological methods in the theory of fixed points of multivalued maps", *Russian Math. Surveys*, **35**:1 (1980), 65–143.

[15] J. K. Hale, J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Funkc. Ekvac.*, 1978, № 21, 11–41.

[16] Y. Hito, S. Murakami, T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Lecture Notes in Mathematics, **1473**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[17] K. Deimling, *Multivalued Differential Equations.* V. 1, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[18] A. Bressan, G. Colombo, "Extensions and selections of maps with decomposable values", *Studia Math.*, **90**:1 (1988), 69–86.

[19] A. Fryszkowski, "Continuous selections for a class of nonconvex multivalued maps", *Studia Math.*, **76**:2 (1983), 163–174.

Информация об авторах

Кулманакова Марина Михайловна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики. Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704

Ульянова Елена Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики. Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: ulhelen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Кулманакова Марина Михайловна
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Поступила в редакцию 20 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 17 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the authors

Marina M. Kulmanakova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematics Department. N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation. E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4291-8704

Elena L. Ulianova, Candidate of Physics and Mathematics. Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department. Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: ulhelen@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6467-1159

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Marina M. Kulmanakova
E-mail: m-kulmanakova@yandex.ru

Received 20 May 2019
Reviewed 17 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Roos G., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-316-323
УДК 512.812; 512.816

Bergman–Hartogs domains and their automorphisms

Guy ROOS
University of Poitiers
15 Rue de l'Hôtel Dieu, Poitiers 86073, France
e-mail: guy.roos@normalesup.org

Области Бергмана–Гартогса и их автоморфизмы

Ги РООС
Университет Пуатье
86073, Франция, г. Пуатье, улица отеля Дью, 15
e-mail: guy.roos@normalesup.org

Abstract. For Cartan–Hartogs domains and also for Bergman–Hartogs domains, the determination of their automorphism groups is given for the cases when the base is any bounded symmetric domain and a general bounded homogeneous domain respectively.

Keywords: bounded symmetric domains; bounded homogeneous domain; automorphisms

For citation: Roos G. Bergman–Hartogs domains and their automorphisms. *Vestnik rossiyskih universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 316–323. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-316-323.

Аннотация. Для областей Картана–Гартогса, а также для областей Бергмана–Гартогса находятся их группы автоморфизмов — соответственно для случаев, когда база есть произвольная ограниченная симметрическая область и общая ограниченная однородная область.

Ключевые слова: ограниченные симметрические области; ограниченные однородные области; автоморфизмы

Для цитирования: *Роос Г.* Области Бергмана–Гартогса и их автоморфизмы // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 316–323. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-316-323. (In Engl., Abstr. in Russian)

Cartan–Hartogs domains (see definition below) are in general non homogeneous, but their automorphism group acts transitively on the real hypersurfaces of a one parameter family. The exact automorphism group has been determined by Ahn Heungju, Byun Jisoo, Park Jong-do [1] when the base Ω of the Cartan–Hartogs domain is a bounded symmetric domain of classical type. Their method, using the Wong–Rosay theorem, may be extended to the case where the base Ω is any bounded symmetric domain. The result holds also for

"Bergman–Hartogs domains" which are defined in the same way as Cartan–Hartogs domains, with a base Ω which is a general bounded homogeneous domain.

1. Definitions and notations

1.1. Bergman kernel. Let Ω be a bounded domain in a complex space V of dimension d. Let V be oriented by a translation invariant volume form ω. Let

$$\mathcal{H}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \|f\|_\Omega^2 := \int_\Omega |f(z)|^2 \ \omega(z) < +\infty \right\}$$

be the *Bergman space* of Ω. Then $\mathcal{H}(\Omega)$, with the scalar product

$$(u \mid v)_\Omega := \int_\Omega u(z)\, \overline{v(z)}\, \omega(z)$$

is a *Hilbert space of holomorphic functions* (that is, $\mathcal{H}(\Omega)$ is a Hilbert space and the inclusion $\mathcal{H}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Omega)$ is continuous). For $z \in \Omega$, let $K_{\Omega,z} \in \mathcal{H}(\Omega)$ such that

$$f(z) = (f \mid K_{\Omega,z})_\Omega$$

for all $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. The *Bergman kernel* of Ω is the reproducing kernel

$$K(z,t) = K_\Omega(z,t) = \overline{K_{\Omega,z}(t)}$$

of $\mathcal{H}(\Omega)$. Denote

$$\mathcal{K}(z) = \mathcal{K}_\Omega(z) := K_\Omega(z,z) = \|K_{\Omega,z}\|_\Omega^2$$

(which is also called Bergman kernel of Ω).

If $g : \Omega \to \Omega$ is a holomorphic automorphism of Ω, then

$$\mathcal{K}_\Omega(gz) = \frac{\mathcal{K}_\Omega(z)}{|Jg(z)|^2},$$

where $Jg(z)$ is the complex Jacobian of g at z.

1.2. Cartan domains. Let Ω be an *irreducible complex symmetric domain of non compact type ("Cartan domain")*, realized as the spectral unit ball of a *simple Hermitian positive Jordan triple* V.

We denote by (a, b, r) the *numerical invariants* of V; by γ the *genus* of V: $\gamma = 2 + a(r-1) + b$ and by $\mathcal{N}(x,y)$ the *generic norm* of V (which is an irreducible polynomial of bidegree (r,r)).

The Bergman kernel of Ω is then

$$\mathcal{K}_\Omega(z) = \mathcal{K}_\Omega(0)\mathcal{N}(z,z)^{-\gamma}.$$

1.3. Cartan–Hartogs domains.

D e f i n i t i o n 1. For a real number $\mu > 0$ and an integer $N > 0$, let $\widetilde{\Omega}$ be the Hartogs type domain defined by

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\mu, N) := \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^N \mid \|Z\|^2 < \mathcal{N}(z, z)^\mu\right\}.$$

The domain $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is called *Cartan–Hartogs domain*.

Cartan–Hartogs domains have been introduced by Weiping Yin and G. Roos in 1998. They generalize various domains like *complex ellipsoids (Thullen domains)*.

1.4. Bergman–Hartogs domains. Let Ω be a bounded complex domain. Let $c > 0$ be a positive real number and $N > 0$ an integer.

D e f i n i t i o n 2. The *Bergman–Hartogs domain* $\widehat{\Omega}(c, N)$ is

$$\widehat{\Omega}(c, N) := \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^N \mid \|Z\|^2 < \mathcal{K}_\Omega(z)^{-c}\right\},$$

where $\mathbb{C}^N$ is endowed with the standard Hermitian structure.

The Cartan–Hartogs domain $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is linearly equivalent to the Bergman–Hartogs domain:

$$\widetilde{\Omega}(\mu, N) \simeq \widehat{\Omega}(\mu/\gamma, N).$$

1.5. Example: Thullen domains. Let $V = \mathbb{C}^n$ be the standard Hermitian vector space, with scalar product $(z \mid t) = \sum_{j=1}^n z_j \overline{t_j}$ and Hermitian norm $\|z\|^2 = (z \mid z)$.

The associated symmetric domain is the Hermitian unit ball $\Omega = B_n$ of V. The genus of Ω is $g = n + 1$. The generic norm is

$$\mathcal{N}(z, t) = 1 - (z \mid t).$$

The Cartan–Hartogs domain $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is then

$$\widetilde{\Omega}(\mu, N) = \left\{(z, Z) \in V \times \mathbb{C}^N \;\middle|\; \|z\|^2 + \|Z\|^{2/\mu} < 1\right\}.$$

These domains are called *Thullen domains* and also known as *complex ellipsoids*, or *complex ovals*, or *egg domains*.

