

ISSN 1810-0198

ВЕСТНИК ТАМБОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ: ЕСТЕСТВЕННЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

ТОМ 23, №124, 2018

100

ЛЕТ

ТАМБОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Г.Р. ДЕРЖАВИНА

ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический
журнал

Серия:
естественные и технические науки

Том 23, № 124, 2018

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени
доктора наук (группа научных специальностей: 01.01.00 – математика)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	580
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>S. Ghomrani</i>	Study of the existence of the global solution to the system of equations of the vertical motion of the air in a chimney 583
<i>A. Khellaf</i>	New sufficient conditions in the generalized spectrum approach to deal with spectral pollution 595
<i>А.Л. Багно, А.М. Тарасьев</i>	Асимптотика функции цены в моделях экономического роста 605
<i>А.С. Бондарев</i>	Сходимость в сильных нормах проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение 617
<i>Н.И. Желонкина, А.Н. Сесекин</i>	Об устойчивости решений нелинейных систем с импульсной структурой 624
<i>З.Т. Жуковская, С.Е. Жуковский</i>	Об уравнениях, порожденных нелинейными нильпотентными отображениями 637
<i>С.Е. Жуковский, Л.-Э.И. Нгомиракиза</i>	О продолжаемости в метрических пространствах 643
<i>Н.М. Мишачев, А.М. Шмырин</i>	Декластеризация окрестностных структур 648
<i>В.Ф. Молчанов, Е.Е. Крюкова</i>	Размещения без соседей 655
<i>Н.Г. Павлова</i>	Замкнутость технологического множества в динамических производственных моделях 666
<i>А.И. Перов, И.Д. Коструб</i>	Признаки регулярности и устойчивости дифференциальных уравнений высшего порядка 674
<i>Г.Г. Петросян, О.Ю. Королева</i>	Об одной задаче управляемости для дифференциального включения с дробной производной Капуто 679

<i>Л.И. Родина</i>	Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса	685
<i>Т.Л. Сабатулина</i>	Об осцилляции решений некоторых нелинейных уравнений динамики популяций	696
<i>И.Л. Сандлер</i>	Рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерных дискретных линейных динамических систем разного порядка с ошибками по входу	707
<i>Д.А. Серков, А.Г. Ченцов</i>	О существовании неупреждающего селектора неупреждающего многозначного отображения	717
<i>П.М. Симонов</i>	Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем и ее обращение	726
<i>В.В. Скоморохов</i>	Аппроксимация гиперболических дифференциальных включений дробного порядка с импульсными воздействиями	738
<i>В.И. Сумин</i>	Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации	745
<i>М.И. Сумин</i>	Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает	757
<i>А.Н. Тырсин, А.А. Сурина</i>	Модели мониторинга и управления риском в гауссовских стохастических системах	776
<i>В.И. Усков</i>	Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором	784
<i>А.А. Успенский, П.Д. Лебедев</i>	Евклидово расстояние до замкнутого множества как минимаксное решение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби	797
<i>О.В. Филиппова, А.И. Шиндяпин</i>	Некоторые свойства решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями	805
<i>В.И. Фомин</i>	О банаховой алгебре комплексных операторов	813
<i>Р.А. Хачатрян</i>	О некоторых свойствах почти выпуклых функций и множеств	824
<i>С.В. Цыкина</i>	Символы в полиномиальном квантовании: явные формулы	838
<i>А.Г. Ченцов</i>	Максимальные сцепленные системы и ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств	846
<i>А.В. Чернов</i>	О дифференцировании функционалов аппроксимирующих задач в рамках метода подвижных узлов при решении задач оптимального управления со свободным временем	861
<i>Л.Г. Шагалова</i>	Функция цены дифференциальной игры с простыми движениями и интегрально-терминальной платой	877
<i>Р.И. Шевченко, Ю.Ф. Долгий</i>	Дискретная процедура оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений	891
ИНФОРМАЦИЯ		907

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященной 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина и участников II Международной школы молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление», посвященной 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20079г) и ТГУ им. Г.Р. Державина. Школа организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-681001р_г), администрации Тамбовской области и ТГУ им. Г.Р. Державина.

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. Г.И. Малашонок (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-70572 от 03 августа 2017 г.

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: А.А. Манаенкова, М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: С.Ю. Можаров, Т.А. Сустина

Технический секретарь М.В. Борзова

Для цитирования:

Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. – Тамбов, 2018. – Т. 23, № 124. – 332 с. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124

Подписано в печать 14.09.2018. Дата выхода в свет 11.10.2018.

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 41,5. Усл. печ. л. 38,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 18251. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2018

© Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки», 2018

При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

Tambov University REPORTS

Scientific-Theoretical
Journal

Series:
Natural and Technical Sciences

Volume 23, no. 124, 2018

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

Journal of Tambov State University named after G.R. Derzhavin

The journal is on the official list of scientific reviewed periodicals recommended by High Attestation Commission for publication principal scientific researches of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science (group of scientific specialties: 01.01.00 – Mathematics)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>C. Гомрани</i>	Изучение существования глобального решения системы уравнений вертикального движения воздуха в дымоходе	583
<i>A. Хеллаф</i>	Новые достаточные условия обобщенного спектрального подхода для решения спектрального загрязнения	595
<i>A.L. Bagnò, A.M. Tarasyev</i>	Asymptotics of Value Function in Models of Economic Growth	605
<i>A.S. Bondarev</i>	The strong-norm convergence of a projection-difference method of solution of a parabolic equation with the periodic condition on the solution	617
<i>N.I. Zhelonkina, A.N. Seseikin</i>	On the stability of solutions of nonlinear systems with a impulse structure	624
<i>Z.T. Zhukovskaya, S.E. Zhukovskiy</i>	On Equations Generated by Nonlinear Nilpotent Mappings	637
<i>S.E. Zhukovskiy, L.-E.I. Ngomirakiza</i>	On Continuation in Metric Spaces	643
<i>N.M. Mishachev, A.M. Shmyrin</i>	Decusterization of neighborhood structures	648
<i>V.F. Molchanov, E.E. Kryukova</i>	Placements without neighbours	655
<i>N.G. Pavlova</i>	Closedness of the technology set in dynamical production models	666
<i>A.I. Perov, I.D. Kostrub</i>	Signs of regularity and stability of higher order differential equations	674
<i>G.G. Petrosyan, O.Yu. Koroleva</i>	On a controllability problem for a differential inclusion with fractional derivatives of Caputo	679
<i>L.I. Rodina</i>	About one stochastic harvesting model of a renewed resource	685
<i>T.L. Sabatulina</i>	On oscillation of solutions for some nonlinear equations of population dynamics	696

<i>I.L. Sandler</i>	Recursive algorithm for estimating the parameters of multidimensional discrete linear dynamic systems of different orders with errors on the input	707
<i>D.A. Serkov, A.G. Chentsov</i>	On the existence of a non-anticipating selection of non-anticipating multivalued mapping	717
<i>P.M. Simonov</i>	The theorem of Bohl–Perron on the asymptotic stability of hybrid systems and inverse theorem	726
<i>V.V. Skomorokhov</i>	Approximation of hyperbolic differential inclusions of fractional order with impulses	738
<i>V.I. Sumin</i>	Volterra functional-operator equations and distributed optimization problems	745
<i>M.I. Sumin</i>	Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives	757
<i>A.N. Tyrsin, A.A. Surina</i>	Models of monitoring and management of risk in Gaussian stochastic systems	776
<i>V.I. Uskov</i>	Asymptotic solution of first-order equation with small parameter under the derivative with perturbed operator	784
<i>A.A. Uspenskii, P.D. Lebedev</i>	Euclidean distance to a closed set as a minimax solution of the Dirichlet problem for the Hamilton–Jacobi equation	797
<i>O.V. Filippova, A.I. Shindiapin</i>	Some properties of the generalized solutions of an initial value problem for functional-differential inclusion with multiple-valued impulses	805
<i>V.I. Fomin</i>	About the Banach Algebra of Complex Operators	813
<i>R.A. Khachatryan</i>	On some properties of quasi convex functions and sets	824
<i>S.V. Tsykina</i>	Symbols in polynomial quantization: explicit expressions	838
<i>A.G. Chentsov</i>	Maximal linked systems and ultrafilters of widely understood measurable spaces	846
<i>A.V. Chernov</i>	On differentiation of functionals of approximating problems in the frame of solution of free time optimal control problems by the sliding nodes method	861
<i>L.G. Shagalova</i>	The value function of a differential game with simple motions and an integro-terminal cost	877
<i>R.I. Shevchenko, Yu.F. Dolgii</i>	Discrete procedure of optimal stabilization for periodic linear systems of differential equations	891
INFORMATION		907

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference “Kolmogorov Readings – VIII. General Control Problems and their Applications (GCP-2018)”, dedicated to the 115th anniversary of the birth of A.N. Kolmogorov and to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin, and those of the participants of the II International school of young researches “Multivalued Analysis, Convex Analysis, and Optimal Control”, dedicated to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The conference is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-20079r) and Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The school is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-41-681001p_r), the administration of the Tambov region, and Tambov State University named after G.R. Derzhavin.

Founder: Federal State Budget Educational Institution of High Education
“Tambov State University named after G.R. Derzhavin”
(392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St.)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. G.I. Malaschonok (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasynkov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, France), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portugal), Prof., Dr. A.V. Ponsov (Ås, Norway), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate ПИ № ФС77-70572 of August 3, 2017

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

Editors: A.A. Manaenkova, M.I. Filatova

English texts editors: S.Y. Mozharov, T.A. Sustina

Technical editor M.V. Borzova

For citation:

Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2018. – Vol. 23, no. 124. – 332 p. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124

Podpisano v pechat' 14.09.2018. Data vykhoda v svet 11.10.2018.

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.

Pech. list 41,5. Usl. pech. list 38,6. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 18251. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St., FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”.

392008, Tambov Region, Tambov, 190g Sovetskaya St. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

© FSBEI of HE “Tambov State University named after G.R. Derzhavin”, 2018

© The journal “Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”, 2018

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-583-594

STUDY OF THE EXISTENCE OF THE GLOBAL SOLUTION TO THE SYSTEM OF EQUATIONS OF THE VERTICAL MOTION OF THE AIR IN A CHIMNEY

✉ S. Ghomrani

Ecole Normale Supérieure Des Enseignants Messaoud Zeggar
Setif 19000, Algeria
E-mail: sarra.ghomrani@hotmail.fr

Abstract. In this paper, we consider the system of equations that describes air motion in a chimney. By introducing a method based on the «second approximation», we prove a theorem on the existence and uniqueness of the global solution.

Keywords: global solution; motion of the air

Introduction

In [1] we have constructed a numerical solution to the system of equations describing the chimney's air motion caused by the latent heat of condensing water vapor. The numerical construction of the solution has been made by using the approximation of separating the temporal evolution and the vertical structure. However the question of the existence and uniqueness of the solution of this system of equations, including that of the sub-system for the vertical structure, has not been solved yet.

In [2] the author proposes a theorem of the existence and uniqueness of a system of equations similar to the sub-system for the spatial structure studied in [1]. The result in [2] advances the classical theorem of the existence and uniqueness of the local solution (For an example see [3]). However, this theorem only provides the existence and uniqueness of the solution in an interval, which seems too small to guarantee the solubility of a system of equations of the kind proposed in [1].

In the present work, not only did we use the idea of [2], but we also introduced another method based on the “second approximation”. We prove a theorem of the existence and uniqueness of the solution of a nonlinear system for ordinary differential equations, a theorem which develops the result of [2].

The system of ordinary differential equations that we will consider corresponds to the sub-system of vertical structure studied in [3]. We find this type of equations always in the study of the motion of the air caused by the latent heat of condensation of the water

vapor as storms. This has captured most researchers' attention and maintained their interest (see [4–7]).

1. Main concepts

We denote by T the temperature of the air, ϱ the density of the air, $v = \alpha w$ the velocity of the air, g the gravitational acceleration, R_1 the constant of gas divided by the molar mass, c_v specific heat, $\bar{\pi}_{vs}(T)$ the density of saturated vapor in the air, Σ is the quantity of liquid or solid water in the air. We propose the following system of equations (see [1])

$$w \frac{d\varrho}{dz} + \varrho \frac{dw}{dz} = H_{tr} \quad (1.1)$$

$$\varrho c_v \frac{dT}{dz} - R_1 T \frac{d\varrho}{dz} = L_{tr} h_{tr}, \quad (1.2)$$

$$\alpha(t)^2 \varrho w \frac{dw}{dz} + R_1 \varrho \frac{dT}{dz} + R_1 T \frac{d\varrho}{dz} = -g\varrho - g\Sigma, \quad (1.3)$$

in the domain $0 < z < \bar{z}_1$, $t \approx 0$, to model the motion of the air in a vertical cylinder of height $\bar{z}_1$, such that $\alpha(t)$ is a function of $t \approx 0$, while $\varrho = \varrho(t; z)$, $T = T(t; z)$, $w = w(t; z)$ are functions of $0 < z < \bar{z}_1$ which depend on the parameter $t \approx 0$, L_{tr} is the latent heat due to the phase transition of water from the gas state to the liquid or solid state, H_{tr} is the quantity of condensation defined by the relation

$$H_{tr} = \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \int w. \quad (1.4)$$

For the pressure p , we assumed that it is given by the law valid for a perfect gas

$$p = R_1 T \varrho.$$

The system of equations (1.1)–(1.3) must be considered with the boundary conditions

$$\varrho|_{z=0} = \varrho_0, \quad T|_{z=0} = T_0, \quad w|_{z=0} = 1. \quad (1.5)$$

In order that the problem is significant from the physical point of view, the values of ϱ_0 , T_0 , w_0 should not be arbitrary, but must correspond to the physical reality of the atmosphere, so that the solution represent a real evolution of the upward flow of the air: ϱ_0 and T_0 must be in the neighborhood of values

$$\varrho_0 \in 1204(g/m^3), \quad T_0 \in 300(^{\circ}K), \quad w_0 \in 1.$$

2. Semi-stationary problem – First approximation

We denote by φ the probability of permanence of droplets in the air, in the system of equations (1.1)–(1.3), we suppose $\alpha(t)$ and

$\Sigma = \frac{1}{\bar{z}_1} \int_0^{\bar{z}_1} \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}_1} \bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T) \int v dz ds$ are given, so that the equations (1.1)–(1.3) become stationary (in the previous writing t must be considered as a parameter).

Let us now introduce the first approximation. We suppose the following relations

$$\varrho_{hs}^{\leq} c_v \frac{dT_{hs}^{\leq}}{dz} - R_1 T_{hs}^{\leq} \frac{d\varrho_{hs}^{\leq}}{dz} = \left(R_1 T_{hs}^{\leq} + L_{tr} \int \right) \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^{\leq} - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}) \int, \quad (2.1)$$

$$R_1 \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^{\leq} T_{hs}^{\leq}) = g \varrho_{hs}^{\leq}, \quad (2.2)$$

where $(\varrho_{hs}^{\leq}(z), T_{hs}^{\leq}(z))$ are the hydrostatic distributions of the density and the temperature of humid air. Functions $(\varrho_{hs}^{\leq}(z), T_{hs}^{\leq}(z))$, with the initial conditions

$$\varrho_{hs}^{\leq}(0) = \varrho_0, \quad T_{hs}^{\leq}(0) = T_0,$$

is such that relations (2.1), (2.2) hold. The couple of functions $(\varrho_{hs}^{\leq}(z), T_{hs}^{\leq}(z))$ will be used as a first approximation of our solution.

3. Second approximation

Now we propose to construct the second approximation.

We suppose

$$h_{tr}^{\leq}(z) = \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}(z)) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^{\leq}(z) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}(z)). \quad (3.1)$$

Let us define the following relations

$$\frac{d}{dz} \log \tilde{U}(z) = \frac{h_{tr}^{\leq}}{\varrho_{hs}^{\leq}} \leq \tilde{f}_1, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{V}(z) = \alpha(t)^2 \tilde{U} \frac{d}{dz} \frac{\tilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}} - g \Sigma \leq \tilde{g}_1, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dz} \tilde{W}(z) = \frac{(R_1 T_{hs}^{\leq} + L_{tr})}{\varrho_{hs}^{\leq} T_{hs}^{\leq}} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^{\leq} - \frac{R_1}{\varrho} \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}) + \frac{d}{dz} \left(\frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^{\leq} T_{hs}^{\leq}} \int \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}) \right) \leq \tilde{h}_1, \quad (3.4)$$

where the functions $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W})$ with conditions

$$\tilde{U}(0) = \varrho_0, \quad \tilde{V}(0) = R_1 T_0 \varrho_0, \quad \tilde{W}(0) = \log \frac{T_0^{c_v}}{\varrho_0^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^{\leq}(0) T_{hs}^{\leq}(0)} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}(0)), \quad (3.5)$$

are such as relations (3.2)–(3.4) hold.

4. Main results

Lemma 4.1. *Let $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ and $\tilde{W}$ be the functions which satisfy equations (3.2)–(3.4) and conditions (3.5).*

Then there exist functions $(\tilde{\varrho}, \tilde{T}, \tilde{w})$ satisfying the relations

$$\tilde{U}(z) = \tilde{\varrho}(z) \tilde{w}(z), \quad \tilde{V}(z) = R_1 \tilde{\varrho}(z) \tilde{T}(z) + g \int_0^z \tilde{\varrho}(z') dz', \quad \tilde{W}(z) = \log \frac{\tilde{T}(z)^{c_v}}{\tilde{\varrho}(z)^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\varrho_{hs}^{\leq} T_{hs}^{\leq}} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^{\leq}). \quad (4.1)$$

And they are unique.

P r o o f. It follows from the third equation of (4.1) that

$$\widetilde{\varrho}(z) = e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} ,$$

substituting this equality in the second equation of (4.1), we have

$$\widetilde{V}(z) = R_1 e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} + g \int_0^z e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} dz.$$

By posing $\widetilde{y}(z) = e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz}$, we obtain

$$\frac{d}{dz} \widetilde{y}(z) = \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} \widetilde{y}(z)^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} + \frac{\widetilde{g}_1(z)}{R_1}, \quad \widetilde{y}(0) = \varrho_0 T_0,$$

or

$$\frac{d}{dz} \widetilde{y}(z)^{\frac{R_1}{R_1+c_v}} = \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} + \frac{\widetilde{g}_1(z)}{R_1 \widetilde{y}(z)^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}}, \quad \widetilde{y}(0) = \varrho_0 T_0. \quad (4.2)$$

We denote

$$\widetilde{Y} = \widetilde{y}^{\frac{R_1}{R_1+c_v}}, \quad \phi(\widetilde{Y}) = e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz},$$

according to the Taylor formula we have

$$\frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} = \phi(Y_0) + \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} (\widetilde{Y} - Y_0) + R(\widetilde{Y}).$$

We substitute in the equation (4.2) and obtain

$$\frac{d}{dz} \widetilde{Y} + \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} \widetilde{Y} = \frac{1}{R_1} \widetilde{g}_1 \widetilde{y}^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} + \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \phi(Y_0) + Y_0 \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} + R(\widetilde{Y}) \int, \\ \widetilde{Y}(0) = Y_0.$$

The solution of this Cauchy problem is defined by

$$\widetilde{Y}(z) = Y_0 e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} dz'} + \\ + \int_0^z \left(\frac{1}{R_1} \widetilde{g}_1 \widetilde{y}^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} + \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \phi(Y_0) + Y_0 \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} + R(\widetilde{Y}) \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz} \right) dz.$$

Found $\widetilde{Y}(z)$ the solution of the Cauchy problem (4.2), we can define immediately $\widetilde{T}$. Being constructed $\widetilde{T}$, we can define $\widetilde{\varrho}(\widetilde{T})$ as following

$$\widetilde{\varrho} = e^{\frac{\widetilde{W}(z)}{R_1}} \widetilde{T}(z) e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} \int \int^{c_v/R_1} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(\widetilde{T})}{(R_1+c_v)\widetilde{\varrho}T} dz}$$

and $\widetilde{w}(z)$ by the relation (4.1).

The functions $(\widetilde{\varrho}, \widetilde{T}, \widetilde{w})$ thus constructed will be used as the Second approximation.

5. Priori estimates

Let us define the family of distances

$$\kappa(\varphi_1, \varphi_2)(z) = \max_{0 \leq z' \leq z} \varphi_1(z^\natural) - \varphi_2(z^\natural), \quad \sup_{0 \leq z' \leq z} \left(\frac{d}{dz} \varphi_1(z^\natural) - \frac{d}{dz} \varphi_2(z^\natural) \right),$$

for $0 \leq z \leq z_1$, we denote

$$\kappa_{\widetilde{\varrho}}(z) = \kappa(\widetilde{\varrho}, \varrho_{hs}^{\leq})(z), \quad \kappa_{\widetilde{T}}(z) = \kappa(\widetilde{T}, T_{hs}^{\leq})(z), \quad \kappa_{\widetilde{w}}(z) = \kappa(\widetilde{w}, \frac{\widetilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}})(z),$$

$$A_\kappa(z) = \{(\varrho, T, w) / \kappa(\varrho, \widetilde{\varrho})(z^\natural) \geq \kappa_{\widetilde{\varrho}}(z^\natural), \kappa(T, \widetilde{T})(z^\natural) \geq \kappa_{\widetilde{T}}(z^\natural), \kappa(w, \widetilde{w})(z^\natural) \geq \kappa_{\widetilde{w}}(z^\natural)\}.$$

We suppose that, if $(\varrho, T, w) \in A_\kappa(z_1)$, we will have

$$\varrho(z) \approx \frac{1}{2} \widetilde{\varrho}(z) \quad T(z) \approx \frac{1}{2} \widetilde{T}(z) \quad w(z) \approx \frac{1}{2} \widetilde{w}(z) \quad \{z \in [0, z_1].$$

Hypothesis (a) On the interval $[0, z] \setminus [0, z_1]$, we suppose that the solution of the system of equations (1.1)–(1.3) with the initial conditions (1.5) belongs to $A_\kappa(z)$.

To show the existence and the uniqueness of the solution of the system of equations (1.1)–(1.3), we pose

$$U(z) = \varrho(z)w(z), \quad V(z) = R_1 \varrho(z)T(z) + g \int_0^z \varrho(z^\natural) dz^\natural, \quad W(z) = \log \frac{T(z)^{c_v}}{\varrho(z)^{R_1}} + \frac{L_{tr}}{\varrho T} \pi_{vs}(T).$$

we note that U, V, W verify the equations

$$\frac{d}{dz} (\log U - \log \widetilde{U}) = f_1 - \widetilde{f}_1,$$

$$\frac{d}{dz} (V - \widetilde{V}) = g_1 - \widetilde{g}_1,$$

$$\frac{d}{dz} (W - \widetilde{W}) = h_1 - \widetilde{h}_1,$$

where

$$\begin{aligned} f_1 &= -\pi_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \pi_{vs}(T) \int_0^1 \frac{1}{\varrho}, \quad g_1 = -\alpha^2 U \frac{dw}{dz} - g \Sigma \\ h_1 &= \frac{(R_1 T + L_{tr})}{\varrho T} \pi_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{R_1}{\varrho} \frac{d}{dz} \pi_{vs}(T) + \frac{d}{dz} \left(\frac{L_{tr}}{\varrho T} \int \pi_{vs}(T) \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

with the initial conditions

$$\log U(0) - \log \widetilde{U}(0) = 0, \quad V(0) - \widetilde{V}(0) = 0, \quad W(0) - \widetilde{W}(0) = 0,$$

where $\widetilde{f}_1, \widetilde{g}_1, \widetilde{h}_1$ are defined in (3.2)–(3.4).

For the functions $\varphi(\varrho, T, w)$ we will also use the notation

$$[\varphi]_\kappa(z) = \sup_{(\varrho, T, w) \in A_\kappa(z), z' \in [0, z]} \left(\varphi(\varrho, T, w)(z^\natural) - \varphi(\varrho, T, w)(z'^\natural) \right)$$

Lemma 5.1. Let $y(z) = e^{-W(z)/R_1 T(z)^{\frac{R_1+c_v}{R_1}}} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}(T)}{R_1 \varrho T}} \int$, assuming that (a) is verified we have

$$Y(z) - \widetilde{Y}(z) \geq \int_0^z M_Y(z') dz' \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{d}{dz} Y(z) - \frac{d}{dz} \widetilde{Y}(z) \right) \geq M_Y(z), \quad (5.3)$$

where

$$\begin{aligned} M_Y(z) = & \left(1 + \frac{\widetilde{g}_1}{y^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}(R_1+c_v)} - \frac{g}{R_1} e^{\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \right) \phi(Y_0) + \frac{d}{dY} \phi(\widetilde{Y}) \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} + R(\widetilde{Y}) \int \int \bigcirc \\ & \bigcirc \left(\frac{2Y_0 g}{R_1} e^{\frac{g}{R_1} \int_0^{z'} \frac{d\phi}{dY} \phi(Y) \Big|_{Y=Y_0} e^{\frac{-W}{(R_1+c_v)}} dz'} \right) \frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} \frac{2e^{\frac{-W}{(R_1+c_v)}}}{(R_1+c_v)} \int_0^{z'} (\varphi_h^T \kappa_{\widetilde{T}} + \varphi_h^\varrho \kappa_{\widetilde{\varrho}}) dz' \int + \\ & e^{\frac{-\widetilde{W}}{R_1+c_v}} \left(\frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} - \frac{d\phi}{d\widetilde{Y}} \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} \right) \int + e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} \frac{d\phi}{dY} \phi(Y) \Big|_{Y=Y_0} e^{\frac{-W}{(R_1+c_v)}} dz''} \bigcirc \\ & \bigcirc \left(\frac{c_v \widetilde{g}_1}{R_1+c_v} \right) \frac{1}{\varrho T} \left(\frac{c_v}{R_1+c_v} \right) \left[\frac{1}{\varrho} \kappa_{\widetilde{\varrho}} + \right] \frac{1}{T} \kappa_{\widetilde{T}} \int + \left[\frac{1}{\varrho T} \left(\frac{c_v}{R_1+c_v} \right) \phi_g^w \kappa_{\widetilde{w}} + \phi_g^\varrho \kappa_{\widetilde{\varrho}} \int \int + \right. \\ & \left. + \frac{g}{R_1} e^{\frac{-W}{(R_1+c_v)}} \right) Y_0 \left(\frac{d}{dY} \phi \Big|_{Y=Y_0} - \frac{d}{d\widetilde{Y}} \phi \Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} \right) + (R(Y) - R(\widetilde{Y})) \int + \\ & + (\phi(Y_0) + \frac{d\phi}{dY} \Big|_{Y=Y_0} Y_0 + R(\widetilde{Y})) \frac{2e^{\frac{-W}{(R_1+c_v)}}}{(R_1+c_v)} \int_0^{z'} (\varphi_h^T \kappa_{\widetilde{T}} + \varphi_h^\varrho \kappa_{\widetilde{\varrho}}) dz' \int \int, \end{aligned}$$

and $\phi_g^w, \phi_g^\varrho, \varphi_h^T, \varphi_h^\varrho, \widetilde{g}_1$ are defined as follows

$$g_1(z) - \widetilde{g}_1(z) \geq \Phi_g^w \kappa_{\widetilde{w}} + \Phi_g^\varrho \kappa_{\widetilde{\varrho}}, \quad (5.4)$$

where

$$\begin{aligned} \Phi_g^w = & 2\alpha^2 \varrho_{hs}^{\leq} \left[\frac{dw}{dz} \left(\kappa_{\widetilde{\kappa}} + 2\alpha^2 \widetilde{U}, \right. \right. \\ & \left. \left. \Phi_g^\varrho = 2\alpha^2 \right] \left[\frac{dw}{dz} \left([\widetilde{w}]_{\kappa}, \right. \right. \\ & \left. \left. \varphi_h^\varrho = \right] \frac{1}{\varrho} \left[\pi_{vs}(T) \right]_{\kappa} \right) R_1 + L_{tr} \left] \frac{1}{T} \int \right) \left[\frac{1}{\varrho} \right]_{\kappa} + \left(\frac{d\varrho_{hs}}{dz} \left[\frac{1}{\varrho} \kappa_{\widetilde{\varrho}}^{\leq} + \left(\frac{d\varrho_{hs}}{dz} \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \int + \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} & \left. + R_1 \right] \frac{d\pi_{vs}}{dT} \left[\frac{dT_{hs}}{dz} \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} + L_{tr} \pi_{vs}(\widetilde{T}) \right] \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varrho^2 T} \right) \Big|_{\kappa} \\ & \varphi_h^T = \left[\pi_{vs}(T) \right]_{\kappa} \frac{1}{\varrho_{hs}} \frac{d\varrho_{hs}}{dz} \left(\frac{R_1 [T]_{\kappa} + L_{tr}}{\widetilde{T} [\varrho T]_{\kappa}} + \frac{R_1}{\widetilde{\varrho T}} \int + L_{tr} \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{\widetilde{T} [\varrho T]_{\kappa}} \right) \int \right. \\ & \left. + \right] \frac{d}{dT} \pi_{vs}(T) \Big|_{\kappa} \left(R_1 + \frac{L_{tr}}{[T]_{\kappa}} \right) \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_{\kappa} \frac{d\varrho_{hs}}{dz} + \frac{R_1}{\widetilde{\varrho}} + L_{tr} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{T \varrho} \right) \right]_{\kappa} \int + \frac{1}{\widetilde{\varrho}} \left[\frac{dT}{dz} \right]_{\kappa} \left[\frac{d^2 \pi_{vs}}{dT^2} \right]_{\kappa}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

P r o o f. In a similar way to (4.2), we have

$$\frac{d}{dz}Y + \frac{g}{R_1}e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}}\frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0}Y = \frac{1}{R_1}g_1y^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} + \frac{g}{R_1}e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}}\Big)Y_0\frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0} + R(Y)\int_0^z Y(0) = Y_0.$$

The solution of this Cauchy problem is defined by

$$Y(z) = Y_0 e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0} dz'} + \int_0^z \left(\frac{1}{R_1} g_1 y^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} \right) Y_0 \frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0} + R(Y) \int_0^{z'} e^{\int_0^{z'} \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0} dz''} dz.$$

Hence we obtain

$$Y(z) - \widetilde{Y}(z) = Y_0 \left(e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0}} - e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{\widetilde{Y}=Y_0}} \right) + \int_0^z \left(e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{Y=Y_0}} - e^{\int_0^z \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} \frac{d\phi}{dY}\Big|_{\widetilde{Y}=Y_0}} \right) \frac{g_1}{R_1 y^{\frac{c_v}{R_1+c_v}}} - \frac{g}{R_1} e^{-\frac{W}{(R_1+c_v)}} (\phi(Y_0) + \frac{d}{dY}\phi\Big|_{Y=Y_0} Y_0 + R(Y)) + \frac{g}{R_1} e^{-\frac{\widetilde{W}}{(R_1+c_v)}} (\phi(\widetilde{Y}_0) + \frac{d}{dY}\phi\Big|_{\widetilde{Y}=Y_0} \widetilde{Y}_0 + R(\widetilde{Y})) \int_0^z dz.$$

From (3.3) we obtain (5.4).

On the other hand, taking into account the relations $h_{tr} \approx 0$, and (3.4) we obtain

$$e^{\frac{H_1(z')}{R_1+c_v}} - e^{\frac{\widetilde{H}_1(z')}{R_1+c_v}} \geq \frac{2 \exp \left(\frac{H_1}{R_1+c_v} \int_0^z (\varphi_h^0 \kappa_{\widetilde{\varrho}} + \varphi_h^T \kappa_{\widetilde{T}}) dz \right)}{R_1 + c_v}, \quad (5.8)$$

where

$$H_1(z) = \int_0^z h_1(z') dz, \quad \widetilde{H}_1(z) = \int_0^z \widetilde{h}_1(z') dz,$$

and φ_h^0, φ_h^T are defined by (5.5), (5.6).

By using $y(z) = \varrho(z)T(z)$, $\widetilde{y}(z) = \widetilde{\varrho}(z)\widetilde{T}(z)$, from (5.7), (5.4), (5.8) we obtain (5.2) and (5.3). $\square$

Lemma 5.2. *We suppose that hypothesis (a) is satisfied, then we have*

$$T - \widetilde{T} \geq \Psi_T^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \quad (5.9)$$

$$\frac{dT}{dz} - \frac{d\widetilde{T}}{dz} \geq \Psi_T^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \quad (5.10)$$

$$\varrho - \widetilde{\varrho} \geq \Psi_{\varrho}^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \quad (5.11)$$

$$\frac{d\varrho}{dz} - \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} \geq \Psi_{\varrho}^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z). \quad (5.12)$$

$$w(z) - \widetilde{w}(z) \geq \Psi_w^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z). \quad (5.13)$$

$$\frac{dw}{dz}(z) - \frac{d\widetilde{w}}{dz}(z) \geq \Psi_w^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z). \quad (5.14)$$

Where

$$\begin{aligned} \Psi_T^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= \frac{1}{\frac{d}{dT}(Z(T\preceq))} \int_0^z M_Y(z^\vartheta) dz^\vartheta. \\ \Psi_T^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= \frac{1}{(\frac{d}{dT}Z(T\preceq))^2} \frac{d}{dT}Z(T\preceq)M_Y(z) - \frac{d^2}{dT^2}Z(T\preceq) \int_0^z M_Y(z^\vartheta) dz^\vartheta \\ \Psi_\varrho^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= [\varrho T]_\kappa \frac{1}{\widetilde{T}[\widetilde{T}]_\kappa} \Psi_T^0 + \frac{R_1 + c_v}{R_1} \frac{1}{\widetilde{T}} [\varrho T]_\kappa^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \int_0^z M_Y(z^\vartheta) dz^\vartheta. \\ \Psi_\varrho^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{[\widetilde{T}]_\kappa} \right) \left([\kappa]_\kappa \Psi_T^0 + \frac{1}{[\widetilde{T}]_\kappa \widetilde{T}} \Psi_T^1 + \frac{R_1 + c_v}{R_1} \int_0^z M_Y(z^\vartheta) dz^\vartheta \right) \frac{d}{dz} \frac{1}{\widetilde{T}} [\varrho T]_\kappa^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\widetilde{T}} \frac{d}{dz} [\varrho T]_\kappa^{\frac{c_v}{R_1 + c_v}} \left[+ \frac{R_1 + c_v}{R_1} \frac{1}{\widetilde{T}} [\varrho T]_\kappa M_Y(z) \right] \right) \\ \Psi_w^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= \frac{e^{[F_1]_\kappa}}{\widetilde{\varrho}} \left[\frac{1}{\varrho} \Psi_\varrho^0(z) + 2e^{[F_1]_\kappa} \right] \frac{1}{\varrho} \bigcirc_0^z \varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^\varrho \kappa_\varrho [dz^\vartheta. \\ \Psi_w^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}}) &= \frac{1}{\widetilde{\varrho}[\varrho]_\kappa} [f_1]_\kappa + \frac{1}{\widetilde{\varrho}[\varrho^2]_\kappa} \left[\frac{d\varrho}{dz} \right]_\kappa + \frac{1}{\widetilde{\varrho}^2[\varrho]_\kappa} \left[\frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} \right]_\kappa [e^{[F_1]_\kappa} \Psi_\varrho^0 + \frac{e^{[F_1]_\kappa}}{\widetilde{\varrho}[\varrho]_\kappa} \Psi_\varrho^1 + \\ &\quad + 2e^{[F_1]_\kappa} \left(\frac{d}{dz} \frac{1}{[\varrho]_\kappa} \left[+ \frac{[f]_\kappa}{[\varrho]_\kappa} \right) \int_0^z (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^\varrho \kappa_\varrho) dz^\vartheta + \right] \frac{1}{\varrho} \big|_\kappa e^{\widetilde{F}_1} (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^\varrho \kappa_\varrho), \end{aligned}$$

such as $Z(T)$, $\varphi_{f_1}^T$, $\varphi_{f_1}^\varrho$ are defined as follows

$$Z(T) = T e^{\frac{L_{tr} \overline{\pi}_{vs}(T)}{(R_1 + c_v) \varrho T}},$$

$$\varphi_f^T = \left(2 \left[\frac{1}{\varrho^3} \right]_\kappa \left[\frac{d\varrho}{dz} \right]_\kappa + \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_\kappa \right) + \left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_\kappa \left[\frac{dT}{dz} \right]_\kappa \frac{d}{dT} \overline{\pi}_{vs}(T) \int_\kappa, \quad (5.15)$$

$$\varphi_f^\varrho = \left(\left[\frac{1}{\varrho^2} \right]_\kappa \left[\frac{d\varrho}{dz} \right]_\kappa + \left[\frac{1}{\varrho} \right]_\kappa \right) \frac{d}{dT} \overline{\pi}_{vs}(T) \int_\kappa + \left[\frac{1}{\varrho} \right]_\kappa + \left[\frac{dT}{dz} \right]_\kappa \frac{d^2}{dT^2} \overline{\pi}_{vs}(T) \int_\kappa. \quad (5.16)$$

P r o o f. We define the function

$$Z(T) = T e^{\frac{L_{tr} \overline{\pi}_{vs}(T)}{(R_1 + c_v) \varrho T}},$$

so we have

$$T = Z^{-1} (T e^{\frac{L_{tr} \overline{\pi}_{vs}(T)}{(R_1 + c_v) \varrho T}}), \quad (5.17)$$

Taking into account the relation (5.17), we have

$$T(z) - \widetilde{T}(z) = \frac{d}{dz} Z^{-1}(Z\preceq)(Y - \widetilde{Y}) = \frac{Y - \widetilde{Y}}{\frac{d}{dT} Z(T\preceq)},$$

with

$$\frac{d}{dT} Z(T) = e^{\frac{L_{tr} \overline{\pi}_{vs}}{(R_1 + c_v) \varrho T}} \left(1 + \frac{L_{tr} \frac{d\overline{\pi}_{vs}}{dT}}{(R_1 + c_v) \varrho} - \frac{L_{tr} \overline{\pi}_{vs}(T) \frac{dT}{dz}}{(R_1 + c_v) \varrho T} \right) \int.$$

Therefore, according to (5.2) we obtain (5.9).

In addition, we have

$$\frac{dT}{dz} = \frac{d\widetilde{T}}{dz} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dT}Z(T^{\leq})\right)^2} \frac{d}{dT}Z(T^{\leq})M_Y(z) = \frac{d^2}{dT^2}Z(T^{\leq}) \int_0^z M_Y(z^{\leq})dz^{\leq}.$$

Similarly to estimate (5.9), we obtain (5.10).

For estimation (5.11) we have

$$\varrho = e^{-w/R_1} \left(T e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}}{(R_1+c_v)\varrho T}} \right)^{\frac{c_v}{R_1}} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}}{(R_1+c_v)\varrho T}}.$$

With a simple calculation we obtain

$$\varrho = e^{-w/R_1} T^{\frac{R_1+c_v}{R_1}} e^{\frac{L_{tr}\pi_{vs}}{(R_1+c_v)\varrho T}} \frac{1}{T} = y \frac{1}{T},$$

so

$$\varrho = \widetilde{\varrho} = y \left(\frac{1}{T} = \frac{1}{\widetilde{T}} \right) + \frac{1}{T} (y - \widetilde{y}).$$

In addition we have

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dz} = \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\widetilde{T}} \right) (T - \widetilde{T}) + \frac{1}{T\widetilde{T}} \frac{d}{dz} (T - \widetilde{T}) + \\ &\frac{R_1 + c_v}{R_1} \frac{d}{dz} \frac{1}{\widetilde{T}} [[y]^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} (Y - \widetilde{Y}) + \frac{1}{\widetilde{T}} \frac{d}{dz} y^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} (Y - \widetilde{Y}) + [y]^{\frac{c_v}{R_1+c_v}} \frac{d}{dz} (Y - \widetilde{Y})] \int, \end{aligned}$$

and

$$(Y - \widetilde{Y}) = \frac{R_1}{R_1 + c_v} y^{\frac{-c_v}{R_1+c_v}} (y - \widetilde{y}). \quad (5.18)$$

From (5.18), (5.9), (5.10) we obtain (5.11), (5.12).