Let $\Omega = B_n$ be the Hermitian unit ball of $V = \mathbb{C}^n$. For $\mu = 1$, $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is the Hermitian unit ball B_{n+N} of $\mathbb{C}^{n+N}$ and is homogeneous.

P r o p o s i t i o n 1. *The Thullen domain $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is biholomorphic to B_{n+N} if and only if $\mu = 1$.*

Proof. Let $f : B_{n+N} \to \widetilde{\Omega}(\mu, N)$ be a biholomorphism. By composing f with a suitable automorphism of B_{n+N}, we may assume that $f(0) = 0$. As B_{n+N} is a bounded circled domain and $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is bounded, a lemma of H. Cartan implies that f is linear. It is then easy to check that the image of the boundary of B_{n+N} by f is the boundary of $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ if and only if $\mu = 1$. $\square$

2. Boundary and automorphisms

2.1. Strictly pseudoconvex boundary points. Let Ω be a bounded complex domain. Let $c>0$ be a positive real number and $N>0$ an integer. Let $X:\Omega\times\mathbb{C}^N\to(0,+\infty)$ be defined by

$$X(z,Z):=\mathcal{K}_\Omega(z)^c\,\|Z\|^2\,.$$

P r o p o s i t i o n 2. *The points of*

$$\partial_0\,\widehat{\Omega}(c,N):=\left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^N\mid\|Z\|^2=\mathcal{K}_\Omega(z)^{-c}\right\}$$

are strictly pseudoconvex boundary points of $\widehat{\Omega}(c,N)$ *.*

This property has been noticed by Ahn Heungju, Byun Jisoo, Park Jong-do [1] when Ω is a bounded symmetric domain of classical type, and proved by them case-by-case for symmetric domains of classical type.

Proof. Consider the function

$$\ln X(z,Z)=c\ln\mathcal{K}_\Omega(z)+\ln\|Z\|^2\,.$$

Its Levi form at (z,Z) is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{(z,Z)}((w_1,W_1),(w_2,W_2))&=\partial_{(w_1,W_1)}\overline{\partial}_{(w_2,W_2)}\ \ln X(z,Z)\\&=c\,\partial_{w_1}\overline{\partial}_{w_2}\ \ln\mathcal{K}_\Omega(z)+\partial_{W_1}\overline{\partial}_{W_2}\ \ln\|Z\|^2\,.\end{aligned}$$

Then $\partial_{w_1}\overline{\partial}_{w_2}\ln\mathcal{K}_\Omega(z)$ is the Bergman metric $h_z(w_1,w_2)$ of Ω at z and

$$\partial_W\,\overline{\partial}_W\ \ln\|Z\|^2=\frac{\|Z\|^2\,\|W\|^2-|(W\mid Z)|^2}{\|Z\|^4}\,.$$

The complex tangent hyperplane $H_{(z,Z)}$ to $\partial_0\,\widehat{\Omega}(c,N)=\{\ln X(z,Z)=0\}$ at (z,Z) is

$$H_{(z,Z)}=\left\{(w,W)\ \mid\ c\,\langle\partial\ln\mathcal{K}_\Omega(z),w\rangle\ +\frac{(W\mid Z)}{\|Z\|^2}=0\right\}.$$

For $(w,W)\in H_{(z,Z)}$,

$$\mathcal{L}_{(z,Z)}\left((w,W),(w,W)\right)=h_z(w,w)+\frac{\|Z\|^2\,\|W\|^2-|(W\mid Z)|^2}{\|Z\|^4}\ \geqslant 0.$$

If $\mathcal{L}_{(z,Z)}((w,W),(w,W))=0$, then $w=0$, which implies $(W\mid Z)=0$, hence $\mathcal{L}_{(z,Z)}((w,W),(w,W))=\|Z\|^{-2}\,\|W\|^2$ and $W=0$. □

2.2. Automorphisms of Cartan–Hartogs domains. Let Ω be a bounded irreducible circled symmetric domain in V, with generic norm N, genus γ and Bergman kernel $K(z,t)$.

Let $\widetilde{\Omega}$ be the Cartan–Hartogs domain ($\mu > 0\,,\ N \geqslant 1$)

$$\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\mu, N) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \mid \|Z\|^2 < N(z,z)^\mu\right\}.$$

Define $X : \widetilde{\Omega} \to [0,1)$

$$X(z,Z) = \frac{\|Z\|^2}{N(z,z)^\mu}.$$

2.2.1. *Boundary of Cartan–Hartogs domains.* The boundary of the Cartan domain Ω is a disjoint union of locally closed manifolds

$$\partial\Omega = \coprod_{j=1}^{r} \partial_j\,\Omega.$$

The boundary of the Cartan–Hartogs domain $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is

$$\partial\widetilde{\Omega} = \partial_0\,\widetilde{\Omega} \sqcup (\partial\Omega \times \{0\}) = \coprod_{j=0}^{r} \partial_j\,\widetilde{\Omega},$$

with

$$\begin{aligned} \partial_0\widetilde{\Omega} &= \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^N \;\middle|\; \|Z\|^2 = N(z,z)^\mu\right\}, \\ \partial_j\widetilde{\Omega} &= \partial_j\,\Omega \times \{0\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant r). \end{aligned}$$

The points of $\partial_0\widetilde{\Omega}$ are strictly pseudoconvex boundary points.

2.2.2. *Restricted automorphisms of Cartan–Hartogs domains.* Denote by $\operatorname{Aut}'\widetilde{\Omega}$ the subgroup of automorphisms of $\widetilde{\Omega}$ which leave X invariant.

P r o p o s i t i o n 3. *The group* $\operatorname{Aut}'\widetilde{\Omega}$ *consists of all* $\Psi : (z,Z) \mapsto (\Phi(z), \psi(z)U(Z))$, *where* $\Phi \in \operatorname{Aut}\Omega$, $U : C^N \to C^N$ *is special unitary and* ψ *satisfies*

$$|\psi(z)|^2 = \left(\frac{N(\Phi z, \Phi z)}{N(z,z)}\right)^\mu.$$

For $\Phi \in \operatorname{Aut}\Omega$, *let* $z_0 = \Phi^{-1}(0)$ *; then the functions* ψ *satisfying this condition are the functions*

$$\psi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,\frac{N\left(z_0, z_0\right)^{\mu/2}}{N\left(z, z_0\right)^{\mu}}.$$

The orbits of $\operatorname{Aut}'\widetilde{\Omega}$ *are the level sets* $\Sigma_\lambda = \{X = \lambda \mid \lambda \in [0,1)\}$.

See [3].

2.2.3. *The automorphism group of a Cartan–Hartogs domain.* The following result is proved by Ahn Heungju, Byun Jisoo, Park Jong-do [1] when Ω is a symmetric domain of classical type.

Theorem 1. (1) *The Cartan–Hartogs domain* $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ *is homogeneous if and only if* Ω *is of type* $I_{1,n}$ *(that is, an Hermitian ball of dimension* n *) and* $\mu = 1$ *. Then* $\widetilde{\Omega}(1, N)$ *is symmetric of type* $I_{1,n+m}$ *.*
(2) *If* $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_m(\mu)$ *is not homogeneous, then* $\mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega} = \mathrm{Aut}'\,\widetilde{\Omega}$ *.*

The proof relies on the Wong–Rosay theorem:

Theorem. [2] *Let* D *be a bounded complex domain and* ξ_0 *a strictly pseudoconvex* C^2 *boundary point of* D *. If there exist an interior point* $x \in D$ *and a sequence* (T_k) *of holomorphic automorphisms of* D *, such that* $T_k(x) \to \xi_0$ *, then* D *is biholomorphic to an Hermitian ball.*

The proof of Ahn–Byun–Park relies on the strict pseudoconvexity of $\partial_0\widetilde{\Omega}(\mu, N)$, so this proof is valid for any irreducible symmetric domain Ω .