To obtain (5.13) and (5.14), we denote by:

$$F_1(z) = \int_0^z f_1(z^{\leq}) dz^{\leq} \quad \widetilde{F}_1(z) = \int_0^z \widetilde{f}_1(z^{\leq}) dz^{\leq}.$$

According to (3.2)–(4.1), we have

$$\begin{aligned} w(z) - \widetilde{w}(z) &= \frac{e^{F_1}}{\varrho \widetilde{\varrho}} (\widetilde{\varrho} - \varrho) + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} - e^{\widetilde{F}_1}) [\\ &\frac{dw}{dz} - \frac{d\widetilde{w}}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{F_1}}{\varrho \widetilde{\varrho}} \right) (\widetilde{\varrho} - \varrho) + \left(\frac{e^{F_1}}{\varrho \widetilde{\varrho}} \right) \frac{d}{dz} (\widetilde{\varrho} - \varrho) + \\ &+] e^{F_1} (\widetilde{\varrho} - \varrho) \left(\frac{f_1}{\varrho \widetilde{\varrho}} + \frac{d}{dz} \frac{1}{\varrho \widetilde{\varrho}} \right) + (e^{F_1} - e^{\widetilde{F}_1}) \frac{d}{dz} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} (e^{F_1} f_1 - e^{\widetilde{F}_1} \widetilde{f}_1) \end{aligned}$$

From (1.4), (3.1), (5.1), we have

$$F_1 - \widetilde{F}_1 = 2e^{[F_1]\kappa} \int_0^z (\varphi_f^T \kappa_T + \varphi_f^{\varrho} \kappa_{\varrho}) dz^{\leq},$$

where φ_f^T , φ_f^{ϱ} are defined in (5.15), (5.16).

Thus we find (5.13), (5.14). □

Theorem 5.1. Let $0 < z_1 < \overline{z}_1$. If there is $\overline{\varepsilon}_0$ such as $0 < \overline{\varepsilon}_0 < 1$ and the relations

$$\max(\Psi_{\varrho}^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \Psi_{\varrho}^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z)) \geq (1 - \overline{\varepsilon}_0)\kappa_{\widetilde{\varrho}}(z) \quad (5.19)$$

$$\max(\Psi_T^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \Psi_T^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z)) \geq (1 - \overline{\varepsilon}_0)\kappa_{\widetilde{T}}(z), \quad (5.20)$$

$$\max(\Psi_w^0(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z), \Psi_w^1(\kappa_{\widetilde{\varrho}}, \kappa_{\widetilde{T}}, \kappa_{\widetilde{w}})(z)) \geq (1 - \overline{\varepsilon}_0)\kappa_{\widetilde{w}}(z) \quad (5.21)$$

are verified for all $z \in [0, z_1]$, then there exists a unique solution for the system (1.1)–(1.3) with initial conditions (1.5) in $[0, z_1]$.

P r o o f. We consider the system for (ϱ, T, w) and $(\widetilde{\varrho}, \widetilde{T}, \widetilde{w})$ which is expressed by the system $(\varrho_{hs}^{\leq}, T_{hs}^{\leq}, \frac{\widetilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}})$ for $z = 0$. We have

$$\varrho(0) = \widetilde{\varrho}(0) = \varrho_{hs}^{\leq}(0) = \varrho_0, \quad T(0) = \widetilde{T}(0) = T_{hs}^{\leq}(0) = T_0, \quad w(0) = \widetilde{w}(0) = w_{hs}^{\leq}(0) = w_0, \quad (5.22)$$

(where $\varrho_{hs}^{\leq}(0) = \varrho_{hs}^{\leq}(z(0))$, $T_{hs}^{\leq}(0) = T_{hs}^{\leq}(z(0))$), using the expressions h_{tr} , g_1 , $\widetilde{g}_1$ in $z = 0$, we have

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d\varrho}{dz} + \varrho_0 \frac{dw}{dz} &= w_0 \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} + \varrho_0 \frac{d\widetilde{w}}{dz} = w_0 \frac{d\varrho_{hs}^{\leq}}{dz} + \varrho_0 \frac{d}{dz} \frac{\widetilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}} = w_0 h_{tr}(0) \\ R_1 T_0 \frac{d\varrho}{dz} + c_v \varrho_0 \frac{dT}{dz} &= R_1 T_0 \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} + c_v \varrho_0 \frac{d\widetilde{T}}{dz} = R_1 T_0 \frac{d\varrho_{hs}^{\leq}}{dz} + c_v \varrho_0 \frac{dT_{hs}^{\leq}}{dz} = (R_1 T_0 + L_{tr}) h_{tr}(0) \\ R_1 T_0 \frac{d\varrho}{dz} + R_1 \varrho_0 \frac{dT}{dz} &= R_1 T_0 \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} + R_1 \varrho_0 \frac{d\widetilde{T}}{dz} = g \varrho_0 + g_1(0) (= g \varrho_0 + \widetilde{g}_1(0)), \\ R_1 T_0 \frac{d\varrho_{hs}}{dz} + R_1 \varrho_0 \frac{dT_{hs}}{dz} &= g \varrho_0. \end{aligned}$$

After a simple calculation we obtain

$$\frac{d\varrho}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} \Big|_{z=0}, \quad \frac{dT}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\widetilde{T}}{dz} \Big|_{z=0}, \quad \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{d\widetilde{w}}{dz} \Big|_{z=0}. \quad (5.23)$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} w_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{\varrho} - \varrho_{hs}^{\leq}) \Big|_{z=0} + \varrho_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{w} - \frac{\widetilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}}) &= 0, \\ R_1 T_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{\varrho} - \varrho_{hs}^{\leq}) \Big|_{z=0} + c_v \varrho_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{T} - T_{hs}^{\leq}) \Big|_{z=0} &= 0, \\ R_1 T_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{\varrho} - \varrho_{hs}^{\leq}) \Big|_{z=0} + R_1 \varrho_0 \frac{d}{dz} (\widetilde{T} - T_{hs}^{\leq}) \Big|_{z=0} &= \widetilde{g}_1(0), \end{aligned}$$

by solving this system we obtain,

$$\begin{aligned} \frac{d\widetilde{\varrho}}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{d\varrho_{hs}^{\leq}}{dz} \Big|_{z=0} &= \frac{c_v \widetilde{g}_1(0)}{R_1 T_0 (R_1 + c_v)}, \quad \frac{d\widetilde{T}}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{dT_{hs}^{\leq}}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{\widetilde{g}_1(0)}{\varrho_0 (R_1 + c_v)}, \\ \frac{d\widetilde{w}}{dz} \Big|_{z=0} - \frac{d}{dz} \frac{\widetilde{U}}{\varrho_{hs}^{\leq}} \Big|_{z=0} &= \frac{c_v w_0 \widetilde{g}_1(0)}{R_1 \varrho_0 T_0 (R_1 + c_v)}. \end{aligned}$$

It is clear that $\tilde{g}_1 \not\equiv 0$, so from (5.22) and (5.23) it follows that there exists $z_\varepsilon > 0$ so that the hypothesis (a) is verified on the interval $[0, z_\varepsilon]$.

Therefore, according to Lemma 5.2 and relations (5.19)–(5.21) the solution (w, ϱ, T) can be extended until z_1 . Which proves Theorem 1.

The uniqueness of the solution results from the uniqueness of the local solution. $\square$

Corollary 5.1. *Let $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = \bar{z}_1$. We suppose that*

i) the relations (5.19)–(5.21) with initial conditions $\varrho_0 = \varrho(z_0), T_0 = T(z_0), w_0 = w(z_0)$ are verified for all $z \in [z_0, z_1]$,

ii) if $\varrho(z_i), T(z_i), w(z_i)$ are the values in $z = z_i$ of solution of system (1.1)–(1.3) in the interval $[z_{i-1}, z_i]$, relations (5.19)–(5.21) with initial conditions $\varrho_0 = \varrho(z_i), T_0 = T(z_i), w_0 = w(z_i)$ are verified for all $z \in [z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$.

Then there is a unique solution of system (1.1)–(1.3) with initial conditions (1.5) in $[0, \bar{z}_1]$.

P r o o f. By applying Theorem 5.1 successively on each subinterval $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$, there exists a unique solution of system (1.1)–(1.3) with initial conditions (1.5) in $[0, \bar{z}_1]$. $\square$

This corollary is a trivial consequence of Theorem 1, but in practice we are usually obliged to use it, because the interval of the existence of the solution that the theorem guarantees is often too small, while the actual solution exists in relatively longer interval.

REFERENCES

1. Ghomrani S., Marin Antuña J., Fujita Yashima H. Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cuba Fis.*, 2015, vol. 32, pp. 3-8.
2. Yashima H. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results of Science and Technology. A Series of Modern Mathematics and its Applications. Thematic Review], 2017, vol. 137, pp. 118-130. (In Russian).
3. Amann H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin, Walter de Gruyter, 1993. (English translation: Ordinary Differential Equations. Berlin, Walter de Gruyter, 2011).
4. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and cloud dynamics* (II ed.). New York, London, Academic Press, 2011.
5. Anthes R.A. The dynamics and energetics of mature tropical cyclones. *Rev. Geophys. Space Phys.*, no. 12 (1974), pp. 495-522.
6. Emanuel K.A. An air-sea interaction theory for tropical cyclones: Part I: Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.*, no. 43 (1986), pp. 585-604.
7. Khain A.P. Modelación matemática de los ciclones tropicales (en ruso). Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1984.

Received 12 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Sarra Ghomrani, Ecole Normale Supérieure Des Enseignants Messaoud Zeggar, Setif, Algeria, Doctor, e-mail: sarra.ghomrani@hotmail.fr

For citation: Ghomrani S. Study of the existence of the global solution to the system of equations of the vertical motion of the air in a chimney. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 583–594. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-583-594 (In Engl., Abstr. in Russian).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-583-594

УДК 517.911; 51-73

ИССЛЕДОВАНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ВЕРТИКАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЗДУХА В ДЫМОХОДЕ

С. Гомрани

Высший педагогический колледж им. Мессауд Зеггар

Алжир, г. Сетиф, 19000

E-mail: sarra.ghomrani@hotmail.fr

Аннотация. Рассматривается система уравнений, описывающая движение воздуха в дымоходе. Предлагается метод, основанный на «втором приближении».

Доказана теорема существования и единственности «глобального решения».

Ключевые слова: глобальное решение; движение воздуха

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ghomrani S., Marin Antuña J., Fujita Yashima H. Un modelo de la subida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo numérico. *Rev. Cuba Fis.*, 2015, vol. 32, pp. 3-8.
2. Yashima H. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* [Results of Science and Technology. A Series of Modern Mathematics and its Applications. Thematic Review], 2017, vol. 137, pp. 118-130. (In Russian).
3. Amann H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Berlin, Walter de Gruyter, 1993. (English translation: Ordinary Differential Equations. Berlin, Walter de Gruyter, 2011).
4. Cotton W., Bryan G., van den Heever S. *Storm and cloud dynamics* (II ed.). New York, London, Academic Press, 2011.
5. Anthes R.A. The dynamics and energetics of mature tropical cyclones. *Rev. Geophys. Space Phys.*, no. 12 (1974), pp. 495-522.
6. Emanuel K.A. An air-sea interaction theory for tropical cyclones: Part I: Steady-state maintenance. *J. Atmos. Sci.*, no. 43 (1986), pp. 585-604.
7. Khain A.P. Modelación matemática de los ciclones tropicales (en ruso). Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1984.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сарра Гомрани, Высший педагогический колледж им. Мессауд Зеггар, г. Сетиф, Алжир, e-mail: sarra.ghomrani@hotmail.fr

Для цитирования: Гомрани С. Изучения существования глобального решение системы уравнений вертикальной движение воздуха в дымоходе // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 583–594. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-583-594

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-595-604

NEW SUFFICIENT CONDITIONS IN THE GENERALIZED SPECTRUM APPROACH TO DEAL WITH SPECTRAL POLLUTION

✉ A. Khellaf

Université 8 Mai 1945, Guelma
B.P. 401 Guelma Algérie
E-mail: amarlasix@gmail.com

Abstract. In this work, we propose new sufficient conditions to solve the spectral pollution problem by using the generalized spectrum method. We give the theoretical foundation of the generalized spectral approach, as well as illustrate its effectiveness by numerical results.

Keywords: generalized spectrum, Schrödinger operator, eigenvalue approximation

Introduction

Spectral approximation for differential operators takes place in different applications in conjunction with the study of the mathematical modeling, as the case of Schrödinger operator in the quantum physics. Numerical discretization of these problems leads to spurious results, a phenomenon known as spectral pollution (see e.g. [1–5]). In this work, we establish new sufficient conditions to deal with the spectral pollution by using the generalized spectrum method. This method was introduced in [6], and recently was developed in [7].

Let T and S be two bounded operators defined on Banach space X , we define the generalized resolvent set by

$$re(T, S) = \{z \in \mathbb{C} : (T - zS) \text{ is bijective} \}.$$

The complementary of the generalized resolvent set is the generalized spectrum set, denoted by $sp(T, S)$. We say that λ is a generalized eigenvalue of (T, S) if there exists $u \in X \setminus \{0\}$ such that $Tu = \lambda Su$ (see [8]).

In [6], it is shown that the Schrödinger operator, say A , has a decomposition into two bounded operators, say T and S , that allows to express its spectrum in terms of generalized spectrum, i.e.

$$sp(A) = sp(T, S).$$

Through numerical approximation of the bounded operators T and S by sequences of bounded operators $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, we can prove that $\lim_{n \in \mathbb{N}} sp(T_n, S_n) = sp(T, S)$,

where the limit is defined to satisfy the property U: if $T_n \Rightarrow T$, $S_n \Rightarrow S$, $\lambda_n / sp(T_n, S_n)$ and $\lambda_n \Rightarrow \lambda$, then $\lambda / sp(T, S)$.

This propriety U is a natural extension of the classical case $S = I$ (see [9]).

In [6], the author showed that the Propriety U is valid under the norm convergence of $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to T and S . In this work, we show that under the collectively compact convergence of $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ to T and S , the propriety U also takes place. Finally, our numerical application (see [7]) shows the coherence and effectiveness of the generalized spectrum method in comparison with other methods.

1. Generalized spectral approximation under collectively compact convergence

In this section, we prove that the propriety U can be obtained under the collectively compact convergence. Let X be a Banach space, we denote by $BL(X)$ the space of bounded linear operators acting on X . Let T and S be two operators in $BL(X)$. We assume that there exist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $BL(X)$ such that

$$(B1) \quad T_n \xrightarrow{cc} T,$$

$$(B2) \quad S_n \xrightarrow{cc} S,$$

where $S_n \xrightarrow{cc} S$ stands for the collectively compact convergence, i.e. if the set

$$\bigcup_{n \geq n_0} \{S_n x : x \in X, \|x\|_X = 1\}$$

is relatively compact in X and for all $x \in X$, $S_n x \Rightarrow Sx$ pointwisely.

In what follows, the pointwise convergence will be denoted by $\xrightarrow{p} \odot$.

In this section, we state a set of lemmas which will be needed in the proofs of our main theorems.

Lemma 1.1. *If $T_n \xrightarrow{p} T$ and $S_n \xrightarrow{cc} S$, then for any bounded operator H in $BL(X)$,*

$$\|(T_n - T)H(S_n - S)\| \Rightarrow 0.$$

P r o o f. Since $T_n \xrightarrow{p} T$, and the set

$$H\left(\bigcup_{n \geq n_0} \{S_n x : \|x\| = 1\}\right),$$

has compact closure, then $\|(T_n - T)H(S_n - S)\| \Rightarrow 0$.

□

Lemma 1.2. *Let $T, \tilde{T}, S, \tilde{S} \in BL(X)$, and let $z \in re(T, S)$ be such that*

$$\left\| \left[\begin{pmatrix} T - \tilde{T} & z(S - \tilde{S}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T - zS \end{pmatrix}^{-1} \right]^2 \right\| < 1.$$

Then $z \in re(\tilde{T}, \tilde{S})$, and

$$\|(\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1}\| \geq \frac{\|(T - zS)^{-1}\| \left[1 + \left\| \begin{pmatrix} T - \tilde{T} & z(S - \tilde{S}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T - zS \end{pmatrix}^{-1} \right\| \right]}{1 - \left\| \begin{pmatrix} T - \tilde{T} & z(S - \tilde{S}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T - zS \end{pmatrix}^{-1} \right\|^2}.$$

P r o o f. We denote $\tilde{E} = (T - \tilde{T})(T - zS)^{-1}$, $\tilde{F} = (S - \tilde{S})(T - zS)^{-1}$, then

$$\tilde{T} - z\tilde{S} = [I - (\tilde{E} - z\tilde{F})](T - zS).$$

So, by using the second Neumann expansion (see, [9]), we obtain that

$$\begin{aligned} (\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1} &= (T - zS)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{E} - z\tilde{F})^{2k} \\ &\quad + (T - zS)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{E} - z\tilde{F})^{2k+1} \\ &= (T - zS)^{-1} \left[I + (\tilde{E} - z\tilde{F}) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\tilde{E} - z\tilde{F})^2 \right]^k. \\ \|(\tilde{T} - z\tilde{S})^{-1} \| &\geq \frac{\|(T - zS)^{-1}\| \left(1 - \| \tilde{E} - z\tilde{F} \|^2 \right)}{1 - \| (\tilde{E} - z\tilde{F})^2 \|}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.1. *If (B1) and (B2) are obtained, then for each $z \notin \text{re}(T, S)$, z belongs to $\text{re}(T_n, S_n)$ for big enough n .*

P r o o f. Let $z \notin \text{re}(T, S)$, for big enough n we consider

$$T_n - zS_n = [I - (\tilde{E}_n - z\tilde{F}_n)](T - zS),$$

where $\tilde{E}_n = (T - T_n)(T - zS)^{-1}$ and $\tilde{F}_n = (S - S_n)(T - zS)^{-1}$. Firstly, we have

$$(\tilde{E}_n - z\tilde{F}_n)^2 = (\tilde{E}_n)^2 + (z\tilde{F}_n)^2 - z\tilde{E}_n\tilde{F}_n - z\tilde{F}_n\tilde{E}_n.$$

So, according to lemma 1.1, we find $\|(\tilde{E}_n - z\tilde{F}_n)^2\| \Rightarrow 0$. Thus, by applying lemma 1.2, we obtain that $z \in \text{re}(T_n, S_n)$ for big enough n .

□

The following theorem shows that the property U is valid under the collectively compact convergence.

Theorem 1.1. *Under (B1) and (B2), if for each n big enough, $\lambda_n \notin \text{sp}(T_n, S_n)$ and $\lambda_n \Rightarrow \lambda$, then $\lambda \notin \text{sp}(T, S)$.*

P r o o f. Assume that $\lambda \notin \text{sp}(T, S)$, knowing that $\text{sp}(T, S)$ is closed (see e.g. [6]), there exists $r > 0$ such that the ball $B(\lambda, r)$ is contained in $\text{re}(T, S)$. Hence according to proposition 1.1, $B(\lambda, r)$ is contained also in $\text{re}(T_n, S_n)$ for n big enough. On the other hand, we have $\lambda_n \Rightarrow \lambda$. Thus there exists n_0 such that for any $n \in n_0$, $\lambda_n \notin B(\lambda, r) \rightarrow \text{re}(T_n, S_n)$ which forms the contradiction.

□

2. Numerical application

As an example, for which the numerical results are available by other approaches, we consider the following problem from [10], which is also studied in [1].

We consider the unbounded operator A defined in $L^2(0, +\infty)$ by the differential equation

$$u'' + x^2 u = 0, \quad u(0) = 0.$$

This is the harmonic oscillator problem with domain

$$D(A) = H^2(0, +\infty) \cap \left\{ u \in L^2(0, +\infty) : \int_0^{+\infty} x^2 |u|^p dx < +\infty \right\}.$$

First, according to the theory of pseudo spectrum for self-adjoint operators (see [6, 7, 11]) we can find

$$sp(A) = \bigcup_{a>0} sp(A_a), \quad (2.1)$$

where A_a is the Schrödinger operator which has the same formula as A in $L^2(0, a)$, but with the Dirichlet condition at the point a . The domain of A_a is given by

$$D(A_a) = H^2(0, a) \cap H_0^1(0, a).$$

Let $a > 0$, we denote by L_a the Laplacian operator defined on $L^2(0, a)$ by

$$L_a u = -u'', \quad D(L) = H^2(0, a) \cap H_0^1(0, a).$$

Proposition 2.2. L_a is invertible and its inverse is the bounded operator S_a defined by

$$S_a u(x) = \int_0^a G_{]0,a)}(x, y) u(y) dy, \quad u \in L^2(0, a),$$

where

$$G_{]0,a)}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(a-y)}{a} & 0 \leq x \leq y \leq a, \\ \frac{y(a-x)}{a} & 0 \leq y \leq x \leq a. \end{cases}$$

Proof. See [12].

□

Let T_a be the bounded operator defined on $L^2(0, a)$ to itself by

$$T_a u(x) = u(x) + \int_0^a G_{]0,a)}(x, y) y^2 u(y) dy, \quad x \in [0, a].$$

Theorem 2.2. $sp(A) = \bigcup_{a>0} sp(T_a, S_a),$

P r o o f. According to equality (2.1), we only need to show that $sp(A_a) = sp(T_a, S_a)$ for $a > 0$. Let λ be an eigenvalue of A_a with eigenvector $u \in D(A_a) \setminus \{0\}$, by applying S_a to $A_a u = \lambda u$ we get

$$T_a u = \lambda S_a u,$$

which implies that λ is a generalized eigenvalue of the couple (T_a, S_a) with eigenvector $u \in L^2(0, a) \setminus \{0\}$. Inversely, let λ be a generalized eigenvalue of the couple (T_a, S_a) with eigenvector $u \in L^2(0, a) \setminus \{0\}$, i.e. $T_a u = \lambda S_a u$, so

$$u = \lambda S_a u \quad S_a(vu) \propto u = S_a(\lambda u - vu),$$

where $v(x) = x^2$. Since $\lambda u - vu \in L^2(0, a)$, we find $u \in D(L_a) = D(A_a)$, then

$$u + S_a(vu) = \lambda S_a u \propto L_a u + vu = \lambda u.$$

□

Now, we use numerical methods to approach the operators T_a and S_a . We begin by the Nyström method then the Sloan method and the Kantorovich method.

1. Nyström method: We define a subdivision of $[0, a]$ for $n \in \mathbb{N}$ by

$$h_n = \frac{a}{n-1}, \quad x_i = (i-1)h_n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Let $T_{a,n}$ and $S_{a,n}$ be approximation of T_a and S_a respectively, according to the Nyström method (see [13]),

$$\begin{aligned} T_{a,n} u_n(x) &= u_n(x) + \sum_{i=1}^n w_i G_{\setminus 0,a}(x, x_i) x_i^2 u_n(x_i), \\ S_{a,n} u_n(x) &= \sum_{i=1}^n w_i G_{\setminus 0,a}(x, x_i) u_n(x_i), \end{aligned}$$

where $\{w_i\}_{i=1}^n$ are real weights such that $\sup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|w_i\| < \infty$.

Then, we get the matrix generalized eigenvalue problem, $A = \lambda_n B$ where

$$A(i, j) = I(i, j) + w_i G_{\setminus 0,a}(x_j, x_i) x_i^2, \quad B(i, j) = w_i G_{\setminus 0,a}(x_j, x_i),$$

$I_{n \geq n}$ represents the identity matrix. Finally, we use the function "eig" in Matlab to calculate the generalized eigenvalue of the couple (A, B) .

Note that in this case of using the Nyström method, the collectively compact convergence takes place (see [13]).

2. Sloan method: By using the previous subdivision of $[0, a]$, we define the approximate operators $\tilde{T}_{a,n}$ and $\tilde{S}_{a,n}$ of T_a and S_a respectively, by using the Sloan method (see [9]), i.e. for all $x \in [0, a]$,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{a,n}u_n(x) &= \sum_{i=1}^n u_n(x_i)e_i(x) + \sum_{i=1}^n w_{1,i}(x)u_n(x_i), \\ \tilde{S}_{a,n}u_n(x) &= \sum_{i=1}^n w_{2,i}(x)u_n(x_i),\end{aligned}$$

where

$$w_{1,i}(x) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x, y)y^2 e_i(y)dy, \quad w_{2,i}(x) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x, y)e_i(y)dy, \quad 1 \leq i \leq n,$$

and for $2 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned}e_i(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{\|x - x_i\|}{h_n}, & x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ e_1(x) &= \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_n}, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ e_n(x) &= \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}\end{aligned}$$

Then, we get the matrix generalized eigenvalue problem $\tilde{A} = \lambda_n \tilde{B}$, where

$$\tilde{A}(i, j) = I(i, j) + w_{1,i}(x_j), \quad \tilde{B}(i, j) = w_{2,i}(x_j).$$

Finally, we use the function "eig" in Matlab to calculate the generalized eigenvalue of the couple $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Note that on the case of the Sloan projection method, the collectively compact convergence also takes place (see [9]).

3. Kantorovich method: By using again the previous subdivision of $[0, a]$, we apply the Kantorovich projection method (see [9]), we get for all $x \in [0, a]$

$$u_n(x) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y)y^2 u_n(y)dy \right) e_i(x) = \lambda_n \sum_{i=1}^n \left(\int_0^a G_{\{0,a\}}(x_i, y)u_n(y)dy \right) e_i(x). \quad (2.2)$$

Multiplying first by $G_{\{0,a\}}(x_j, x)x^2$ then by $G_{\{0,a\}}(x_j, x)$ and integrating over $[0, a]$ the equation (2.2), this leads to the matrix generalized eigenvalue problem

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} + I_{n \geq n} & O_{n \geq n} \\ \tilde{B} & I_{n \geq n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \lambda_{2n} \begin{bmatrix} O_{n \geq n} & \tilde{A} \\ O_{n \geq n} & \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},$$

Table 1. The numerical results for $a=5$

Nystrom	Sloan	Kantorovich	results of [10]
2.9998027	3.0001972	3.0001972	2.9621125
6.9990159	7.0009887	7.0009887	6.8083144
10.9977898	11.0026039	11.0026039	10.5272610
15.0013776	15.0103317	15.0103317	14.1401140
19.0656824	19.0806050	19.0806050	17.8348945

where

$$\beta_1(j) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, y) y^2 u_n(y) dy, \quad \beta_2(j) = \int_0^a G_{\{0,a\}}(x_j, y) u_n(y) dy, \quad 1 \leq j \leq n,$$

and $(\tilde{A}, \tilde{B})$ are the same matrices presented in the Sloan method. Finally, we use again the function "eig" in Matlab to calculate the generalized eigenvalue of

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{A} + I_{n \geq n} & O_{n \geq n} \\ \tilde{B} & I_{n \geq n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O_{n \geq n} & \tilde{A} \\ O_{n \geq n} & \tilde{B} \end{bmatrix} \right)$$

In this case of the Kantorovich projection method, the norm convergence takes place (see [9]).

We fix $n = 200$ to approach the eigenvalues in our example by using the three numerical methods, we compare our results with those in [10]. Table (3.) shows the numerical results.

3. Conclusion

Our study shows the efficiency of the generalized spectrum method, from both theoretical and numerical points of view. This technique appears to be a computationally attractive tool for resolving the spectral pollution. We resolved it by treating the analytical question, to find the bounded operators T and S representing the spectrum proprieties of the Schrödinger operator in the theory of generalized spectrum.

As perspective, we will try to answer this question in more complicated case, for two dimensions and then for three dimensions, where the geometry of the domain and the boundary conditions, will form the main part of the problem. We will also try to generalize this method to other unbounded operators.

REFERENCES

1. Aslanyan A., Davies E.B. *Spectral instability for some Schrodinger operators*. arXiv:math/9810063v1 [math.SP].
2. Rappaz J., Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E., Vassiliev D. On spectral pollution in the finite element approximation of thin elastic 'membrane' shells. *Numer. Math.*, 1997, vol. 75, pp. 473-500.

3. Davies E.B. Spectral enclosures and complex resonances for general selfadjoint operators. *LMS J. Comput. Math.*, 1998, vol. 1, pp. 42-74.
4. Davies E.B., Plum M. *Spectral pollution*. arXiv:math/0302145v1., 2002.
5. Boffi D. et al. On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form. *Math. of Comp.*, 1999, vol. 69, pp. 121-140.
6. Guebbai H. Generalized spectrum approximation and numerical computation of eigenvalues for schrödinger's operators. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2013, vol. 34, pp. 45-60.
7. Ahues M., Largillier A., Limaye B.V. *Spectral Computations for Bounded Operators*. New York, Chapman and Hall/CRC, 2001.
8. Marletta M., Scheichl R. Eigenvalues in Spectral Gaps of Differential Operators. *J. Spectr. Theory*, 2012, vol. 2 (3), pp. 293-320.
9. Guebbai H., Largillier A. Spectra and Pseudospectra of Convection-Diffusion Operator In: Constanda C., Harris P. (eds.). *Integral Methods in Science and Engineering*. Boston, 2011.
10. Roach G.F. *Green's Functions*. New York, Cambridge University Press, 1982.
11. Atkinson K.E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge, Cambridge University Press, 1997.
12. Trefethen L.N. Pseudospectra of Linear Operators. *SIAM Review*, 1997, vol. 39, pp. 383.
13. Laub A.J. *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*. California, SIAM, 2005, 172 p.
14. Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A. *Classes of Linear Operators. Vol. I*. Basel, Springer, 1990.
15. Kato T. *Perturbation Theory of Linear Operators*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980.

Received 12 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Khellaf Ammar, University 8 Mai 1945, Guelma, Algérie, Post-Graduate Student, e-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

For citation: Khellaf A. New sufficient conditions in the generalized spectrum approach to deal with spectral pollution. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 595–604. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-595-604 (In Engl., Abstr. in Russian).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-595-604

УДК 517.984

НОВЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБОБЩЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ

А. Хеллаф

Университет 8 мая 1945

24000, г. Гельма, Алжир, В.Р. 401

E-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

Аннотация. В этой работе мы предлагаем новые достаточные условия для решения задачи спектрального загрязнения с использованием метода обобщенного спектра. Мы приводим теоретическую основу обобщенного спектрального подхода, а также иллюстрируем его эффективность на численных результатах.

Ключевые слова: обобщенный спектр; оператор Шрёдингера; аппроксимация собственных значений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aslanyan A., Davies E.B.* Spectral instability for some Schrodinger operators. arXiv:math/9810063v1 [math.SP].
2. *Rappaz J., Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E., Vassiliev D.* On spectral pollution in the finite element approximation of thin elastic 'membrane' shells // Numer. Math. 1997. vol. 75. P. 473-500.
3. *Davies E.B.* Spectral enclosures and complex resonances for general selfadjoint operators // LMS J. Comput. Math. 1998. Vol. 1. P. 42-74.
4. *Davies E.B., Plum M.* Spectral pollution. arXiv:math/0302145v1. 2002.
5. *Boffi D. et al.* On the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form // Math. of Comp. 1999. Vol. 69. P. 121-140.
6. *Guebbai H.* Generalized spectrum approximation and numerical computation of eigenvalues for schrödinger's operators // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2013. Vol. 34. P. 45-60.
7. *Ahues M., Largillier A., Limaye B.V.* Spectral Computations for Bounded Operators. N. Y.: Chapman and Hall/CRC, 2001.
8. *Marletta M., Scheichl R.* Eigenvalues in Spectral Gaps of Differential Operators // J. Spectr. Theory. 2012. Vol. 2 (3). P. 293-320.
9. *Guebbai H., Largillier A.* Spectra and Pseudospectra of Convection-Diffusion Operator // Integral Methods in Science and Engineering. Boston, 2011.
10. *Roach G.F.* Green's Functions. N. Y.: Cambridge University Press, 1982.
11. *Atkinson K.E.* The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind. Cambridge, Cambridge University Press, 1997.
12. *Trefethen L.N.* Pseudospectra of Linear Operators // SIAM Review. 1997. Vol. 39. P. 383.

13. *Laub A.J.* Matrix Analysis for Scientists and Engineers. California: SIAM, 2005. 172 p.
14. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M.A.* Classes of Linear Operators. Vol. I. Basel: Springer, 1990.
15. *Kato T.* Perturbation Theory of Linear Operators. Second edition. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1980.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Хеллаф Аммар, Университет 8 мая 1945, г. Гельма, Алжир, аспирант, кафедра математики,
e-mail: amarlasix@gmail.com; khellaf.ammar@univ-guelma.dz

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

✉ А. Л. Багно¹⁾, А. М. Тарасьев^{1,2)}

¹⁾ ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: bagno.alexander@gmail.com

²⁾ ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: tam@imm.uran.ru

Аннотация. Исследуется асимптотическое поведение функции цены в задаче управления на бесконечном горизонте с неограниченно растущем подынтегральном индексом, дисконтированном в целевом функционале. Задачи управления такого типа связаны с анализом трендов траекторий в моделях экономического роста. Получено выражение свойств стабильности функции цены в инфинитезимальной форме. Такое представление обеспечивает совпадение функции цены с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона–Якоби. Установлено, что краевое условие для функции цены подменяется свойством подлинейной асимптотики. Приводится пример, иллюстрирующий построение функции цены как обобщенного минимаксного решения в моделях экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление; функция цены; свойства стабильности; уравнения Гамильтона–Якоби; асимптотика; экономический рост

Введение

Условия стабильности играют ключевую роль в теории оптимального управления и теории дифференциальных игр. Они позволяют находить оптимальное управление по принципу обратной связи. Они также обеспечивают основу для разработки конечно-разностных операторов в сеточных методах аппроксимации функции цены [1].

Условия стабильности были введены Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным для теории дифференциальных игр [2] и обобщены в инфинитезимальной форме в теории

негладкого анализа (минимаксные решения, вязкостные решения) уравнений в частных производных типа Гамильтона–Якоби [3–7].

Статья посвящена изучению свойств стабильности в инфинитезимальной форме для функций цены в задачах оптимального управления на бесконечном горизонте [8]. В частности, исследуется задача оптимального управления с нелинейной динамикой и подынтегральным индексом качества, который представлен произведением дисконтирующего множителя и неограниченно растущей функции. Эта статья развивает исследование, начатое в работах А. Л. Багно, А. М. Тарасьева [9] и М. С. Никольского [10]. В этих статьях была показана непрерывность функции цены в задачах на бесконечном горизонте и получены оценки параметров непрерывности по Гельдеру.

Отметим, что аналогичные задачи рассматривались в статьях Р. А. Адиятулиной, А. М. Тарасьева [11], А. И. Субботина [3], И. Ц. Капуццо Дольчетта [12], Г. Клаассена, А. М. Тарасьева, А. М. Кряжмского [13], А. М. Тарасьева [14].

Следует отметить, что задачи оптимального управления [8] на бесконечном горизонте возникают в моделях экономического роста [15] и в задачах стабилизации движения как базовый элемент их анализа.

1. Динамика системы и функция цены

В статье изучается следующая нелинейная задача оптимального управления

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = 0, \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \rightarrow \mathbb{R}^p$ (P — компактное множество). Функционал качества задается соотношением

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \quad (2)$$

Предполагается, что выполняются следующие условия.

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.
2. Условие Липшица по аргументу x : для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и для любого $p \in P$

$$\begin{aligned} |f(x_1, p) - f(x_2, p)| &\leq L |x_1 - x_2|, \\ \|h(x_1, p) - h(x_2, p)\| &\leq L |x_1 - x_2| \end{aligned} \quad (3)$$

где L — константа Липшица.

3. Условие подлинейного роста по аргументу x : для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in P$

$$|f(x, p)| \leq \kappa(1 + |x|), \quad (4)$$

$$\|h(x, p)\| \leq \kappa(1 + |x|), \quad (5)$$

где κ — положительная константа.

Введем переменную

$$y = e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)).$$

Определим функцию цены согласно И. Ц. Капуццо Дольчетта [12]. Пусть $u(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на конечном интервале времени $[t_0, T]$. Определим U_T как множество управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0, T]$.

О п р е д е л е н и е 1. *Функцией цены в задаче с конечным горизонтом* для начальной точки (t_0, z_0) , где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, называется функция

$$w_T(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot) \in U_T} \left(y_0 + \int_{t_0}^T e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right),$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет динамике (1) на интервале $[t_0, T]$, $x(t_0) = x_0$.

В дополнение мы определим функцию цены в задаче с бесконечным горизонтом. Обозначим символом U множество всех измеримых по Лебегу программных управлений $u(\cdot)$ на бесконечном интервале $[t_0, +\infty)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной точки (t_0, z_0) , где $t_0 \in (0, T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$, называется функция

$$w(t_0, z_0) = \sup_{u(\cdot) \in U} \lim_{T' \rightarrow +\infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^{T'} e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right), \quad (6)$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет динамике (1) на интервале $[t_0, +\infty)$, $x(t_0) = x_0$.

Отметим, что

$$\begin{aligned} w_T(t_0, z_0) &= \inf_{u(\cdot) \in U_T} \left(y_0 + \int_{t_0}^T e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right) = \\ &= y_0 - \inf_{u(\cdot) \in U_T} \left(\int_{t_0}^T e^{\lambda \tau} (-h(x(\tau), u(\tau))) d\tau \right). \end{aligned}$$

Если мы определим функцию $g(x, u) = -h(x, u)$, $y = y_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, тогда мы сможем записать

$$w_T(t_0, z_0) = y_0 - \inf_{u(\cdot) \in U_T} \lim_{T' \rightarrow +\infty} \left(\int_{t_0}^{T'} e^{\lambda \tau} g(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right) = \omega_T(t_0, z_0)$$

и рассматривать функцию $\omega_T(t_0, z_0)$ как функцию цены. Функция h удовлетворяет условиям (3) и (5), и следующие соотношения эквивалентны

$$y = y_0 - \int_{t_0}^T e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau = e^{\lambda \tau} g(x(\tau), u(\tau))$$

для переменной y .

Введем для функции $w(t_0, z_0)$ ее аналог

$$\begin{aligned} w(t_0, z_0) &= \inf_{u(\cdot)} \lim_{T' \rightarrow +\infty} \left(y_0 \int_{t_0}^{T'} e^{\lambda \tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau \right) = \\ &= y_0 \inf_{u(\cdot)} \lim_{T' \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{T'} e^{\lambda \tau} (h(x(\tau), u(\tau))) d\tau = \omega(t_0, z_0). \end{aligned}$$

Наша задача — проанализировать свойства функции $\omega(t_0, z_0)$.