Proof. Let

$$\Phi \in \mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega}(\mu, N),$$
$$z_j \in \Omega \to \zeta \in \partial\Omega.$$

There exist

$$g_j \in \mathrm{Aut}\,\Omega \quad \text{such that} \quad g_j(0) = z_j,$$
$$\widetilde{g}_j \in \mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega}(\mu, N) \quad \text{such that} \quad \widetilde{g}_j(0,0) = (z_j, 0).$$

Then

$$(\Phi(z_j, 0)) = (T_j(0,0)), \qquad T_j = \Phi \circ \widetilde{g}_j \in \mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega}(\mu, N).$$

The main steps of the proof are then

- If (z_j) has a subsequence such that $(\Phi(z_j, 0))$ converges to a point $\xi_0 \in \partial_0\widetilde{\Omega}(\mu, N)$, then $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is biholomorphic to an Hermitian ball by the Wong–Rosay theorem.
- $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is biholomorphic to an Hermitian ball if and only if Ω is an Hermitian ball and $\mu = 1$.
- If $\widetilde{\Omega}(\mu, N)$ is not an Hermitian ball, then $\Phi(\Omega \times \{0\}) = \Omega \times \{0\}$ for all $\Phi \in \mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega}(\mu, N)$.
- Let $\Phi \in \mathrm{Aut}\,\widetilde{\Omega}(\mu, N)$. If $\Phi(\Omega \times \{0\}) = \Omega \times \{0\}$, then $\Phi \in \mathrm{Aut}'\,\widetilde{\Omega}(\mu, N)$. □

2.3. Bergman–Hartogs domains. From now on, we assume that Ω is a bounded *homogeneous* domain. Let G denote its automorphism group.

2.3.1. *Restricted automorphisms.* For $g \in G$, let $\widetilde{g} \in \mathrm{Aut}\,\widehat{\Omega}(c, N)$ be defined by

$$\widetilde{g}(z, Z) := (gz, Jg(z)^c Z)\,.$$

Note that the function $z \mapsto Jg(z)^c$ is in general not unique and is defined up to multiplication by a power of $\exp(2i\pi c)$. The group

$$\widetilde{G} = \{\widetilde{g} \mid \widetilde{g}(z,Z) = (gz, Jg(z)^c Z),\ g \in G\}$$

is a covering of G and a subgroup of $\operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N)$.

D e f i n i t i o n 3. The *restricted automorphism group of* $\widehat{\Omega}(c,N)$ is

$$\operatorname{Aut}' \widehat{\Omega}(c,N) = \left\{ \Phi \in \operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N) \mid X \circ \Phi = X \right\},$$

where $X(z,Z) := \mathcal{K}_\Omega(z)^c \|Z\|^2$.

P r o p o s i t i o n 4. *Let* $\Phi \in \operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N)$. *The following properties are equivalent:*

1. $\Phi \in \operatorname{Aut}' \widehat{\Omega}(c,N)$*;*
2. $\Phi(\Omega \times \{0\}) = \Omega \times \{0\}$*;*
3. *there exist* $g \in G$ *and* $U \in \mathsf{U}(N)$ *such that* $\Phi(z,Z) = (gz, Jg(z)^c UZ)$ *.*

2.3.2. *The automorphism group of a Bergman–Hartogs domain.*

Theorem 2. (1) *The Bergman–Hartogs domain* $\widehat{\Omega}(c,N)$ *is homogeneous if and only if* Ω *is an Hermitian ball of dimension* n *and* $c = \dfrac{1}{n+1}$. *Then* $\widehat{\Omega}\left(\dfrac{1}{n+1}, N\right)$ *is an Hermitian ball of dimension* $n+N$.

(2) *In all other cases,* $\operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N) = \operatorname{Aut}' \widehat{\Omega}(c,N)$.

The main steps of the proof are the same than for Cartan–Hartogs domains:

- If (z_j) has a subsequence such that $(\Phi(z_j,0))$ converges to a point $\xi_0 \in \partial_0 \widehat{\Omega}(c,N)$, then $\widehat{\Omega}(c,N)$ is biholomorphic to an Hermitian ball by the Wong–Rosay theorem.
- $\widehat{\Omega}(c,N)$ is biholomorphic to an Hermitian ball if and only if Ω is an Hermitian ball and $c = \dfrac{1}{n+1}$.
- If $\widehat{\Omega}(c,N)$ is not an Hermitian ball, then $\Phi(\Omega \times \{0\}) = \Omega \times \{0\}$ for all $\Phi \in \operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N)$.
- Let $\Phi \in \operatorname{Aut} \widehat{\Omega}(c,N)$. If $\Phi(\Omega \times \{0\}) = \Omega \times \{0\}$, then $\Phi \in \operatorname{Aut}' \widehat{\Omega}(c,N)$. $\square$

References

[1] Heungju Ahn, Jisoo Byun, Jong-Do Park, “Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains”, *International Journal of Mathematics*, **23**:9 (2012), 1–11.

[2] Jean-Pierre Rosay, “Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d’automorphismes”, *Annales de l’institut Fourier*, **29**:4 (1979), 91–97.

[3] Yin Weiping, Lu Keping, Roos Guy, “New classes of domains with explicit Bergman kernel”, *Science in China. Series A: Mathematics*, **47**:3 (2004), 352–371.

Список литературы

[1] Heungju Ahn, Jisoo Byun, Jong-Do Park, “Automorphisms of the Hartogs type domains over classical symmetric domains”, *International Journal of Mathematics*, **23**:9 (2012), 1–11.

[2] Jean-Pierre Rosay, “Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d’automorphismes”, *Annales de l’institut Fourier*, **29**:4 (1979), 91–97.

[3] Yin Weiping, Lu Keping, Roos Guy, “New classes of domains with explicit Bergman kernel”, *Science in China. Series A: Mathematics*, **47**:3 (2004), 352–371.

Information about the author

Guy Roos, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. University of Poitiers, Poitiers, France. E-mail: guy.roos@normalesup.org

Received 15 May 2019
Reviewed 25 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

Информация об авторе

Роос Ги, доктор физико-математических наук, профессор. Университет Пуатье, г. Пуатье, Франция. E-mail: guy.roos@normalesup.org

Поступила в редакцию 15 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 25 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Фомин В.И., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332

УДК 517.937

Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property

Vasiliy I. FOMIN

Tambov State Technical University

106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Аннотация. В банаховом пространстве E рассматриваются операторные функции e^A, $\sin B$, $\cos B$ операторного аргумента из банаховой алгебры ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. Для тригонометрических операторных функций $\sin B$, $\cos B$ выводятся формулы для синуса и косинуса суммы аргументов, аналогичные скалярному случаю. При доказательстве этих формул используется произведение рядов с операторными членами в форме Коши. Приводится основное операторное тригонометрическое тождество. Для комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z операторного аргумента Z из банаховой алгебры комплексных операторов доказывается с помощью формул для косинуса и синуса суммы основное свойство показательной функции. Рассматриваются операторные функции e^{At}, $\sin Bt$, $\cos Bt$, e^{Zt} действительного аргумента $t \in (-\infty, \infty)$. На эти функции переносятся факты, изложенные для операторных функций операторного аргумента. В частности, приводится групповое свойство операторной экспоненты e^{Zt}. Указывается правило дифференцирования функции e^{Zt}. Отмечается, что перечисленные выше операторные функции действительного аргумента t используются при построении общего решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве

Ключевые слова: банахово пространство; банахова алгебра; операторная экспоненциальная функция; операторные тригонометрические функции; основное свойство операторной экспоненциальной функции; произведение операторных рядов в форме Коши; основное операторное тригонометрическое тождество

Для цитирования: *Фомин В.И.* Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 324–332. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332.