2. Условия стабильности для функции цены

Введем некоторые обозначения и определения. Пусть $t \in [0, +\infty)$, $u \in P$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $S = \{s \in \mathbb{R}^m : \sqrt{s} = 1\}$. Положим

$$F_1(t, x) = \text{co}\{f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u) : u \in P\},$$

$$F_2(t, x, u) = (f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)).$$

Здесь символом $\text{co}\{x : x \in X\}$ обозначена выпуклая оболочка X . Определим гамильтониан задачи оптимального управления соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u \in P} (s, f(x, u)) + g(x, u).$$

Обозначим символом $Z_1(t, z)$ множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих интервал $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду дифференциальному включению

$$\dot{z}(\tau) \in F_1(\tau, x(\tau)),$$

с начальным условием $z(t) = z_0$, где $\tau \in [t, +\infty]$. Обозначим символом $Z_2(t, z, u)$ множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих интервал $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду дифференциальному включению

$$\dot{z}(\tau) = F_2(\tau, x(\tau), u), \quad u \in P,$$

с начальным условием $z(t) = z_0$, где $\tau \in [t, +\infty]$.

Будем следовать терминологии монографии Н. Н. Красовского [2], где движения из множеств $Z_1(t, z)$, $Z_2(t, z, u)$ называются *обобщенными движениями*. Обобщенные движения удовлетворяют следующему условию.

Лемма 1. Пусть $t_0 \in [0, +\infty)$, $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, и движение $z(t) = (x(t), y(t))$, где $y(t) = e^{\lambda t} g(x(t), u(t))$, лежит в множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$. Тогда движение $z_-(t) = (x(t - t_0), e^{\lambda(t - t_0)} y(t - t_0) + y_0)$ тоже лежит в множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$, здесь $t \in [t_0, +\infty)$.

Теорема 1. Пусть $\lambda > \kappa$, тогда справедлива следующая оценка

$$\|\omega(t_0, z_0)\| \leq A + B \sqrt{x_0} \sqrt{y_0} \quad (7)$$

для функции цены задачи оптимального управления на бесконечном горизонте. Здесь $A = \|y_0\| + \frac{\kappa}{\lambda} e^{-\lambda t_0}$, $B = \frac{1}{\lambda - \kappa} e^{-\lambda t_0}$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

В статье [9] доказано, что функция цены $\omega(t, z)$ представима в виде

$$\omega(t, z) = y + e^{-\lambda t} \omega(0, x, 0).$$

Будем в дальнейшем рассматривать функцию $v(x) = \omega(0, (x, 0))$ и называть ее *стационарной функцией цены*.

Теорема 2. Пусть $\lambda > \kappa$, тогда функция $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является функцией цены задачи оптимального управления (1)–(2), тогда и только тогда, когда следующие условия верны:

1. функция φ непрерывна и ограничена

$$\|\varphi(x)\| \leq A + B \sqrt{x} \sqrt{y}$$

2. движения $z(t) = (x(t), y(t))$ из множества $Z_1(0, (x, 0))$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, удовлетворяют неравенству

$$e^{-\lambda t} \varphi(x(t)) + y(t) \leq \varphi(x) \quad (8)$$

для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$;

3. движения $z(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, из множества $Z_2(0, (x, 0), u)$, удовлетворяют неравенству

$$e^{-\lambda t} \varphi(x(t)) + y(t) \geq \varphi(x) \quad (9)$$

для всех $t \in [0, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Функция цены как минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

В этом разделе мы рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\varphi + \frac{1}{\lambda} \min_u (|\varphi, f(x, u)| + g(x, u)) = 0. \quad (10)$$

Введём некоторые обозначения и определения.

$$\begin{aligned} S &= \{s \in \mathbb{R}^n : \sqrt{s} = 1\}, \\ A(x) &= \{f \in \mathbb{R}^n : \sqrt{f} \leq \sqrt{2\kappa(1 + \sqrt{x})}\}, \\ A_u(x, q) &= \{f \in A(x) : |f, q| \geq H(x, q)\} \end{aligned}$$

$$A_l(x, p) = \{f \mid A(x) : |f, p| \leq H(x, p)\},$$

где $q, p \in \mathbb{R}^n$. Мы предполагаем, что условие $\lambda > \kappa$ выполняется. Обозначим символом $X_u(x, q)$ ($X_l(x, p)$) множество абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих дифференциальному включению для почти всех t

$$\dot{x}(t) \in A_u(x, q) \quad (\dot{x}(t) \in A_l(x, p)).$$

Верхнее решение уравнения (10) определяется как полунепрерывная снизу функция $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которой существует функция $z_u = (x_u(\cdot), y_u(\cdot)) \in X_u(x, q)$, удовлетворяющая условию (11) для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $q \in S$

$$e^{-\tau} \varphi(x_u(\tau)) + y_u(\tau) \leq \varphi(x). \quad (11)$$

Нижнее решение уравнения (10) определяется как полунепрерывная сверху функция $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которой существует функция $z_l = (x_l(\cdot), y_l(\cdot)) \in X_l(x, p)$, удовлетворяющая условию (12) для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $p \in S$

$$e^{-\tau} \varphi(x_l(\tau)) + y_l(\tau) \geq \varphi(x). \quad (12)$$

Непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая является верхним и нижним решением уравнения (10) одновременно, называется *минимаксным решением* уравнения.

Нижней (верхней) производной Дини по направлению d называется функция

$$\begin{aligned} \partial \omega(x) \llbracket d \rrbracket &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{(\delta, d') \in \Delta_\varepsilon(x, d)} \frac{\omega(x + \delta d') - \omega(x)}{\delta} \\ \partial_+ \omega(x) \llbracket d \rrbracket &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{(\delta, d') \in \Delta_\varepsilon(x, d)} \frac{\omega(x + \delta d') - \omega(x)}{\delta} \end{aligned}$$

где $\Delta_\varepsilon(x, d) = \{(\delta, d') \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}^n : |d - d'| \leq \varepsilon\}$.

Следующие два утверждения эквивалентны условиям стабильности (8), (9) [10].

Утверждение 1. Пусть φ — непрерывная функция. Тогда условия (8) и (9) эквивалентны условиям (13), (14):

$$\min_{d=(d_1, d_2) \in A_u(x, q)} \{d_2 + \partial \varphi(x) \llbracket d_1 \rrbracket\} \leq \varphi(x) \leq 0, \quad (13)$$

$$\max_{d=(d_1, d_2) \in A_l(x, p)} \{d_2 + \partial_+ \varphi(x) \llbracket d_1 \rrbracket\} \geq \varphi(x) \geq 0. \quad (14)$$

Утверждение 2. Пусть φ — непрерывная функция. Тогда условия (13), (14) эквивалентны условиям (15), (16):

$$\sup_{d \in \mathbb{R}} \{s, d \mid \partial \varphi(x) \llbracket d \rrbracket \geq \varphi(x) + H(x, s)\}, \quad (15)$$

$$\inf_{d \in \mathbb{R}} \{s, d \mid \partial_+ \varphi(x) \llbracket d \rrbracket \leq \varphi(x) + H(x, s)\}. \quad (16)$$

Лемма 2. Любое нижнее решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям подлинейного роста (4), (5), не превосходит любого верхнего решения:

$$\varphi_u(x) \geq \varphi_l(x).$$

Теорема 3. Пусть минимаксное решение уравнения (10) удовлетворяет условию подлинейного роста (7). Тогда это решение единственно.

Используя результаты теории минимаксных решений [3], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Стационарная функция цены v задачи (1), (2) является минимаксным решением уравнения (10)

$$\varphi + \frac{1}{\lambda} \min_u (|\varphi, f(x, u)| + g(x, u)) = 0,$$

когда удовлетворяет условию подлинейного роста (7).

Пример 1. Пример построения функции цены. Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\frac{\dot{x}(\tau)}{x(\tau)} = f(\tau) - g(\tau) \frac{u(\tau)}{x(\tau)}, \quad x(t_0) = x_0. \quad (17)$$

Эта модель включает производство $x = x(\tau)$, темп роста производства $\frac{\dot{x}}{x}$, уровень технологий $u = u(\tau)$ и функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, которые зависят от производственных факторов: труда, капитала, материалов и энергии. Функция $g(\tau) = p(\tau) - q(\tau)$ описывает сетевой эффект инвестиций в новые технологии как разность между текущими инвестициями $p(\tau)$ и краткосрочной отдачей от инвестиций $q(\tau)$. Мы будем рассматривать уравнение (17) как уравнение баланса расходуемых ресурсов между уровнем производства $\frac{\dot{x}}{x}$ и интенсивностью инвестиций $\frac{\dot{u}}{u}$. Отрицательный знак $(-g(\tau))$ сетевого эффекта инвестиций означает, что в краткосрочной перспективе эффект инвестиций $p(\tau)$ может превышать краткосрочную отдачу $q(\tau)$ от инвестиций. Уровень инвестиций u является управляющим параметром.

Введём функционал качества, представленный интегралом с дисконтирующим множителем λ

$$U = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda(\tau - t_0)} \ln D(\tau) d\tau. \quad (18)$$

Здесь $\ln D(\tau) = (\ln x(\tau) + A \ln u(\tau))$, $A = (1 - \alpha)/\alpha$. Индекс потребления $D(\tau)$ включает в себя уровень производимой продукции $\ln x(\tau)$ и отдачу от инвестиций в долгосрочной перспективе $\ln u(\tau)$. Параметр α устанавливает значение коэффициента эластичности ($0 < \alpha < 1$). Здесь t_0 — начальный момент времени и τ — текущий момент времени.

Структура функционала качества (18) означает, что инвесторов интересует как рост индекса производства $\ln x$, так и рост индекса новых инновационных продуктов $A \ln u$

в долгосрочной перспективе, который обеспечивается уровнем инвестиций в новые технологии u .

Задача состоит в нахождении такой инвестиционной стратегии $u^0(\tau)$ и соответствующей оптимальной траектории роста производства $x^0(\tau)$, которые удовлетворяют динамике (17) и максимизируют функционал качества (18).

Применяя принцип максимума Понтрягина к задаче управления (17), (18) и предполагая, что функция $f(\tau)$ является неубывающей и удовлетворяющей условию $f(\tau) - (1 - \alpha)\lambda \leq 0$, мы получим оптимальное решение с экспоненциально растущим производством x

$$x(\tau) = x_0 e^{Q(\tau)}, \quad x_0 = x(t_0),$$

где

$$Q(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} (f(s) - (1 - \alpha)\lambda) ds.$$

Кроме того, выводится соотношение для оптимальной стратегии инвестиций $u = u^0$ по принципу обратной связи как функции текущего состояния производства x

$$u(\tau) = \frac{(1 - \alpha)\lambda}{g(\tau)} x(\tau).$$

Это уравнение означает, что оптимальные инвестиции в новые технологии u увеличиваются пропорционально росту производства x с коэффициентом пропорциональности $(1 - \alpha)\lambda/g(\tau)$. Для интенсивности развития u/x мы имеем следующую формулу

$$\frac{u(\tau)}{x(\tau)} = \frac{(1 - \alpha)\lambda}{g(\tau)},$$

которая описывает зависимость оптимальной интенсивности исследований от параметра эластичности α , дисконтирующего параметра λ и предельной производительности технологий $(g(\tau))$. Отметим, что когда стоимость $p(\tau)$ для поддержания накопленных инвестиций в новые технологии высока, интенсивность исследований u/x низка. С другой стороны, увеличение уровня отдачи от инвестиций $q(\tau)$ приводит к росту интенсивности исследований u/x . Предполагая, что положительнозначная функция $g(\tau)$ не убывает в течение времени τ , мы получим свойство роста интенсивности развития u/x .

Наконец, мы рассмотрим функцию цены $(t, y) \propto \varphi(t, y)$, которая определяет оптимальный результат φ функционала качества (18) вдоль оптимального процесса $(x^0(\tau), u^0(\tau))$ с динамикой (17) и начальной позицией (t, y) , $t = t_0$, $y = x_0$.

Посчитаем функцию цены в нашем примере как минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

$$\left\{ \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} f(t)y + e^{-\lambda t} \ln y + \max_u \right\} - \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} g(t)u + e^{-\lambda t} A \ln u = 0. \quad (19)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, для уравнения в частных производных типа Гамильтона–Якоби (19), мы получим аналитическую формулу для минимаксного решения, которое совпадает с функцией цены

$$\varphi(t, y) = e^{-\lambda t} \mu(y) + \nu(t) \quad (20)$$

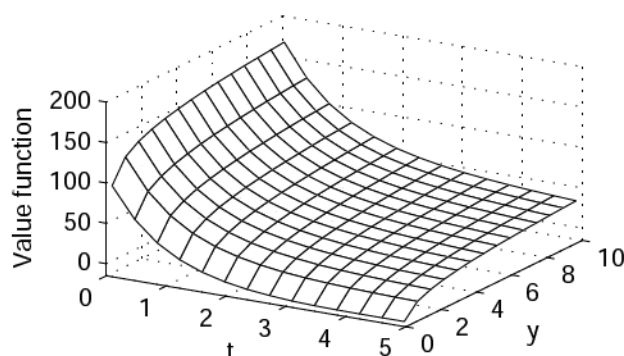


Рис. 1: Функция цены для $f(\tau) = e^{-\tau}$, $g(\tau) = 1/(1 + 0.5e^{-\tau+5})$, $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.1$

$$\mu(y) = \frac{(A+1)}{\lambda} \ln y, \quad \nu(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\lambda(\tau-t)} h(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Здесь

$$h(\tau) = A \ln g(\tau) - \frac{A+1}{\lambda} f(\tau) - A(\ln(1-\alpha) - \ln \lambda - 1). \quad (22)$$

В частности, если h — константа, $h(\tau) \geq h$, то ν также константа, определяемая формулой $\nu = h/\lambda$.

Для примера, посчитаем функцию цены, когда $f(\tau) = e^{-\tau}$, $g(\tau) = 1/(1 + 0.5e^{-\tau+5})$, $\alpha = 0.5$, $\lambda = 0.1$. Функции $h(\tau)$, $\mu(y)$, $\nu(t)$ (21, 22) определены в этом случае

$$h(\tau) = \ln \left(\frac{1}{1 + 0.5e^{-\tau+5}} \right) \left(\frac{4}{3}e^{-\tau} - 2.099 \right), \quad \mu(y) = \frac{4}{3} \ln(y), \quad \nu(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\lambda(\tau-t)} h(\tau) d\tau.$$

График функции цены представлен на рис. 1.

Отметим, что в рассматриваемой модели оптимальный результат обладает свойством разложения. А именно, первое слагаемое μ зависит только от дисконтирующего параметра λ , параметра эластичности α в функционале качества (18), и от начального производства y , и не зависит от особенностей функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ в динамической системе (17). Второе слагаемое ν определяется главным образом динамикой (17), представленной функцией $h(\tau)$ (22) и не зависит от начального уровня производства y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.

4. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.* Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Доклады Академии наук СССР. 1985. Т. 283. № 3. С. 559-564.
5. *Субботина Н.Н., Колпакова Е.А., Токманцев Т.Б., Шагалова Л.Г.* Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана. Екатеринбург: УрО РАН, 2013. 244 с.
6. *Султанова Р.А.* Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1995. 192 с.
7. *Crandall M.G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. № 1. P. 1-42.
8. *Асеев С.М., Кряжиский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального роста // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 2007. Т. 257. С. 5-271.
9. *Багно А.Л., Тарасьев А.М.* Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 1. С. 3-14.
10. *Никольский М.С.* О локальной липшицевости функции Беллмана в одной оптимизационной задаче // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2004. Т. 10. № 2. С. 106-115.
11. *Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.* Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 531-537.
12. *Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H.* Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11. № 2. P. 161-181.
13. *Klaassen G., Tarasyev A.M., Kryazhinskiy A.V.* Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects // Journal of Optimization Theory and Applications. 2004. Vol. 120. № 1. P. 147-179.
14. *Tarasyev A.M.* Control synthesis in grid schemes for Hamilton–Jacobi equations // Annals of Operations Research. 1999. Vol. 88. P. 337-359.
15. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория; пер. с англ. Г.И. Жуковой, Ф.Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.

Поступила в редакцию 9 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 17 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Багно Александр Леонидович, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики, e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Тарасьев Александр Михайлович, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. отделом динамических систем, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор, e-mail: tam@imm.uran.ru

Для цитирования: Багно А.Л., Тарасьев А.М. Асимптотика функции цены в моделях экономического роста // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 605–616. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616

ASYMPTOTICS OF VALUE FUNCTION
IN MODELS OF ECONOMIC GROWTHA. L. Bagno¹⁾, A. M. Tarasyev^{1,2)}¹⁾ Ural Federal University,

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

E-mail: bagno.alexander@gmail.com

²⁾ Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation

E-mail: tam@imm.uran.ru

Abstract. Asymptotic behavior of the value function is studied in an infinite horizon optimal control problem with an unlimited integrand index discounted in the objective functional. Optimal control problems of such type are related to analysis of trends of trajectories in models of economic growth. Stability properties of the value function are expressed in the infinitesimal form. Such representation implies that the value function coincides with the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi equation. It is shown that the boundary condition for the value function is substituted by the property of the sublinear asymptotic behavior. An example is given to illustrate construction of the value function as the generalized minimax solution in economic growth models.

Keywords: optimal control; value function; stability properties; Hamilton–Jacobi equations; asymptotics; economic growth

REFERENCES

1. Tarasyev A.M., Uspenskiy A.A., Ushakov V.N. *Approximatsionnyye skhemy i konechno-raznostnyye operatory dlya postroyeniya obobshchennykh resheniy uravneniy Gamil'tona–Yakobi* [Approximate schemes and finite-difference operators for construction of the generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1994, no. 3, pp. 173–185. (In Russian).
2. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).
3. Subbotin A.I. *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p. (In Russian).
4. Subbotin A.I., Tarasyev A.M. *Sopryazhennyye proizvodnyye funktsii tseny differentsial'noy igry* [Conjugate derivatives of the value function of a differential game]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1985, vol. 283, no. 3, pp. 559–564. (In Russian).
5. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi–Bellmana* [The Method of Characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman Equation]. Ekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 2013, 244 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Program of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project № 18-1-10).

6. Sultanova R.A. *Minimaksnyye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Minimax Equations Solutions with Partial Derivative. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Ekaterinburg, 1995, 192 p. (In Russian).
7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1-42.
8. Aseyev S.M., Kryazhimskiy A.V. Printsip maksimuma Pontryagina i zadachi optimal'nogo rosta [The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2007, vol. 257, pp. 5-271. (In Russian).
9. Bagno A.L., Tarasyev A.M. Svoystva funktsii tseny v zadachakh optimal'nogo upravleniya s beskonechnym gorizontom [Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3-14. (In Russian).
10. Nikolskii M.S. O lokal'noy lipshitsevesti funktsii Bellmana v odnoy optimizatsionnoy zadache [On the local Lipschitz property of the Bellman function in an optimization problem]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2004, vol. 10, no. 2, pp. 106-115. (In Russian).
11. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M. Differentsial'naya igra neogranichennoy prodolzhitel'nosti [A differential game of unlimited duration]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 531-537. (In Russian).
12. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz.*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161-181.
13. Klaassen G., Tarasyev A.M., Kryazhimskii A.V. Multiequilibrium game of timing and competition of gas pipeline projects. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, vol. 120, no. 1, pp. 147-179.
14. Tarasyev A.M. Control synthesis in grid schemes for Hamilton–Jacobi equations. *Annals of Operations Research*, 1999, vol. 88, pp. 337-359.
15. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Philadelphia, SIAM, 2002. 529 p.

Received 9 April 2018

Reviewed 17 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Bagno Alexander Leonidovich, Ural Federal University named after B.N. Eltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Tarasyev Alexander Mikhailovich, Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Science Academy, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of the Physics and Mathematics, Ural Federal University named after B.N. Eltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, professor, e-mail: tam@imm.uran.ru

For citation: Bagno A.L., Tarasyev A.M. Asymptotika funktsii tseny v modelyakh ekonomicheskogo rosta [Asymptotics of Value Function in Models of Economic Growth]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 605–616. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-605-616 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623

УДК 517.988.8

СХОДИМОСТЬ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

✉ А. С. Бондарев

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается абстрактное линейное параболическое уравнение с периодическим условием на решение. Данная задача решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера. По пространству дискретизация задачи проводится методом Галеркина. Получены эффективные по времени и по пространству оценки в сильных нормах погрешности приближенных решений, из которых следует сходимость приближенных решений к точному, а также порядки скорости сходимости, зависящие от гладкости точного решения.

Ключевые слова: гильбертово пространство; параболическое уравнение; гладкая разрешимость; периодическое условие; неявная схема Эйлера

Введение

В настоящей работе решение параболического уравнения с периодическим условием на решение находится полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием метода Галеркина по пространству и неявной схемы Эйлера по времени. Заметим, что энергетические оценки погрешности данного метода в условиях слабой разрешимости задачи были установлены в работе [1]. В настоящей работе представлены оценки в сильных нормах погрешности приближенного решения при более жестких ограничениях в предположениях гладкой разрешимости исходной задачи.

Отметим, что в случае, когда параболическое уравнение рассматривается с начальным условием (задача Коши), оценки в сильных нормах погрешности для проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени установлены в работе [2].

1. Основные понятия

Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \rightarrow H \rightarrow V$, где пространство V – двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u, v)$. Пусть для $u, v \in V$

$$\|a(u, v)\| \geq \mu \|u\| \|v\|, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \leq \alpha \|u\|^2, \quad (1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \rightarrow V$, такой, что $(Au, v) = a(u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z, v) – скалярное произведение в H [3, гл. 2].

Для нормированного пространства X далее будем обозначать через $C([0, T], X)$ пространство непрерывных функций, действующих на отрезке $[0, T]$, со значениями в пространстве X ; через $L_p(0, T; X)$ – пространство измеримых на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в X , суммируемых с p -й степенью по норме пространства X .

Рассмотрим в V на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (2)$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщенном смысле. В [4, с. 289] показано, что для заданного $f \in L_2(0, T; V)$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u \in L_2(0, T; V)$ задачи (2).

Далее будем считать, что выполнены условия гладкой разрешимости, то есть справедлива следующая теорема [5].

Теорема 1. Пусть вложение $V \rightarrow H$ компактно, а форма $a(u, v)$ удовлетворяет требованиям (1). Пусть функция $t \in f(t) \in V$ дифференцируема, $f \in L_2(0, T; V)$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда решение задачи (2) будет таким, что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u \in L_2(0, T; V)$.

Пусть V_h , где h – положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V . Определим пространство V_h , задав на элементах $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup \|(u_h, v_h)\|$ где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\| = 1$. Отметим, что $\|u_h\|_{V_h'} \geq \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h . Как замечено в [6], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P}_h : V \rightarrow V_h$, причем для $u \in V$ справедливо $\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \geq \|u\|_{V'}$.

Для построения приближенных решений возьмем равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \rightarrow V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k = \overline{1, N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A u_k^h = \overline{P}_h f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h, \quad (3)$$

где $\tau N = T, t_k = k\tau$.

Таким образом, процесс нахождения приближенного решения задачи (2) сводится к нахождению решения конечной линейной алгебраической системы уравнений (3), однозначная разрешимость которой установлена в [1].

Далее будем предполагать, что форма $a(u, v)$ является симметричной, то есть $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряженному числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V \mid (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Из (1) следует, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны, то есть

$$\alpha^{1/2} \|u\|_V \geq \|u\|_{V(A)} \geq \mu^{1/2} \|u\|_V \quad (u \in V).$$

Лемма 1. Для $u \in V$ справедлива оценка

$$\|(I - Q_h(A))u\|_V \geq \alpha^{1/2} \|(I - Q_h(A))u\|_{V(A)} \geq \alpha^{1/2} \mu^{1/2} \|(I - Q_h)u\|_V,$$

где $Q_h(A)$ – ортопроектор в $V(A)$ на V_h , а Q_h – ортопроектор в V на V_h .

2. Основные результаты

Теорема 2. Пусть для задачи (2) выполнены условия теоремы 1 и форма $a(u, v)$ симметрична. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), обладающее дополнительной гладкостью $u \in L_p(0, T; H)$, где $1 \leq p \leq 2$, а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (3). Тогда справедлива оценка погрешности

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau + \\ & \sum_{k=1}^N \left\| u(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \geq C \left\{ \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + \right. \\ & \left. \int_0^T \|(I - Q_h(A))u(t)\|_H^2 dt + \max_{0 \leq t \leq T} \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сходимость погрешности приближенных решений к нулю естественным образом следует из оценки (4). Предположим для этого, что задана предельно плотная в V при $h \rightarrow 0$ последовательность подпространств $\{V_h\}$. Это означает, что $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ для любого $v \in V$. Тогда при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau + \\ & \sum_{k=1}^N \left\| u(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \rightarrow 0. \end{aligned}$$

В случае, когда известна числовая характеристика предельной плотности последовательности подпространств $\{V_h\}$, оценка (4) позволяет получить скорость сходимости и по пространственным переменным. Для этого введем в рассмотрение множество $D(A) = \{u \in V : Au \in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A) \rightarrow E \rightarrow V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E \geq \delta \|Av\|_H \quad (v \in D(A)), \quad (5)$$

где $\delta > 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассмотрим пространства: $H = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\leq}{W}_2^1(\Omega)$, $V' = W_2^{-1}(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\leq}{W}_2^1(\Omega)$ [4, с. 275]. Если же на границе области Ω задается условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega)$, $V = W_2^1(\Omega)$, $E = W_2^2(\Omega)$ [4, с. 276].

Пусть подпространства V_h обладают следующим аппроксимационным свойством, типичным для подпространств типа конечных элементов (напр., [7, с. 143-144])

$$(I - Q_h)v|_V \geq rh \|v\|_E \quad (v \in E), \quad (6)$$

где константа $r > 0$ не зависит от v и h .

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть также выполнено условие (5) и решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u \in C([0, T], E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (6). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 &+ \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(t) dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau + \\ \sum_{k=1}^N \left\| u(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau &\geq C \left\{ \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + \right. \\ &\left. h^2 \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt + \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_E^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарев А.С., Смагин В.В. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 2. С. 81-94.
2. Смагин В.В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения абстрактного параболического уравнения // Математические заметки. 1997. Т. 62. № 6. С. 898-909.
3. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.
4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

5. *Бондарев А.С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 4. С. 78-88.

6. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и скорости сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269-1277.

7. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Бондарев Андрей Сергеевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: bondarev@math.vsu.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623

THE STRONG-NORM CONVERGENCE OF A PROJECTION-DIFFERENCE METHOD OF SOLUTION OF A PARABOLIC EQUATION WITH THE PERIODIC CONDITION ON THE SOLUTION

A. S. Bondarev

Voronezh State University
1 Universitetskaya St., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: bondarev@math.vsu.ru

Abstract. A smooth soluble abstract linear parabolic equation with the periodic condition on the solution is treated in a separable Hilbert space. This problem is solved approximately by a projection-difference method using the Galerkin method in space and the implicit Euler scheme in time. Effective both in time and in space strong-norm error estimates for approximate solutions, which imply convergence of approximate solutions to the exact solution and order of convergence rate depending of the smoothness of the exact solution, are obtained.

Keywords: Hilbert space; parabolic equation; smooth solvability; periodic condition; implicit Euler method

REFERENCES

1. Bondarev A.S., Smagin V.V. Skhodimost' proyeksionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviyem na resheniye [The convergence of projection-difference method of approximate solution of parabolic equation with a periodic condition on the solution]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 81-94. (In Russian).
2. Smagin V.V. Otsenki v sil'nykh normakh pogreshnosti proyeksionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya abstraktnogo parabolicheskogo uravneniya [Strong-norm error estimates for the projective-difference method for approximately solving abstract parabolic equations]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1997, vol. 62, no. 6, pp. 898-909. (In Russian).
3. Aubin J.-P. *Priblizhennoye resheniye ellipticheskikh krayevykh zadach* [Approximate Solution of the Elliptic Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 384 p. (In Russian).
4. Lions J.-L., Magenes E'. *Neodnorodnyye granichnyye zadachi i ikh prilozheniya* [Inhomogeneous Boundary Problems and Its Applications]. Moscow, Mir Publ., 1971, 372 p. (In Russian).
5. Bondarev A.S. Razreshimost' variatsionnogo parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim usloviyem na resheniye [The solvability of the variational parabolic equation with a periodic condition on the solution]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 78-88. (In Russian).
6. Vaynikko G.M., Oya P.E. O skhodimosti i bystroste skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh evolyutsionnykh uravneniy [About the convergence and the velocity of convergence

of the Galerkin's method for abstract evolutionary equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1975, vol. 11, no. 7, pp. 1269-1277. (In Russian).

7. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. *Vvedeniye v proyeksionno-setochnyye metody* [Introduction to Projection-Difference Methods]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 416 p. (In Russian).

Received 20 April 2018

Reviewed 24 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Bondarev Andrei Sergeevich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis and Operator Equations Department, e-mail: bondarev@math.vsu.ru

For citation: Bondarev A.S. Skhodimost' v sil'nykh normakh proekcionno-raznostnogo metoda resheniya parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim uslovиеm na reshenie [The strong-norm convergence of a projection-difference method of solution of a parabolic equation with the periodic condition on the solution]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 617–623. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-617-623 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636

УДК 517.911

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНОЙ СТРУКТУРОЙ

✉ Н. И. Желонкина^{1,2)}, А. Н. Сесекин^{1,2)}

¹⁾ ФГБУН «Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН
Уральского отделения Российской академии наук»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: 312115@mail.ru

²⁾ ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: sesekin@list.ru

Аннотация. В работе приводится обзор результатов авторов, связанных с исследованием свойства устойчивости решений для нелинейных систем дифференциальных уравнений, в правой части которых имеются слагаемые, содержащие произведения разрывных функций на обобщенные. Решения таких систем формализуются с помощью замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Для таких систем получены достаточные условия асимптотической устойчивости невозмущенных решений.

Ключевые слова: нелинейные системы; импульсное воздействие; устойчивость; асимптотическая устойчивость

Введение

Большое количество статей посвящено вопросам устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Но абсолютное большинство этих работ при формализации решения используют вариант систем с «толчками», восходящий к работам А.Д. Мышкиса, А.М. Самойлено и Н.А. Перестюка [1], а также многочисленных их последователей (см., например, [2, 3]). Существует и другая формализация понятия решения, которая основана на замыкании множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации [4–6]. Мотивацией такой формализации понятия решения является то, что в реальных механических, электротехнических и других системах изменение значений фазовых переменных происходит не мгновенно, а на весьма небольшом промежутке времени по сравнению с промежутком времени, на котором изучается процесс. В частности, такие явления характерны для механики

космического полета (импульсная корректировка орбиты), электротехники (экстратоки в электрических сетях), медицины (изменение состояния организма после принятия лечебных препаратов), экономики (единовременные финансовые вливания в экономику) и др. [4–9]. Фактически система с импульсным воздействием является некоторой аппроксимацией системы с непрерывной траекторией, когда на коротких промежутках времени происходит существенное изменение фазовых переменных. Такой подход, как отмечал Н.Н. Красовский в [10], является естественным с точки зрения теории управления. Отметим, что одной из особенностей формализации решения на основе замыкания множества гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации является то, что предел у последовательности гладких решений, порожденной гладкими аппроксимациями обобщенных воздействий, может и не существовать, и тогда в качестве решения естественно брать все частичные пределы последовательности гладких решений. В этом случае получается, что одному обобщенному воздействию будет соответствовать целая трубка разрывных решений. В дополнение к сказанному следует отметить обзорную статью [11], где обсуждаются также вопросы формализации решений рассматриваемых уравнений, в частности с позиций теории обобщенных функций. А также отметим работу [12], где рассматривается вопрос устойчивости точек покоя, когда движение системы описывается дифференциальным включением с импульсным воздействием.

Среди возможных подходов к исследованию вопросов устойчивости отметим, что если в исходной системе сделать разрывную замену времени [4, 6], то в вспомогательной системе траектория становится абсолютно непрерывной и вопрос устойчивости можно исследовать с помощью методов, которые применяются для исследования устойчивости систем с переменной структурой (switched systems) [13] в связи с тем, что на временных промежутках, где нет импульсов, траектория будет описываться одними уравнениями, а величина скачка траектории (реакция системы на импульсное воздействие) будет описываться другим уравнением.

Приведенные ниже результаты получены с помощью теории интегральных неравенств, рекуррентных оценок на последовательные непрерывные участки траектории и скачки траектории и метода функций Ляпунова.

1. Формализация понятия решения

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x} = f(t, x(t), v(t), \check{V}(t)) + B(t, x(t), v(t), \check{V}(t))\dot{v}(t), \quad x(t_0) = x^0. \quad (1.1)$$

Здесь, $x(t)$ и $v(t)$ n - и m - вектор-функции времени, соответственно, $f(t, x, v, \check{V})$ — n - вектор функция, и $B(t, x, v, \check{V})$ — $n \circ m$ матрица-функция, $\check{V}(t) = \text{var}_{[t_0, t]} v(\cdot)$, $v(t)$ банахово пространство m -мерных вектор-функций ограниченной вариации $BV_m[t_0, \vartheta]$.

$$\nabla f(t, x, v, V) \nabla \geq \kappa(1 + \nabla x \nabla), \quad \nabla B(t, x, v, V) \nabla \geq \kappa(1 + \nabla x \nabla).$$

Если $v(t)$ является абсолютно непрерывной вектор-функцией, которая определена на отрезке $[t_0, \vartheta]$, то в рамках теоремы Каратеодори решение задачи Коши (1.1)

существует и удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), v(s), \check{V}(s)) ds + \int_{t_0}^t B(s, x(s), v(s), \check{V}(s)) dv(s). \quad (1.2)$$

При этом второй интеграл (1.2) понимается в смысле Римана–Стилтьеса.

Пусть последовательность $v_k(t)$ абсолютно непрерывных функций ($v_k(t) \forall AC[t_0, \vartheta]$) поточечно сходится в функции $v(t) \forall BV[t_0, \vartheta]$. Соответствующую последовательность решений задачи Коши (1.1) или (1.2) обозначим $x_k(t)$.

Как и в [4, 5] будем говорить, что последовательность $v_k(t) \xrightarrow{V}$ — сходится к $v(t)$, если $v_k(t)$ поточечно сходится к $v(t)$ и $\text{var}_{[t_0, t]} v_k(\nearrow) \text{ поточечно сходится к } V(t) \forall BV[t_0, \vartheta]$.

Для данной сходимости будем использовать обозначение $v_k(t) \overset{V}{\infty} v(t)$.

Заметим, что для любых a и b , удовлетворяющих неравенству $t_0 \geq a \geq b \geq \vartheta$, выполняется неравенство

$$\text{var}_{[a, b]} v(\nearrow) \geq V(b) - V(a).$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Назовем V решением задачи Коши (1.1) всякий частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ на промежутке $[t_0, \vartheta]$, которая порождает произвольной V сходящей последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$.

Пусть

$$z(0) = x(\bar{t}),$$

$$\mu(0) = v(\bar{t})$$

являются начальными условиями системы

$$\begin{aligned} \dot{z}(\xi) &= B(t, z(\xi), \mu(\xi), V(t) + \xi - t)\eta(\xi), \\ \dot{\mu}(\xi) &= \eta(\xi). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Обозначим через $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ (где $\bar{t} = t_i - 0$ или $\bar{t} = t_i$) множество, получающееся сдвигом на величину $x(t)$ в момент $t + \Delta V(t)$ сечения множества достижимости системы (1.3), что

$$\mu(\bar{t}) = v(\bar{t}), \quad (1.4)$$

где управление $\eta(\xi)$ подчинено ограничению $\nabla \eta(\xi) \nabla_1 \geq 1$.

Теорема 1.1. Каждый частичный поточечный предел последовательности $x_k(t)$ of решений уравнения (1.1) порожденной последовательностью $v_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, абсолютно непрерывных функций, где $v_k \xrightarrow{V}$ -сходимость к $v(t) \forall BV_m[t_0, \vartheta]$, и

$$\lim_{k \infty} \text{var}_{[t_0, t]} v_k(\nearrow) = V(t),$$

является решением интегрального включения

$$\begin{aligned} x(t) \in x^0 + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\xi), v(\xi), V(\xi)) d\xi + \int_{t_0}^t B(\xi, x(\xi), v(\xi), V(\xi)) dv^c(\xi) + \\ + \sum_{t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0), V(t_i - 0), \Delta V(t_i - 0)) + \\ + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0), V(t_i), \Delta V(t_i + 0)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $v^c(\xi)$ непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v(\xi)$, $\Omega = (\Omega_+)$ — соответственно точки левого и правого разрывов функции $V(t)$.

Для всякого решения $x(t)$ включения (1.5), порожденного парой $(v(t), V(t))$, существует последовательность абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, поточечно сходящаяся к $v(t)$ и для которой $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{var}_{[t_0, t]} v_k = V(t)$, что соответствующая последовательность $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, решений системы (1.1) поточечно сходится к $x(t)$.

Доказательство этой теоремы можно посмотреть в [4].

Теперь рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))\dot{v}(t) \quad (1.6)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (1.7)$$

В отличие от системы (1.1) в (1.6) правая часть не зависит от $V(t)$. Здесь функция $f(\cdot)$ со значениями в R^n , матрица-функция $B(\cdot)$ размерности $m \times n$. Элементы f и B непрерывны по совокупности переменных в рассматриваемой области и удовлетворяют в ней условиям, обеспечивающим существование и продолжимость решений при любых суммируемых $\dot{v}(t)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем называть аппроксимируемым решением задачи Коши (1.6), (1.7) поточечный предел последовательности гладких решений системы (1.6), порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, поточечно сходящихся к функции ограниченной вариации $v(t)$, если этот предел не зависит от выбора последовательностей функций $v_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.2. Пусть в области $t \in [t_0, \vartheta]$, $x \in R^n$, $\|v\| \geq M$, где M — некоторая положительная постоянная, все допустимые функции $v(\cdot)$ подчинены ограничению $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} v \geq M$, компоненты вектора $f(t, x)$ и элементы матрицы $B(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных, дифференцируемы по всем переменным x_i , $i \in \overline{1, n}$ а также удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t, x)\| \geq \kappa(1 + \|x\|), \quad \|B(t, x)\| \geq \kappa(1 + \|x\|).$$

Кроме того, будем предполагать, что для всех допустимых t и x будут выполняться равенства

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{ij}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t, x) \quad (1.8)$$

(условие Фробениуса) $i \in \overline{1, n}, j, l \in \overline{1, m}$.

Тогда для всякой вектор-функции $v(t)$, удовлетворяющей выше оговоренным условиям, существует аппроксимируемое решение $x(t)$ задачи Коши (1.6), (1.7), которое удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\xi)) d\xi + \int_{t_0}^t B(\xi, x(\xi)) dv^c(\xi) + \\ + \sum_{t_i \rightarrow t, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} S(t, x, \Delta v) &= z(1) - x, \\ \dot{z}(\xi) &= B(t, z(\xi)) \Delta v(t), \quad z(0) = x, \end{aligned}$$

Ω (Ω_+) — множество точек левого (правого) разрывов вектор-функции $v(t)$,

$$\Delta v(t - 0) = v(t) - v(t - 0), \quad \Delta v(t + 0) = v(t + 0) - v(t).$$

Доказательство этой теоремы содержится в [4].

О п р е д е л е н и е 1.3. Продолжение решений интегрального включения (1.5) на $[t_0, \infty)$ и интегрального уравнения (1.9) на $[t_0, \infty)$ будем называть решением уравнения (1.1) на промежутке $[t_0, \infty)$.