Abstract. Operator functions e^A, $\sin B$, $\cos B$ of the operator argument from the Banach algebra of bounded linear operators acting from E to E are considered in the Banach space E. For trigonometric operator functions $\sin B$, $\cos B$, formulas for the sine and cosine of the sum of the arguments are derived that are similar to the scalar case. In the proof of these formulas, the composition of ranges with operator terms in the form of Cauchy is used. The basic operator trigonometric identity is given. For a complex operator exponential function e^Z of an operator argument Z from the Banach algebra of complex operators, using the formulas for the cosine and sine of the sum, the main property of the exponential function is proved. Operator functions e^{At}, $\sin Bt$, $\cos Bt$, e^{Zt} of a real argument $t \in (-\infty, \infty)$ are considered. The facts stated for the operator functions of the operator argument are transferred to these functions. In particular, the group property of the operator exponent e^{Zt} is given. The rule of differentiation of the function e^{Zt} is indicated. It is noted that the operator functions of the real argument t listed above are used in constructing a general solution of a linear n th order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space

Keywords: Banach space; Banach algebra; exponential operator function; trigonometric operator functions; exponential operator function main property; the composition of operator ranges in the form of Cauchy; basic operator trigonometric identity

For citation: Fomin V.I. Ob osnovnom svoystve kompleksnoy operatornoy eksponencial'noy funkcii kompleksnogo operatornogo argumenta [About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 324–332. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-324-332. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Известно [1–4], что при построении общего решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве используются экспоненциальная и тригонометрические операторные функции действительного аргумента, свойства которых следуют из соответствующих свойств комплексной операторной экспоненциальной функции e^Z комплексного операторного аргумента Z. В связи с этим актуальна задача детального изучения свойств функции e^Z. В данной работе предлагается доказательство основного свойства экспоненциальной функции: $e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}$, использующее тот факт, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов с операторными членами, равна произведению сумм перемножаемых рядов.

1. Основные понятия

Пусть E — банахово пространство; $L(E)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E. В целях ясности дальнейшего изложения материала будем обозначать сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, где $F_n \in L(E)$, $n \in N \cup \{0\}$, выражением $(s)\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n$. Рассмотрим функции $f,\ g,\ h : L(E) \to L(E)$, определяемые суммами абсолютно сходящихся рядов [5, с. 127, с. 132]:

$$f(A) = e^A = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{1.1}$$

$$g(B) = \sin B = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{1.2}$$

$$h(B) = \cos B = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B^{2n}}{(2n)!}. \tag{1.3}$$

Заметим, что $e^O = I$, $\sin O = O$, $\cos O = I$, кроме того,

$$\sin(-B) = -\sin B, \quad \cos(-B) = \cos B, \quad \forall B \in L(E). \tag{1.4}$$

Известно [6, с. 41], что при любых $A_1, A_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию $A_1A_2 = A_2A_1$, для операторной экспоненциальной функции (1.1) справедливо равенство

$$e^{A_1+A_2} = e^{A_1} \cdot e^{A_2}. \tag{1.5}$$

В дальнейшем нам потребуются два соотношения для операторных тригонометрических функций (1.2), (1.3).

Лемма 1.1. *Для любых* $B_1, B_2 \in L(E)$, *удовлетворяющих условию*

$$B_1B_2 = B_2B_1, \tag{1.6}$$

справедливы формулы

$$\sin(B_1 + B_2) = \sin B_1 \cos B_2 + \cos B_1 \sin B_2, \tag{1.7}$$

$$\cos(B_1 + B_2) = \cos B_1 \cos B_2 - \sin B_1 \sin B_2. \tag{1.8}$$

Доказательство. Покажем справедливость равенства (1.7) (формула (1.8) доказывается аналогично). Рассмотрим ряд, сумма которого определяет левую часть формулы (1.7):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (B_1 + B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{1.9}$$

В силу условия (1.6) можно применить бином Ньютона:

$$\begin{gathered}(B_1 + B_2)^{2n+1} = \sum_{s=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{s} B_1^{2n+1-s} B_2^{s} = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} B_1^{2n-2k+1} B_2^{2k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} B_1^{2n-2k} B_2^{2k+1}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{(2n+1)!}C_{2n+1}^{2k} = \frac{1}{(2n-2k+1)!(2k)!}, \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{(2n+1)!}C_{2n+1}^{2k+1} = \frac{1}{(2n-2k)!(2k+1)!}. \tag{1.12}$$

В силу соотношений (1.9)–(1.12)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right]. \tag{1.13}$$

Рассмотрим ряды, порождающие правую часть равенства (1.7):

$$P_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_1^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad P_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, B_2^{2n}}{(2n)!},$$

$$P_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, B_1^{2n}}{(2n)!}, \quad P_4 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, B_2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Используя произведение рядов в форме Коши, получаем:

$$P_1P_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{(-1)^l B_1^{2l+1}}{(2l+1)!}\cdot\frac{(-1)^k\, B_2^{2k}}{(2k)!}\right),$$

$$P_3P_4 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\frac{(-1)^l\, B_1^{2l}}{(2l)!}\cdot\frac{(-1)^k\, B_2^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

или

$$P_1P_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!}\right),$$

$$P_3P_4 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right).$$

Тогда

$$P_1P_2 + P_3P_4 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_1^{2n-2k+1}B_2^{2k}}{(2n-2k+1)!(2k)!} + \sum_{k=0}^{n}\frac{B_1^{2n-2k}B_2^{2k+1}}{(2n-2k)!(2k+1)!}\right). \tag{1.14}$$

Из соотношений (1.13), (1.14) следует равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = P_1P_2 + P_3P_4.$$

Тогда в силу того, что сумма ряда, являющегося произведением двух абсолютно сходящихся рядов, равна произведению сумм перемножаемых рядов, получаем:

$$(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(B_1+B_2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_1^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n}}{(2n)!}\right)+$$

$$+\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_1^{2n}}{(2n)!}\right)\left((s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,B_2^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),$$

т. е. в силу равенств (1.2), (1.3) $\sin(B_1+B_2)=\sin B_1\cos B_2+\cos B_1\sin B_2$. □

В силу равенств (1.7), (1.8)

$$\sin 2B=2\sin B\cos B;\quad \cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B.$$

Из соотношений (1.4), (1.7), (1.8) получаем формулы

$$\sin(B_1-B_2)=\sin B_1\cos B_2-\cos B_1\sin B_2;$$

$$\cos(B_1-B_2)=\cos B_1\cos B_2+\sin B_1\sin B_2.$$

Тем же способом, каким установлены соотношения (1.7), (1.8), доказываются другие формулы операторной тригонометрии, например, основное операторное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 B+\cos^2 B=I,\quad \forall B\in L(E). \tag{1.15}$$