2. Устойчивость трубок разрывных решений

Обозначим сечение трубки решений интегрального включения (1.5), порожденной начальным условием x_0 и парой функций $v(\cdot), V(\cdot)$ через $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что трубка решений уравнения (1.1) $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ устойчива, если $\exists \varepsilon > 0 \mid \delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|\bar{x} - x_0\| < \delta$, то

$$\rho(X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot)), X(t, \bar{x}, v(\cdot), V(\cdot))) < \varepsilon,$$

где $\rho(A, B)$ есть хаусдорфово расстояние между множествами A и B .

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что трубка решений уравнения (1.1) $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ асимптотически устойчива, если она устойчива, а также справедливо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot)), X(t, \bar{x}, v(\cdot), V(\cdot))) = 0.$$

Рассмотрим частный случай системы (1.1) – билинейную систему:

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \sum_{j=1}^m D_j(t) \dot{v}_j(t))x(t) + f(t)\dot{v}_m + g(t), \quad (2.1)$$

где $A(t)$, $D_j(t)$ ($j \in \overline{1, m-1}$) – непрерывные матрицы размерности $n \times n$, $f(t)$ и $g(t)$ – непрерывные вектор-функции размерности n , $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$, $\text{var}_{[t_0, t]} v(t) = \sum_{i=1}^m \text{var}_{[t_0, t]} v_i(\cdot)$.

Согласно теореме 1.1 все V -решения уравнения (2.1) будут удовлетворять следующему интегральному включению:

$$\begin{aligned} x(t) \in x^0 + \int_{t_0}^t A(\xi)x(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t g(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_0}^t D_j(\xi)x(\xi) dv_i^c(\xi) + \int_{t_0}^t f(\xi) dv_m^c(\xi) + \\ + \sum_{t_i \in \mathcal{A}, t_i \in \Omega_-} S(t_i, x(t_i-0), \Delta v(t_i-0), V(t_i-0), \Delta V(t_i-0)) + \\ + \sum_{t_i < t, t_i \in \Omega_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i+0), V(t_i+0), \Delta V(t_i+0)), \end{aligned}$$

где $v^c(t)$ – непрерывная составляющая вектор функции ограниченной вариации $v(t)$.

Множество $S(\bar{t}, x(\bar{t}), \Delta v(\bar{t}), V(\bar{t}), \Delta V(\bar{t}))$ (где $\bar{t} = t_i - 0$, $t_i \in \Omega_-$ и $\bar{t} = t_i$ если $t_i \in \Omega_+$) определяется как сдвиг сечения ($\mu(\Delta V(\bar{t})) = v(t_i)$, если $\bar{t} \in \Omega_-$, и $\mu(\Delta V\bar{t}) = v(t_i + 0)$, если $\bar{t} \in \Omega_+$) множество достижимости систем

$$\begin{aligned} \dot{z}(\xi) &= \sum_{i=1}^{m-1} D_i(\bar{t})z(\xi)\eta_i(\xi) + f(\bar{t})\eta_m(\xi) \\ \dot{\mu}(\xi) &= \eta(\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

в момент $\xi = \Delta V(\bar{t})$, где управление $\eta(\xi)$ удовлетворяет ограничению $\nabla \eta(\xi) \nabla \geq 1$, где $\nabla \eta(\xi) \nabla = \sum_{i=1}^m \|\eta_i(\xi)\|$

Теорема 2.1. Пусть фундаментальная матрица $Y(t, s)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ удовлетворяет оценке

$$\nabla Y(t, s) \nabla \geq c e^{(\alpha(t-s))}, \quad (2.3)$$

где α и c некоторые постоянные, такие, что $\alpha > 0$, $c \rightarrow 1$. Кроме того, предположим, что справедлива оценка

$$\nabla D_j(t) \nabla \geq K, \exists t \in [t_0, \infty), s \in [t_0, t], j \in \overline{1, m-1}. \quad (2.4)$$

Здесь K – положительная постоянная. Предположим, что существует такое число β , что неравенство

$$\alpha(t - t_0) - ck(t - t_0 + V(t)) > \beta \quad (2.5)$$

выполняется для всех $t \in [t_0, \infty)$. Тогда трубка разрывных решений $X(t, x_0, v(\cdot), V(\cdot))$ будет устойчива. Если же выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\alpha(t - t_0) - ck(t - t_0 + V(t))) = +\infty, \quad (2.6)$$

то трубка разрывных решений будет асимптотически устойчива.

Доказательство приведенной теоремы содержится в работе [14].

3. Устойчивость билинейных систем с разрывными траекториями при устойчивой матрице невозмущенной части системы

Рассмотрим билинейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = (A(t) + \sum_{j=1}^m D_j(t)\dot{v}_j(t))x(t). \quad (3.1)$$

Здесь $A(t)$ — непрерывная матрица-функция размерности $n \times n$, $D_j(t)$ ($j \in \overline{1, m}$) — непрерывные ограниченные матрицы-функции размерности $n \times n$, $D_i(t)$ — взаимно коммутативны, $v_i(t)$ — компоненты вектор-функции ограниченной вариации $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$.

Согласно теореме 1.2 всякое аппроксимируемое решение уравнения (3.1) будет удовлетворять интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t) = & \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(\xi)x(\xi)d\xi + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^t D_j(\xi)x(\xi)dv_j^c(\xi) + \\ & + \sum_{t_i \rightarrow t, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0), \quad (3.3)$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{j=1}^m D_j(\xi)z(\xi) \Delta v_j(\xi), \quad z(0) = x, \quad (3.4)$$

W_- и W_+ соответственно точки левого и правого разрывов вектор-функции $v(t)$, $v_i^c(t)$ — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации $v_i(t)$, $\Delta v(t - 0) = v(t) - v(t - 0)$ и $\Delta v(t + 0) = v(t + 0) - v(t)$. Заметим, что условие Фробениуса (1.8) для уравнения (3.1) превращается в условие взаимной коммутативности матриц $D_i(t)$, $i \in \overline{1, m}$.

Теорема 3.1. Пусть фундаментальная матрица $Y(t, s)$ системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

удовлетворяет оценке

$$\|Y(t, s)\| \leq c e^{-\alpha(t-s)}, \quad c \geq 1, \quad (3.5)$$

где α и c — некоторые положительные постоянные. Кроме того, предположим, что справедливы следующие оценки

$$\|D_j(t)\| \leq K, \quad \exists t \in [t_0, \infty), \quad j \in \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

где K — положительная постоянная. Тогда если справедливо неравенство

$$\alpha(t - t_0) - Kc \sum_{j=1}^m \varlimsup_{[t_0, t]} v_j(\mathfrak{X}) \rightarrow \beta, \quad (3.7)$$

для всех $t \in [t_0, \infty)$, где β есть некоторая конечная величина, то нулевое решение системы (3.1) устойчиво, если же

$$\alpha(t - t_0) - Kc \sum_{j=1}^m \varlimsup_{[t_0, t]} v_j(\mathfrak{X}) \rightarrow -\infty, \quad (3.8)$$

то нулевое решение системы (3.1) будет асимптотически устойчивым и будет справедлива оценка

$$\|x(t)\| \geq e^{(\alpha(t - t_0) - Kc \sum_{j=1}^m \varlimsup_{[t_0, t]} v_j(\mathfrak{X}))} x(t_0)c. \quad (3.9)$$

Приведенный результат был опубликован в работе [15].

4. Устойчивость билинейных систем с разрывными траекториями при неустойчивой матрице невозмущенной части системы

Приведенный ниже результат опубликован в [16]. В предыдущем разделе свойство устойчивости нулевого решения обеспечивалось за счет асимптотической устойчивости однородной системы без обобщенных воздействий, а обобщенные воздействия играли роль возмущений. В этом разделе мы будем предполагать, что однородная система без импульсных воздействий будет неустойчива, а свойство устойчивости мы будем пытаться обеспечить за счет импульсных воздействий. В отличие от предыдущего раздела здесь будем предполагать, что $v_i(t)$ — компоненты вектор функции $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_m(t))^T$ — кусочно-постоянные функции, непрерывные слева в точках разрыва. Точки разрыва функции $v(t)$ $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ удовлетворяют условию $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$.

При сделанных предположениях на функции $v_i(t)$ систему (3.1) можно записать в виде:

$$\dot{x} = (A(t) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} D_j(t) x(t) \Delta v_j(t_i) \delta(t - t_i)), \quad (4.1)$$

где $\Delta v_j(t_i) = v_j(t_i + 0) - v_j(t_i)$ — скачки кусочно постоянных функций $v_i(t)$, $\delta(t - t_i)$ — δ — функции Дирака, сосредоточенные в моменты t_i .

Теорема 4.1. Пусть справедливы неравенства

$$\|\tilde{D}_i(s)\| \geq G_i e^{\lambda_i s} \quad i \in \overline{1, m}, \quad (4.2)$$

где $\tilde{D}_i(s)$ — нормированная фундаментальная матрица для системы (3.4), а также имеет место неравенство

$$\nabla(t, s) \nabla \geq c e^{\alpha(t - s)}, \quad (4.3)$$

где $Y(t, s)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x(t)$. Тогда если выполняется условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (i \ln c + \sum_{k=1}^i \lambda_k + \alpha(t_i - t_0)) = \beta < \infty, \quad (4.4)$$

то система (4.1) устойчива, а если выполняется условие

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (i \ln c + \sum_{k=1}^i \lambda_k + \alpha(t_i - t_0)) = -\infty, \quad (4.5)$$

то система (4.1) асимптотически устойчива.

5. Метод функций Ляпунова при исследовании устойчивости систем импульсным воздействием

В этом разделе будем рассматривать нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(t, x(t))v(t) \quad (5.1)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Также будем предполагать, что для системы (5.1) выполняется условие Фробениуса (1.8). Как и в предыдущих двух разделах будем предполагать, что в системе (5.1) обобщенное воздействие порождается кусочно постоянной функцией $v(t)$, точки разрыва этой функции $t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$ удовлетворяют условию $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. Будем считать функцию $v(t)$ непрерывной слева в точках разрыва. В таком случае на промежутке $(t_i, t_{i+1}]$ траектория системы (5.1) будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (5.2)$$

с начальным условием $x(t_i + 0)$. Величина скачка траектории в точке t_i задается с помощью решения дифференциального уравнения

$$\dot{z}(\xi) = B(t_i, z(\xi))\Delta v(t_i), \quad z(0) = x(t_i), \quad (5.3)$$

формулой $S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i)) = z(1) - x(t_i)$, где $\Delta v(t_i) = v(t_i + 0) - v(t_i)$.

Пусть $V(t, x)$ — непрерывно дифференцируемая функция Ляпунова. Производную функции Ляпунова в силу системы (5.2) будем обозначать

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \nabla_x V(t, x) f(t, x),$$

где ∇_x — градиент функции $V(t, x)$ по x . Производную этой функции Ляпунова в силу системы (5.3), описывающей скачек траектории системы (5.1), будем обозначать следующим образом:

$$\dot{V}(t_i, z) = \nabla_x V(t_i, z) B(t_i, z) \Delta v(t_i).$$

Заметим, что система (5.3) является автономной.

Теорема 5.1. *Предположим, что существуют непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$ и непрерывная монотонно возрастающая функция $u(s)$ ($u(0) = 0$, $s \rightarrow 0$). Для функции $V(t, x)$ справедливо неравенство*

$$u(\|x\|) \geq V(t, x) \quad (5.4)$$

для всех $t \rightarrow t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Функция $V(t, x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\dot{V}(t, x) \geq \alpha V(t, x), \quad \alpha > 0, \quad (5.5)$$

где $\dot{V}(t, x)$ — производная в силу системы (5.2),

$$\dot{V}(t_i, z) \geq \beta V(t_i, z), \quad \beta > 0, \quad (5.6)$$

где $\dot{V}(t_i, z)$ — производная в силу системы (5.3). Кроме того предположим, что существует $\gamma > 0$, для которого выполняется неравенство

$$0 < t_{i+1} - t_i < \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (5.7)$$

а также неравенство

$$\alpha - \frac{\beta}{\gamma} < 0. \quad (5.8)$$

Тогда система (5.1) асимптотически устойчива.

Доказательство этой теоремы приведено в [17].

Заключение. В обзоре приведены результаты об устойчивости невозмущенных решений для нелинейных систем с обобщенным воздействием в правой части. В случае, когда нет единственности реакции системы на обобщенное воздействие, исследовано свойство устойчивости для трубок решений. Если реакция системы на обобщенное воздействие единственна, то исследованы случаи, когда устойчивость обеспечивается системой без импульсов, а импульсы играют роль возмущений, а также рассмотрены случаи, когда система без импульсов неустойчива, а свойство устойчивости обеспечивается за счет импульсных составляющих.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987. 288 с.
2. *Bainov D.D., Simeonov P.S.* Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Harlow: Longman, 1993.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989.
4. *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1997. 268 p.
5. *Сесекин А.Н.* Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2000. Т. 6. № 2. С. 497-514.

6. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 56-103.
7. Дыхта В.А. Импульсное оптимальное управление в моделях экономики и квантовой электроники // Автоматика и телемеханика. 1999. № 11. С. 100-112.
8. Дыхта В.А., Самсонов О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
9. Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2015. № 4 (27). С. 8-32.
10. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
11. Дерр В.Я. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах: обзор // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь, 2017. С. 60-86.
12. Перейра Ф.Л., Сильва Ж.Н. Устойчивость по Ляпунову импульсных систем, управляемых мерой // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 8. С. 1059-1067.
13. Liberzon D., Morse A. Basic problems in stability and and design of switched systems // IEEE Control Syst. Mag. 1999. Vol. 19. P. 59-70.
14. Seseкин A.N., Zhelonkina N.I. The stability of tubes of discontinuous solutions of dynamical systems // AIP. Conference Proceeding. 2017. Vol. 1895. P. 050011 1-7.
15. Корнилов И.А., Сесекин А.Н. Об устойчивости линейных систем с матрицей, содержащей обобщенные функции // Вестник УГТУ-УПИ. Екатеринбург, 2004. № 3 (33). С. 386-388.
16. Желонкина Н.И., Сесекин А.Н. Об устойчивости линейных систем с импульсным воздействием в матрице системы // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 30-33.
17. Seseкин A.N., Zhelonkina N.I. Stability of nonlinear dynamical systems containing the product of discontinuous functions and distributions // AIP. Conference Proceeding. 2016. Vol. 1789. P. 040010 1-8.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 16 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Желонкина Наталья Игоревна, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, математик; Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры прикладной математики, e-mail: 312115@mail.ru

Сесекин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. кафедрой прикладной математики и механики; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, ведущий научный сотрудник, e-mail: a.n.seseкин@urfu.ru

Для цитирования: Желонкина Н.И., Сесекин А.Н. Об устойчивости решений нелинейных систем с импульсной структурой // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 624-636. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF NONLINEAR SYSTEMS
WITH IMPULSE STRUCTUREN. I. Zhelonkina^{1),2)}, A. N. Seseikin^{1),2)}

¹⁾ N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation

E-mail: 312115@mail.ru

²⁾ Ural Federal University
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: seseikin@list.ru

Abstract. In this paper we review the results of the authors related to the study of the stability property of solutions for nonlinear systems of differential equations, on the right-hand side of which there are terms containing products of discontinuous functions and distributions. The solutions of such systems are formalized by the closure of the set of smooth solutions in the space of functions of bounded variation. For such systems, sufficient conditions are obtained for the asymptotic stability of unperturbed solutions.

Keywords: nonlinear systems; impulse action; stability; asymptotic stability

REFERENCES

1. Samoylenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem* [Differential Equations with Impulse Action]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1987, 288 p. (In Russian).
2. Bainov D.D., Simeonov P.S. *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*. Harlow, Longman, 1993.
3. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of Impulsive Differential Equations*. Singapore, World Scientific, 1989.
4. Zavalishchin S.T., Seseikin A.N. *Dynamic Impulse Systems: Theory and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1997, 268 p.
5. Seseikin A.N. Dinamicheskiye sistemy s nelineynoy impul'snoy strukturoy [Dynamic systems with nonlinear impulse structure]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2000, vol. 6, no. 2, pp. 497-514. (In Russian).
6. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Razryvnyye resheniya v zadachakh optimal'nogo upravleniya i ikh predstavleniye s pomoshch'yu singulyarnykh prostranstvenno-vremennykh preobrazovaniy [Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 12, pp. 56-103. (In Russian).
7. Dykhta V.A. Impul'snoye optimal'noye upravleniye v modelyakh ekonomiki i kvantovoy elektroniki [Impulse Optimal Control in Economic and Quantum Electronics Models]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1999, no. 11, pp. 100-112. (In Russian).

8. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noye impul'snoye upravleniye s prilozheniyami* [Optimal Impulse Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. (In Russian).
9. Andrianov D.L., Arbuzov V.O., Ivliyev S.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Dinamicheskiye modeli ekonomiki: teoriya, prilozheniya, programmaya realizatsiya [Economic dynamics models: theory, applications, computer aided implementation]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika – Perm University Herald. Economy*, 2015, no. 4 (27), pp. 8-32. (In Russian).
10. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniyem. Lineynyye sistemy* [Motion Control Theory. Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).
11. Derr V.Ya. Obyknovennyye lineynyye differentsial'nyye uravneniya s obobshchennymi funktsiyami v koeffitsiyentakh: obzor [Ordinary ordinary differential equations with generalized functions in coefficients: a survey]. *Materialy konferentsii «Funksional'no-differentsial'nyye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N.V. Azbleva* [Proceedings of the Conference “Functional and Differential Equations: Theory and Applications” Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbleev]. Perm, 2017, pp. 60-86. (In Russian).
12. Pereira F.L., Silva G.N. Lyapunov stability of measure driven impulsive systems. *Differential Equations*, 2004, vol. 40 (8), pp. 1122-1130.
13. Liberzon D., Morse A. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst. Mag.*, 1999, vol. 19, pp. 59-70.
14. Seseikin A.N., Zhelonkina N.I. The stability of tubes of discontinuous solutions of dynamical systems. *AIP. Conference Proceeding*, 2017, vol. 1895, pp. 050011 1-7.
15. Kornilov I.A., Seseikin A.N. Ob ustoychivosti lineynykh sistem s matritsey, soderzhashchey obobshchennyye funktsii [On the stability of linear systems with a matrix containing generalized functions]. *Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta-UI – Bulletin of USTU-UI*, 2004, no. 3 (33), pp. 386-388. (In Russian).
16. Zhelonkina N.I., Seseikin A.N. On Stability of Linear Systems with Impulsive Action at the Matrix. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, p. 673-676.
17. Seseikin A.N., Zhelonkina N.I. Stability of nonlinear dynamical systems containing the product of discontinuous functions and distributions. *AIP. Conference Proceeding*, 2016, vol. 1789, pp. 040010 1-8.

Received 13 April 2018

Reviewed 16 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Zhelonkina Natalia Igorevna, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, the Russian Federation, Mathematician; Ural Federal University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Lecturer of the Department of Applied Mathematics, e-mail: 312115@mail.ru

Sesekin Alexander Nikolaevich, Ural Federal University, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Department of Applied Mathematics and Mechanics. N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg, the Russian Federation, Leading Researcher, e-mail: sesekin@list.ru

For citation: Zhelonkina N.I., Seseikin A.N. Ob ustoychivosti resheniy nelineynykh sistem s impul'snoy strukturoy [On the stability of solutions of nonlinear systems with a impulse structure]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 624–636. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-624-636 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642

УДК 517

ОБ УРАВНЕНИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

≡ З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
E-mail: zuxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Предложено обобщение понятия нильпотентности для нелинейных отображений, действующих из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Исследованы свойства нелинейных нильпотентных отображений. Получены критерии нильпотентности для дифференцируемых и однородных полиномиальных отображений.

Ключевые слова: нелинейное нильпотентное отображение; полиномиальное однородное отображение

Введение

В этой работе исследуются отображения вещественных конечномерных пространств, обладающие свойством, сходным со свойством нильпотентности для линейных операторов. Напомним, что линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется нильпотентным, если существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что $A^k = 0$. Нильпотентный линейный оператор A обладает следующими свойствами: $A^n = 0$ (здесь n – размерность пространства, в котором действует линейный оператор); линейный оператор $I - A$ обратим и $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ (здесь $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – тождественное отображение); спектральный радиус $\sigma(A)$ линейного оператора A равен нулю; все элементы главной диагонали жордановой формы матрицы линейного оператора A являются нулями. Подробнее свойства нильпотентных линейных операторов приведены, например, в [1, гл. 3].

Цель настоящей работы – изучить нелинейные отображения, обладающие свойством, сходным со свойством нильпотентности линейных операторов. При этом мы ограничимся рассмотрением отображений, действующих из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2085.2017.1) и гранта РФФИ (проект № 16-01-00677). Результаты §2 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

1. Нильпотентные отображения

Пусть задано отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $f(0) = 0$. Будем называть отображение f нильпотентным, если

$$f(f(x) + y) = f(y) \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Отметим, что линейное отображение $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ нильпотентно в смысле этого определения тогда и только тогда, когда $A^2 = 0$. Примером нелинейного нильпотентного отображения является отображение

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

где γ – произвольная функция. Ниже мы покажем, что любое гладкое нильпотентное отображение представимо в таком виде.

Понятие нильпотентности играет важную роль при исследовании вопроса разрешимости линейных уравнений. Покажем, что введенное обобщение понятия нильпотентности применимо к нелинейным уравнениям.

Предложение 1. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ нильпотентно. Тогда при любом $y \in \mathbb{R}^2$ уравнение

$$x + f(x) = y$$

с неизвестным x имеет единственное решение. В частности, нуль является единственной неподвижной точкой отображения f .

Доказательство. Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := y + f(x)$. В силу (1) имеем

$$F^2(x) = y + f(y + f(x)) = y \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Значит, F^2 является сжимающим отображением. Следовательно (см. [2, гл. I, §1.6]), F имеет единственную неподвижную точку x^* . Таким образом, $x = x^*$ – единственное решение уравнения $x + f(x) = y$. При $y = 0$ это решение является неподвижной точкой отображения f . $\square$

Как отмечалось выше, если $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейный нильпотентный ненулевой оператор, то оператор $I - f$ обратим, и имеет место равенство

$$(I - f)^{-1} = I + f. \quad (2)$$

Покажем, что этим свойством обладают и нелинейные нильпотентные отображения.

Предложение 2. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ нильпотентно. Тогда отображение $I - f$ обратимо и имеет место равенство (2).

Доказательство. В силу предложения 1 отображение $I - f$ взаимнооднозначно. Кроме того, $(I - f)(y + f(y)) = y + f(y) = f(y + f(y)) = y + f(y) = f(y) \geq y$. Значит, имеет место равенство (2). $\square$

2. Нильпотентные дифференцируемые отображения

Приведем критерий нильпотентности для дифференцируемых отображений.

Предложение 3. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – дифференцируемое отображение такое, что $f(0) = 0$. Оно нильпотентно тогда и только тогда, когда

$$f^l(u)f^l(v) = 0 \quad u, v \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть выполнено (3). Зафиксируем $y \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := f(f(x) + y)$. Имеем $F^l(x) = f^l(f(x) + y)f^l(x) = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$ в силу (3). Следовательно, $F(x) = \text{const}$. Значит, $f(f(x) + y)$ зависит от y и не зависит от x . Поэтому $f(f(x) + y) = f(f(0) + y) = f(y)$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$.

Пусть выполнено предположение (1). Возьмем произвольные $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Положим $F(x) := f(f(x_1) + f(x_2) + f(x))$. В силу (1) имеем $F^l(x) = 0$. Отсюда, поскольку $F^l(x) = f^l(f(x_1) + f(x_2) + f(x))f^l(x)$, при $x = x_2$ получаем $f^l(x_1)f^l(x_2) = 0$. $\square$

Как отмечалось выше, линейный нильпотентный ненулевой оператор $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ в некотором базисе принимает вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

Покажем, что аналогичное свойство имеет место и для нелинейных нильпотентных отображений.

Теорема 1. Если отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дифференцируемо и нильпотентно, то существует дифференцируемая функция $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и базис в $\mathbb{R}^2$, в котором f принимает вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma(x_1) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (4)$$

Доказательство. Если $f(x) \equiv 0$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому далее будем предполагать, что $f(x) \not\equiv 0$.

Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^2$ такую, что $f^l(x) \neq 0$ (такая точка существует, поскольку $f(x) \not\equiv 0$ и $f(0) = 0$). В силу (4) имеем $f^l(x)f^l(x) = 0$. Следовательно, существует базис, в котором матрица линейного оператора $f^l(x)$ принимает вид

$$f^l(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть в этом базисе f имеет вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторые дифференцируемые функции. Тогда в силу (4) имеем

$$0 = f^l(x)f^l(x) = \begin{pmatrix} \theta \\ f_1^l(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $\theta = (0, 0)$, а $f_1^l(x)$ – градиент функции f_1 . Отсюда, поскольку $f(0) = 0$, то $f_1(x) \geq 0$. Обозначим $g(x) := f_2(x)$. Имеем

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отсюда и из тождества $f^l(x)f^l(x) \geq 0$ следует, что

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_{x_1}^l(x) & g_{x_2}^l(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_{x_1}^l(x) & g_{x_2}^l(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g_{x_1}^l(x)g_{x_2}^l(x) & g_{x_2}^2(x) \end{pmatrix}$$

для каждого $x \in \mathbb{R}^2$. Здесь $(g_{x_1}^l(x), g_{x_2}^l(x)) = g^l(x)$. Значит, $g_{x_2}^l(x) = 0$ для каждого $x \in \mathbb{R}^2$. Следовательно, существует дифференцируемая функция $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $g(x) \geq \gamma(x_1)$. Таким образом, имеет место представление (4). $\square$

2. Нильпотентные полиномиальные отображения

Исследуем теперь свойства нильпотентных полиномиальных отображений. Напомним, что отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется однородным полиномиальным отображением степени $k \in \mathbb{N}$, если существует ненулевое отображение

$$p : \underbrace{\mathbb{R}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^2}_{k \text{ шт.}} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

которое линейно по каждому аргументу, и $f(x) \geq p[x, \dots, x]$.

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – однородное полиномиальное отображение степени $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что

$$f^l(x)f^l(x) \geq 0. \quad (5)$$

Тогда существует число $\alpha \neq 0$ и базис в $\mathbb{R}^2$, в котором

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha x_1^k \end{pmatrix} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Доказательство. Если $k = 1$, то отображение f линейно. В этом случае из (5) следует, что существует базис, в котором матрица линейного оператора $f^l(x)$ принимает вид

$$f^l(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

и, значит, f имеет вид (6). Поэтому всюду далее будем полагать, что $k \geq 2$.

Зафиксируем произвольный базис в $\mathbb{R}^2$. Пусть в некотором базисе отображение f имеет вид

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Здесь $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторые однородные многочлены, причем либо оба многочлена имеют степень k , либо один из них имеет степень k , а второй тождественно равен нулю. Для определенности далее будем полагать, что $f_1 \neq 0$.

Положим $g_1(t) := f_1(t, 1)$, $g_2(t) := f_2(t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. В силу однородности многочленов f_1 и f_2 имеют место равенства

$$f_1(x) = x_2^k g_1(x_1/x_2), \quad f_2(x) = x_2^k g_2(x_1/x_2) \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \quad x_2 \neq 0.$$

Следовательно,

$$f^l(x) = \begin{pmatrix} x_2^{k-1} g_1^l(x_1/x_2) & kx_2^{k-1} g_1(x_1/x_2) & x_1 x_2^{k-2} g_1^l(x_1/x_2) \\ x_2^{k-1} g_2^l(x_1/x_2) & kx_2^{k-1} g_2(x_1/x_2) & x_1 x_2^{k-2} g_2^l(x_1/x_2) \end{pmatrix},$$

и, значит,

$$\det(f^l(x)) = kx_2^{2k-2} g_1^l(x_1/x_2) g_2(x_1/x_2) - g_1(x_1/x_2) g_2^l(x_1/x_2), \quad (7)$$

$$\operatorname{tr}(f^l(x)) = x_2^{k-1} g_1^l(x_1/x_2) + kx_2^{k-1} g_2(x_1/x_2) - x_1 x_2^{k-2} g_2^l(x_1/x_2) \quad (8)$$

для $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ таких, что $x_2 \neq 0$. Здесь $\det(f^l(x))$ – определитель матрицы $f^l(x)$, а $\operatorname{tr}(f^l(x))$ – ее след.

В силу предположения (5) имеем $\det(f^l(x)) \geq 0$. Поэтому из соотношения (7) следует, что

$$g_1^l(t) g_2(t) - g_1(t) g_2^l(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, поскольку $f_1 \neq 0$, получаем, что существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $g_2(t) \geq c g_1(t)$. В силу предположения (5) имеем $\operatorname{tr}(f^l(x)) \geq 0$. Поэтому из соотношений (8) и $g_2(t) \geq c g_1(t)$ следует, что

$$g_1^l(t) + k c g_1(t) - c t g_1^l(t) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

Значит, существует $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, такое, что $g_1(t) \geq \alpha(1 - ct)^k$. Отсюда и из соотношения $g_2(t) \geq c g_1(t)$ следует, что

$$f(x) = \alpha \begin{pmatrix} x_2 & c x_1^k \\ c x_2 & c x_1^k \end{pmatrix} \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Возьмем базис $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, c)$. Очевидно, что в этом базисе отображение f принимает вид (6). $\square$

Из доказанного следует, для полиномиальных однородных отображений свойства (1), (3) и (5) эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
2. Granas A., Dugundji J. Fixed Point Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zuxra2@yandex.ru

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: Жуковская З.Т., Жуковский С.Е. Об уравнениях, порожденных нелинейными нильпотентными отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 637–642. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642

ON EQUATIONS GENERATED BY NONLINEAR NILPOTENT MAPPINGS

Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Abstract. A generalization of a nilpotent linear operator concept is proposed for nonlinear mapping acting from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$. The properties of nonlinear nilpotent mappings are investigated. Criteria of nilpotence for differentiable and polynomial mappings are obtained.

Keywords: nonlinear nilpotent mapping; polynomial homogeneous mapping

REFERENCES

1. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. Cambridge, Cambridge University Press, 2013, 643 p.
2. Granas A., Dugundji J. *Fixed Point Theory*. New York, Springer-Verlag, 2003, 690 p.

Received 19 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Zhukovskaya Zuhra Tagirovna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Ob uravneniyah, porozhdennykh nelineynymi nilpotentnymi operatorami [On Equations Generated by Nonlinear Nilpotent Mappings]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 637–642. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-637-642 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the grant of the President of Russian Federation (Project No. MK-2085.2017.1). The results of Section 1 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647

УДК 517

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

✉ С. Е. Жуковский, Л.-Э. И. Нгомиракиза

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, nglain@yandex.com

Аннотация. В работе исследуются локально инъективные накрывающие отображения метрических пространств. Показано, что эти отображения обладают свойством продолжаемости для непрерывных функций.

Ключевые слова: накрывающие отображения; метрические пространства; продолжаемость; локальная инъективность

Прежде чем перейти к постановке задачи напомним, некоторые определения. Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства. Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r \in (0, \infty)$, то есть $B_X(x, r) = \{u \in X : \rho_X(x, u) \leq r\}$.

Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\psi : X \Rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если

$$\exists x_0 \in X, \quad \exists y \in Y \quad \cap x \in X : \quad \psi(x) = y, \quad \rho_X(x_0, x) \geq \frac{1}{\alpha} \rho_Y(\psi(x_0), y).$$

Накрывающие отображения метрических пространств используются при изучении нелинейных уравнений и включений (см., например, [1, 2]). В этой статье мы исследуем свойства локально инъективных накрывающих отображений. Отображение $\psi : X \Rightarrow Y$ называется локально инъективным, если для каждой точки $x_0 \in X$ существует $r > 0$ такое, что сужение ψ на $B_X(x_0, r)$ инъективно, то есть

$$\exists x_1, x_2 \in B_X(x_0, r) \quad \psi(x_1) = \psi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

При исследовании вопросов существования и единственности решений нелинейных уравнений важную роль играет понятие продолжаемости отображений (см., например, §5.3. в [3]). Говорят, что отображение $\psi : X \Rightarrow Y$ обладает свойством продолжаемости для заданного непрерывного отображения $v : [0, 1] \Rightarrow Y$, если для каждого $T \in (0, 1]$, для каждого непрерывного отображения $u : [0, T) \Rightarrow X$ такого, что $\psi(u(t)) = v(t)$ для любого $t \in [0, T]$, существует $\lim_{t \rightarrow T-0} u(t) =: u(T)$ и $\psi(u(T)) = v(T)$.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве свойства продолжаемости накрывающих локально инъективных отображений $\psi : X \Rightarrow Y$ для липшицевых отображений $v : [0, 1] \Rightarrow Y$. Соответствующий основной результат статьи сформулирован ниже в теореме 1. Прежде чем перейти к ней, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть ψ является непрерывным и α -накрывающим, для некоторых $x_0 \in X$ и $r > 0$ сужение ψ на $B_X(x_0, r)$ инъективно, отображение $\varphi : \psi(B_X(x_0, r)) \Rightarrow B_X(x_0, r)$ является обратным к ψ на $B_X(x_0, r)$, то есть

$$\psi(\varphi(y)) = y \quad \exists y \in \psi(B_X(x_0, r)), \quad \varphi(\psi(x)) = x \quad \exists x \in B_X(x_0, r). \quad (1)$$

Тогда $B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \rightarrow \psi(B_X(x_0, r))$ и

$$\rho_X(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \geq \alpha^{-1} \rho_Y(y_1, y_2) \quad \exists y_1, y_2 \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3). \quad (2)$$

Доказательство. Из α -накрываемости отображения ψ следует, что

$$B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \rightarrow \psi(B_X(x_0, r)).$$

Докажем соотношение (2).

Возьмем произвольные точки $y_1, y_2 \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3)$. В силу α -накрываемости отображения ψ существует точка $x_1 \in X$ такая, что

$$\psi(x_1) = y_1 \quad \text{и} \quad \rho(x_0, x_1) \geq \frac{r}{3}.$$

Отсюда из инъективности отображения ψ на шаре $B_X(x_0, r)$ следует, что $x_1 = \varphi(y_1)$. В силу α -накрываемости отображения ψ существует точка $x_2 \in X$ такая, что

$$\psi(x_2) = y_2 \quad \text{и} \quad \rho_X(x_1, x_2) \geq \frac{\rho_Y(y_1, y_2)}{\alpha}. \quad (3)$$

Поскольку

$$\rho_Y(y_1, y_2) \geq \rho_Y(y_1, \psi(x_0)) + \rho_Y(\psi(x_0), y_2) \geq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

то из неравенства в (3) следует, что

$$\rho_X(x_0, x_2) \geq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) \geq r.$$

В силу инъективности ψ на $B_X(x_0, r)$ имеем $x_2 = \varphi(y_2)$. Поэтому неравенство в (3) вытекает из соотношения (2). $\square$

Лемма 2. Пусть отображение ψ является непрерывным, α -накрывающим и локально инъективным, отображение $v : [0, 1] \Rightarrow Y$ является липшицевым с константой $l < 0$, для непрерывного отображения $u : [0, T) \Rightarrow X$ имеет место тождество $\psi(u(t)) \leq v(t)$. Тогда отображение u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Возьмем произвольную точку $t_0 \in [0, T)$. Покажем, что отображение u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевым в некоторой окрестности точки t_0 .

Положим $x_0 := u(t_0)$. Поскольку отображение ψ является локально инъективным, то существует $r > 0$ такой, что сужение ψ на $B_X(u_0, r)$ инъективно. Пусть $\varphi : \psi(B_X(x_0, r)) \Rightarrow B_X(x_0, r)$ – обратное отображение к отображению ψ на $B_X(x_0, r)$, то есть имеет место соотношение (1).

Из непрерывности отображений u и v следует, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$u(t) \in B_X(x_0, r), \quad v(t) \in B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \quad \exists t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0, T).$$

Отсюда поскольку по предположению при каждом $t \in [0, T)$ имеет место равенство $\psi(u(t)) = v(t)$, а $B_Y(\psi(x_0), \alpha r/3) \rightarrow \psi(B_X(x_0, r))$ в силу леммы 1, то $u(t) = \varphi(v(t))$ при $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0, T)$. Значит, отображение u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевым на $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \cap [0, T)$, так как φ является α^{-1} -липшицевым в силу леммы 1, а v является l -липшицевым по предположению.

II. Докажем, что отображение u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевым. Предположим противное, то есть существуют $t_1, t_2 \in [0, T)$, $t_1 < t_2$ такие, что $\rho_X(u(t_1), u(t_2)) > \alpha^{-1}l(t_2 - t_1)$. Положим

$$\gamma(t) := \rho_X(u(t_1), u(t)) - \alpha^{-1}l(t - t_1), \quad t \in [0, T).$$

В силу непрерывности отображения γ и соотношений $\gamma(t_1) = 0$, $\gamma(t_2) > 0$ существует точка $\tau \in [t_1, t_2)$ такая, что $\gamma(\tau) = 0$ и $\gamma(t) > 0$ при любом $t \in [\tau, t_2)$. В силу **I** отображение u липшицево в некоторой окрестности точки τ . Поэтому существует $t \in (\tau, t_2)$ такое, что $\rho_X(u(t), u(\tau)) \geq \alpha^{-1}l(t - \tau)$. Значит,

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \rho_X(u(t_1), u(t)) - \alpha^{-1}l(t - t_1) \geq \\ &\geq \rho_X(u(t_1), u(\tau)) + \rho_X(u(\tau), u(t)) - \alpha^{-1}l(t - \tau) - \alpha^{-1}l(\tau - t_1) \geq \gamma(\tau) \geq 0, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству $\gamma(t) > 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 1. Пусть отображение $\psi : X \Rightarrow Y$ является α -накрывающим, непрерывным и локально инъективным, отображение $v : [0, 1] \Rightarrow Y$ является l -липшицевым, пространство (X, ρ_X) – полным. Тогда отображение ψ обладает свойством продолжаемости для v .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $T \in (0, 1]$ и произвольное непрерывное отображение $u : [0, T) \Rightarrow X$ такое, что $\psi(u(t)) = v(t)$ для любого $t \in [0, T)$. В силу леммы 2 отображение u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевым. Возьмем произвольную последовательность $\{t_j\} \rightarrow [0, T)$, сходящуюся к T слева. Имеем

$$\rho_X(u(t_i), u(t_j)) \geq \alpha^{-1}l(t_i - t_j) \quad \exists i, j.$$

Поэтому последовательность $\{u(t_j)\}$ фундаментальна. Следовательно, в силу полноты пространства (X, ρ_X) она сходится к некоторой точке $\bar{x} \in X$. Очевидно, для любой последовательности $\{\tau_j\} \rightarrow [0, T)$, сходящейся к T слева, последовательность $\{u(\tau_j)\}$

сходится к $\bar{x}$, иначе последовательность $u(t_1), u(\tau_1), u(t_2), u(\tau_2), \dots$ расходится, что, как показано выше, невозможно. Таким образом, $\bar{x} = \lim_{t \rightarrow T} u(t)$. $\square$

Повторяя рассуждения, приведенные в §5.3.2 в [3], из леммы 2 и теоремы 1 можно вывести следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть отображение $\psi : X \Rightarrow Y$ является α -накрывающим, непрерывным и локально инъективным, отображение $v : [0, 1] \Rightarrow Y$ является l -липшицевым, $u_0 \in X$, $\psi(u_0) = v(0)$, пространство (X, ρ_X) полно.