Можно ввести понятия тангенса и котангенса операторного аргумента. Пусть

$$D_1=\big\{B\in L(E)|\exists\ \cos^{-1}B\in L(E)\big\},$$

$$D_2=\big\{B\in L(E)|\exists\ \sin^{-1}B\in L(E)\big\},$$

где $\cos^{-1}B=(\cos B)^{-1}$ и $\sin^{-1}B=(\sin B)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos B$ и $\sin B$. Тогда можно рассмотреть функции $\varphi: D_1\to L(E)$, $\psi: D_2\to L(E)$, определяемые формулами

$$\varphi(B)=\mathrm{tg}B=\sin B\cos^{-1}B,$$

$$\psi(B)=\mathrm{ctg}B=\cos B\sin^{-1}B.$$

2. Основные результаты

Рассмотрим банахову алгебру комплексных операторов [7]

$$C_{L(E)} = [L(E)]^2 = L(E) \times L(E) = \{Z = (A, B) | A, B \in L(E)\},$$

которую удобно представить в виде

$$C_{L(E)} = \{Z = A + JB | A, B \in L(E)\},$$

где $J = (O, I)$ — мнимая операторная единица. Напомним, что операция умножения в $C_{L(E)}$ задаётся формулой

$$(A_1 + JB_1)(A_2 + JB_2) = A_1A_2 - B_1B_2 + J(A_1B_2 + B_1A_2).$$

Комплексная операторная экспоненциальная функция $w : C_{L(E)} \to C_{L(E)}$ определяется равенством

$$w(Z) = e^Z = e^{A+JB} = e^A(\cos B + J \sin B), \tag{2.1}$$

в частности, при $A = O,$ получаем операторную формулу Эйлера

$$e^{JB} = \cos B + J \sin B. \tag{2.2}$$

Докажем основное свойство экспоненциальной функции (2.1).

Теорема 2.1. *Для любых* $Z_1 = A_1+JB_1,$ $Z_2 = A_2+JB_2 \in C_{L(E)},$ *удовлетворяющих условиям*

$$A_1A_2 = A_2A_1, \quad B_1B_2 = B_2B_1, \quad A_2B_1 = B_1A_2$$

справедливо равенство

$$e^{Z_1+Z_2} = e^{Z_1}e^{Z_2}. \tag{2.3}$$

Доказательство. В силу условия $A_1A_2 = A_2A_1$ справедливо равенство (1.5). Из условия $B_1B_2 = B_2B_1$ следуют формулы (1.7), (1.8). Тогда, используя условие $A_2B_1 = B_1A_2,$ получаем:

$$e^{Z_1}e^{Z_2} = e^{A_1}(\cos B_1 + J \sin B_1)e^{A_2}(\cos B_2 + J \sin B_2) =$$

$$= e^{A_1+A_2} [\cos B_1 \cos B_2 - \sin B_1 \sin B_2 + J(\sin B_1 \cos B_2 + \cos B_1 \sin B_2)] =$$

$$= e^{A_1+A_2} [\cos(B_1 + B_2) + J \sin(B_1 + B_2)] = e^{A_1+A_2+\mathrm{I}(B_1+B_2)} = e^{Z_1+Z_2}.$$

□

В силу равенств (1.4), (2.2)

$$e^{-JB} = \cos B - J \sin B. \tag{2.4}$$

Заметим, что $J^{-1} = -J$. Тогда из соотношений (2.2), (2.4) следуют формулы

$$\sin B = -\frac{J}{2}\left(e^{JB} - e^{-JB}\right); \tag{2.5}$$

$$\cos B = \frac{1}{2}\left(e^{JB} + e^{-JB}\right). \tag{2.6}$$

Основное операторное тригонометрическое тождество (1.15) можно доказать, используя равенства (2.3), (2.5), (2.6).

Пусть $A, B \in L(E)$; A, B фиксированы. Рассмотрим функции μ, ν, $\kappa : R \to L(E)$, определяемые равенствами

$$\mu(t) = e^{At} = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \tag{2.7}$$

$$\nu(t) = \sin Bt = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1} B^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{2.8}$$

$$\kappa(t) = \cos Bt = (s)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n} B^{2n}}{(2n)!}. \tag{2.9}$$

В силу равенства (1.5) для операторной экспоненты (2.7) выполняется известное групповое свойство [6, с. 41]

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau}, \quad \forall t, \tau \in R.$$

В силу тождества (1.15) получаем известное соотношение [8]

$$\sin^2 Bt + \cos^2 Bt = I, \quad \forall t \in R.$$

Для операторов $B_1, B_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (1.6) получаем, в силу равенств (1.7), (1.8), соотношения

$$\sin\left[(B_1 + B_2)t\right] = \sin B_1 t \cos B_2 t + \cos B_1 t \sin B_2 t,$$

$$\cos\left[(B_1 + B_2)t\right] = \cos B_1 t \cos B_2 t - \sin B_1 t \sin B_2 t.$$

Пусть $Z = A + JB \in C_{L(E)}$; Z фиксирован. Рассмотрим функцию $\chi(t) : R \to C_{L(E)}$, определяемую равенством

$$\chi(t) = e^{Zt} = e^{(A+JB)t} = e^{At}(\cos Bt + J\sin Bt). \tag{2.10}$$

Если действительная и мнимая части оператора Z коммутируют:

$$AB = BA, \tag{2.11}$$

то в силу доказанной выше теоремы

$$e^{Z(t+\tau)} = e^{Zt}e^{Z\tau}, \quad \forall t, \tau \in R.$$

Напомним [6, с. 41], что производная операторной экспоненты (2.7) выражается формулой

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}.$$

Известно [7], что при выполнении условия (2.11) для производной комплексной операторной экспоненты (2.10) справедливо равенство

$$\left(e^{Zt}\right)' = Ze^{Zt}.$$

Список литературы

[1] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:5 (2005), 656–660.

[2] В. И. Фомин, “О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **43**:5 (2007), 710–713.

[3] В. И. Фомин, “Об одном семействе решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка в банаховом пространстве”, *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*, **6**:42 (2018), 382–384.

[4] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 237–243.

[5] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

[6] Ю. Л. Далецкий , М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970.

[7] В. И. Фомин, “О банаховой алгебре комплексных операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823.

[8] В. И. Фомин, “Об основном операторном тригонометрическом тождестве”, *Современные методы теории краевых задач*, Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX» (Воронеж, 3–9 мая, 2019), Материалы международной конференции, Издательский дом ВГУ, Воронеж, 2019, 284–285.

References

[1] V. I. Fomin, “On the general solution of a linear nth-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space”, *Differential Equations*, **41**:5 (2005), 687–692.

[2] V. I. Fomin, “On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an nth-order linear homogeneous differential equation in a Banach space”, *Differential Equations*, **43**:5 (2007), 732–735.

[3] V. I. Fomin, “About a solutions family of a linear homogeneous differential equation of the nth-order in a Banach space”, *Actual Areas of Research of the 21th Century: Theory and Practice*, **6**:42 (2018), 382–384 (In Russian).

[4] V. I. Fomin, “About the general solution of a linear homogeneous differential equation in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 237–243 (In Russian).

[5] V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1980 (In Russian).

[6] Y. L. Daleckiy , M. G. Kreyn, *Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Nauka, Moscow, 1970 (In Russian).

[7] V. I. Fomin, “About a complex operator Banach algebra”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 813–823, DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823 (In Russian).

[8] V. I. Fomin, “About the main operator trigonometric identity”, *Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems*, Voronezh Spring Mathematical School «Pontryagin Readings – XXX» (Voronezh, May 3–9, 2019), Materials of the International Conference, VSU Publishing House, Voronezh, 2019, 284–285 (In Russian).