Тогда существует единственная непрерывная функция $u : [0, 1] \Rightarrow X$ такая, что $\psi(u(t)) \leq v(t)$ и $u(0) = u_0$. Более того, эта функция u является $\alpha^{-1}l$ -липшицевой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151-155.
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Points Theory and Applications. 2009. Vol. 5. № 1. P. 106-127.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 559 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Нгомиракиза Ларри-Элвис Инносентович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: nglain@yandex.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647

ON CONTINUATION IN METRIC SPACES

S. E. Zhukovskiy, L.-E. I. Ngomirakiza

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru, nglain@yandex.com

Abstract. We study locally injective covering mappings between metric spaces. We show that under natural assumptions these mappings have continuation property.

Keywords: covering mappings; metric spaces; continuation; local injectivity

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Covering mappings in metric spaces and fixed points. *Doklady Mathematics*, 2007, vol. 76, no. 2, pp. 665-668.
2. Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points. *Journal of Fixed Points Theory and Applications*, 2009, vol. 5, no. 1, pp. 106-127.
3. Ortega J., Rheinboldt W. *Iterative Solutions of Nonlinear Equations in Several Variables*. New York, Academic Press, 1970, 690 p.

Received 20 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Ngomirakiza Larry-Elvis Innosentovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: nglain@yandex.com

For citation: Zhukovskiy S.E., Ngomirakiza L.-E.I., O prodolzhaemosti v metricheskikh prostranstvakh [On Continuation in Metric Spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 643–647. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-643-647 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project № 17-11-01168).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-648-654

УДК 519.71

ДЕКЛАСТЕРИЗАЦИЯ ОКРЕСТНОСТНЫХ СТРУКТУР

© Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»

398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30

E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Аннотация. Окрестностные структуры (орграфы особого вида) могут иметь вертексные или реляционные оснащения (наборы переменных). Вертексные переменные соответствуют вершинам структуры, реляционные – дугам. В статье описан алгоритм канонического преобразования (декластеризации) реляционных структур в вертексные. Это преобразование устанавливает связь между двумя типами метасистем управления на окрестностных структурах.

Ключевые слова: окрестностная структура; вертексное оснащение; реляционное оснащение; декластеризация

Введение

Ранее в работах [1–3] мы определили вертексные и реляционные окрестностные структуры как оснащенные орграфы с вершинами $\hat{V} = U \sqcup V \sqcup W$ трех типов: *входами* U , *узлами* V и *выходами* W . Оснащения структуры – это наборы переменных, которые в вертексном (соотв. реляционном) случае соответствуют вершинам (соотв. дугам) структуры и обозначаются $X(i)$ (соотв. $Y(i, k)$). Вертексная (соотв. реляционная) окрестностная структура порождает вертексную (соотв. реляционную) *метасистему* управления. Подробности см. в [1–3]. В настоящей заметке мы обсуждаем задачу редукции реляционных структур к вертексным. Переменные оснащения окрестностных структур мы рассматриваем как неделимые, *метаскалярные* переменные. Если в вертексном случае отказаться от этого условия и допустить разделяемые на компоненты *метавекторные* переменные состояний узлов и входов вертексной структуры, то различие между вертексными и реляционными структурами исчезает, поскольку выходящую из узла v_i (или из входа u_i) мультипеременную $Y(i) = \{Y(i, *)\}$ можно считать метавекторным состоянием $\tilde{X}(i) = Y(i)$ узла v_i (или входа u_i), которую этот узел (или

вход) передает по выходящим дугам, по одной компоненте для каждой дуги. Иначе говоря, если метаскалярное оснащение дуг окрестностной структуры рассматривать как метавекторное оснащение вершин, с возможностью раздельного использования компонент, то реляционная структура становится вертексной. Данное наблюдение нельзя считать «настоящей» редукцией реляционных структур к вертексным, поскольку нарушается условие метаскалярности. Это просто еще один способ описание реляционных структур и соответствующих им реляционных метасистем. Идея «правильного» (с сохранением метаскалярности) решения задачи редукции реляционных структур к вертексным, на первый взгляд, достаточно очевидна – нужно «декластеризовать» окрестностную структуру, а именно, заменить каждую вершину набором s вершин, где s – количество выходящих дуг, и поместить оснащения дуг в новые вершины. Трудности возникают далее, при попытке понять, что делать со входящими дугами. Особого внимания требует случай петель, то есть *рефлексивных* узлов структуры. В данной заметке мы даем описание алгоритма декластеризации.

1. Постановка задачи декластеризации

Уточним постановку задачи декластеризации. Пусть по реляционно оснащенной окрестностной структуре $\mathfrak{N}$ написана реляционная метасистема уравнений S , см. [1, 2]. Метасистема S , «рассыпанная» на скалярные уравнения и рассматриваемая сама по себе, без ассоциирования с $\mathfrak{N}$, порождает новую окрестностную структуру $\mathfrak{N}'$, для которой S является вертексной метасистемой. Нас интересует связь между структурами (орграфами) $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$. Очевидно, что вершинам структуры $\mathfrak{N}$ однозначно соответствуют дуги и выходы структуры $\mathfrak{N}'$ или, что то же самое, переменные реляционного оснащения структуры $\mathfrak{N}$ являются переменными вертексного оснащения структуры $\mathfrak{N}'$. Связь между дугами структур $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ устроена сложнее. Мы опишем правила канонического преобразования (декластеризации) $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$. Заметим еще раз, что сама метасистема S при декластеризации остается прежней; изменяется (канонически декластеризуется до вертексной) только ассоциированная с ней реляционная окрестностная структура. Можно сказать, что нас интересует не итоговая вертексная структура $\mathfrak{N}'$ (она легко восстанавливается по метасистеме S), а связь ее вершин и дуг с вершинами и дугами исходной реляционной структуры $\mathfrak{N}$.

2. Рекуррентная декластеризации

Старые и новые вершины и дуги. Пусть $\mathfrak{N} = (\hat{V}; E)$ – некоторая реляционно оснащенная переменными $\{Y(i, k)\}$ окрестностная структура; ее вершины и ребра мы будем называть далее «старыми» (на рисунках они красные). Вершины и дуги рекуррентно конструируемой декластеризации $\mathfrak{N}' = (\hat{V}'; E')$ далее называются «новыми» (на рисунках они зеленые). Мы будем последовательно применять процедуру декластеризации ко входам и узлам структуры $\mathfrak{N}$; для выходов декластеризация не требуется. При декластеризации очередной вершины эта вершина и входящие дуги (но не петли) заменяются новыми, выходящие дуги остаются старыми. Порядок вершин не имеет значения, окончательный результат от него не зависит. В частности, в процессе декластеризации можно чередовать или не чередовать входы и узлы.

Гнезда и пучки. Все новые вершины и дуги будут образовывать кластеры, соответствующие старым вершинам и дугам. Кластеры новых вершин мы будем называть *гнездами*, а кластеры новых дуг – *пучками*. Входы порождают гнезда входов, узлы – гнезда узлов. Далее на рисунках гнезда обведены пунктирными овалами; пучки дуг изображаются дугами с началом в общей точке. Количество новых узлов (входов) в гнезде, порожденном узлом v_i (входом u_i) будет равно количеству *выходящих* дуг, включая петли; обозначим это количество через $|v_i|$ (соответственно $|u_i|$). Эти новые узлы (входы) получают оснащения $Y(i, k)$, $k \in v_i$ (соответственно $U(i, k) = Y(i, k)$, $k \in u_i$).

Дуги, входящие в декластеризуемый узел. В момент декластеризации очередного старого узла v_i в него могут входить только старые дуги (в том числе петля для рефлексивного узла) с началом в *старых или новых* вершинах. Количество *входящих* дуг постоянно до момента декластеризации узла (входа); обозначим его через $|v_i^+|$.

Дуги, выходящие из декластеризуемой вершины (узла или входа). В момент декластеризации очередной старой вершины из нее могут выходить старые дуги к старым вершинам (узлам и выходам) и пучки новых дуг к гнездам новых узлов. Общее количество *выходящих* старых дуг и пучков новых дуг постоянно и равно $|v_i|$ (соответственно $|u_i|$ для входов).

Сформулируем теперь правила рекуррентной декластеризации, отдельно для входов, простых узлов и рефлексивных узлов. Для каждого из этих случаев мы изображаем схему декластеризации и приводим пример. На схеме изображается только вершина с входящими и исходящими дугами; этим подчеркивается независимость декластеризации от остальных вершин.

Входы.

Декластеризацией входа $u_i \in U$ называется замена этого входа на гнездо из $|u_i|$ новых входов $\{u_{ik} | k \in u_i\}$, при этом выходящие из u_i старые дуги и пучки новых дуг распределяются по этим новым входам, см. схему на рис. 1 и пример на рис. 2. Новые входы u_{ik} получают оснащения $U(i, k)$, $k \in u_i$.

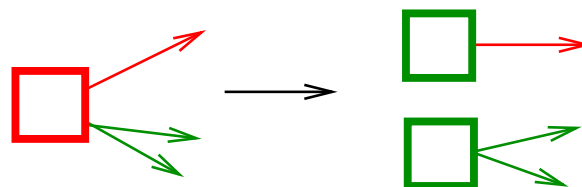


Рис. 1: Декластеризация входа, схема

Простые узлы.

Декластеризацией простого узла $v_i \in V$ называется замена этого узла на гнездо из $|v_i|$ новых узлов $\{v_{ik} | k \in v_i\}$, и расщепление каждой входящей в v_i старой дуги на пучек новых дуг, заканчивающихся в вершинах гнезда. Пучки получают оснащения $Y(k, i)$, $k \in v_i^+$ от старых дуг. Выходящие из v_i старые дуги и пучки новых дуг, как и в случае входов, распределяются по новым узлам гнезда, см. схему на рис. 3 и пример на рис. 4. Новые узлы v_{ik} получают оснащения $Y(i, k)$, $k \in v_i$.

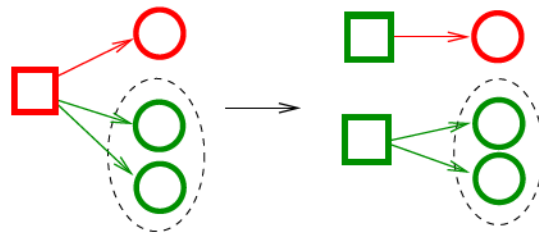


Рис. 2: Декластеризация входа, пример

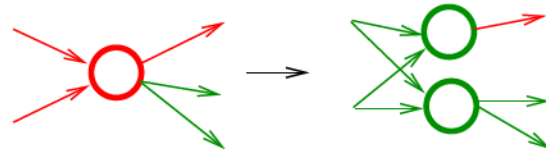


Рис. 3: Декластеризация простого узла, схема

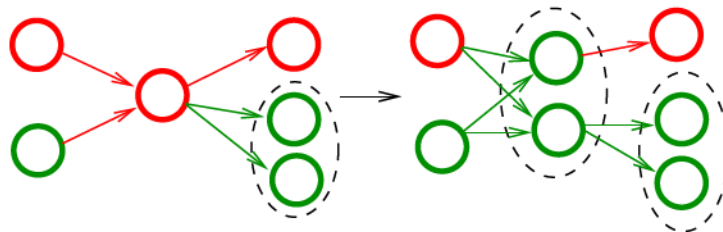


Рис. 4: Декластеризация простого узла, пример

Рефлексивные узлы.

Декластеризацией рефлексивного узла $v_i \in V$ происходит следующим образом. Сначала мы превращаем петлю в дугу, ведущую в формально добавленный выход, и декластеризуем полученный *простой* узел. Затем нужно убрать формальный выход и превратить ведущую в него единственную дугу в новую петлю; таким образом одна (и только одна) из новых вершин гнезда становится рефлексивной. Далее из этого нового рефлексивного узла нужно провести пучок новых дуг в остальные новые узлы гнезда, см. схему на рис. 5 и пример на рис. 6.

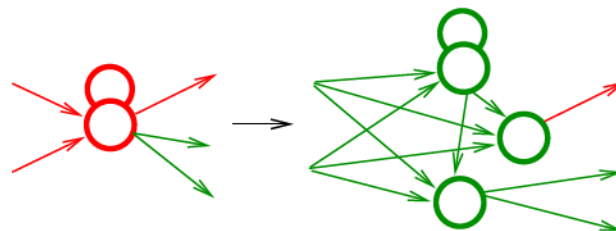


Рис. 5: Декластеризация рефлексивного узла, схема

Результат описанной декластеризации не зависит от выбора порядка декластеризируемых вершин (входов и узлов) и в итоге исходная реляционная окрестностная структура $\mathfrak{N}$ превращается в новую вертексную структуру $\mathfrak{N}$, при этом вертексная метасистема

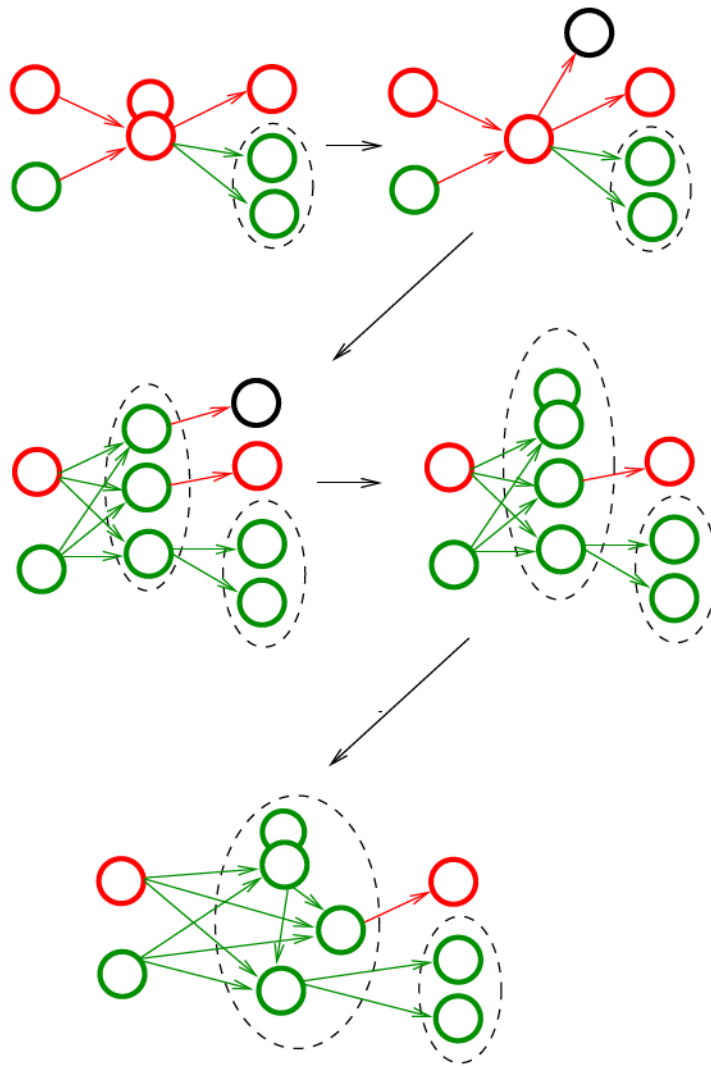


Рис. 6: Декластеризация рефлексивного узла, пример

над $\mathfrak{N}$ эквивалентна реляционной метасистеме над $\mathfrak{N}$. Уточним еще два момента, связанные с описанной выше декластеризацией.

1. Соблюдая формальности, после завершения декластеризации нужно еще объявить «новыми» старые дуги, соединяющие новые узлы с *выходами*, поскольку в результате описанной декластеризации эти дуги (если они имелись в орграфе) не изменялись.

2. Декластеризация входов и узлов с *единственной* выходящей старой дугой или *единственным* пучком выходящих новых дуг является формальной: старая вершина объявляется новой и получает оснащение от выходящей дуги или пучка дуг.

Входы в реляционных метасистемах и частичная декластеризация.

Укажем еще одно применение описанного выше алгоритма декластеризации. В реляционных системах, оставаясь в рамках нашего определения окрестностной структуры, мы не можем отличить действие входа u_k на все выходы из узла v_i от действия на один из таких выходов $Y(i, j)$. Информацию об избирательном действии входа на узел

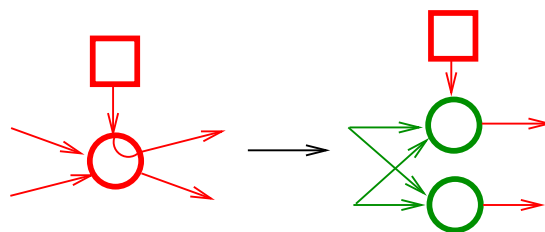


Рис. 7: Частичная декластеризация, пример

v_i можно внести в реляционную структуру с помощью *частичной декластеризации* этой структуры. А именно, нужно декластеризовать узел v_i , но при этом заменить дугу (u_k, v_i) не пучком дуг, проведенных ко всем узлам гнезда, а только одной дугой, проведенной к новому узлу, соответствующему выходу $Y(i, j)$ (см. рис. 7, на котором дуга внутри узла информирует об избирательном действии входа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мишачев Н.М., Шмырин А.М. Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 37. Вып. 4. С. 87-95.
2. Мишачев Н.М., Шмырин А.М. Окрестностные метасистемы на орграфах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 479-487.
3. Мишачев Н.М., Шмырин А.М. Дискретные системы и окрестностные структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 473-478.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-648-654

DECLUSTERIZATION OF NEIGHBORHOOD STRUCTURES

N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin

Lipetsk State Technical University
 30 Moskovskaya St., Lipetsk 398600, Russian Federation
 E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Abstract. Neighborhood structures (digraphs of a special kind) can have vertex or relational sets of equipping variables. Vertex variables correspond to the vertices of the structure, while the relational ones correspond to the arcs. The article describes an algorithm for the canonical transformation (declusterization) of the relational structures into the vertex ones. This transformation establishes a connection between two types of control metasystems on neighborhood structures.

Keywords: neighborhood structure; vertex equipment; relational equipment; declusterization

REFERENCES

1. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnyye struktury i metastrukturalnaya identifikatsiya [Neighborhood Structures and Metastructural Identification]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2017, vol. 37, no. 4, pp. 87-95. (In Russian).
2. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnyye metasistemy na orgrafakh [Neighborhood metasystems on digraphs]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 479-487. (In Russian).
3. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Diskretnyye sistemy i okrestnostnyye struktury [Discrete systems and neighboring structures]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 473-478. (In Russian).

Received 18 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, e-mail: amsh@lipetsk.ru

For citation: Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Deklasterizatsiya okrestnostnykh struktur [Declusterization of neighborhood structures]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 648–654. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-648-654 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665

УДК 519.1

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ СОСЕДЕЙ

☞ В. Ф. Молчанов, Е. Е. Крюкова

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: v.molchanov@bk.ru, e.kryukowa2011@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые задачи из комбинаторного анализа, связанные с размещениями без соседей на графах, а именно, мы находим количества и вероятности таких размещений на простейших графах (отрезок, два отрезка, цикл), а также (это более трудно) такие же задачи для цикла с точностью до поворота.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения; числа Фибоначчи; многочлены Фибоначчи; числа Люка; многочлены Люка

Введение

Пусть G – конечный граф с множеством вершин V , без петель и двойных ребер. Пусть $L(V) = \{f: V \rightarrow \{1, 2\}\}$ – множество функций на V со значениями 1 и 2, назовем их размещениями. Размещением без соседей мы называем такую функцию, что в соседних вершинах она не может одновременно принимать значение 2. Пусть $S(G)$ – множество таких функций. Для конечного множества A через $|A|$ обозначаем количество элементов в нем. Пусть $n = |V|$.

Предположим, что размещения – случайные. Пусть значения 1 и 2 принимаются с вероятностями q и p , соответственно, $q + p = 1$. Вероятность $P(f)$ размещения f есть одночлен $q^k p^m$, где k и m – кратности значений 1 и 2, соответственно. Его степень равна $k + m = n$. Пусть A – некоторое множество размещений из $L(V)$. Вероятность $P(A)$ этого множества равна сумме соответствующих одночленов: $P(A) = \sum_{f \in A} P(f)$. Эта вероятность есть некоторый многочлен $F(A; q, p)$ от двух переменных, однородный степени n . Его значение $F(A; 2, 2)$ при $q = p = 2$ (забываем об ограничении $q + p = 1$) равно $|A|$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.8515.2017/8.9).

Предположим, что граф является *однородным*, то есть имеется некоторая группа G преобразований этого графа в себя, действующая транзитивно на множестве вершин V . Она сохраняет S . Возьмем в каждой орбите группы G в S по одному представителю (размещению), получим множество R , назовем его радиальным множеством.

Возникают следующие задачи.

Задача (А). Найти количество s размещений без соседей.

Задача (В). Для однородного графа найти количество ξ размещений без соседей с точностью до действия группы G . Оно равно количеству орбит группы G в S , или, что все равно, количеству R .

Задача (С). Найти вероятность w того, что случайное размещение является размещением без соседей. Оно равно $F(S)V^{-q, p}$.

Задача (D). Для однородного графа найти вероятность β того, что случайное размещение является размещением без соседей с точностью до действия группы G . Оно равно $F(R)^{-q, p}$.

§ 1. Многочлены Фибоначчи и многочлены, связанные с ними

Напомним, см. [1], что числа Фибоначчи F_m , $m = 1, 2, 3, \dots$, определяются рекуррентным соотношением $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ и начальными условиями $F_0 = 1$, $F_1 = 2$. Числа Люка L_m , $m = 2, 3, \dots$, определяются формулой

$$L_m = F_{m-1} + F_{m+1}. \quad (2)$$

Они удовлетворяют такому же рекуррентному соотношению, начальные значения таковы: $L_1 = 2$, $L_2 = 4$. Приведем таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
L_n	-	1	3	4	7	11	18	29	47	76	...

Многочленами Фибоначчи $\Psi_n(q, p)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, мы называем следующие однородные многочлены степени n от двух переменных q, p :

$$\Psi_n(q, p) = \sum_{2k \leq n+1} \binom{n}{k} q^{n-k} p^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \quad (2)$$

Они удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$\Psi_n(q, p) = q \Psi_{n-1}(q, p) + p \Psi_{n-2}(q, p) \quad (4)$$

$$\binom{m}{k} \binom{0}{k} \binom{m}{2} \binom{0}{k} \binom{2}{k}.$$
$$\Psi_n)q, p + \frac{2}{q} \times \frac{\lambda_1^{n+2}}{\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n+2}}{\lambda_2},$$
$$\lambda_1 \quad \frac{2}{3})_{q \ 0} \quad \overline{q^2 \ 0 \ 5qp} \left(, \quad \lambda_2 \quad \frac{2}{3})_q \quad \overline{q^2 \ 0 \ 5qp} \left(.$$
$$F_n = \frac{2}{\bar{6}} \times \left\{ \frac{20}{3} \bar{6} \left\{^n \right\} \right\} \frac{2}{3} \bar{6} \left\{^n \Sigma \right\}.$$
$$\begin{aligned}\Psi_0)q,p+ & 2 \\ \Psi_1)q,p+ & q\ 0\ p \\ \Psi_2)q,p+ & q^2\ 0\ 3qp \\ \Psi_3)q,p+ & q^3\ 0\ 4q^2p\ 0\ qp^2 \\ \Psi_4)q,p+ & q^4\ 0\ 5q^3p\ 0\ 4q^2p^2 \\ \Psi_5)q,p+ & q^5\ 0\ 6q^4p\ 0\ 7q^3p^2\ 0\ q^2p^3\end{aligned}$$
$$A_n)u, v + \bigcup_{2k \leq n} \binom{n}{k} \binom{k}{2k} \binom{k}{u^n \ 2k \ v^k} \binom{n}{2} \binom{2}{u^n \ 1 \ v \ 0} \binom{n}{3} \binom{3}{u^n \ 4 \ v^2 \ 0} \binom{n}{4} \binom{4}{u^n \ 6 \ v^3 \ 0 \ \dots}$$
$$A_n)u, v + u \Psi_{n-1})u, \frac{v}{u} \Big(, \quad n \geq 2. \quad)5+$$
$$A_n)u, v + \dots u A_{n-1})u, v + 0 \dots v A_{n-2})u, v + \dots)6+$$
$$A_n)x \text{ } 0 \text{ } y, \text{ } xy + \frac{x^{n+1}}{x} \frac{y^{n+1}}{y} . \quad)7+$$

Это равенство проверяется с помощью конечно-разностного уравнения (5) и начальных условий $A_0 = 2$, $A_1 = u$.

Приведем несколько первых многочленов Фибоначчи-bis:

$$\begin{aligned} A_0)u, v+ & 2 \\ A_1)u, v+ & u \\ A_2)u, v+ & u^2 + v \\ A_3)u, v+ & u^3 + 3uv \\ A_4)u, v+ & u^4 + 4u^2v + v^2 \\ A_5)u, v+ & u^5 + 5u^3v + 4uv^2 \\ A_6)u, v+ & u^6 + 6u^4v + 7u^2v^2 + v^3 \end{aligned}$$

Многочленами Люка $\Omega_n(q, p)$, $n = 2, 3, \dots$, мы называем следующие однородные многочлены степени n от двух переменных q, p :

$$\Omega_n(q, p) = q \Psi_{n-1}(q, p) + q^2 p \Psi_{n-3}(q, p) + \dots + p^n \Psi_0(q, p) \quad (8)$$

Из (2) находим:

$$\Omega_n(q, p) = \sum_{2k \leq n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \binom{n}{k} q^{n-k} p^k.$$

Многочлены Люка удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (3). Решая это уравнение (3) с начальными условиями $\Omega_1 = q$, $\Psi_2 = q^2 + 3qp$, получаем:

$$\Omega_n(q, p) = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

Приведем несколько первых многочленов:

$$\begin{aligned} \Omega_1)q, p+ & q \\ \Omega_2)q, p+ & q^2 + 3qp \\ \Omega_3)q, p+ & q^3 + 4q^2p \\ \Omega_4)q, p+ & q^4 + 5q^3p + 3q^2p^2 \\ \Omega_5)q, p+ & q^5 + 6q^4p + 6q^3p^2 \\ \Omega_6)q, p+ & q^6 + 7q^5p + 7q^4p^2 + 3q^3p^3 \\ \Omega_7)q, p+ & q^7 + 8q^6p + 25q^5p^2 + 8q^4p^3 \end{aligned}$$

Отметим связь с числами Фибоначчи и Люка:

$$\Psi_n(2, 2) = F_{n+2}, \quad \Omega_n(2, 2) = L_n.$$

§ 2. Граф «отрезок»

Пусть $\mathbb{N}_n$ есть множество $\{2, 3, \dots, n\}$. Оно есть множество вершин для графа «отрезок» I_n , ребро соединяет вершины k и $k+1$, $2 \leq k < n$.

Теорема 1. Величины $s(I_n)$ и $w(I_n)$ выражаются через числа и многочлены Фибоначчи:

$$s(I_n) = F_{n+2}, \quad (8)$$

$$w(I_n) = \Psi_n(q, p). \quad (9)$$

Доказательство. Обозначим для краткости $a_n = s(I_n)$, $b_n = w(I_n)$. Размещения из $S(I_n)$ — это векторы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с координатами 1, 2, в которых две единицы не могут стоять рядом. Множество $S(I_n)$ распадается на два подмножества: первое состоит из векторов $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$, второе — из векторов $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, 1, 2)$. Поэтому $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Непосредственно находим $a_1 = 3$, $a_2 = 4$. Вместе с уравнением это доказывает (8). Вероятности указанных выше двух подмножеств равны q/b_{n-1} и qp/b_{n-2} . Поэтому $b_n = q/b_{n-1} + qp/b_{n-2}$. Непосредственно находим $b_1 = q$, $b_2 = q^2 + 3qp$. Вместе с уравнением это доказывает (9). $\square$

§ 3. Граф «цикл»

Граф «цикл» C_n имеет то же самое множество вершин $\mathbb{N}_n$, что и граф I_n из § 2, и он получается из графа I_n добавлением ребра, соединяющего 2 и n .

Теорема 2. Величины $s(C_n)$ и $w(C_n)$ выражаются через числа и многочлены Люка:

$$s(C_n) = L_n, \quad (10)$$

$$w(C_n) = \Omega_n(q, p). \quad (11)$$

Доказательство. Обозначим для краткости $c_n = s(C_n)$, $d_n = w(C_n)$, кроме того, используем обозначения a_n и b_n из § 2. Размещения из $S(C_n)$ — это такие же векторы, что и выше в § 2, с запрещением векторов $(2, x_2, \dots, x_{n-1}, 2)$. Множество $S(C_n)$ распадается на два подмножества: первое состоит из векторов $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$, второе — из векторов $(1, x_2, \dots, x_{n-2}, 1, 2)$. Поэтому $c_n = a_{n-1} + a_{n-3}$. Вместе с (8) и определением (1) чисел Люка это доказывает формулу (10).

Вероятности указанных выше подмножеств равны q/b_{n-1} и q^2p/b_{n-3} . Поэтому $d_n = q/b_{n-1} + q^2p/b_{n-3}$. Непосредственно находим $b_1 = q$, $b_2 = q^2 + 3qp$. Вместе с (7) это доказывает формулу (11). $\square$

На цикле C_n действует циклическая группа $\mathbb{Z}_n$ сдвигами $k \in \mathbb{Z}_n$ по модулю n . Тем самым она действует в множестве $S(C_n)$. Обозначим через $\mathcal{O}$ множество орбит группы $\mathbb{Z}_n$ в $S(C_n)$. Возьмем в каждой орбите группы $\mathbb{Z}_n$ в $S(C_n)$ по одному представителю (размещению) h , получим радиальное множество $R(C_n)$. Оно находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{O}$.

Нам надо вычислить число элементов в этом множестве и его вероятность, а именно, число $\xi)C_n + R)C_n + \beta)C_n + q, p + F)R)C_n + q, p +$.

Напомним [2] теоретико-числовую функцию Эйлера $\varphi)m +$. Она указывает количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m . Имеет место соотношение

$$\bigcup_{d|m} \varphi)d + m. \quad (23)$$

Теорема 3. *Имеют место формулы:*

$$\begin{aligned} \xi)C_n + \frac{2}{n} \bigcup_{d|n} \varphi)d + L_{n/d}. \\ \beta)C_n + \frac{2}{n} \bigcup_{d|n} \varphi)d + \Omega_{n/d} q^d, p^d + \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Для делителя r числа n обозначим через $A)r +$ множество функций (размещений) из $S)C_n +$ с наименьшим периодом r . Множество $S)C_n +$ есть дизъюнктное объединение $\{A)r +$, где r пробегает все делители числа n . Группа $\mathbb{Z}_n$ сохраняет каждое множество $A)r +$, она имеет в $A)r +$ несколько орбит. Стационарная подгруппа функции из $A)r +$ есть $r\mathbb{Z}_n$, ее порядок равен n/r .

Выше мы уже взяли в каждой орбите из $A)r +$ по одной функции h . Подействуем на каждую h всей группой $\mathbb{Z}_n$. Получим отображение M множества $\mathbb{Z}_n \circ ($ на всё множество $S)n +$. При этом каждая h , принадлежащая $A)r +$, дает r различных функций из $A)r +$, то есть всё $A)r +$, с кратностью n/r . Таким образом, множество $\mathbb{Z}_n \circ ($ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством функций из $\{A)r + S)C_n +$, взятых с кратностью n/r :

$$\mathbb{Z}_n \circ (\rightarrow \bigcup_{r|n} A)r + \times \frac{n}{r}.$$

Из этого равенства получаем равенство чисел и равенство многочленов:

$$n \times \xi)C_n + \bigcup_{r|n} A)r + \times \frac{n}{r}, \quad (14)$$

$$n \times F)S)C_n + q, p + \bigcup_{r|n} F)A)r + q, p + \times \frac{n}{r}. \quad (15)$$

Применим формулу (12) к множителю n/r в правых частях (14) и (15) и переставим суммирования, мы получим

$$n \times \xi)C_n + \bigcup_{d|n} \varphi)d + \bigcup_{r|(n/d)} A)r + \times \frac{n}{r} \quad (16)$$

$$n \times F)S)C_n + q, p + \bigcup_{d|n} \varphi)d + \bigcup_{r|(n/d)} F)A)r + q, p +. \quad (17)$$

Объединение $T)m +$ множеств $A)r +$, для которых r делит делитель m числа n , состоит из функций с периодом m (не обязательно наименьшим). Всякая функция из $T)m +$

полностью определяется своими значениями в вершинах $\{2, 3, \dots, m\}$, так что множество $T)m+$ получается из функций из $S)C_m+$ заменой q и p на $q^{n/m}$ и $p^{n/m}$, соответственно, и потому вероятность множества $T)m+$ равна вероятности $\Omega_m)q^{n/m}, p^{n/m}+$, а количество $T)m+$ функций равно числу Люка L_m . Поэтому внутренняя сумма в (16) есть $L_{n/d}$, а внутренняя сумма в (17) есть $\Omega_{n/d})q^d, p^d+$, что и доказывает теорему. $\square$

Пример 1. Граф C_6 .

Количество размещений без соседей равно числу Люка $L_6 = 29$. Делители числа 6 – это числа 2, 3, 4, 7. Значения на них функции Эйлера таковы: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(7) = 6$. Имеется 5 орбит группы $\mathbb{Z}_6$:

$$\begin{aligned} 111111 & \rightarrow r = 2 \neq \\ 121212, 212121 & \rightarrow r = 3 \neq \\ 112112, 211211, 121121 & \rightarrow r = 4 \neq \\ 111212, 211121, 121112, 212111, 121211, 112121 & \rightarrow r = 7 \neq \\ 111112, 211111, 121111, 112111, 111211, 111121 & \rightarrow r = 7 \neq \end{aligned}$$

В качестве представителей можно взять функции, стоящие на первом месте. Далее используются следующие многочлены Люка:

$$\begin{aligned} \Omega_1)q, p &= q \\ \Omega_2)q, p &= q^2 + 3qp \\ \Omega_3)q, p &= q^3 + 4q^2p \\ \Omega_6)q, p &= q^6 + 7q^5p + 3q^4p^2 + 3q^3p^3. \end{aligned}$$

Многочлен $\beta)C_6 \rightarrow q, p = F)R)C_6 \rightarrow q, p$ есть

$$\beta)C_6 \rightarrow q, p = q^6 + q^5p + 3q^4p^2 + q^3p^3.$$

Равенство (13) есть

$$\beta)C_6 \rightarrow q, p = \frac{2}{7} \left\{ \Omega_6)q, p + 0 \cdot \Omega_3)q^2, p^2 + 0 \cdot 3 \cdot \Omega_2)q^3, p^3 + 0 \cdot 3 \cdot \Omega_1)q^6, p^6 \right\}$$

§ 4. Граф «два отрезка»

Граф «два отрезка» K_n состоит из двух экземпляров отрезка I_n , см. § 2, соответствующие вершины (с одним и тем же номером) соединены ребром. Вершины занумерованы парами (k, i) , где $k = 2, \dots, n$, $i = 2, 3$. Ребра соединяют (k, i) с $(k, 2)$, $i < n$, а также $(k, 2)$ с $(k, 3)$. Поэтому размещение f на K_n есть двустрочная матрица $(f_{k,i})$, элементы которой есть 1 или 2.

Теорема 4. Последовательность $s)K_n+$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению $x_n = 3x_{n-1} + 0 \cdot x_{n-2}$ с начальными условиями $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, явные выражения таковы

$$s)K_n = \bigcup_{2k \leq n} 3k \binom{n}{3k} 3^k. \quad (29)$$

Числа $w)K_n +$ выражаются через многочлены Фибоначчи и Фибоначчи-bis:

$$w)K_n + q^n \Psi_{n-1}(2, qp+0) - p \Psi_{n-2}(2, qp+1), \quad n \geq 3, \quad (19)$$

$$q^n A_n(2, qp+0) - p A_{n-1}(2, qp+1). \quad (20)$$

Доказательство. Введем еще один граф K_n^1 , он получается из графа K_n удалением одной крайней вершины: $)n, 2 +$ или $)2, n +$, – и выходящих из нее двух ребер. Обозначим $x_n = s)K_n +$, $y_n = s)K_n^1 +$. Возьмем размещение f из $S)K_n +$. Если $f_{n,1} = 1$, то оставшаяся после удаления этого элемента матрица принадлежит $S)K_n^1 +$. Если же $f_{n,1} = 2$, то должно быть $f_{n,2} = 1$, $f_{n-1,1} = 1$ и оставшаяся после удаления этих трех элементов матрица принадлежит $S)K_{n-1}^1 +$. Поэтому $x_n = y_n + 0 \cdot y_{n-1}$. Пусть теперь $f \in S)K_n^1 +$. Если $f_{n,2} = 1$, то оставшаяся после удаления этого элемента матрица принадлежит $S)K_{n-1} +$. Если же $f_{n,2} = 2$, то должно быть $f_{n-1,2} = 1$ и оставшаяся после удаления этих двух элементов матрица принадлежит $S)K_{n-1}^1 +$. Поэтому $y_n = x_{n-1} + 0 \cdot y_{n-1}$. Подставим в это уравнение найденное ранее значение: $x_{n-1} = y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2}$, получим $y_n = 3y_{n-1} + 0 \cdot y_{n-2}$. Точно такое же уравнение

$$x_n = 3x_{n-1} + 0 \cdot x_{n-2}$$

справедливо для x_n , поскольку x_n выражается линейно через y_n . Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$. Непосредственное вычисление дает $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, поэтому

$$x_n = \frac{2}{3} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}),$$

отсюда получаем (17).

Обозначим теперь $w_n = w)K_n +$, $z_n = w)K_n^1 +$. Рассуждая, как и выше, получаем систему

$$\begin{aligned} w_n &= qz_n + 0 \cdot q^2pz_{n-1} \\ z_n &= qw_{n-1} + 0 \cdot qpz_{n-1}. \end{aligned}$$

Исключая w_{n-1} из второго уравнения с помощью первого, получаем конечно-разностное уравнение для z_n . Точно такое же уравнение

$$w_n = q)q + 0 \cdot p + w_{n-1} + 0 \cdot q^3pw_{n-2} \quad (32+)$$

справедливо для w_n , поскольку w_n выражается линейно через z_n . Здесь удобно ввести новое переменное b_n :

$$w_n = q^n b_n, \quad (33+)$$

тогда (21) превращается в уравнение

$$b_n = q)q + 0 \cdot p + b_{n-1} + 0 \cdot qp b_{n-2}. \quad (34+)$$

Для $n = 2$ и $n = 3$ мы вычисляем непосредственно:

$$w_1 = q^2 + 3qp, \quad w_2 = q^4 + 5q^3p + 3q^2p^2,$$

тогда с (21) согласуется значение $w_0 = 2$. Для уравнения (23) характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - (q + p)\lambda + qp = 0$, оно имеет корни

$$\lambda_1 = \frac{q + p + \sqrt{(q + p)^2 - 4qp}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{q + p - \sqrt{(q + p)^2 - 4qp}}{2}.$$

Учитывая начальные условия $b_0 = 2$, $b_1 = q + 3p$, получаем

$$b_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} - p \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Рассмотрим отдельно

$$t_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Вспоминая (6), получаем

$$t_n = A_n + q + p, qp +$$

Итак,

$$b_n = A_n + q + p, qp + pA_{n-1} + q + p, qp +$$

Возвращаясь к w_n по формуле (22), получим выражение чисел w_n через многочлены Фибоначчи-bis:

$$w_n = q^n \left\{ A_n + q + p, qp + pA_{n-1} + q + p, qp + \right\}.$$

Вспомним, наконец, соотношение $q + p = 2$ и соотношение $A_n + 2, v + \Psi_{n-1} + 2, v +$, см. (4), окончательно получим (19) и (20). $\square$

Уравнение (23) дает уравнение для t_n :

$$t_n + q + p - (q + p)t_{n-1} + qp t_{n-2} = 0.$$

Из него следует, что коэффициенты многочленов $t_n + q + p$ образуют любопытный арифметический треугольник – каждое число есть сумма *трех* над ним стоящих (одно справа, одно слева, одно сверху):

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 2 & & \\ & & & & 2 & 2 & \\ & & & 2 & 4 & 2 & \\ & & 2 & 6 & 6 & 2 & \\ & 2 & 8 & 24 & 8 & 2 & \\ 2 & ; & 36 & 36 & ; & 2 & \\ 2 & 22 & 52 & 74 & 52 & 22 & 2 \end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райзер Г.Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1952.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Крюкова Екатерина Евгеньевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Математика», e-mail: e.kryukowa2011@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665

PLACEMENTS WITHOUT NEIGHBOURS

V. F. Molchanov, E. E. Kryukova

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: v.molchanov@bk.ru, e.kryukowa2011@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider some problems in combinatorial analysis related to placements without neighbours on graphs, namely, we find numbers and probabilities of such placements for simplest graphs (segment, two segments, cycle), and also (which is more difficult) we solve the same problems for a cycle up to rotations.

Keywords: recurrence relations; Fibonacci numbers; Fibonacci polynomials; Lucas numbers; Lucas polynomials

REFERENCES

1. Raiser G.J. *Kombinatornaya matematika* [Combinatorial Mathematics]. Moscow, Mir Publ., 1966.
2. Vinogradov I.M. *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of Number Theory]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1952.

Received 13 April 2018

Reviewed 18 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Kryukova Ekaterina Evgenievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Masters Degree Student on Training Direction «Mathematics», e-mail: e.kryukowa2011@yandex.ru

For citation: Molchanov V.F., Kryukova E.E. Razmeshcheniya bez sosedey [Placements without neighbours]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 655–665. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 3.8515.2017/8.9).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

УДК 519.86

ЗАМКНУТОСТЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ МОДЕЛЯХ

✉ Н. Г. Павлова

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт»
141701, Российская Федерация, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
ФГБУН «Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65
E-mail: natasharussia@mail.ru

Аннотация. Изучается вопрос о свойствах технологического множества в динамических производственных моделях. Исследуемые модели рассматриваются как линейные динамические управляемые системы, в которых управлением служит функция непроеизводственного потребления, принимающая значения в выпуклом замкнутом конечнопорожденном конусе.

Ключевые слова: линейные управляемые системы; модель Леонтьева; множество достижимости; технологическое множество

В работе изучаются открытые динамические модели межотраслевого баланса леонтьевского типа. В таких моделях экономических систем продукция, выпускаемая с применением экономических факторов, сама используется как фактор производства других видов продукции. Кроме того, часть валового выпуска идет на непроеизводственное потребление. В исследуемых моделях важным является вопрос замкнутости технологического множества, описывающего производственный процесс. В данной работе получены необходимые условия замкнутости технологического множества в исследуемых моделях. Они применяются, в частности, при исследовании моделей типа «спрос-предложение» (см., например, [1, 2]), в которых функция предложения является решением задачи максимизации функции прибыли на технологическом множестве.

Рассмотрим открытую динамическую модель В.В. Леонтьева, а именно

$$\dot{x} = Ax + B\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\infty / \mathbb{R}^n$ и $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\infty / \mathbb{R}_+^n$ – вектор валовых выпусков отраслей и вектор непроеизводственного потребления соответственно. Знак "*" здесь и далее означает транспонирование. В исследуемой модели предполагается выполнение условия Хаукинса–Саймона (см. [3]), а именно, матрица прямых затрат $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ является продуктивной: $a_{ij} \in 0$, $i, j = \overline{1, n}$; $\exists v / \mathbb{R}_+^n \{ w / \mathbb{R}_+^n : w = Aw + v$. Кроме того, матрица прироста основных производственных фондов $B = bI$, $b > 0$, I – единичная матрица порядка n .

Допустимым управлением будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которой $u(t) / \mathbb{R}_+^n$ для п.в. t .

Технологическим множеством в момент времени T является множество

$$P_T = \{ (Ay; y) / y / \mathbb{R}_+^n : \\ \{ u(\cdot) / L[0; T], u(t) / \mathbb{R}_+^n \exists t \in [0; T], \\ y = x(T), \text{ где } x(\cdot) \text{ — решение (1), (2), соответствующее } u(\cdot) \} \}. \quad (3)$$

Очевидно, технологическое множество P_T в исследуемой модели является выпуклым конусом с вершиной в нуле. Для получения необходимых условий замкнутости технологического множества применяются результаты работы [4], посвященной исследованию топологических свойств множества достижимости линейных систем.

Рассмотрим объект, поведение которого описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Cx + Du, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (5)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\infty / \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор фазового состояния системы, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\infty / \mathbb{R}^n$ – n -мерный вектор управления, C , D – матрицы $n \times n$.

Допустимым управлением будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t)$, $t \in [0, T]$, для которой $u(t) / K$ для п.в. t , K – выпуклый конечнопорожденный конус, то есть

$$K = \left\{ v / \mathbb{R}^n : v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \lambda_i \in 0, u_i / \mathbb{R}^n, i = \overline{1, k} \right\}.$$

Здесь u_i – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$, причем $u_i \neq 0 \exists i = \overline{1, k}$.

Множеством достижимости D_T в момент времени T назовем множество всех точек из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти на отрезке времени $[0; T]$ из

точки $x(0) = 0$ по решениям системы уравнений (4) при всех возможных допустимых управлениях $u(\cdot)$:

$$D_T = \{y \in \mathbb{R}^n : \{u(\cdot) \in L^1[0; T], u(t) \in K \forall t \in [0; T],$$

$$y = x(T), \text{ где } x(\cdot) - \text{ решение (4), (5), соответствующее } u(\cdot)\}.$$

Определим матрицы:

$$D_i = C^{i-1} D, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следующая теорема дает условия, гарантирующие открытость множества $D_T \setminus \{0\}$.

Теорема 1. (см. [4]) Пусть для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\text{rang}\{D_1 u_i, D_2 u_i, \dots, D_n u_i\} = n.$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Заметим, что задача (1), (2) эквивалентна (4), (5), где $C = B^{-1}(I - A)$, $D = B^{-1}$, I – единичная матрица порядка n . Кроме того, для рассматриваемой задачи

$$u_1 = (1, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, u_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (6)$$

Применяя теорему 1 к исследуемой модели, учитывая (6), получаем необходимые условия замкнутости технологического множества в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем.

Теорема 2. Пусть в модели (1), (2) технологическое множество P_T замкнуто. Тогда выполнены следующие условия

i) если $n = 2$, то $a_{12}a_{21} = 0$;

ii) если $n = 3$, то существует такое $i \in \overline{1, 3}$, что

$$\tilde{a}_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{ki} = \tilde{a}_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki},$$

где

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - 1, \quad i \in \overline{1, 3}, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \overline{1, 3};$$

iii) если $n \in 4$, то

$$\begin{aligned} & \{i \in \overline{1, n}, \{ \alpha_j \in \mathbb{R}, j \in \overline{1, n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \neq 0, \\ & \exists s \in \overline{2, n} \alpha_1 b^{-2} \tilde{a}_{si} + \alpha_2 b^{-3} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{sk} \tilde{a}_{ki} + \\ & + \sum_{r=4}^n \alpha_r b^{-r} \sum_{k_l=1}^r \prod_{m=1, r-3}^r \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{s k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} = 0, \\ & l = \overline{1, r-2} \end{aligned}$$

где $\tilde{a}_{ii} = a_{ii} - 1, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \overline{1, n}.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3) из замкнутости технологического множества P_T следует замкнутость множества достижимости D_T . Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\{i = \overline{1, n} : rang\} D_1 u_i, D_2 u_i \dots, D_n u_i | < n. \quad (7)$$

Имеем

$$D_1 = b^{-1} I; \quad (8)$$

$$D_2 = B^{-1}(A - I)B^{-1} = (d_{2ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \\ d_{2ii} = b^{-2}(a_{ii} - 1), \quad i = \overline{1, n}, d_{2ij} = b^{-2}a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (9)$$

$$D_3 = (B^{-1}(I - A))^2 (B^{-1}) = B^{-1}(A - I)D_2 = (d_{3ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \\ d_{3ij} = b^{-3} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{kj}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (10)$$

$$D_r = (B^{-1}(I - A))^{r-1} (B^{-1}) = \\ = B^{-1}(A - I)D_{r-1} = (d_{rij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}, \\ d_{rij} = (-1)^{r-1} b^{-r} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=1, r-2}}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{ik_1} \tilde{a}_{k_{r-2} j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Тогда в силу (6) и (8) имеем

$$D_1 u_i = b^{-1} (1, 0, \dots, 0)^\infty, \quad i = \overline{1, n}; \quad (12)$$

в силу (6) и (9)

$$D_2 u_i = b^{-2} (\tilde{a}_{1i}, \tilde{a}_{2i}, \dots, \tilde{a}_{ni})^\infty, \quad i = \overline{1, n}; \quad (13)$$

в силу (6) и (10)

$$D_3 u_i = b^{-3} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{ki} \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{nk} \tilde{a}_{ki} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (14)$$

в силу (6) и (11)

$$D_r u_i = (-1)^{r-1} b^{-r} \begin{pmatrix} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=1, r-2}}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{ik_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=1, r-2}}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{2k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \dots \\ \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=1, r-2}}^r \prod_{m=1, r-3} \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{nk_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}. \quad (15)$$

Из (12) следует, что условие (7) эквивалентно следующему

$$\{i = \overline{1, n} : rang\} D_2 u_i \dots, D_n u_i | < n - 1. \quad (16)$$

В свою очередь условие (16) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\{i = \overline{1, n}, \{\alpha_j \neq 0, j = \overline{1, n-1} : \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^2 \neq 0, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D_{j+1} u_i = 0. \quad (17)$$

В силу (13)–(15) имеем

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D_{j+1} u_i = \alpha_1 b^{-2} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1i} \\ \tilde{a}_{2i} \\ \dots \\ \tilde{a}_{ni} \end{pmatrix} - \alpha_2 b^{-3} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{ki} \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki} \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{nk} \tilde{a}_{ki} \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{r=4}^n \alpha_{r-1} (-1)^{r-1} b^{-r} \begin{pmatrix} \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3}^m \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{1k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3}^m \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{2k_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \\ \dots \\ \sum_{l=1, r-2}^r \prod_{m=1, r-3}^m \tilde{a}_{k_m k_{m+1}} \tilde{a}_{nk_1} \tilde{a}_{k_{r-2} i} \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из (17) следует утверждение (iii) теоремы.

В случае двухсекторной модели экономики ($n=2$) имеем:

$$u_1 = (1, 0)^\infty, u_2 = (0, 1)^\infty,$$

$$D_1 u_1 = \begin{pmatrix} b^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, D_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{-1} \end{pmatrix},$$

$$D_2 u_1 = \begin{pmatrix} b^{-2} (a_{11} & 1) \\ b^{-2} a_{21} \end{pmatrix}, D_2 u_2 = \begin{pmatrix} b^{-2} a_{12} \\ b^{-2} (a_{22} & 1) \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$rang\} D_1 u_j, D_2 u_j | = \begin{cases} 1, & a_{ij} = 0, \\ 2, & a_{ij} \neq 0; \end{cases} \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение (i) теоремы.

Для случая трехсекторной модели экономики ($n=3$) имеем

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0)^\infty, \quad u_3 = (0, 0, 1)^\infty,$$

$$D_1 u_1 = \begin{pmatrix} b^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b^1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

$$D_2 u_1 = \begin{pmatrix} b^2(a_{11} \quad 1) \\ b^2 a_{21} \\ b^2 a_{31} \end{pmatrix}, \quad D_2 u_2 = \begin{pmatrix} b^2 a_{12} \\ b^2(a_{22} \quad 1) \\ b^2 a_{32} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$D_2 u_3 = \begin{pmatrix} b^2 a_{13} \\ b^2 a_{23} \\ b^2(a_{33} \quad 1) \end{pmatrix},$$

$$D_3 u_1 = \begin{pmatrix} b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k1} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k1} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k1} \end{pmatrix}, \quad D_3 u_2 = \begin{pmatrix} b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k2} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k2} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k2} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$D_3 u_3 = \begin{pmatrix} b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{1k} \tilde{a}_{k3} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{k3} \\ b^3 \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{k3} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} \quad 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Из (18) следует, что для любого $i = \overline{1, 3}$

$$\text{rang } \{D_1 u_i, D_2 u_i, D_3 u_i\} = \text{rang } \{D_2 u_i, D_3 u_i\} + 1.$$

В то же время, вследствие (19) и (20), $\exists i = \overline{1, 3} \quad \text{rang } \{D_2 u_i, D_3 u_i\} = 2$ тогда и только тогда, когда

$$\tilde{a}_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{3k} \tilde{a}_{ki} \neq \tilde{a}_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{a}_{2k} \tilde{a}_{ki}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда из теоремы 1 следует утверждение (ii) теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A. V., Pavlova N. G., Shananin A. A. New conditions for the existence of equilibrium prices // Yugoslav J. Operations Research. 2018. Vol. 28. № 1. P. 59-77.
2. Арутюнов А.В., Жуковский С.Е., Павлова Н.Г. Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 2. С. 225-237.
3. Hawkins D., Simon H. A. Some Conditions of Macroeconomic Stability // Econometrica. 1949. Vol. 17 (3/4). P. 245-248.

4. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 1564-1566.

Поступила в редакцию 11 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 17 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент Математического института им. С.М. Никольского; Московский физико-технический институт, доцент кафедры высшей математики; Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, старший научный сотрудник, лаборатория 06, e-mail: natasharussia@mail.ru

Для цитирования: Павлова Н.Г. Замкнутость технологического множества в динамических производственных моделях // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 666–673. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673

CLOSEDNESS OF THE TECHNOLOGY SET IN DYNAMICAL PRODUCTION MODELS

N. G. Pavlova

RUDN University

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

Moscow Institute of Physics and Technology

9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region 141701, Russian Federation

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

E-mail: natasharussia@mail.ru

Abstract. The paper is a study of some properties of the technology set in dynamical production models. The models under consideration are treated as a linear dynamical control systems, where the input is the non-productive consumption function, which takes values from a convex closed finitely generated cone.

Keywords: linear control systems; Leontief model; attainability set; technology set

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Pavlova N.G., Shananin A.A. New conditions for the existence of equilibrium prices. *Yugoslav J. Operations Research*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 59-77.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Pavlova N.G. Equilibrium price as a coincidence point of two mappings. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 2, pp. 158-169.
3. Hawkins D., Simon H.A. Some Conditions of Macroeconomic Stability. *Econometrica*, 1949, vol. 17 (3/4), pp. 245-248.
4. Arutyunov A.V., Pavlova N.G. O topologicheskikh svoystvakh mnozhestva dostizhimosti lineynykh sistem [On topological properties of the attainability set of linear systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 2, pp. 1564-1566. (In Russian).

Received 11 April 2018

Reviewed 17 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Pavlova Natal'ya Gennad'evna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Mathematics Institute named after S.M. Nikolsky; Moscow Institute of Physics and Technology, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics; V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Senior Researcher, Laboratory 06, e-mail: natasharussia@mail.ru

For citation: Pavlova N.G. Zamknutost' tekhnologicheskogo mnozhestva v dinamicheskikh proizvodstvennykh modelyakh [Closedness of the technology set in dynamical production models.]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 666–673. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-666-673 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678

УДК 517.925

ПРИЗНАКИ РЕГУЛЯРНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

≡ А. И. Перов, И. Д. Коструб

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

Аннотация. На основе прежних работ авторов указаны новые признаки регулярности и устойчивости векторно-матричных дифференциальных уравнений с переменной главной частью.

Ключевые слова: линейные векторно-операторные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами; ограниченные; почти периодические; асимптотически устойчивые решения; ограниченная функция Грина; интегральные и частотные постоянные

Введение

В книгах [1] и [2] изучались дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с неограниченными и, соответственно, ограниченными коэффициентами. В указанных книгах дифференциальные уравнения высшего порядка встречаются эпизодически; в книге [2] это, в основном, линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Одной из важных задач при изучении дифференциальных уравнений является вопрос об устойчивости решений. Если для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами этот вопрос изучен достаточно глубоко, уравнения в переменными коэффициентами представляют иногда трудно разрешимую задачу. Для уравнений с переменными коэффициентами В.М. Алексеевым [3] был предложен метод замороженных коэффициентов, подробно изученный для систем дифференциальных уравнений первого порядка в [4]. Авторы обнаружили много общего между их прежними исследованиями ограниченных решений дифференциальных уравнений высшего порядка [5] и методом замороженных коэффициентов. Полученные на этом пути простейшие результаты и составляют содержание этой статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и $\text{End } \mathbb{B}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathbb{B}$. В банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассмотрим линейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами

$$A_0(t)x^{(n)} + A_1(t)x^{(n-1)} + \dots + A_n(t)x = f(t), \quad (1)$$

где $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ – искомая векторная функция, а операторные функции $A_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathbb{B}$ (сильно) измеримые и ограниченные, более того, они имеют ограниченные колебания

$$A_j(t) - A_j(s) \leq l_{n-j}, \quad (t, s \in \mathbb{R}), \quad 0 \leq j \leq n, \quad (2)$$

где $l_0, l_1, \dots, l_n$ – некоторые неотрицательные числа. Предполагается также, что оператор $A_0(t)$ при каждом t обратим: $A_0^{-1}(t) \in \text{End } \mathbb{B}$.

О п р е д е л е н и е 1. При каждом фиксированном t операторный характеристический многочлен

$$L_n(t, \lambda) \leq A_0(t)\lambda^{(n)} + A_1(t)\lambda^{(n-1)} + \dots + A_n(t) : \mathbb{C} \rightarrow \text{End } \mathbb{B} \quad (3)$$

называется *нерезонансным*, если выполнено условие

$$L_n^{-1}(t, i\theta) \in \text{End } \mathbb{B}, \quad -\infty < \theta < +\infty. \quad (4)$$

Введем частотные и интегральные постоянные.

О п р е д е л е н и е 2. Частотные постоянные определяются следующим образом

$$\sigma_j(t) = \max_{-\infty < \theta < +\infty} (i\theta)^j L_n^{-1}(t, i\theta), \quad 0 \leq j \leq n \quad (5)$$

(в случае $j = n$ максимум нужно заменить на супремум).

Для удобства введем обозначение

$$\sigma_j = \sup_{-\infty < t < +\infty} \sigma_j(t), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (6)$$

В силу нерезонансного условия (3) уравнение (1) при каждом фиксированном t имеет операторную ограниченную функцию Грина, то есть функцию Грина задачи об ограниченных решениях $G(t, s)$.

О п р е д е л е н и е 3. Определим интегральные постоянные

$$\mathfrak{A}_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(j)}(t, s) ds, \quad 0 \leq j \leq n \quad (7)$$

(в случае $j = n$ нужно добавить к правой части $A_0^{-1}(t)$).

Для удобства введем обозначение

$$\mathfrak{x}_j = \sup_{\setminus < t < + \setminus} \mathfrak{x}_j(t), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (8)$$

Мы будем говорить, что выполнено частотное условие, если

$$q_\sigma = \sum_{j=0}^n l_j \sigma_j < 1 \quad (9)$$

и интегральное условие, если

$$q_{\mathfrak{x}} = \sum_{j=0}^n l_j \mathfrak{x}_j < 1, \quad (10)$$

где l_j взяты из (2).

Фиксируем некоторое t_0 и перепишем уравнение (1) в новом виде, оставив слева часть уравнения с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0(t_0)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1(t_0)\mathbf{x}^{(n-1)} + \dots + \mathbf{A}_n(t_0)\mathbf{x} = \mathbf{B}_0(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(t)\dot{\mathbf{x}} + \dots + \mathbf{B}_n(t)\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{f}(t), \quad (11)$$

где $\mathbf{B}_j(t) = \mathbf{A}_{n-j}(t_0) - \mathbf{A}_{n-j}(t)$, $0 \leq j \leq n$. Тогда в силу условия (2) имеем

$$\mathbf{B}_j(t) \geq l_j, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (12)$$

2. Основные результаты

Применение основных результатов работы [5] приводит к следующим теоремам.

Теорема 1. Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и выполнено интегральное условие (10).

Тогда при любой ограниченной измеримой векторной функции $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение вместе с производными до n -го порядка включительно, причем справедливы оценки

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\| \leq \frac{\mathfrak{x}_j}{1 - q_{\mathfrak{x}}} \|\mathbf{f}\|, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (13)$$

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство и выполнено частотное условие (9).

Тогда имеет место высказанное выше утверждение, а оценки приобретают вид

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\| \leq \frac{\sigma_j}{1 - q_\sigma} \|\mathbf{f}\|, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть операторные функции и свободный член в уравнении (1) являются почти периодическими функциями (операторные функции – в сильном смысле). Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство.

Тогда в условиях теоремы 1 для любой векторной почти периодической функции $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ уравнение (1) имеет единственное почти периодическое решение вместе с производными до n -го порядка включительно, причем справедливы оценки

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\| \leq \frac{\sigma_j}{1 - q_\sigma} \|\mathbf{f}\|, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (15)$$

причем, группа частот почти периодического решения содержится в группе частот уравнения (1).

В этой теореме была использована норма Безикевича почти периодической функции $\|f\| = \sqrt{\sum_k f_k^2}$, где $f_k \rightarrow \sum_k f_k e^{i\theta_k t}$ – ряд Фурье векторной почти периодической функции $f(t)$.

И, вероятно, самый главный результат.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 операторный характеристический многочлен $L_n(t, \lambda)$ при каждом фиксированном t является гурвицевым.

Тогда существующее в условиях теоремы 1 ограниченное решение $x(t)$ уравнения (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову, причем равномерно и экспоненциально в том смысле, что

$$x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \geq N e^{-\varepsilon(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k)}(s) - y^{(k)}(s), \quad 0 \leq j \leq n-1 \quad (16)$$

при $t \sim s$, где N, ε – некоторые положительные постоянные; здесь $y(t)$ – любое другое решение уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИИЛ, 1962. 832 с.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
3. Алексеев В.М. Оценка погрешности численного интегрирования // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 134. № 2. С. 247-250.
4. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
5. Перов А.И., Коструб И.Д. Об ограниченных решениях слабо нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n -го порядка // Сибирский математический журнал. Новосибирск, 2016. Т. 57. № 4. С. 830-849.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Коструб Ирина Дмитриевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Для цитирования: Перов А.И., Коструб И.Д. Признаки регулярности и устойчивости дифференциальных уравнений высшего порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 674-678. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678

SIGNS OF REGULARITY AND STABILITY OF DIFFERENTIAL
EQUATIONS OF HIGHER ORDER

A. I. Perov, I. D. Kostруб

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394006, Russian Federation
E-mail: anperov@mail.ru, ikostrub@yandex.ru

Abstract. On the basis of previous works of authors new signs of regularity and stability of vector-matrix differential equations with a variable main part are specified.

Keywords: higher order linear vector-operator differential equations with variable coefficients; bounded; almost periodic; asymptotically stable solutions; bounded green's function; integral and frequency constants

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 832 p. (In Russian).
2. Daletsky Yu.L., Krein M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).
3. Alekseyev V.M. Otsenka pogreshnosti chislennogo integrirvaniya [Error estimate of numerical integration]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1960, vol. 134, no. 2, pp. 247-250. (In Russian).
4. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskiy V.V. *Teoriya pokazateley Lyapunova i eye prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [Lyapunov Exponent Theory and Its Applications to Stability Issues]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian).
5. Perov A.I., Kostруб I.D. On bounded solutions to weakly nonlinear vector-matrix differential equations of order n . *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 650-665.

Received 16 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Perov Anatoly Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of System Analysis and Management, e-mail: anperov@mail.ru

Kostrub Irina Dmitrievna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of System Analysis and Management, e-mail: ikostrub@yandex.ru

For citation: Perov A.I., Kostруб I.D. Priznaki regul'yarnosti i ustoychivosti differentsial'nykh uravneniy vysshego por'yadka [Signs of regularity and stability of higher order differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 674–678. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-674-678 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684

УДК 517.92

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

≤ Г. Г. Петросян¹⁾, О. Ю. Королева²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

²⁾ МБОУ СОШ № 51 г. Воронеж
394019, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Загородная, 66
E-mail: korolevamatematika@mail.ru

Аннотация. В докладе приводится задача управляемости для дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве

Ключевые слова: дифференциальное включение дробного порядка; неподвижная точка; уплотняющее отображение; мера некомпактности

Введение

Исследование управляемых систем с нелинейными звеньями является важным разделом современной математической теории управления, имеющим многочисленные приложения (см. работы [1–3]). В свою очередь, развитие теории дифференциальных включений, связано с тем, что они являются удобным и естественным аппаратом для описания управляемых систем различных классов (см. статьи [4–6]). Один из наилучших аппаратов для изучения такого рода задач, предоставляют методы многозначного и нелинейного анализа, которые выделяются как очень мощные, эффективные и полезные (см. монографию [7]).

Мы будем рассматривать задачу управляемости для системы, описываемой полулинейным дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}y(t) \in G(y(t), F(t, y(t))) \quad y(t_0) = B y(t_0) + G(t_0, y(t_0)) \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) \in I, \quad y(T) \in J$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017 / 4.6).

с начальным условием:

$$y)1+[x_0, \quad)3+$$

где $D^\alpha, 1 < \alpha < 2$, – дробная производная Капуто, $A; D)A \rightarrow E \in E$ – линейный замкнутый оператор в E , порождающий ограниченную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, $t \in [0, \infty)$, $F; [0, T] \rightarrow E \rightarrow E$ – мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условиям:

)F2+ мультифункция $F(t, y)$; $[0, T] \rightarrow E$ допускает измеримое сечение для всех $y \in E$

)F3+ мультиотображение $F(t, y)$; $E \rightarrow E$ – полунепрерывно сверху (п.н.св.) для п. в. $t \in [0, T]$

)F4+ существует функция $w \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$ такая, что:

$$F(t, y) \in \{f \in E; \int_0^t \int_E |f(s, y)|^p ds dy \leq w(t)\} \text{ п. в. } t \in [0, T],$$

для всех $y \in E$

)F5+ существует функция $\mu \in L^1([0, T]; \mathbb{R}_+)$ такая, что для любого ограниченного множества $Q \subset E$, мы имеем:

$$\chi_E(Q) \leq \int_0^T \mu(s) ds \text{ п. в. } t \in [0, T],$$

где χ_E – мера некомпактности Хаусдорфа в E .

Начальное значение $x_0 \in E$ и функция управления $u \in L^p([0, T]; U)$, $p > 2/\alpha$, где U – гильбертово пространство управлений. Оператор $B; U \rightarrow E$ является ограниченным и линейным.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Интегральным решением задачи (1)–(2) на промежутке $[0, T]$ называется функция $y \in C([0, T]; E)$;

$$y(t) = x_0 + \int_0^t (s-t)^{\alpha-1} \{ f(s, y(s)) + B u(s) \} ds, \quad t \in [0, T],$$

где $f(s, y(s)) \in G(F(s, y(s)))$

$$T(t) = \int_0^t \xi_q(\theta) t^{\alpha-1} d\theta, \quad \{ \} (t) = \int_0^t \theta \xi_q(\theta) t^{\alpha-1} d\theta,$$

$$\xi_q(\theta) = \left(\frac{2}{q} \theta^{1-\frac{1}{q}} \Omega_q \right) \theta^{-1/q},$$

$$\Omega_q(\theta) = \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1} \theta^{-n} - \frac{n q}{n^2} \right) \right)^{1/q} \theta \in \mathbb{R}_+.$$

Наша основная задача управляемости может быть описана следующим образом.

Для заданного начального условия $x_0 \in E$ и заданного $x_1 \in E$ мы будем рассматривать существование решения $y \in C([1, T], E)$ задачи (1)–(2) и управления $u \in L^p(I, U)$ такого, что:

$$y(T) = x_1. \quad (4)$$

Сделаем стандартное предположение о разрешимости соответствующей линейной задачи управляемости, для этого будем полагать, что линейный оператор управления $W : L^p(I, U) \rightarrow E$ следующего вида:

$$Wu = \int_0^T \{ \varphi(s)T - s\varphi(s)T - s^{p-1}Bu \} ds,$$

имеет обратный ограниченный оператор $W^{-1} : E \rightarrow L^p(I, U)$ и удовлетворяет следующему условию регулярности:

На W найдется функция $\gamma \in L^1(I, E)$ такая, что для любого ограниченного множества $\Omega \rightarrow E$, мы имеем:

$$\chi_U(W^{-1}(\Omega)) \leq \gamma(t) \chi_E(\Omega) + \text{для п. в. } t \in [1, T],$$

где χ_U – мера некомпактности Хаусдорфа в U .

Рассмотрим мультиоператор $G : C([1, T], E) \rightarrow C([1, T], E)$:

$$G(y)(t) = \varphi(t)x_0 +$$

$$\int_0^t \varphi(s) \{ \varphi(s)y(s) + \varphi(s)f(s, y(s)) + BW^{-1}(x_1 - \varphi(t)x_0 - \int_0^t \varphi(s) \{ \varphi(s)y(s) + \varphi(s)f(s, y(s)) \} ds) \} ds.$$

Можно показать, что функция $y \in C([1, T], E)$ – интегральное решение задачи (1)–(3) на промежутке $[1, T]$, тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой мультиоператора G .

Теорема 1. Мультиоператор G является п.н.св.

Теорема 2. Мультиоператор G является уплотняющим относительно меры некомпактности в пространстве $C([1, T], E)$.

2. Основные результаты

Теорема 3. При выполнении условий $A_1, A_2, F_1, F_2, F_3, W$ множество решений задачи (1)–(3) на $[1, T]$ непусто и компактно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. P. 1-21.

3. *Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.

4. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.

5. *Петросян Г.Г.* О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 207-212.

6. *Petrosyan G.G.* On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж, 2016. С. 7-8.

7. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

Поступила в редакцию 9 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 15 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Королева Оксана Юрьевна, МБОУ СОШ № 51, г. Воронеж, Российская Федерация, учитель математики, e-mail: korolevamatematika@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684

ON A CONTROLLABILITY PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF CAPUTO

G. G. Petrosyan¹⁾, O. Yu. Koroleva²⁾

¹⁾ Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

²⁾ School No. 51
66 Zagorodnaya St., Voronezh 394019, Russian Federation
E-mail: korolevamatematika@mail.ru

Abstract. The paper gives the controllability problem for a differential inclusion of fractional order in a Banach space.

Keywords: differential inclusion of fractional order; fixed point; condensing map; measure of noncompactness

REFERENCES

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 269-292.
2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, pp. 1-21.
3. Obukhovskiy V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).
4. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviyem [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).
5. Petrosyan G.G. O nelokal'noy zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy v banakhovom prostranstve [On a nonlocal Cauchy problem for functional differential equations with fractional derivative in the banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 207-212. (In Russian).

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (Project No 1.3464.2017/4.6)

6. Petrosyan G.G. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* [Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry and Mathematical Education]. Voronezh, 2016, pp. 7-8. (In Russian).

7. Borisovich Yu.G., Guelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy B.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobazheniy i differentsial'nykh vklyucheniye* [Introduction to The Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

Received 9 April 2018

Reviewed 15 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Koroleva Oxana Yur'evna, School No. 51, Voronezh, the Russian Federation, Teacher of Mathematics, e-mail: korolevamatematika@mail.ru

For citation: Petrosyan G.G., Koroleva O.Yu. Ob odnoy zadache upravlyaemosti dlya differentsial'nogo vklyucheniya s drobnoy proizvodnoy Kaputo [On a controllability problem for a differential inclusion with fractional derivatives of Caputo]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 679–684. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-679-684 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695

УДК 517.935

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СБОРА ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

✉ Л. И. Родина

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87
E-mail: LRodina67@mail.ru

Аннотация. Исследуются модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные управляемой системой с импульсными воздействиями, зависящей от случайных параметров. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в моменты времени kd , $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) / \Omega$, $k = 1, 2, \dots$, что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Рассматриваемый ресурс $x / \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы производим добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания. Описана вероятностная модель конкуренции двух видов, для которой получены оценки средней временной выгоды от добычи ресурса, выполненные с вероятностью единица.

Ключевые слова: модель популяции, подверженной промыслу; средняя временная выгода; оптимальная эксплуатация

Введение

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях начали вызывать интерес ученых, начиная с семидесятых годов прошлого века (см. [1–3]). В одной из первых работ [2], посвященной данной тематике, показано, что стохастическую рыбную популяцию можно эксплуатировать до достижения определенного уровня, не зависящего от текущего размера популяции. Вопросы оптимальной эксплуатации популяций, заданных различными вероятностными моделями, в которых случайным воздействиям

подвержены размер популяции, коэффициент рождаемости или цена продукции, также рассматриваются в работах [4–7] (более подробный обзор литературы приведен в [7]).

Данная работа является продолжением [8, 9]. Мы рассматриваем модели динамики эксплуатируемой популяции, заданные управляемой системой с импульсными воздействиями, зависящей от случайных параметров. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$, а в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса

$$\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \approx [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к резкому (импульсному) уменьшению его количества. Ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd (исключением является последний параграф, где рассматривается случай $n = 1$).

Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку, если доли добываемого ресурса для одного или нескольких видов окажутся достаточно большими (не меньше, чем значения $(u_1(k), \dots, u_n(k)) = u(k) \in [0, 1]^n$ в момент kd). В этом случае определенная часть ресурса сохраняется с целью увеличения размера следующего сбора и доля извлеченного ресурса будет равна $\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)) \in [0, 1]^n$, где

$$\ell_i(k) = \begin{cases} \sum \omega_i(k), & \text{если } \omega_i(k) < u_i(k), \\ u_i(k), & \text{если } \omega_i(k) \geq u_i(k) \end{cases}$$

для любого $i = 1, \dots, n$. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \notin kd, \\ x_i(kd) &= (1 - \ell_i(k))x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{0.1}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Sigma &\doteq \{\sigma : \sigma \doteq (\omega(1), \dots, \omega(k), \dots) \mid \omega(k) \in \Omega; \\ U &\doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots) \mid u(k) \in [0, 1]^n. \end{aligned}$$

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, зависящее от долей ресурса $\ell(1), \dots, \ell(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$, $Y(k) = \sum_{i=1}^n X_i(k) \ell_i(k)$ — общее количество собранного ресурса. Для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ введем в рассмотрение функцию

$$H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \doteq \lim_{k \uparrow} \frac{1}{k} \int_1^k Y(j) \, dj, \quad (0.2)$$

которую назовем *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^{\rightarrow} \sigma, \bar{u}, x(0) \{$ и, если выполнено равенство $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ = H^{\rightarrow} \sigma, \bar{u}, x(0) \{$, то определим предел

$$H \sigma, \bar{u}, x(0) \{ \doteq \lim_{k \uparrow} \frac{1}{k} \int_1^k Y(j) \, dj.$$

В данной работе получены оценки средней временной выгоды на примере вероятностной модели конкуренции двух видов. Мы описываем способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и приводим оценки функции (0.2), выполненные с вероятностью единица.

1. Оценки средней временной выгоды в случае $n = 1$

Для оценки функции $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{$ сформулируем результаты, полученные в работе [9] для случая $n = 1$. Сначала приведем краткое описание вероятностной модели, заданной управляемой системой со случайными параметрами (0.1).

Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$, где $\Omega \approx [0, 1]$, $\mathfrak{A}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω , на которой определена вероятностная мера μ . Рассмотрим множество последовательностей $\Sigma \doteq \{ \sigma : \sigma = (\omega(1), \dots, \omega(k), \dots) \}$, где $\omega(k) \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{ \sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \dots, \omega(k) \in A(k) \}, \text{ где } A(j) \in \mathfrak{A}, j = 1, 2, \dots, k$$

и определим меру $\mu(E_k) = \mu(A(1)) \times \dots \times \mu(A(k))$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [10]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры μ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$. Таким же образом строится вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ в случае, когда $\Omega \approx [0, 1]^n$.

Определим $\varphi(t, x)$ как решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geq 0$, $x \geq 0$. Если $f(K) = 0$, то уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет решение $\varphi(t) \subseteq K$; если $f(K) < 0$, то данное решение асимптотически устойчиво (см. [11, с. 30]). Напомним, что областью асимптотической устойчивости (областью притяжения) решения $\varphi(t) \subseteq K$ уравнения $\dot{x} = f(x)$ является множество всех точек $x \in \mathbb{R}$, обладающих свойством $\lim_{t \uparrow} \varphi(t, x) = K$.

Обозначим через $X(k)$ количество ресурса до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, тогда

$$H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_1^k X(j) \ell(j) \cdot$$

Рассмотрим функцию

$$\ell(\omega, u) = \begin{cases} \sum \omega, & \text{если } \omega < u, \\ u, & \text{если } \omega \geq u, \end{cases}$$

которая является случайной величиной на множестве Ω . Математическое ожидание случайной величины $\ell(\omega, u)$ будем обозначать $M\ell$.

Теорема 1.1. Пусть $\mu(0) < 1$. Предположим, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \subseteq K$, областью притяжения которого является интервал (K_1, K_2) , где $0 \leq K_1 < K < K_2 \leq +\infty$. Тогда для любых $x \in (K_1, K)$ и $x(0) \in (K_1, K_2)$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что неравенства

$$\varphi(d, x) M\ell \leq H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ \leq K M\ell \quad (1.1)$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

2. Оценка средней временной выгоды для вероятностной модели конкуренции двух видов

Основным объектом исследования в данной работе является модель, представляющая собой конкуренцию двух видов, численности которых равны x_1, x_2 . Каждый из видов размножается в соответствии с логистическим законом, а при встрече численность как одного, так и другого вида уменьшается:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1^2 - ax_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_2^2 - bx_1x_2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В моменты времени kd производится добыча ресурса таким образом, что извлекается некоторая доля $\omega_i(k)$ от количества ресурса каждого из видов до сбора $x_i(kd - 0)$, $i = 1, 2$, тогда количество оставшегося ресурса после сбора равно

$$x_i(kd) = (1 - \omega_i(k)) x_i(kd - 0), \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где $(\omega_1(k), \omega_2(k)) = \omega(k) \in [0, 1]^2$.

Предполагаем, что $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$; тогда система (2.1) имеет четыре стационарных состояния: $(0, 0)$ — неустойчивый узел, $(0, 1)$ и $(1, 0)$ — седло и

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{ab}}, \frac{1}{1 + \frac{b}{ab}} \right) \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

— устойчивый узел. Из условий $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$ следует, что $ab < 1$, то есть выполнено условие сосуществования двух конкурирующих видов (см. [11, с. 147]).

Пусть $A = \frac{1}{1-a} \frac{ab}{a}$ и функция $\varphi(t, y)$ является решением уравнения $\dot{y} = y - Ay^2$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, y) = y$, где $t \geq 0$, $y \geq 0$. Положим

$$\omega \doteq \min(\omega_1, \omega_2), \quad \ell(\omega, u) \doteq \ell(\omega, u) = \begin{cases} \sum \omega, & \text{если } \omega < u, \\ u, & \text{если } \omega \geq u. \end{cases}$$

Определим $\mathbb{R}_+^2 \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$.