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин. Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Поступила в редакцию 15 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 26 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Technical Mechanic and Machine Part Department. Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasiliyfomin@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3846-4882

Received 15 May 2019
Reviewed 26 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 24, № 127 2019

© Эльсаев Я.В., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339
УДК 517.98; 519.46

О дилатации одного класса вполне положительных отображений

Якуб Витальевич ЭЛЬСАЕВ
ФГБУН «Владикавказский научный центр РАН»
362027, Российская Федерация, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039, e-mail: zelimus-951@mail.ru

On a dilation of a some class of completely positive maps

Yakub V. ELSAEV
Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Science
22 Markusa St., Vladikavkaz 362027, Russian Federation
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039, e-mail: zelimus-951@mail.ru

Аннотация. В работе изучаются полуторалинейные формы, определенные на декартовом квадрате гильбертова C^*-модуля $\mathcal{M}$ над C^*-алгеброй B и принимающие значение в алгебре B. Множество таких полуторалинейных форм обозначается $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Рассматриваются ковариантные, относительно действия некоторой группы симметрии, вполне положительные отображения, заданные на унитальной локальной C^*-алгебре A и принимающие значение в $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Данный класс отображений можно интерпретировать как обобщение ковариантных квантовых инструментов, широко применяемых в современной квантовой механике и квантовой теории поля. В статье исследована проблема дилатации для указанного класса отображений. В качестве ее решения строится минимальное представление типа Стайнспринга. Кроме того, удается установить единственность минимального представления с точностью до унитарной эквивалентности гильбертовых C^*-модулей.

Ключевые слова: локальная C*-алгебра; гильбертов А-модуль; вполне положительное отображение; полуторалинейная форма; ковариантное представление Стайнспринга

Для цитирования: *Эльсаев Я.В.* О дилатации одного класса вполне положительных отображений // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 127. С. 333–339. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339.

Abstract. In this article we investigate sesquilinear forms defined on the Cartesian product of Hilbert C^*-module $\mathcal{M}$ over C^*-algebra B and taking values in B. The set of all such defined sesquilinear forms is denoted by $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. We consider completely positive maps from locally C^*-algebra A to $\mathcal{S}_B(\mathcal{M})$. Moreover we assume that these completely positive maps are covariant with respect to actions of a group symmetry. This allow us to view these maps as generalizations covariant quantum instruments which are very important for the modern quantum mechanic and the quantum field theory. We analyze the dilation problem for these class of maps. In order to solve this problem we construct the minimal Stinespring representation and prove that every two minimal representations are unitarily equivalent.

Keywords: locally C^*-algebra; Hilbert C^*-module; completely positive map; sesquilinear form; covariant Stinespring representation

For citation: Elsaev Ya.V. O dilatacii odnogo klassa vpolne polozhitel'nyh otobrazheniy [On a dilation of a some class of completely positive maps]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 127, pp. 333–339. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-127-333-339. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Вполне положительные отображения в операторных алгебрах и модулях в последние годы все больше привлекают внимание исследователей (см. [1–5]). Причина этого феномена состоит в том, что данный класс отображений используется в теории квантовой информации и квантовых вычислений. Впервые задача о дилатации вполне положительного отображения была изучена в работе [6], где было показано, что вполне положительное отображение $\varphi : A \to L(H)$ из C^*-алгебры A в алгебру $L(H)$ линейных, ограниченных операторов в гильбертовом пространстве H, можно представить в форме $\varphi(\cdot) = S^{\star}\pi(\cdot)S$, где π это $*$-представление алгебры A в другом гильбертовом пространстве K и S — линейный, ограниченный оператор из H в K.

Настоящая заметка продолжает данный круг исследований и является продолжением работы [1]. Мы установим аналог теоремы Стайнспринга для ковариантных, относительно действия некоторой группы, вполне положительных отображений, заданных на локальной C^*-алгебре, и принимающих значение в пространстве полуторалинейных форм на гильбертовом C^*-модуле. Такие полуторалинейные формы естественно возникают в задачах современной квантовой механики [7].

1. Основные понятия

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию и используемые обозначения. Все необходимые сведения о локальных C^*-алгебрах, гильбертовых C^*-модулях и вполне положительных отображениях можно найти в [8–10]. Все алгебры рассматриваются над полем комплексных чисел. Всюду ниже будем полагать, что внутренние произведения сопряженно линейны по второй переменной и линейны по первой переменной.

Определение 1. Пусть A — инволютивная алгебра и $p : A \to \mathbb{R}_+$ — полунорма на A, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $p(xy) \le p(x)p(y)$ для любых $x, y \in A$;
2. $p(x) = p(x^*)$ для любого $x \in A$.

Если, кроме того, для любого $x \in A$ справедливо равенство $p(x^*x) = p(x)^2$, то p называется C^**-полунормой.* Инволютивная топологическая алгебра, полная относительно топологии, задаваемой направленным семейством C^*-полунорм $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ называется *локальной* $C^\star$*-алгеброй.*

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Каждая C^*-алгебра является локальной C^*-алгеброй.

Пример 2. Каждая замкнутая $*$-подалгебра локальной C^*-алгебры является локальной C^*-алгеброй.

Напомним, что для локальной C^*-алгебры A элемент $x \in A$ называется *положительным*, если $x = x^*$ и $\sigma(x) \subset \mathbb{R}_+$, где $\sigma(x)$ — это спектр элемента x. Множество всех положительных элементов алгебры A обозначается через A_+.

Линейное отображение $\varphi : A \to B$ локальных C^*-алгебр A и B называется *положительным*, если $\varphi(A_+) \subset B_+$. Для локальной C^*-алгебры A через $M_n(A)$ обозначается $*$-алгебра всех квадратных $n \times n$ матриц с элементами из A. Известно, что $M_n(A)$ также является локальной C^*-алгеброй. Отметим, что сложение, инволюция и умножение матриц, а также умножение на элемент основного поля задаются так же, как и в случае скалярных матриц. Отметим также, что матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(A)$ является положительной тогда и только тогда, когда для любого n-набора $c_1, \ldots, c_n$ элементов алгебры A выполняется неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^n c_i^* a_{ij} c_j \geq 0$.

Определение 2. Пусть B некоторая C^*-алгебра. *Предгильбертовым B-модулем* называется комплексное векторное пространство $\mathcal{M}$, которое также является правым B-модулем, снабженное B-значным скалярным произведением, т. е. отображением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to B$, удовлетворяющим свойствам:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle \text{ для любых } x, y, z \in \mathcal{M};\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}; \tag{1}$$

$$\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b \text{ для любых } x, y \in \mathcal{M};\ b \in B; \tag{2}$$

$$\langle x, y \rangle^\star = \langle y, x \rangle \text{ для любых } x, y \in \mathcal{M}; \tag{3}$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{M}; \tag{4}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ для любого } x \in \mathcal{M}. \tag{5}$$

Будем говорить, что $\mathcal{M}$ это *гильбертов C^*-модуль*, если $\mathcal{M}$ является банаховым пространством, относительно нормы $\|x\| = \|x\|_{\mathcal{M}} := \sqrt{\|\langle x, x \rangle\|_B}$, $x \in \mathcal{M}$. Для любого подмножества $D \subset \mathcal{M}$ через $[D]$ будем обозначать замкнутый гильбертов C^*-подмодуль, порожденный D.