Теорема 2.1. Пусть $\mu(\omega = 0) < 1$. Тогда для любых $y \in (0, 1/A)$ и $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что неравенства

$$\frac{2}{1-a} \frac{a}{a} \frac{b}{b} \varphi(d, y) M \ell \leq H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \left\{ \leq \frac{2}{1-a} \frac{a}{a} \frac{b}{b} M \ell \right. \quad (2.3)$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Доказательство. Напомним, что через $X_i(k)$ мы обозначаем количество ресурса i -го вида до сбора, через $x_i(k)$ будем обозначать соответственно количество ресурса i -го вида после сбора в момент времени kd , тогда $x_i(k) = (1 - \ell_i(k))X_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим луч γ на плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящий через начало координат и особую точку x^* ; его можно задать уравнением $x_2 = px_1$, где $p = \frac{1}{1-a} \frac{b}{a}$, $x_1 > 0$. Пусть точка x является пересечением луча γ и прямой, проходящей через особые точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$; тогда

$$x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{1+p}, \frac{p}{1+p} \right).$$

Представим множество $\mathbb{R}_+^2$ в виде объединения четырех непересекающихся множеств:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^2 &= D_0 \cup \{ D_1 \cup \{ D_2 \cup \gamma, \text{ где } D_0 = D_{01} \cup D_{02}, \\ D_{01} &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in (0, x_2), x_2 < px_1\}, D_{02} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (0, x_1), x_2 > px_1\}, \\ D_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq x_2, x_2 < px_1\}, D_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq x_1, x_2 > px_1\}. \end{aligned}$$

Строим управление в зависимости от того, в каком из указанных множеств находится начальная точка $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}_+^2$. Пусть сначала $x(0) \in D_0$. Несложно показать, что если $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 1)$, то $x_1 < x_1^*$, $x_2 < x_2^*$, поэтому существует $O_\varepsilon(x^*)$ — окрестность точки x^* радиусом $\varepsilon > 0$, не пересекающая множество D_0 . Полагаем $u(k) = (0, 0)$ при $k < k_0$, где $k_0 = k_0(x(0))$ — наименьшее из натуральных чисел, при которых точка $x(k) = (x_1(k), x_2(k))$ не принадлежит множеству D_0 . Такое k_0 существует, так как с течением времени траектория любой начальной точки $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ попадает в окрестность $O_\varepsilon(x^*)$. Это означает, что мы не производим отлов ни одного из видов до тех пор, пока их количество не увеличится достаточным образом. При таком управлении $x(k_0) \in D_1$ либо $x(k_0) \in D_2$ (в зависимости от расположения начальной точки $x(0)$, которая может находиться в области D_{01} либо в D_{02}).

Рассмотрим случай, когда $x(k_0) \notin D_1$; здесь мы строим управление таким образом, чтобы ловить только x_1 — первый из двух видов, составляющих популяцию. То есть мы полагаем, что $u(k) = (1, 0)$ (тогда $\ell(k) = (\omega_1(k), 0)$) до наименьшего момента времени $k_1 d$, $k_1 > k_0$, при котором точка $x(k_1)$ окажется выше луча γ . При пересечении траекторией системы (2.1), (2.2) луча γ изъятие ресурса прекращаем, чтобы фазовая точка оказалась на данном луче. В работе [9] показано, что такой момент времени k_1 существует с вероятностью единица. Понятно, что если $x(k_0) \notin D_2$, то управление строится аналогичным образом, чтобы производить отлов из популяции только особей второго вида x_2 .

Пусть теперь $x(k_1) \in \gamma$, то есть $x_2(k_1) = p x_1(k_1)$. В этом случае траектория решения системы (2.1) принадлежит лучу γ и, если не производить извлечение ресурса, то данная траектория будет приближаться к особой точке x^* ; следовательно, $X_2(k_1) = p X_1(k_1)$. Покажем, что движение точки x_1 по этой траектории удовлетворяет уравнению $\dot{x}_1 = x_1 - A x_1^2$. Действительно, если $x_2 = p x_1$, то

$$\dot{x}_1 = x_1 - A x_1^2 \quad a p x_1^2 = x_1 \quad (1 + a p) x_1^2 = x_1 - A x_1^2.$$

Аналогично, x_2 удовлетворяет уравнению $\dot{x}_2 = x_2 - B x_2^2$, где $B = \frac{1}{1} \frac{a b}{b}$.

Пусть $x_1(k_1) \in [y, 1/A]$, тогда $\varphi(d, x_1(k_1)) \geq \varphi(d, y)$. Для всех $k \geq k_1 + 1$ определим

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \min(\omega_1(k), \omega_2(k)), \\ u(k) &= u_1(k) = u_2(k) = 1 - \frac{y}{\varphi(d, y)}, \\ \ell(k) &= \ell(\omega(k), u(k)). \end{aligned}$$

Тогда $x(k_1 + 1) = 1 - \ell(k_1 + 1) \{X(k_1) \in \gamma\}$ и, следовательно, $x(k) \in \gamma$ для всех $k \geq k_1 + 1$. Далее, из неравенства $\ell(k) \leq u(k)$, $k \geq k_1 + 1$, получаем

$$\begin{aligned} x_1(k_1 + 1) &= 1 - \ell(k_1 + 1) \{X_1(k_1) \geq 1 - u(k_1 + 1) \{X_1(k_1) = \\ &= \frac{y}{\varphi(d, y)} X_1(k_1) \geq \frac{y}{\varphi(d, x_1(k_1))} X_1(k_1) = y, \end{aligned}$$

поэтому $x_2(k_1 + 1) \geq p y$. Так же можно показать, что $x_1(k) \geq y$ и $x_2(k) \geq p y$ для всех $k \geq k_1 + 1$. Если $x_1(k_1) \in (0, y) \setminus (1/A, +\infty)$, то управления $u(k)$ строим как в случае $n = 1$ (см. доказательство теоремы 1.1 в работе [9]), добавляя условие $u_1(k) = u_2(k)$, $k \geq k_1 + 1$.

Отметим, что уравнения $\dot{x}_1 = x_1 - A x_1^2$ и $\dot{x}_2 = x_2 - B x_2^2$ имеют асимптотически устойчивые решения $\varphi_1(t) \subseteq 1/A$ и $\varphi_2(t) \subseteq 1/B$ соответственно, областью притяжения каждого из которых являются интервалы $(0, +\infty)$. Поэтому для дальнейшего доказательства можно применить теорему 1.1. Пусть

$$H_{i \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_1^k X_i(j) \ell_i(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \int_{k_1+1}^k X_i(j) \ell(j), \quad i = 1, 2,$$

тогда $H_{i \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ = H_{i \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(k_1 + 1)} \{$, где $x(k_1 + 1) / \gamma$ и

$$H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ = H_{1 \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(k_1 + 1)} \{ + H_{2 \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(k_1 + 1)} \{.$$

Из (1.1) следует, что для любого $y / (0, 1/A)$ при почти всех σ / Σ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(d, y)M\ell &\leq H_{1 \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(k_1 + 1)} \{ \leq \frac{M\ell}{A}, \\ p\varphi(d, y)M\ell &\leq H_{2 \rightarrow \sigma, \bar{u}, x(k_1 + 1)} \{ \leq \frac{M\ell}{B}, \end{aligned}$$

при сложении которых получаем (2.3).

Пример 2.1. Найдем оценки средней временной выгоды для системы с импульсным воздействием (2.1), (2.2), в которой $a=0,5$, $b=0,4$; следовательно, $A=1,6$. Пусть $d = \ln 10$ и $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ имеет равномерное распределение в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

Выпишем $\varphi(t, y) = \frac{e^t y}{Ay(e^t - 1) + 1}$ — решение уравнения $\dot{y} = y - Ay^2$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, y) = y$; тогда

$$u = 1 - \frac{y}{\varphi(d, y)} = (1 - e^{-d})(1 - Ay) = 0,9(1 - 1,6y).$$

Найдем функцию распределения для $\omega = \min(\omega_1, \omega_2)$ при $t / [0, 1]$:

$$G_{\bar{\omega}}(t) = 1 - \mu(\omega > t) = 1 - \mu(\omega_1 > t, \omega_2 > t) = 1 - (1 - t)^2 = 2t - t^2,$$

тогда плотность этого распределения равна $g_{\bar{\omega}}(t) = 2 - 2t$ при $t / [0, 1]$ и $g_{\bar{\omega}}(t) = 0$ при остальных значениях t . Случайная величина $\ell = \ell(\omega, u)$ — смешанного типа, поэтому ее математическое ожидание находится следующим образом:

$$M\ell = \int_0^u t g_{\bar{\omega}}(t) dt + u(1 - G_{\bar{\omega}}(u)) \{ = u - u^2 + \frac{u^3}{3}.$$

После стандартных вычислений получаем, что функция $\varphi(d, y)M\ell$ достигает наибольшего значения при $y \approx 0,24$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 значение средней временной выгоды для почти всех σ / Σ удовлетворяет неравенствам

$$0,35 \leq H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{ \leq 0,41. \quad (2.4)$$

Управление $\bar{u} / U$, при котором выполнено последнее неравенство, строим так же, как при доказательстве теоремы 2.1.

Отметим, что задача оценивания функции $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)} \{$ сводится к одномерному случаю, для которого можно получить более точную оценку, чем (2.4). Соответствующие результаты приведены в следующем параграфе.

3. О существовании предела средней временной выгоды в случае $n = 1$

Приведем оценки функции $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{$ и условия, при которых с вероятностью единица существует положительный предел $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{$.

Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \geq 0$, $x \geq 0$. Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_m \doteq (\omega(1), \dots, \omega(m))$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_m = A_m(\sigma_m, x)$, $B_m = B_m(\sigma_m, x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \varphi(d, x), \quad A_{k+1} = \varphi(d, (1 - \ell_k)A_k); \\ B_1 &= K, \quad B_{k+1} = \varphi(d, (1 - \ell_k)B_k), \quad k = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Здесь

$$\ell_k = \ell_k(\sigma_k, x) = \begin{cases} \sum \omega(k), & \text{если } \omega(k) < u(k), \\ u(k), & \text{если } \omega(k) \geq u(k), \end{cases} \quad (3.1)$$

$u(k) = 1 - \frac{x}{A_k(\sigma_k, x)}$; $\ell_m = \ell_m(\sigma_m, x)$ также определим равенством (3.1).

Теорема 3.1. Пусть $\mu(0) < 1$. Предположим, что уравнение $\dot{x} = f(x)$ имеет асимптотически устойчивое решение $\varphi(t) \subseteq K$, областью притяжения которого является интервал (K_1, K_2) , где $0 \leq K_1 < K < K_2 \leq +\infty$. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $x \in (K_1, K)$ и $x(0) \in (K_1, K_2)$ существует управление $\bar{u} \in U$ такое, что неравенства

$$\frac{1}{m} \int_{j=1}^m M(A_k \ell_k) \leq H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{ \leq H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{ \leq \frac{1}{m} \int_{j=1}^m M(B_k \ell_k).$$

выполнены для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Теорема 3.2. Предположим, что выполнены условия теоремы 3.1 и $f'(x) < 0$ при $x \in (L_1, L_2)$, где $K_1 < L_1 < K < L_2$. Тогда для любых $x \in (L_1, K)$ и $x(0) \in (K_1, K_2)$ при некотором управлении $\bar{u} \in U$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует положительный предел

$$H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{ = \lim_{k \uparrow} M(A_k \ell_k) = \lim_{k \uparrow} M(B_k \ell_k),$$

не зависящий от начального значения $x(0) \in (K_1, K_2)$.

Доказательство этих результатов в более общем случае, когда длины интервалов между моментами импульсов $\tau(k)$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, приведено в работе [12].

Заключение

Таким образом, для вероятностной модели конкуренции двух видов построено управление $\bar{u} \in U$, которое обеспечивает сохранность обоих видов x_1 и x_2 и оценку средней временной выгоды (2.3). Можно предложить другие способы построения $\bar{u} \in U$, а потом из данных управлений выбрать то, при котором оценка снизу функции $H_{\rightarrow \sigma, \bar{u}, x(0)}\{$ максимальная. Заметим также, что описанным способом можно построить управление $\bar{u} \in U$ для различных систем, имеющих одно стационарное асимптотически устойчивое состояние x^* с положительными координатами $x_1^* > 0, \dots, x_n^* > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glaiv A.* Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth // Mathematical Biosciences. 1978. Vol. 41. P. 111-123.
2. *Reed W.J.* Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models // Journal of Environmental Economics and Management. 1979. Vol. 6. P. 350-363.
3. *Lewis T.R.* Exploitation of a renewable resource under uncertainty // Canadian Journal of Economics. 1981. Vol. 14. P. 422-439.
4. *Ryan D., Hanson F.B.* Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps // J. Math. Biol. 1986. Vol. 24. P. 259-277.
5. *Kapaun U., Quaas M.F.* Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? // Economics Working Paper. 2012. Vol. 9. P. 1-40.
6. *Hansen L.G., Jensen F.* Regulating fisheries under uncertainty // Resource and Energy Economics. 2017. Vol. 50. P. 164-177.
7. *Jensen F., Frost H., Abildtrup J.* Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information // Marine Policy. 2017. Vol. 21. P. 167-178.
8. *Родина Л.И.* Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48-58.
9. *Родина Л.И., Тютеев И.И.* Об оценке средней временной выгоды в вероятностных эколого-экономических моделях // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25. Вып. 3. С. 257-267.
10. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.
11. *Ризниченко Г.Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. Ч. 1. 232 с.
12. *Родина Л.И.* Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 2. С. 213-221.

Поступила в редакцию 25 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 28 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Родина Людмила Ивановна, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, e-mail: LRodina67@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695

ABOUT ONE STOCHASTIC HARVESTING MODEL OF A RENEWED RESOURCE

L. I. Rodina

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation
E-mail: LRodina67@mail.ru

Abstract. We investigate the models of dynamics of the harvested population, given by the control systems with impulse influences depending on random parameters. We assume that in the absence of harvesting population development is described by system of the differential equations $\dot{x} = f(x)$ and in time moments kd , $d > 0$ from population are taken some random share of a resource $\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) / \Omega$, $k = 1, 2, \dots$, that leads to sharp (impulse) reduction of its quantity. Considered resource $x / \mathbb{R}_+^n$ is non-uniform, that is or it consists of separate kinds $x_1, \dots, x_n$, or it is divided on n age groups. In particular, it is possible to assume that we make harvesting of n various kinds of fishes between which there are competition relations for food or dwelling places. We describe the probability model of a competition of two kinds for which we receive the estimations of average time benefit from the resource extraction, fulfilled with probability one.

Keywords: model of the population subject to a craft; average time profit; optimal exploitation

REFERENCES

1. Gkait A. Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth. *Mathematical Biosciences*, 1978, vol. 41, pp. 111-123.
2. Reed W.J. Optimal escapement levels in stochastic and deterministic harvesting models. *Journal of Environmental Economics and Management*, 1979, vol. 6, pp. 350-363.
3. Lewis T.R. Exploitation of a renewable resource under uncertainty. *Canadian Journal of Economics*, 1981, vol. 14, pp. 422-439.
4. Ryan D., Hanson F.B. Optimal harvesting of a logistic population with stochastic jumps. *J. Math. Biol.*, 1986, vol. 24, pp. 259-277.
5. Kapaun U., Quaas M.F. Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties? *Economics Working Paper*, 2012, vol. 9, pp. 1-40.
6. Hansen L.G., Jensen F. Regulating fisheries under uncertainty. *Resource and Energy Economics*, 2017, vol. 50, pp. 164-177.
7. Jensen F., Frost H., Abildtrup J. Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information. *Marine Policy*, 2017, vol. 21, pp. 167-178.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00346).

8. Rodina L.I. Optimizatsiya sredney vremennoy vygody dlya veroyatnostnoy modeli populyatsii, podverzhennoy promyslu [Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 48-58. (In Russian).
9. Rodina L.I., Tyuteev I.I. Ob otsenke sredney vremennoy vygody v veroyatnostnykh ekologiko-ekonomicheskikh modelyakh [On Estimation of an Average Time Profit in Probabilistic Environmental and Economic Models]. *Modelirovaniye i analiz informatsionnykh system – Modeling and Analysis of Information Systems*, 2018, vol. 25, no. 3, pp. 257-267. (In Russian).
10. Shiryaev A.N. *Veroyatnost'* [Probability]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 574 p. (In Russian).
11. Riznichenko G.Yu. *Leksii po matematicheskim modelyam v biologii. Ch. 1.* [Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1]. Izhevsk, Scientific-Publishing Centre "Regular and Chaotic Dynamics", 2002, 232 p. (In Russian).
12. Rodina L.I. Svoystva sredney vremennoy vygody v stokhasticheskikh modelyakh sbora vozobnovlyayemogo resursa [Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 213-221. (In Russian).

Received 25 April 2018

Reviewed 28 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Rodina Lyudmila Ivanovna, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, e-mail: LRodina67@mail.ru

For citation: Rodina L.I. Ob odnoy stokhasticheskoy modeli sbora vozobnovlyayemogo resursa [About one stochastic harvesting model of a renewed resource]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 685–695. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-685-695 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706

УДК 517.929

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

≈ Т. Л. Сабатулина

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: TSabatulina@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются несколько нелинейных уравнений, являющихся моделями динамики популяций и кроветворения. Для этих уравнений получены признаки осцилляции решений относительно нетривиального положения равновесия.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; уравнение Хатчинсона; уравнение Ласоты–Важевски; уравнение Николсона; сосредоточенное запаздывание; распределенное запаздывание

Введение

Для моделирования различных процессов в биологии широко используются функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ). В частности, модели Хатчинсона и Николсона используются для описания динамики популяции, модель Ласоты–Важевски — для описания процессов кроветворения. Учет эффекта «последствия» позволяет описывать динамику популяций более глубоко и точно. В отличие от моделей, в которых используются обыкновенные дифференциальные уравнения, моделям с ФДУ свойственна осцилляция решений, что подтверждается эмпирически. Именно поэтому нас будут интересовать условия осцилляции решений указанных моделей относительно нетривиального положения равновесия.

1. Предварительные сведения

Будем называть определенную на положительной полуоси непрерывную функцию *осциллирующей*, если она имеет на полуоси неограниченную справа последовательность нулей. Уравнение назовем *осциллирующим*, если все его решения осциллируют.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (задание №1.5336.2017/8.9) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 \int_0^h f(x(t-s)) dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

где $b_0, b_1, h \in \mathbb{R}_+$, функция $r : [0, h] \in \mathbb{R}_+$ непрерывна слева, не убывает, $r(0) = 0$, функция f непрерывно дифференцируема, функция f^∞ локально ограничена в существенном, решение x при отрицательном значении аргумента доопределено ограниченной непрерывной функцией.

Для уравнения (1.1) справедлив следующий результат.

Теорема 1.1 ([1]). Пусть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ уравнение

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + (1 - \varepsilon)b_1 \int_0^h x(t-s) dr(s) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.2)$$

является осциллирующим, то уравнение (1.1) также является осциллирующим.

Таким образом, с помощью теоремы 1.1 задача исследования осцилляции решений нелинейного уравнения сводится к изучению осцилляции решений линейного уравнения.

Приведем несколько известных признаков осцилляции, причем будем разделять и учитывать случаи сосредоточенного и распределенного запаздывания.

Теорема 1.2 ([2, 3, p. 40, Corollary 2.2.1]). Уравнение

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 x(t - \tau) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $(b_1 \tau, b_0 \tau) \in D_1$, где $D_1 = \{(u, v) : u > e^{-v-1}\}$.

Следствие 1.1 ([4, 5]). При $b_0 = 0$ уравнение (1.3) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b_1 \tau > \frac{1}{e}$.

На рис. 1 множество D_1 закрашено.

В декартовой системе координат $Ouvw$ зададим параметрически поверхность $u = \omega(v, w)$:

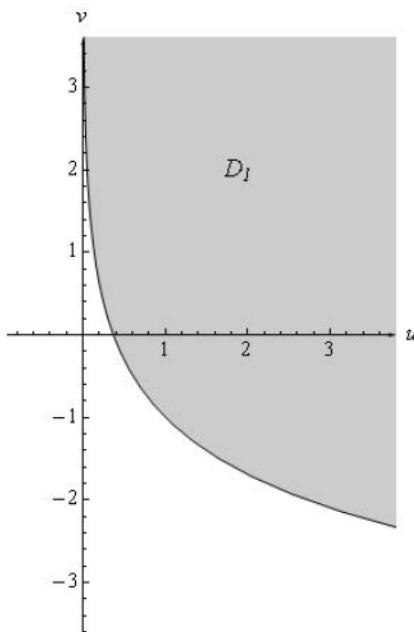
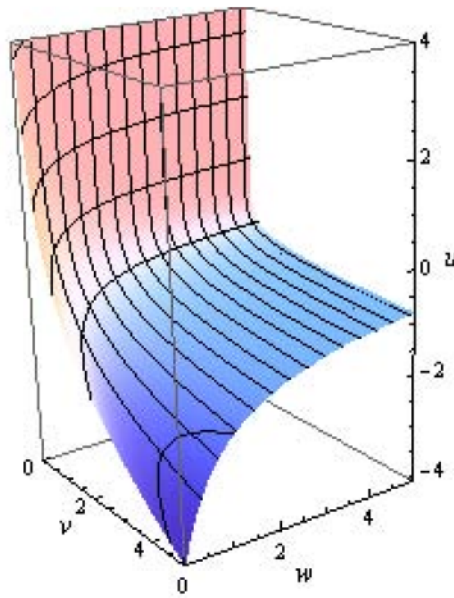
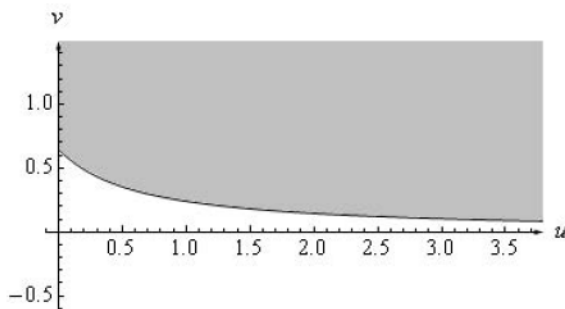
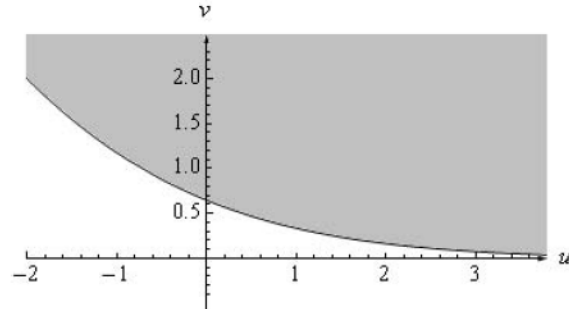
$$\left\{ u = \zeta + \frac{\zeta - 1 - e^\zeta}{e^\zeta(\zeta(w+1) - 1) + (1 - \zeta w)}, v = \frac{\zeta^2 e^{-\zeta w}}{e^\zeta(\zeta(w+1) - 1) + (1 - \zeta w)} \int, \zeta \in \mathbb{R}, w \geq 0. \right.$$

Обозначим через D_2 область, определенную неравенствами $u > \omega(v, w)$, $w \geq 0$. На рис. 2 изображена поверхность $u = \omega(v, w)$, множество D_2 расположено выше нее.

Теорема 1.3 ([6–8]). Уравнение

$$\dot{x}(t) + b_0 x(t) + b_1 \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} x(s) ds = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.4)$$

является осциллирующим тогда и только тогда, когда $(b_0 h, b_1 h^2, \frac{\tau}{h}) \in D_2$.

Рис. 1: Множество D_1 Рис. 2: Множество D_2 (расположено выше поверхности)Рис. 3: Множество $v > \psi(u)$ Рис. 4: Множество $v > \omega(u)$

Зададим параметрически функцию $v = \psi(u)$:

$$u = \frac{2}{\zeta} \frac{1}{1 - e^{-\zeta}}, \quad v = \frac{\zeta^2 e^{2 + \frac{\zeta}{1 - e^{-\zeta}}}}{e^{\zeta} - 1}, \quad \zeta \in (0, \zeta_0],$$

где ζ_0 — положительный корень уравнения $e^{-\zeta} = 1 - \frac{\zeta}{2}$. На рис. 3 изображена функция $v = \psi(u)$, множества $v > \psi(u)$ закрашено.

Следствие 1.2. При $b_0 = 0$ уравнение (1.4) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b_1 h^2 > \psi \left(\frac{\tau}{h} \right)$.

Зададим параметрически функцию $v = \omega(u)$:

$$u = \zeta + \frac{\zeta - 1}{e^{\zeta}(\zeta - 1) + 1}, \quad v = \frac{\zeta^2}{e^{\zeta}(\zeta - 1) + 1}, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

На рис. 4 изображена функция $v = \omega(u)$, множество $v > \omega(u)$ закрашено.

Следствие 1.3. При $\tau = 0$ уравнение (1.4) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b_1 h^2 > \omega(b_0 h)$.

Следствие 1.4. При $b_0 = 0$ и $\tau = 0$ уравнение (1.4) является осциллирующим тогда и только тогда, когда $b_1 h^2 > b^* = \zeta_0(2 - \zeta_0)$.

Заметим, что $b^* \rightarrow 0.64$, $\zeta_0 \rightarrow 1.59$.

Далее исследуем уравнения Хатчинсона, Ласоты–Важевски и Николсона как с сосредоточенным, так и с распределенным запаздыванием. Несмотря на существенные биологические различия моделей, исследование осцилляции указанных моделей можно провести по единой схеме. В результате изучения нелинейных ФДУ, которыми описываются перечисленные выше модели, сводится к исследованию линейных ФДУ с сосредоточенным или распределенным запаздыванием, признаки осцилляции для которых известны.

2. Уравнение Хатчинсона

Первая широко известная математическая модель в биологии, учитывающая запаздывание по времени, по-видимому, была предложена Дж. Хатчинсоном в 1948 г. [9]. Эта модель описывает динамику популяции в условиях ограниченности ресурсов. Рассмотрим уравнение Хатчинсона с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = r \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

и с распределенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = r \left(1 - \frac{1}{hK} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} N(s) ds \right) N(t), \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

В обоих уравнениях $N(t)$ — величина популяции в момент времени t , K — максимальное число особей, способных прокормиться при заданном количестве пищи, r — коэффициент прироста популяции, τ, h — запаздывания по времени, то есть $r, K, h > 0$, $\tau \geq 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ .

Каждое из уравнений (2.1)–(2.2) имеет единственное ненулевое положение равновесия $N^* = K$.

С помощью замены $N(t) = K e^{x(t)}$ перейдем от уравнений (2.1)–(2.2) к уравнениям

$$\dot{x}(t) = r f(x(t-\tau)), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{r}{h} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} f(x(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Положение равновесия N^* уравнений (2.1)–(2.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (2.3)–(2.4).

Лемма 2.1 ([1]). Пусть $r\tau > \frac{1}{e}$. Тогда уравнение (2.3) является осциллирующим.

Доказательство. Очевидно, что справедливы предположения теоремы 1.1, так как для функции $f(x) = 1 - e^{-x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$.

Из $r\tau > \frac{1}{e}$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $(1 - \varepsilon)r\tau > \frac{1}{e}$. Значит, по следствию 1.1 уравнение $\dot{x}(t) + (1 - \varepsilon)rx(t - \tau) = 0$ является осциллирующим.

Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (2.3) является осциллирующим. $\square$

Возвращаясь к уравнению (2.1), получаем следующий результат.

Теорема 2.1 ([1]). Пусть $r\tau > \frac{1}{e}$. Тогда функция $N(t) \leq K$, где N — решение уравнения (2.1), осциллирует при любых φ .

Аналогично получаются результаты для уравнения Хатчинсона с распределенным запаздыванием.

Лемма 2.2. Пусть $\frac{\tau}{h} > \psi(rh)$. Тогда уравнение (2.3) является осциллирующим.

Теорема 2.2. Пусть $rh > \psi\left(\frac{\tau}{h}\right)$. Тогда функция $N(t) \leq K$, где N — решение уравнения (2.2), осциллирует при любых φ .

Следствие 2.1. Пусть $\tau = 0$, $rh > b^+$. Тогда функция $N(t) \leq K$, где N — решение уравнения (2.2), осциллирует при любых φ .

3. Уравнение Ласоты–Важевски

Уравнение Ласоты–Важевски описывает процесс производства красных кровяных телец (эритроцитов), данная модель была предложена в работе [10].

Пусть $N(t)$ — количество эритроцитов в момент времени t . Допустим, что коэффициент их разрушения в единицу времени не зависит от времени и возрастной структуры, а скорость разрушения эритроцитов пропорциональна их количеству. Коэффициент разрушения обозначим через μ .

Чтобы поддержать количество эритроцитов в крови на оптимальном уровне, организм должен реагировать на их недостаток и начать выработку новых. Реакция наступает не мгновенно, а спустя некоторое время. Обозначим через τ запаздывание гемопоэтической (кроветворной) системы, то есть время между стимуляцией к производству и вхождению красных кровяных телец в систему кровообращения. Функция «прироста» выбиралась в виде $pe^{-\alpha N(t-\tau)}$, то есть предполагалось, что скорость рождения новых эритроцитов в момент времени t тем больше, чем меньше было их наличное количество в момент времени $t - \tau$. Если эритроцитов становится больше, то прирост уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Коэффициенты p и α постоянны и определяются экспериментально. Показатель α характеризует возбудимость гемопоэтической системы, то есть это относительное приращение производства на одну клетку, коэффициент p учитывает потребность в кислороде, возрастающая потребность увеличивает коэффициент.

Объединяя производство красных кровяных телец и их разрушение, получаем уравнение Ласоты–Важевски с сосредоточенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + p e^{-\alpha N(t-\tau)}, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

и с распределенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + \frac{p}{h} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} e^{-\alpha N(s)} ds, \quad t \geq 0. \quad (3.2)$$

В обоих уравнениях $\mu, p, \alpha, h > 0$, $\tau \geq 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ .

Оказывается важным следующее: как постоянный недостаток, так и избыток эритроцитов в крови классифицируется медициной как болезнь. Очевидно, что «заставить» организм поддерживать количество эритроцитов постоянным невозможно; нормальным считается состав крови, при котором происходит колеблемость количества эритроцитов около ненулевого положения равновесия. С математической точки зрения это означает существование у уравнений (3.1) и (3.2) устойчивых осциллирующих решений.

Каждое из уравнений (3.1)–(3.2) имеет единственное ненулевое (положительное) положение равновесия, которое удовлетворяет уравнению $\mu N^* = p e^{-\alpha N^*}$.

С помощью замены $N(t) = \frac{x(t)}{\alpha} + N^*$ перейдем от уравнений (3.1)–(3.2) к уравнениям

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) - \mu \alpha N^* f(x(t-\tau)), \quad t \geq 0, \quad (3.3)$$

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) - \frac{\mu \alpha N^*}{h} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} f(x(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

где $f(x) = 1 - e^{-x}$. Положение равновесия N^* уравнений (3.1)–(3.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (3.3)–(3.4).

Лемма 3.1 ([1]). Пусть $(\mu \alpha N^* \tau, \mu \tau) / D_1$. Тогда уравнение (3.3) является осциллирующим.

Доказательство. Справедливы предположения теоремы 1.1, так как функция f для уравнения (3.3) совпадает с функцией f для уравнения (2.3).

Поскольку область D_1 открыта, то из $(\mu \alpha N^* \tau, \mu \tau) / D_1$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $((1 - \varepsilon) \mu \alpha N^* \tau, \mu \tau) / D_1$. Значит, по теореме 1.2 уравнение $\dot{x}(t) + \mu x(t) + (1 - \varepsilon) \mu \alpha N^* x(t - \tau) = 0$ является осциллирующим.

Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (3.3) является осциллирующим. $\square$

Возвращаясь к уравнению (3.1), получаем следующий результат.

Теорема 3.1 ([1]). Пусть $(\mu \alpha N^* \tau, \mu \tau) / D_1$. Тогда функция $N(t) \rightarrow N^*$, где N — решение уравнения (3.1), осциллирует при любых φ .

Аналогично получаются результаты для уравнения Ласоты–Важевски с распределенным запаздыванием.

Лемма 3.2. Пусть $\mu h, \mu \alpha N^{-1} h, \frac{\tau}{h} \in D_2$. Тогда уравнение (3.3) является осциллирующим.

Теорема 3.2. Пусть $\mu h, \mu \alpha N^{-1} h, \frac{\tau}{h} \in D_2$. Тогда функция $N(t) \rightarrow N^+$, где N — решение уравнения (3.2), осциллирует при любых φ .

Следствие 3.1. Пусть $\tau = 0$, $\mu \alpha N^{-1} h > \omega(\mu h)$. Тогда функция $N(t) \rightarrow N^+$, где N — решение уравнения (3.2), осциллирует при любых φ .

4. Уравнение Николсона

В 1954 г. А. Николсон опубликовал [11, 12] данные о наблюдении за лабораторной популяцией *Lucilia cuprina*. Популяция развивалась в условиях конкуренции за ограниченное количество белков, необходимых для воспроизводства; остальная часть рациона была в свободном доступе. Эксперимент продолжался около двух лет. В динамике популяций были обнаружены характерные колебания (циклы), длиной около 35–40 дней. А. Николсон предположил, что основная причина колебаний — запаздывание во времени, связанное с периодом «взросления» особей.

Р. Мэй [13] предложил применить для описания эксперимента Николсона модель Хатчинсона (см. (2.1)). Однако подстановка экспериментальных данных в это уравнение привела к выводу, что продолжительность развития от яйца до взрослой особи должна быть равна 9 дням. Этот результат существенно отличался от фактически наблюдаемого временного периода (около 15 дней), зафиксированного А. Николсоном [12].

Чтобы устранить несоответствие в оценке величины запаздывания, W. Gurney, S. Blythe и R. Nisbet [14] предложили следующее уравнение (впоследствии за ним закрепилось название «уравнение Николсона»):

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + p N(t - \tau) e^{-\alpha N(t - \tau)}, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Позднее [1] было предложено уравнение Николсона с распределенным запаздыванием

$$\dot{N}(t) = \mu N(t) + \frac{p}{h} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} N(s) e^{-\alpha N(s)} ds, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

В обоих уравнениях $N(t)$ — численность популяции в момент времени t , p — максимальная скорость суточного производства яиц на особь, $\frac{1}{\alpha}$ — размер популяции, при котором популяция воспроизводится с максимальной скоростью, μ — скорость гибели взрослых особей в сутки на особь, τ — время жизни поколения. Таким образом, $\mu, p, \alpha, h > 0$, $\tau \geq 0$. При отрицательных значениях t решение доопределено начальной функцией φ .

Каждое из уравнений (4.1)–(4.2) имеет единственное ненулевое положение равновесия $N^+ = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{p}{\mu}$.

С помощью замены $N(t) = \frac{x(t)}{\alpha} + N^+$ перейдем от уравнений (3.1)–(3.2) к уравнениям

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) - p(\alpha N^+ - 1) f(x(t - \tau)), \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\dot{x}(t) = \mu x(t) - \frac{p(\alpha N^+ - 1)}{h} \int_{t-\tau}^{t-\tau+h} f(x(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

где $f(x) = \frac{1}{\alpha N^* - 1} (\alpha N^* (1 - e^{-x}) - x e^{-x})$. Положение равновесия N^* уравнений (4.1)–(4.2) соответствует нулевому положению равновесия уравнений (4.3)–(4.4).

Лемма 4.1 ([1]). Пусть $\frac{p}{\mu} > e$, решение x уравнения (4.3) (или (4.4)) отрицательно при любых $t > t_1 \geq 0$. Тогда существует t^* такое, что $x(t) > 1 - \alpha N^*$; $t > t^*$.

Лемма 4.2 ([1]). Пусть $\frac{p}{\mu} > e$ и $\left(p\tau \ln \frac{p}{\mu}, \mu\tau \right) \in D_1$. Тогда уравнение (4.3) является осциллирующим.

Доказательство. Поскольку область D_1 открыта, то из $\left(p\tau \ln \frac{p}{\mu}, \mu\tau \right) \in D_1$ вытекает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ справедливо $\left((1 - \varepsilon)p\tau \ln \frac{p}{\mu}, \mu\tau \right) \in D_1$. Значит, по теореме 1.2 уравнение $\dot{x}(t) + \mu x(t) + (1 - \varepsilon)p(\alpha N^* - 1)x(t - \tau) = 0$ является осциллирующим.

Легко видеть, что $p(\alpha N^* - 1) > 0$ и при $\frac{p}{\mu} > e$ для функции

$$f(x) = \frac{1}{\alpha N^* - 1} (\alpha N^* (1 - e^{-x}) - x e^{-x})$$

выполняется $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, $f(x) < 0$ при $x \in [1 - \alpha N^*, 0)$. Значит, по лемме 4.1 имеем $xf(x) > 0$ при $x \neq 0$, то есть справедливы предположения теоремы 1.1. Далее достаточно применить теорему 1.1, из которой следует, что уравнение (4.3) является осциллирующим. $\square$

Возвращаясь к уравнению (4.1), получаем следующий результат.

Теорема 4.1 ([1]). Пусть $\frac{p}{\mu} > e$ и $\left(p\tau \ln \frac{p}{\mu}, \mu\tau \right) \in D_1$. Тогда функция $N(t) \in N^*$; где N — решение уравнения (4.1), осциллирует при любых φ .

Аналогично получаются результаты для уравнения Николсона с распределенным запаздыванием.

Лемма 4.3. Пусть $\frac{p}{\mu} > e$ и $\left(\mu h, p h \ln \frac{p}{\mu}, \frac{\tau}{h} \right) \in D_2$. Тогда уравнение (4.3) является осциллирующим.

Теорема 4.2. Пусть $\frac{p}{\mu} > e$ и $\left(\mu h, p h \ln \frac{p}{\mu}, \frac{\tau}{h} \right) \in D_2$. Тогда функция $N(t) \in N^*$, где N — решение уравнения (4.2), осциллирует при любых φ .

Следствие 4.1. Пусть $\frac{p}{\mu} > e$, $\tau = 0$, $p h \ln \frac{p}{\mu} > \omega(\mu h)$. Тогда функция $N(t) \in N^*$; где N — решение уравнения (4.2), осциллирует при любых φ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berezhansky L., Braverman E. Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay // Mathematical and Computer Modelling. 2008. Vol. 48. P. 287-304.
2. Гусаренко С.А., Домошницкий А.И. Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. Вып. 12. С. 2090-2103.