Определение 3. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — гильбертовы C^*-модули над C^*-алгеброй B. Линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ называется *B-линейным*, если для любых $v \in \mathcal{M}$, $b \in B$ справедливо равенство $T(vb) = T(v)b$. Множество всех B-линейных операторов из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ обозначается $L_B(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ или просто $L(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, если ясно, о какой алгебре B идет речь. Говорят, что линейный оператор $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *допускает сопряженный*, если существует линейный оператор $S : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, такой, что $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Sv \rangle$ для любых элементов $u \in \mathcal{M}$, $v \in \mathcal{N}$. Тогда S называется *сопряженным* оператором к T и обозначается T^*. Векторное пространство всех линейных операторов

$T:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$, допускающих сопряженный, обозначается через $\mathcal{L}_B(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Известно, что каждый линейный оператор, допускающий сопряжение, является B-линейным и $\mathcal{L}_B(\mathcal{M})=\mathcal{L}_B(\mathcal{M},\mathcal{M})$ является C^*-алгеброй (см. [8, гл. 1]).

Определение 4. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над C^*-алгеброй B. Отображение $\mathcal{P}:\mathcal{M}\times\mathcal{M}\to B$ называется $\mathbb{B}$-*полуторалинейной формой*, если для любых элементов $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $u,v,w\in\mathcal{M}$ и $b\in B$ выполняются следующие условия:

1. $P(u,\alpha v+\beta w)=\alpha P(u,v)+\beta P(u,w)$;
2. $P(u,vb)=P(u,v)b$;
3. $P(u,v)=P(v,u)^*$.

Если кроме того $P(u,u)\geq 0$ для любого элемента $u\in\mathcal{M}$, то форма P называется *положительной*. Множества всех полуторалинейных и положительных полуторалинейных форм на $\mathcal{M}$ обозначается $S_B(\mathcal{M})$ и $S_B(\mathcal{M})_+$ соответственно. Пусть теперь A — локальная C^*-алгебра. Линейное отображение $\Phi:A\to S_B(\mathcal{M})$ называется *положительным*, если $\Phi(A_+)=S_B(\mathcal{M})_+$. Рассмотрим квадратную матрицу $(P(i,j))_{i,j=1}^n$ элементами которой являются полуторалинейные формы на $\mathcal{M}$. Для множества всех таких матриц будем использовать обозначение $M_n(S_B(\mathcal{M}))$. Ясно, что в случае $n=1$ имеет место равенство $M_n(S_B(\mathcal{M}))=S_B(\mathcal{M})$. Матрица $(P(i,j))_{i,j=1}^n$ называется *положительной*, если для любого n-набора $v_1,\dots,v_n$ элементов модуля $\mathcal{M}$ выполняется включение

$$(P(i,j)(v_i,v_j))_{i,j=1}^n\in M_n(B)_+.$$

Определение 5. Линейное отображение $\Phi:A\to S_B(\mathcal{M})$ называется *вполне положительным*, если линейное отображение $\Phi^n:M_n(A)\to M_n(S_B(\mathcal{M}))$, заданное формулой

$$\Phi^n([a_{ij}]_{i,j=1}^n)=[\Phi(a_{ij})]_{i,j=1}^n$$

является положительным для любого $n\in\mathbb{N}$.

Определение 6. Пусть G — группа, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над C^*-алгеброй B и A — унитальная локальная C^*-алгебра. Через $\mathrm{Aut}(A)$ и $GL_B(\mathcal{M})$ обозначим группы всех $*$-автоморфизмов A и всех B-линейных биекций модуля $\mathcal{M}$ соответственно. *Действием* G на A называется гомоморфизм групп $\eta:G\to\mathrm{Aut}(A)$. *Представлением* группы G в $\mathcal{M}$ называется гомоморфизм $U:G\to GL_B(\mathcal{M})$. Вполне положительное отображение $\Phi:A\to S_B(\mathcal{M})$ называется (η,U)-*ковариантным*, если равенство

$$\Phi_{\eta(g)x}(u,v)=\Phi_x(U(g^{-1})u,U(g^{-1})v)$$

выполняется для любых $g\in G$, $x\in A$, $u,v\in\mathcal{M}$.

2. Основные результаты

В настоящем разделе мы докажем основной результат — теорему о дилатации вполне положительного, ковариантного отображения. Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1. *[1, Теорема 1] Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — вполне положительное отображение. Тогда существует гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняются условия:*

1. $\Phi_x(u, v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$;
2. $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$.

Тройка $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$, удовлетворяющая условию 1 предложения 1, называется *представлением Стайнспринга* вполне положительного отображения Φ. Представление Стайнспринга называется *минимальным*, если, кроме того, выполняется условие 2 предложения 1. Два представления Стайнспринга $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \pi)$ и $(\mathcal{N}', \mathcal{D}', \pi')$ вполне положительного отображения Φ называются унитарно эквивалентными, если существует унитарный оператор $R : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, такой, что $\mathcal{D}' = R\mathcal{D}$ и $R\pi(a) = \pi'(a)R$ для любого $a \in A$.

Предложение 2. *[1, Теорема 2] Пусть A, B, $\mathcal{M}$, $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ такие же, как и в предложении 1. Тогда любые два минимальных представления Стайнспринга вполне положительного отображения Φ унитарно эквивалентны.*

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть A — унитальная локальная C^*-алгебра, $\mathcal{M}$ — гильбертов C^*-модуль над унитальной C^*-алгеброй B, G — группа, η — действие G на A, U — представление G в $\mathcal{M}$ и $\Phi : A \to S_B(\mathcal{M})$ — (η, U)-ковариантное, вполне положительное отображение. Тогда существует: гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над алгеброй B, линейный оператор $\mathcal{D} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, представление $\overline{U} : G \to \mathcal{U}_B(\mathcal{N})$ и $*$-гомоморфизм $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ такие, что для любых $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$ выполняются условия:*

1. $\mathcal{N} = [\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})]$;
2. $\Phi_x(u, v) = \langle \mathcal{D}u, \pi(x)\mathcal{D}v\rangle$, $u, v \in \mathcal{M}$, $x \in A$;
3. $\mathcal{D}U(g) = \overline{U}(g)\mathcal{D}$ *для любого* $g \in G$;
4. $\overline{U}(g)\pi(x) = (\pi \circ \eta(g)(x)\overline{U}(g)$ *для любых* $g \in G$, $x \in A$.

Если кроме того $(\mathcal{N}', \pi', \mathcal{D}', U')$ — другая другая четверка, удовлетворяющая условиям $(1) - (4)$ теоремы 1, то существует унитарный оператор $W : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$, такой, что $W\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, $W\pi(x) = \pi'(x)W$ для всех $x \in A$ и $W\overline{U}(g) = \overline{U}'(g)W$ для всех $g \in G$.

Доказательство. Используя предложение 1 найдем тройку $(\mathcal{N}, \pi, \mathcal{D})$, где $\mathcal{N}$ — гильбертов C^*-модуль над алгеброй B, $\pi : A \to L_B(\mathcal{N})$ — $*$-гомоморфизм и $\mathcal{D}$ — линейный оператор из $\mathcal{M}$ в $\mathcal{N}$ такие, что выполняются условия 1 и 2 теоремы 1. Возьмем теперь произвольный элемент g группы G. Покажем, что тройка $(\mathcal{N}, \rho, \mathcal{R})$, где $\rho = \pi \circ \eta(g)$ и $\mathcal{R} = \mathcal{D}U(g)$, также удовлетворяет тем же условиям 1 и 2. Действительно в силу элементарных тождеств:

$$x = \eta(g)(\eta(g^{-1})x),\; u = U(g^{-1})(U(g)u),\; v = U(g^{-1})(U(g)v),$$

имеем

$$\Phi_x(u,v) = \Phi_{\eta(g^{-1})(\eta(g)x)}(U(g^{-1})(U(g)u), U(g^{-1})(U(g)v)) =$$
$$\Phi_{\eta(g)x}(U(g)U(g^{-1})(U(g)u), U(g)U(g^{-1})(U(g)v)) =$$
$$\Phi_{\eta(g)x}(U(g)u), U(g)v) = \langle \mathcal{D}U(g)u, \pi(\eta(g)(x))\mathcal{D}U(g)v\rangle =$$
$$\langle \mathcal{R}u, \rho(x)\mathcal{R}v\rangle.$$

Так как множество $\{\pi(x)\mathcal{D}(u) : x \in A, u \in \mathcal{M}\}$ совпадает с множеством $\{\pi\circ\eta(g)(x)\mathcal{D}U(g)(u) : x \in A, u \in \mathcal{M}\}$, то совпадают порожденные ими замкнутые подмодули в $\mathcal{N}$, в силу чего

$$[\pi(A)\mathcal{D}(\mathcal{M})] = [\rho(A)\mathcal{R}(\mathcal{M})] = \mathcal{N}.$$

В силу предложения 2 существует унитарный оператор $\overline{U}(g) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, такой, что $\overline{U}(g)\mathcal{D} = \mathcal{D}U(g)$ и $\overline{U}(g)\pi(x) = (\pi \circ \eta(g)(x)\overline{U}(g)$. Кроме того

$$\overline{U}(gh) = \overline{U}(g)\overline{U}(h), \ g, h \in G.$$

Таким образом задан гомоморфизм $\overline{U} : G \to GL_B(\mathcal{M})$, удовлетворяющий условию 3 теоремы 1. Пусть теперь $(\mathcal{N}', \pi', \mathcal{D}', \overline{U}')$ — другая четверка, удовлетворяющая условиям (1) – (4) теоремы 1 и пусть $W : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ — унитарный оператор, такой, что $W\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ и $W\pi(x) = \pi'(x)W$ для любых $x \in A$. Заметим, что существование такого оператора гарантируется предложением 2. Тогда для любых $g \in B, x \in A$ и $v \in \mathcal{M}$ можем написать

$$W\overline{U}(g)\pi(x)\mathcal{D}v = W\pi(\eta(g)x)\mathcal{D}U(g)v =$$
$$\pi'(\eta(g)x)\mathcal{D}'U(g)v = U'(g)v\pi'(x)\mathcal{D}'v =$$
$$U'(g)W\pi(x)\mathcal{D}v.$$

Отсюда выводим, что $W\overline{U}(g) = \overline{U}'(g)W$ для любых $g \in B$. □

Список литературы

[1] А. В. Калиниченко, И. Н. Малиев, М. А. Плиев, “Модульные полуторалинейные формы и обобщенное представление Стайнспринга”, *Известия вузов. Математика*, **62**:12 (2018), 50–59.

[2] И. Н. Малиев, М. А. Плиев, “О представлении типа Стайнспринга для операторов в гильбертовых модулях над локальными C^*-алгебрами”, *Известия вузов. Математика*, **56**:12 (2012), 51–58.

[3] М. А. Плиев, И. Д. Цопанов, “О представлении типа Стайнспринга для n-наборов вполне положительных отображений в гильбертовых C^*-модулях”, *Известия вузов. Математика*, **58**:11 (2014), 41–49.

[4] J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, “Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction”, *Positivity*, **15**:3 (2011), 509–525.

[5] M. S. Moslehian, A. G. Kusraev, M. A. Pliev, “Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem”, *Indagationes Mathematicae*, **28**:5 (2017), 938–952.

[6] F. Stinspring, “Positive functions on C^*-algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**:2 (1955), 211–216.

[7] D. A. Dubin, J. Kiukas, J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, “Operator integrals and sesquilinear forms”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **413** (2014), 250–268.

[8] V. Manuilov, E. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[9] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., San Diego; Academic Press Limited, London, 1990.

[10] M. Fragoulopoulou, *Topological Algebras with Involution.* V. 200, 1st ed., Elsevier, North Holland, 2005.

References

[1] A. V. Kalinichenko, I. N. Maliev, M. A. Pliev, “Modular sesquilinear forms and generalized stinespring representation”, *Russian Mathematics*, **62**:12 (2018), 42–49.

[2] I. N. Maliev, M. A. Pliev, “A stinespring type representation for operators in Hilbert modules over local $C*$-algebras”, *Russian Mathematics*, **56**:12 (2012), 43–49.

[3] M. A. Pliev, I. D. Tsopanov, “On representation of Stinespring's type for n-tuples of completely positive maps in Hilbert C^*-modules”, *Russian Mathematics*, **58**:11 (2014), 36–42.

[4] J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, “Modules, completely positive maps, and a generalized KSGNS construction”, *Positivity*, **15**:3 (2011), 509–525.

[5] M. S. Moslehian, A. G. Kusraev, M. A. Pliev, “Matrix KSGNS construction and a Radon-Nikodym type theorem”, *Indagationes Mathematicae*, **28**:5 (2017), 938–952.

[6] F. Stinspring, “Positive functions on C^*-algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6**:2 (1955), 211–216.

[7] D. A. Dubin, J. Kiukas, J. P. Pellonpaa, K. Ylinen, “Operator integrals and sesquilinear forms”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **413** (2014), 250–268.

[8] V. Manuilov, E. Troitsky, *Hilbert C^*-modules*, American Mathematical Society, Providence, 2005.

[9] G. J. Murphy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., San Diego; Academic Press Limited, London, 1990.

[10] M. Fragoulopoulou, *Topological Algebras with Involution.* V. 200, 1st ed., Elsevier, North Holland, 2005.

Информация об авторе

Эльсаев Якуб Витальевич, аспирант. Владикавказский научный центр РАН, г. Владикавказ, Российская Федерация. E-mail: zelimus-951@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039

Поступила в редакцию 20 мая 2019 г.
Поступила после рецензирования 18 июня 2019 г.
Принята к публикации 23 августа 2019 г.

Information about the author

Yakub V. Elsaev, Post-Graduate student. Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Science, Vladikavkaz, Russian Federation. E-mail: zelimus-951@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8053-3039

Received 20 May 2019
Reviewed 18 June 2019
Accepted for press 23 August 2019

ИЗЪЯТИЕ СТАТЬИ (РЕТРАКЦИЯ)

Статья *Попченко В.И., Розенберг Г.С.* Общая интерпретация основного содержания экологической теории // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. 2015. Т. 20. Вып. 2. С. 419-424 отзывается по решению редакционной коллегии журнала (протокол от 23 августа 2019 г.) ввиду того, что было обнаружено совпадение текста данной статьи с текстом более ранней публикации одного из авторов Г.С. Розенберга без ссылок на оригинальный текст.

ССЫЛКИ

Розенберг Г.С. К философии теоретической экологии (общая интерпретация основного содержания теории) // Известия Самарского научного центра РАН. 2010. Т. 12. Вып. 1 (9). С. 2317-2323.

RETRACTION

The following article Popchenko V.I., Rozenberg G.S. Obshchaya interpretatsiya osnovnogo soderzhaniya ekologicheskoy teorii [The general interpretation of the basic content of the ecological theory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennyye i tekhnicheskiye nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 2, pp. 419-424 has been retracted according to the journal editorial board's decision (record of August 23, 2019), due to the similarity of the article's text and an earlier publication by one of the authors G.S. Rozenberg without references to the original text.

REFERENCES

Rozenberg G.S. K filosofii teoreticheskoy ekologii (obshchaya interpretatsiya osnovnogo soderzhaniya teorii) [To philosophy of theoretical ecology (the general interpretation of the basic maintenance of the theory]. Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN – Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2010, vol. 12, no. 1 (9), pp. 2317-2323.