3. Györi I., Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations: with applications. N. Y.: Oxford University Press, 1991. 368 p.
4. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Математический сборник. 1951. Т. 28 (70). № 3. С. 641-658.
5. Коплатадзе Р.Г., Чантурия Т.А. О колеблющихся и монотонных решениях дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463-1465.
6. Сабатулина Т.Л. Об осциллирующих и знакоопределенных решениях автономных функционально-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 114-117.
7. Sabatulina T.L. Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 766-769.
8. Малыгина В.В., Сабатулина Т.Л. Знакоопределенность решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределенным запаздыванием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 8. С. 73-77.
9. Hutchinson G.E. Circular causal in ecology // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1948. Vol. 50. P. 221-246.
10. Wazewska-Czyzewska M., Lasota A. Mathematical problems of dynamics of red blood cells production (Polish) // Mat. Stos. 1976. Vol. 3. № 6. P. 23-40.
11. Nicholson A.J. Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance // Austral. J. Zool. 1954. № 2. P. 1-8.
12. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations // Austral. J. Zool. 1954. № 2. P. 9-65.
13. May R.M. Models for single populations // Theoretical Ecology: Principles and Applications / ed. by R.M. May. Oxford: Blackwell Scientific, 1976. P. 4-25.
14. Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M. Nicholson's blowflies revisited // Nature. 1980. № 287. P. 17-21.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сабатулина Татьяна Леонидовна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: TSabatulina@gmail.com

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706

ON OSCILLATION OF SOLUTIONS FOR SOME NONLINEAR
EQUATIONS OF POPULATION DYNAMICS

T. L. Sabatulina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolsky prospect, Perm 614990, Russian Federation
E-mail: TSabatulina@gmail.com

Abstract. Several nonlinear equations being models of population dynamics and hematopoiesis are considered in this paper. For these equations conditions of oscillation for solutions about nontrivial equilibrium position are obtained

Keywords: functional differential equations; Hutchinson's equation; Lasota–Ważewska equation; Nicholson's blowflies equation; concentrated delay; distributed delay

REFERENCES

1. Berezansky L., Braverman E. Linearized oscillation theory for a nonlinear equation with a distributed delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, vol. 48, pp. 287-304.
2. Gusarenko S.A., Domoshnitskiy A.I. Ob asimptoticheskikh i ostillyatsionnykh svoystvakh lineynykh skalyarnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka [About asymptotic and oscillation characteristics of first-order linear scalar functional differential equations]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1989, vol. 25, no. 12, pp. 2090-2103. (In Russian).
3. Györi I., Ladas G. *Oscillation theory of Delay Differential Equations: with Applications*. New York, Oxford University Press, 1991, 368 p.
4. Myshkis A.D. O resheniyakh lineynykh odnorodnykh differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ustoychivogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom [On solutions of linear homogeneous differential equations of the first order of stable type with a retarded argument]. *Matematicheskii sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1951, vol. 28 (70), no. 3, pp. 641-658. (In Russian).
5. Koplatadze R.G., Chanturiya T.A. O koleblyushchikhsya i monotonnykh resheniyakh differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka s otklonyayushchimsya argumentom [About oscillating and monotone solutions of differential first-order equation with retarded argument]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1982, vol. 18, no. 8, pp. 1463-1465. (In Russian).
6. Sabatulina T.L. Ob ostilliruyushchikh i znakoopredelennykh resheniyakh avtonomnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskiye obzory – Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 132, pp. 114-117. (In Russian).

The work is performed within the public contract with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (contract №1.5336.2017/8.9) and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

7. Sabatulina T.L. Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equations. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 766-769.
8. Malygina V.V., Sabatulina T.L. Znakoopredelennost' resheniy i ustoychivost' lineynykh differentsial'nykh uravneniy s peremennym raspredelennym zapazdyvaniyem [Sign-definiteness of solutions and stability of linear differential equations with variable distributed delay]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2008, no. 8, pp. 73-77. (In Russian).
9. Hut~~s~~hinson G.E. Circular causal in ecology. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221-246.
10. Wazewska-Czyzewska M., Lasota A. Mathematical problems of dynamics of red blood cells production. *Mat. Stos.*, 1976. vol. 3. № 6. P. 23-40.
11. Nicholson A.J. Compensatory reactions of populations to stresses, and their evolutionary significance. *Austral. J. Zool.*, 1954, no. 2, pp. 1-8.
12. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations. *Austral. J. Zool.*, 1954, no. 2, pp. 9-65.
13. May R.M. Models for single populations. In: R.M. May (ed.). *Theoretical Ecology: Principles and Applications*. Oxford, Blackwell Scientific, 1976, pp. 4-25.
14. Gurney W.S.C., Blythe S.P., Nisbet R.M. Nicholson's blowflies revisited. *Nature*, 1980, no. 287, pp. 17-21.

Received 16 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Sabatulina Tatyana Leonidovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Research Center «Functional Differential Equations», e-mail: TSabatulina@gmail.com

For citation: Sabatulina T.L. Ob ostsillyatsii reshenij nekotorykh nelinejnykh uravnenij dinamiki populyatsij [On oscillation of solutions for some nonlinear equations of population dynamics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 696–706. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-696-706 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-707-716

УДК 519.254

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОГО ПОРЯДКА С ОШИБКАМИ ПО ВХОДУ

✉ И. Л. Сандлер

ФГБОУ ВО «Самарский государственный университет путей сообщения»
443066, Российская Федерация, г. Самара, ул. Свободы, 2В
E-mail: sandleri@bk.ru

Аннотация. В работе представлен рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерных дискретных линейных динамических систем разного порядка с ошибками по входу, описываемые белым шумом. Доказано, что получаемые оценки при помощи стохастического градиентного алгоритма минимизации квадратичных форм являются сильно состоятельными.

Ключевые слова: разный порядок; рекуррентное оценивание параметров; сильно состоятельные оценки; линейная динамическая система; помехи в входных сигналах

Введение

В работе рассматривается проблема параметрической идентификации многомерных дискретных линейных динамических систем разного порядка с ошибками во входных сигналах, при отсутствии априорной информации о функции распределения ошибок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим многомерную линейную дискретную динамическую систему разного порядка, описываемую разностным уравнением, при наличии помех наблюдений во входных сигналах с $i = \dots -1, 0, 1, \dots$:

$$z_i^{(n)} = \sum_{m=1}^{\overline{kn}} b_0^{(mn)}(n) z_{i-m}^{(n)} = \sum_{l=1, l=n}^k \sum_{m=1}^{\overline{knl}} b_0^{(ml)}(n) z_{i-m}^{(l)} + \sum_{j=1}^d \sum_{m=0}^{\overline{knj}} a_0^{(mj)}(n) x_{i-m}^{(j)} \quad (1.1)$$

$$w_i^{(j)} = x_i^{(j)} + \xi_2^{(j)}(i),$$

где $n = \overline{1, k}$, $z_i^{(l)}$ – ненаблюдаемые выходные сигналы, $l = \overline{1, k}$; k – число выходных переменных; $b_0^{(ml)}(n)$, $a_0^{(mj)}(n)$ – параметры линейного разностного уравнения; $w_i^{(j)}$, $x_i^{(j)}$ –

наблюдаемые и ненаблюдаемые входные сигналы, $j = \overline{1, d}$; d – число входных переменных; $\xi_2^{(j)}(i)$ – помеха наблюдений в j -м входном сигнале.

Пусть выполняются следующие предположения:

1⁰. Множество $\tilde{B}$, которому априорно принадлежат истинные значения параметров устойчивой линейной системы, является компактом.

2⁰. Помеха $\{\xi_2^{(j)}(i)\}$ – статистически независимая последовательность и стационарная в совокупности в узком смысле с математическим ожиданием $E \xi_2^{(j)}(i) = 0$, дисперсией $E \left\{ \xi_2^{(j)}(i) \right\}^2 = \sigma_2^{(j)} > 0$ и для некоторых постоянных, $\pi_{\xi_2^{(j)}} : \left\| \xi_2^{(j)}(i) \right\| < \pi_{\xi_2^{(j)}}$, где E – оператор математического ожидания.

3⁰. $\{x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\}$ статистически не зависят от $\{\xi_2^{(j)}(i)\}$.

4⁰. Последовательности $\{x_i^{(j)}\}$ – стационарные в совокупности в узком смысле с дробно-рациональной плотностью случайные сигналы с математическим ожиданием $E \left\{ x_i^{(j)} \right\}^2 > 0$ и для некоторого $\pi_x^{(j)} > 0 : \left\| x_i^{(j)} \right\| < \pi_x^{(j)}$ почти наверняка.

5⁰. Выполняются условие несократимости полиномов

$$B^{(n)} q^{-1} \{ = 1 \left\{ \begin{matrix} \bar{r}_{nn} \\ m=1 \end{matrix} b_0^{(mn)} \right\} q^{-m}, A^{(j)} q^{-1} \{ = \left\{ \begin{matrix} r_{nj} \\ m=0 \end{matrix} a_0^{(mj)} \right\} q^{-m}, B^{(l)} q^{-1} \{ = \left\{ \begin{matrix} \bar{r}_{nl} \\ m=1 \end{matrix} b_0^{(ml)} \right\} q^{-m},$$

где q^{-1} – оператор сдвига назад, $q^{-1}x_i = x_{i-1}$

Требуется рекуррентно определить оценки неизвестных коэффициентов динамической системы, описываемых уравнением (1.1) по наблюдаемым последовательностям $\{z_i^{(l)}\}$, $\{w_i^{(j)}\}$.

2. Алгоритм идентификации

В [1] показано, что оценки будут сильно состоятельные при следующем критерии:

$$\left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)_{/\tilde{B}} \min_{i' \in \tilde{B}} \frac{\left(\lim_{i' \in \tilde{B}} E \left[y_i^{(n)} \right] \frac{b(n)}{a(n)} \left[\begin{matrix} T \\ Z_{\bar{r}_{nk}}(i-1) \\ W_{r_{nd}}(i) \end{matrix} \right] \right)^2}{\sigma_1^{(n)} \left(\begin{matrix} 2 \\ + a^T(n) D_2(n) a(n) \end{matrix} \right)}, \quad (2.1)$$

где

$$Z_{\bar{r}_{nk}}(i-1) = \left(z_{r_{nn}}^{(n)T} : \dots : z_{r_{nk}}^{(k)T} \right) \left[\begin{matrix} T \\ W_{r_{nd}}(i) \end{matrix} \right], W_{r_{nd}}(i) = \left(w_{r_{nn}}^{(1)T} : \dots : w_{r_{nd}}^{(d)T} \right) \left[\begin{matrix} T \\ z_{\bar{r}_{nl}}^{(l)}(i) \end{matrix} \right] = \left(z_{i-1}^{(l)} : \dots : z_{i-\bar{r}_{nl}}^{(l)} \right)^T,$$

$$w_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left(w_i^{(j)} : \dots : w_{i-r_{nj}}^{(j)} \right)^T, D_2(n) = \lim_{N' \in \tilde{B}} \frac{1}{N'} \left\{ \begin{matrix} N \\ \Xi_{r_n}(i) \times \Xi_{r_n}^T(i) \end{matrix} \right\},$$

$$\Xi_{r_n}(i) = \left(\Xi_{r_{n1}}^T(i) : \dots : \Xi_{r_{nd}}^T(i) \right) \left[\begin{matrix} T \\ \Xi_{r_{nj}}(i) \end{matrix} \right] = \left(\xi_2^{(j)}(i) : \dots : \xi_2^{(j)}(i-r_{nj}) \right)^T,$$

$$b(n) = \begin{pmatrix} b^{(n)}(n) \{^T \dots \vdots b^{(k)}(n) \{^T \end{pmatrix}, a(n) = \begin{pmatrix} a^{(1)}(n) \{^T \dots \vdots a^{(d)}(n) \{^T \end{pmatrix}, l \neq n, \\ b^{(l)}(n) = b^{(1l)}(n), \dots, b^{(r_{nl}l)}(n) \{^T, a^{(j)}(n) = a^{(0j)}(n), \dots, a^{(r_{nj}j)}(n) \{^T.$$

Тогда оценки неизвестного вектора параметров $\begin{pmatrix} \hat{b}_i(n) \\ \hat{a}_i(n) \end{pmatrix}$ можно получить с помощью стохастически градиентного алгоритма:

$$\left\| \frac{\hat{b}_{i+1}(n)}{\hat{a}_{i+1}(n)} \right\| = \left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\| \alpha_i \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) \left[\frac{y_{i+1}^{(n)} \left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|^T \left\| \frac{Z_{\bar{r}_{nk}(i+1)}}{W_{r_{nd}(i+1)}} \right\|^2}{\omega \left(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n) \right)} \right] \quad (2.2)$$

где $1 + a_i^T(n) \frac{D_2(n)}{(\sigma_1^{(n)})^2} a_i(n) = \omega \left(\hat{b}_i(n), \hat{a}_i(n) \right)$, α_i – последовательность, для которой выполняется условие:

$$6^0. \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = \infty, \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^t < \infty, \text{ при } t > 1.$$

Теорема 2.1. Пусть динамическая система описывается уравнением (1.1) и выполняются предположения $1^0 \dots 6^0$ тогда оценки, определяемые алгоритмом (2.2), либо

$$\left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|_{i'} \infty \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\| \text{ п.н.}, \text{ либо } \left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|_{i'} \infty \in.$$

Доказательство. Доказательство основано на теоремах 3.15 и 3.17 из [2], теорема 3.15 доказана Л. Льюнгом в [3], теорема 3.17 в [2].

Функционал (2.1) можно представить в виде:

$$J \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right) = \sigma_1^{(n)} \left(\left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|^T H^\bullet \right) \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|,$$

где

$$H^\bullet = \lim_{i' \in} E \left\| \begin{pmatrix} z_{\bar{r}_{nn}}^{(n)} \\ z_{\bar{r}_{n1}}^{(1)} \\ \vdots \\ z_{\bar{r}_{nk}}^{(k)} \\ x_{r_{n1}}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{r_{nd}}^{(d)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\bar{r}_{nn}}^{(n)} \\ z_{\bar{r}_{n1}}^{(1)} \\ \vdots \\ z_{\bar{r}_{nk}}^{(k)} \\ x_{r_{n1}}^{(1)} \\ \vdots \\ x_{r_{nd}}^{(d)} \end{pmatrix}^T \right\| > 0, \quad H^\bullet = \begin{pmatrix} H_{zz}^\bullet & H_{zx}^\bullet \\ H_{zx}^\bullet & H_{xx}^\bullet \end{pmatrix}$$

– положительно определенная квадратная матрица, что следует из $1^0, 4^0, 6^0$ [4];

$$X_{r_{nj}}^{(j)}(i) = \left\| x_i^{(j)}, \dots, x_{i-r_{nj}}^{(j)} \right\|^T - \text{вектор } r_{nj} + 1 \{ \bigcirc 1.$$

Построим асимптотическую непрерывную детерминированную модель алгоритма (2.2). На основе теоремы 3.15 [3] векторный случайный процесс $X_i = \|x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(d)}\|^T$ с дробно-рациональной спектральной плотностью может быть представлен через векторный белый шум ζ , для которого $E \zeta_p \zeta_q^T = \delta_q^p I_d$, где δ_q^p – символ Кронекера, I_d – единичная матрица.

Рассуждая аналогично [5], можно показать, что вектор

$$\left\| y_{(i)}(n) \begin{bmatrix} Z_{\bar{r}_{nk}}(i) \\ W_{r_{nd}}(i) \end{bmatrix}^T \zeta^T(i) : \dots : \zeta^T(i - (r_v - 1)) \right\|^T,$$

является Марковским процессом.

Асимптотическая непрерывная детерминированная модель имеет вид:

$$\left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[= \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^J \frac{b(n)}{a(n)} \Bigg[.$$

Пусть функция Ляпунова имеет вид:

$$V \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[= J \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[,$$

так как, функция Ляпунова непрерывно дифференцируема и

$$\dot{V} \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[= \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^T V \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[- \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^J \frac{b(n)}{a(n)} \Bigg[=$$

$$= \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^J \frac{b(n)}{a(n)} \Bigg[,$$

то множество $B = \left\{ \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[: R_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d)} : \dot{V} \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[= 0 \right\}$ состоит из стационарных точек $J \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[$ [2].

Из теоремы 3.15. [3] следует, что возможными предельными точками алгоритма (2.2) являются точки множества:

$$B_\bullet = \left\{ \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[: R_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d)} : \dot{V} \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[= 0 \right\} \cup \left\{ \left. \frac{b(n)}{a(n)} \right[\geq 0 \right\}.$$

Выполнение условия 2 теоремы 3.15. [3] следует из $H^\bullet > 0$ (условия $1^0 - 4^0$) и [6, с. 93, 7]; выполнение условия 3 этой же теоремы вытекает из стационарности процесса (1.1).

Покажем, что множество $B_\bullet = \left\{ \frac{b(n)}{a(n)} \left[\begin{array}{c} / R_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d)} : \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| = \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\| \right] \right\}$, то
 есть множество $B^\bullet$ состоит из единственной точки $\left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|$.

Для этого рассмотрим функцию

$$J^\alpha(u) = \frac{u^T H_1^\bullet u}{u^T I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty u},$$

где $u = \nabla u_1, \dots, u_{\bar{r}_{nn}+\dots+d+1} \nabla^T / R_{\bar{r}_{nn}+\dots+d+1}$,

$$H_1^\bullet = \lim_{i' \in E} \left[\left\| \frac{y_i^{(n)}}{\frac{Z_{\bar{r}_{nk}}(i)}{W_{r_{nd}}(i)}} \right\| \left\| y_i^{(n)} \mid Z_{\bar{r}_{nk}}^T(i) \mid W_{r_{nd}}^T(i) \right\| \right],$$

$$I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty = \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} I_{\bar{r}_{nn}+1} & 0_{\bar{r}_{nn}+1, \bar{r}_{nn}} & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & 0_{\bar{r}_{nn}+1, r_{nd}+1} \\ \hline 0_{\bar{r}_{nn}, \bar{r}_{nn}+1} & \frac{(\sigma_1^{(1)})^2}{(\sigma_1^{(n)})^2} I_{\bar{r}_{n1}} & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \frac{(\sigma_1^{(k)})^2}{(\sigma_1^{(n)})^2} I_{\bar{r}_{nk}} & \times \times \times & \times \times \times & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{(\sigma_2^{(1)})^2}{(\sigma_1^{(n)})^2} I_{r_{n1}+1} & \times \times \times & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_{r_{nd}+1, \bar{r}_{nn}+1} & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \times \times \times & \frac{(\sigma_2^{(d)})^2}{(\sigma_1^{(n)})^2} I_{r_{nd}+1} \end{array} \right\|,$$

где $I_{\bar{r}_{nn}+1}, \dots, I_{r_{nd}+1}$, единичные матрицы размерности $(\bar{r}_{nn}+1), \dots, (r_{nd}+1)$.

Очевидно, что

$$\left(\frac{\min}{\frac{b(n)}{a(n)}} J \right) \frac{b(n)}{a(n)} \left[\begin{array}{c} = \min_u J^\alpha(u) = J \end{array} \right] \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \left[\begin{array}{c} = \Lambda_{\min}, \end{array} \right] \quad (2.3)$$

где $\Lambda_{\min}$ – минимальное собственное число регулярного пучка форм [8] (так как $I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty$ положительно определенная матрица), то есть $\Lambda_{\min}$ наименьший корень уравнения:

$$\det H_1 - \Lambda I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty \{ = 0.$$

Пусть $\Lambda_{\min} = \Lambda^{(1)} \geq \dots \geq \Lambda^{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)} = \Lambda_{\max}$ и $u_1, \dots, u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}$ – соответствующие им главные собственные векторы. Тогда Λ_k , где $k = 1, (\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)$ являются стационарными значениями функции $J^\alpha(u)$, которые достигаются при u , равных $u_1, \dots, u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}$ соответственно.

Следовательно, стационарные значения функции

$$J \left) \frac{b(n)}{a(n)} \left[; \left(\frac{b(n)}{a(n)} \right)^J \frac{b(n)}{a(n)} \left[= 0 \right.$$

достигаются в точках $\left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\|_1 = \left) u_1^{(2)} \left(u_1^{(1)}, \dots, u_1^{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)} \left(u_1^{(1)} \left[\begin{matrix} T \\ , \dots, \end{matrix} \right. \right.$

$$\left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\|_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)} = \left) u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^{(2)} \left(u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^{(1)}, \dots, u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)} \left(u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^{(1)} \left[\begin{matrix} T \\ . \end{matrix} \right. \right.$$

Из (2.3) следует, что $\left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|_1 = \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|.$

Остается показать, что

$$\left\{ \left) \frac{b(n)}{a(n)} \left[\rightarrow 0, \left\{ \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| / \right\} \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| : \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\|_1, \dots, \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\|_{(\bar{r}_{nn}+\dots+1)} \right. \right. // \quad (2.4)$$

в одной стационарной точке $\left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\| = \left\| \frac{b(n)}{a(n)} \right\|_1 = \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|.$

Задача определения минимума функции (2.3) эквивалентна задаче на условный экстремум

$$\min u^T H_1^\bullet u \quad (2.5)$$

$$u^T I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty u = 1 \quad .$$

Задача (2.5) может быть решена с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа, причем необходимые условия запишутся в виде:

$$\left\{ \begin{matrix} \left) H_1^\bullet - \theta I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty \left(u = 0 \right. \\ \left. u^T I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty u = 1 \right. \end{matrix} \right. , \quad (2.6)$$

где θ – неопределенный множитель Лагранжа. Множеством решений системы (2.6) являются $\theta / \left\{ \Lambda_1, \dots, \Lambda_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)} \right\}^1$ и соответствующие им главные собственные векторы $u_1, \dots, u_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}.$

Исследуем матрицу $H_1^\bullet - \theta I_{(\bar{r}_{nn}+\dots+d+1)}^\infty$ на положительную определенность, из (2.3) следует, что

$$\Lambda^{(1)} \nabla H_1^\bullet \nabla < \Lambda^{(1)} \left) \frac{\tilde{H}_{zz}^\bullet}{(H_{zx}^\bullet)^T} \left| \frac{H_{zx}^\bullet}{\tilde{H}_{xx}^\bullet} \right[,$$

где $\Lambda^{(1)}$ – минимальные собственные числа матриц $H_1^\bullet$ и $\left) \frac{\tilde{H}_{zz}^\bullet}{(H_{zx}^\bullet)^T} \left| \frac{H_{zx}^\bullet}{\tilde{H}_{xx}^\bullet} \right[:$

$$\tilde{H}_{zz}^{\bullet} = H_{zz} + \left\| \begin{array}{c|c|c} \sigma_1^{(n)} \begin{pmatrix} I_{\bar{r}_{n1}} & \times \times \times & 0_{\bar{r}_{n1}, \bar{r}_{nk}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\bar{r}_{nk}, \bar{r}_{n1}} & \times \times \times & \sigma_1^{(k)} \begin{pmatrix} I_{\bar{r}_{nk}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right\|, \text{ порядка } (\bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk}) \bigcirc (\bar{r}_{n1} + \dots + \bar{r}_{nk});$$

$$\tilde{H}_{xx}^{\bullet} = H_{xx} + \left\| \begin{array}{c|c|c} \sigma_2^{(1)} \begin{pmatrix} I_{r_{n1}+1} & \times \times \times & 0_{r_{n1}+1, r_{nd}+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{r_{nd}+1, r_{n1}+1} & \times \times \times & \sigma_2^{(d)} \begin{pmatrix} I_{r_{nd}+1} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \right\|, \text{ порядка } (r_{n1} + \dots + r_{nd} + d) \bigcirc (r_{n1} + \dots + r_{nd} + d);$$

По теореме Штурма [8]:

$$\Lambda^{(1)} \left) \frac{\tilde{H}_{zz}^{\bullet}}{(H_{zz}^{\bullet})^T} \middle| \frac{H_{zz}^{\bullet}}{\tilde{H}_{xx}^{\bullet}} \right[\geq \Lambda^{(2)} \nabla \mathbf{I}_1^{\bullet} \nabla,$$

или

$$\Lambda^{(1)} \nabla \mathbf{I}_1^{\bullet} \nabla \geq \Lambda^{(2)} \nabla \mathbf{I}_1^{\bullet} \nabla \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что матрица $H_1^{\bullet} - \theta I_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)}^{\infty}$ неотрицательно определена лишь при $\theta = \Lambda_{\min}$ и (2.4) выполняется в $\left\| \frac{\hat{b}(n)}{\hat{a}(n)} \right\|_{\parallel} = \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|$, то есть для всех $\theta > \Lambda_{\min}$ матрица $H_1^{\bullet} - \theta I_{(\bar{r}_{nn} + \dots + d + 1)}^{\infty}$ имеет отрицательные собственные значения, откуда следует (2.2).

3. Основные результаты

Предложенный алгоритм рекуррентного оценивания параметров (2.2), при условиях ограничений на помеху и полезные сигналы $1^0 \quad 6^0$ линейной динамической системы (1.1) либо $\left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|_{\parallel} \in \left\| \frac{b_0(n)}{a_0(n)} \right\|$ п.н, либо $\left\| \frac{\hat{b}_i(n)}{\hat{a}_i(n)} \right\|_{\parallel} \in \infty$. Дальнейшим направлением работы является обобщение алгоритма (2.2) на случай автокоррелированных помех [9, 10], и нелинейных систем [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кацуба О.А., Козлов Е.В. Оценивание параметров многосвязных разного порядка линейных динамических систем при наличии помех во входных и выходных сигналах в условиях априорной неопределенности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. 2010. № 2 (26). С. 52-59.
2. Дерезицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1991. 215 с.
3. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
4. Tsytkin Ya.Z., Avedyan E.D., Gulinskiy O.V. On Convergence of the Recursive Identification Algorithms // IEEE Trans. Aut. Control. 1981. № 5. P. 1009-1017.
5. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972. 304 с.

6. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.
7. Жданов А.И. Рекуррентное оценивание минимальных собственных значений информационных матриц // Автоматика и телемеханика. 1987. № 4. С. 26-36.
8. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 575 с.
9. Сандлер И.Л. Рекуррентный алгоритм оценивания параметров многомерной линейной динамической системы разного порядка при наличии нестационарных автокоррелированных помех в выходных сигналах // Identification systems. Theory and applications: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference. Saint-Louis: Publishing House Science and Innovation Center, Ltd., 2015. С. 11-16.
10. Иванов Д.В., Козлов Е.В. Рекуррентная параметрическая идентификация линейных динамических систем при наличии автокоррелированной помехи наблюдения в выходном сигнале // Вестник Самарского муниципального института управления. 2010. № 2. С. 93-99.
11. Иванов Д.В., Широков И.Р. Идентификация многомерных по входу линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Самарского муниципального института управления. 2013. № 4 (27). С. 144-151.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сандлер Илья Львович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры «Мехатроника, автоматизация и управление на транспорте», e-mail: sandleri@bk.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-707-716

RECURSIVE ALGORITHM FOR ESTIMATING THE PARAMETERS OF MULTIDIMENSIONAL DISCRETE LINEAR DYNAMIC SYSTEMS OF DIFFERENT ORDERS WITH ERRORS ON THE INPUT

I. L. Sandler

Samara State Transport University
2B Svobody St., Samara 443066, Russian Federation
E-mail: sandleri@bk.ru

Abstract. The paper presents a recurrent algorithm for estimating the parameters of multidimensional discrete linear dynamical systems of different orders with input errors, described by white noise. It is proved that the obtained estimates using stochastic gradient algorithm for minimization of quadratic forms are highly consistent

Keywords: different order; recurrent estimation of parameters; highly consistent estimates; linear dynamic system; interference in the input signals

REFERENCES

1. Katsyuba O.A., Kozlov E.V. Otsenivaniye parametrov mnogosvyaznykh raznogo poryadka lineynykh dinamicheskikh sistem pri nalichii pomekh vo vkhodnykh i vykhodnykh signalakh v usloviyakh apriornoy neopredelennosti [Estimation of multi-connected linear dynamical systems parameters of different order with the noise in input and output signals under a priori uncertainty]. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo universiteta. Seriya Tekhnicheskie nauki – Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 2010, no. 2 (26), pp. 52-59. (In Russian).
2. Derevitskiy D.P., Fradkov A.L. *Prikladnaya teoriya diskretnykh adaptivnykh sistem upravleniya* [Applied Theory of Discrete Adaptive Control Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 215 p. (In Russian).
3. Leung L. *Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya* [Identification of Systems. Theory for the User]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 432 p. (In Russian).
4. Tsympkin Ya.Z., Avedyan E.D., Gulinskiy O.V. On Convergence of the Recursive Identification Algorithms. *IEEE Trans. Aut. Control.*, 1981, no. 5, pp. 1009-1017.
5. Nevelson M.B., Khas'minskiy R.Z. *Stokhasticheskaya approksimatsiya i rekurrentnoye otsenivaniye* [Stochastic Approximation and Recurrent Estimation]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 304 p. (In Russian).
6. Wilkes C. *Matematicheskaya statistika* [Mathematical Statistics]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 632 p. (In Russian).
7. Zhdanov A.I. Rekurrentnoye otsenivaniye minimal'nykh sobstvennykh znacheniy informatsionnykh matrits [Recurrent estimation of minimal own values of information matrices]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1987, no. 4, pp. 26-36. (In Russian).

8. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 575 p. (In Russian).
9. Sandler I.L. Rekurrentnyy algoritm otsenivaniya parametrov mnogomernoy lineynoy dinamicheskoy sistemy raznogo poryadka pri nalichii nestatsionarnykh avtokorrelirovannykh pomekh v vykhodnykh signalakh [Recursive algorithm for estimating the parameters of multidimensional linear dynamic systems of different orders in the presence of non-stationary autocorrelated interference in the output signals]. *Identification systems. Theory and applications: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference*. Saint-Louis, Publishing House Science and Innovation Center, Ltd., 2015, pp. 11-16. (In Russian).
10. Ivanov D.V., Kozlov E.V. Rekurrentnaya parametricheskaya identifikatsiya lineynykh dinamicheskikh sistem pri nalichii avtokorrelirovannoy pomekhi nablyudeniya v vykhodnom signale [Recurrent Parametrical Identification of the Linear Dynamic Systems Within the Autocorrelated Observation Hindrance in the Output Signal]. *Vestnik Samarskogo munitsipal'nogo instituta upravleniya – Bulletin of Samara Municipal Institute of Management*, 2010, no. 2, pp. 93-99. (In Russian).
11. Ivanov D.V., Shirinov I.R. Identifikatsiya mnogomernykh po vkhodu lineynykh dinamicheskikh sistem drobnogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale [Identification of Multivariate at the Entry Linear Dynamic Fractional-order Systems with Output Noise]. *Vestnik Samarskogo munitsipal'nogo instituta upravleniya – Bulletin of Samara Municipal Institute of Management*, 2013, no. 4 (27), pp. 144-151. (In Russian).

Received 16 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Sandler Ilya L'vovich, Samara State Transport University, Samara, the Russian Federation, Senior Teacher of the Department «Mechatronics Automation and Transport Management», e-mail: sandleri@bk.ru

For citation: Sandler I.L. Rekurrentnyy algoritm otsenivaniya parametrov mnogomernykh diskretnykh lineynykh dinamicheskikh sistem raznogo poryadka s oshibkami po vходу [Recursive algorithm for estimating the parameters of multidimensional discrete linear dynamic systems of different orders with errors on the input]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 707–716. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-707-716 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725

УДК 517.977

О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО СЕЛЕКТОРА НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

© Д. А. Серков^{1,2)}, А. Г. Ченцов^{1,2)}

¹⁾ ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»

62990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

²⁾ ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

E-mail: chentsov@imm.uran.ru, serkov@imm.uran.ru

Аннотация. В работе изучаются условия, при которых многозначное отображение имеет неупреждающий селектор: в случае неупреждаемости, порожденной линейно упорядоченным по включению семейством, показано, что у многозначного неупреждающего отображения со свойствами непустоты и компактности множеств–значений существует неупреждающий (однозначный) селектор.

Ключевые слова: многозначное отображение; неупреждающий селектор

Введение

Свойство неупреждаемости играет важную роль в теории дифференциальных игр в связи с построением идеализированных разрешающих стратегий. В ранних работах идеализированные стратегии — квазистратегии — определялись в виде операторов на функциональных пространствах управлений или траекторий со свойством физической осуществимости или неупреждаемости (см. [1–4] и др.). С другой стороны, в некоторых конструкциях, приводящих к неподвижным точкам операторов программного поглощения [5], естественным образом возникают неупреждающие многозначные отображения (МО) и, как следствие, многозначные квазистратегии. Вопрос о селекции МО с сохранением свойства неупреждаемости для отображений на пространствах обобщенных управлений рассматривался в [6], где существенно использовалась специфика управлений–мер.

В настоящей работе изучается вариант достаточно общей постановки такого рода: в случае неупреждаемости, порожденной линейно упорядоченным по включению семейством, показано, что неупреждающее МО со свойствами непустозначности и компактности множеств-значений имеет (однозначный) неупреждающий селектор.

1. Определения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи, $\emptyset$ — пустое множество); $\triangleq$ — равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества.

Пусть $X \neq \emptyset$ и $\leq \in \mathcal{P}(X \times X)$ — отношение (нестрогого) частичного порядка на X . Назовем пару $(X, \leq)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ). Всякое линейно упорядоченное подмножество ЧУМ назовем *цепью*.

Фиксируем непустые множества T , X и Y , а также непустые множества $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$, $\Omega \in \mathcal{P}(Y^T)$ и $Z \in \mathcal{P}(X^T)$.

Определим неупреждаемость элементов $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$, $\beta \in Z^\Omega$ в виде требований, соответственно:

$$((\omega_1 | A) = (\omega_2 | A)) \Rightarrow ((\alpha(\omega_1) | A) = (\alpha(\omega_2) | A)) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall A \in \mathcal{T}, \quad (1)$$

$$((\omega_1 | A) = (\omega_2 | A)) \Rightarrow ((\beta(\omega_1) | A) = (\beta(\omega_2) | A)) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \forall A \in \mathcal{T}. \quad (2)$$

Обозначим $\mathbf{N}$ подмножество всех неупреждающих МО из $\mathcal{P}(Z)^\Omega$.

Пусть $H \in \mathcal{P}(\Omega)$ и $\alpha \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$. Определим подмножества из Z^Ω :

$$\mathbf{n}_H^0 \triangleq \{f \in Z^\Omega \mid \forall \omega, \omega' \in H \forall A \in \mathcal{T} ((\omega | A) = (\omega' | A)) \Rightarrow ((f(\omega) | A) = (f(\omega') | A))\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{n}_H^0[\alpha] \triangleq \left(\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega) \right) \cap \mathbf{n}_H^0. \quad (4)$$

Иными словами, $\mathbf{n}_H^0$ — множество всех неупреждающих на H отображений из Z^Ω , в (4) определяются (однозначные) неупреждающие на H селекторы заданного МО α и, наконец, $\mathbf{n}_H^0[\alpha]$ есть множество всех неупреждающих селекторов МО α . Заметим, что в приложениях семейство $\mathcal{T}$, как правило, предполагается линейно упорядоченным в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$.

Пусть на множестве X введена топология τ_X . Полагаем тогда, что множество $Z \in \mathcal{P}(X^T)$ оснащено топологией τ_Z , индуцированной топологией Тихонова $\otimes^T(\tau_X)$ на произведении $\prod_{t \in T} X$. Аналогично, используя τ_Z , вводим на множестве Z^Ω топологию Тихонова $\tau_{Z^\Omega} : \tau_{Z^\Omega} \triangleq \otimes^\Omega(\tau_Z)$.

2. Основные результаты

Лемма 1. Пусть τ_X — T_2 -топология, $\beta \in \mathcal{P}(Z)^\Omega$ и для всякого $\omega \in \Omega$ значение $\beta(\omega)$ не пусто и компактно в (Z, τ_Z) . Тогда при любом $H \subset \Omega$ множество $\mathbf{n}_H^0[\beta]$ компактно в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем $\beta \in \mathcal{P}'(Z)^\Omega$, удовлетворяющее условиям леммы. Выберем произвольно $H \subset \Omega$.

1. По теореме Тихонова [7, Теорема 3.2.4] в силу непустоты и компактности $\beta(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ множество $\prod_{\omega \in \Omega} \beta(\omega)$ компактно в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Таким образом, с учетом (4) для доказательства утверждения достаточно установить замкнутость множества $\mathbf{n}_H^0$ в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. С этой целью покажем, что множество $Z^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$ открыто в пространстве $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$.

2. Если $Z^\Omega = \mathbf{n}_H^0$, то утверждение очевидно. Пусть $\bar{\alpha} \in Z^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$. Тогда существуют $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ и $A \in \mathcal{P}'(T)$ такие, что

$$(A \in \mathcal{T}) \& (\omega_1, \omega_2 \in H) \& ((\omega_1 | A) = (\omega_2 | A)) \& ((\bar{\alpha}(\omega_1) | A) \neq (\bar{\alpha}(\omega_2) | A)). \quad (5)$$

Обозначим для краткости $h_1 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_1)$, $h_2 \triangleq \bar{\alpha}(\omega_2)$. Так как $(h_1 | A) \neq (h_2 | A)$, $h_1, h_2 \in Z$ существует $\xi \in A$ такой, что $h_1(\xi) \neq h_2(\xi)$. Тогда, так как (X, τ_X) есть T_2 -пространство, существуют $O_{X1}, O_{X2} \in \tau_X$ такие, что $h_1(\xi) \in O_{X1}$, $h_2(\xi) \in O_{X2}$ и

$$O_{X1} \cap O_{X2} = \emptyset. \quad (6)$$

Определим множества $O_{Z1}, O_{Z2} \in \mathcal{P}(Z)$ вида

$$O_{Z1} \triangleq \{h \in Z \mid h(\xi) \in O_{X1}\}, \quad O_{Z2} \triangleq \{h \in Z \mid h(\xi) \in O_{X2}\}. \quad (7)$$

Из определений следует, что $O_{Z1}, O_{Z2} \in \tau_Z$, $h_1 \in O_{Z1}$, $h_2 \in O_{Z2}$. Определим теперь множество $O_{Z^\Omega} \in \mathcal{P}(Z^\Omega)$ вида

$$O_{Z^\Omega} \triangleq \{\delta \in Z^\Omega \mid (\delta(\omega_1) \in O_{Z1}) \& (\delta(\omega_2) \in O_{Z2})\}. \quad (8)$$

Заметим, что из $h_1 \neq h_2$ следует неравенство $\omega_1 \neq \omega_2$, а значит определение (8) корректно. По построению имеем

$$\bar{\alpha} \in O_{Z^\Omega} \in \tau_{Z^\Omega}. \quad (9)$$

Проверим, что кроме того выполняется равенство $O_{Z^\Omega} \cap \mathbf{n}_H^0 = \emptyset$. Предположим противное: нашлось $\gamma \in O_{Z^\Omega}$ такое, что

$$\gamma \in \mathbf{n}_H^0. \quad (10)$$

Из включения $\gamma \in O_{Z^\Omega}$ получаем (см. (8)) $\gamma(\omega_1) \in O_{Z1}$, $\gamma(\omega_2) \in O_{Z2}$. Следовательно (см. (7)), выполнены включения $\gamma(\omega_1)(\xi) \in O_{X1}$, $\gamma(\omega_2)(\xi) \in O_{X2}$. Значит (см. (6)), выполняется неравенство $\gamma(\omega_1)(\xi) \neq \gamma(\omega_2)(\xi)$, из которого в силу $\xi \in A$ следует неравенство $(\gamma(\omega_1) | A) \neq (\gamma(\omega_2) | A)$, противоречащее (10). В самом деле, по выбору ω_1, ω_2 имеем (см. (5)) $\omega_1, \omega_2 \in H$ и $(\omega_1 | A) = (\omega_2 | A)$, а тогда из (10) должно следовать (см. (3)) равенство $(\gamma(\omega_1) | A) = (\gamma(\omega_2) | A)$. Итак, выполняется $O_{Z^\Omega} \cap \mathbf{n}_H^0 = \emptyset$ и, следовательно (см. (9)), в силу произвольного выбора $\bar{\alpha}$ множество $Z^\Omega \setminus \mathbf{n}_H^0$ является открытым в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$.

Таким образом, установлено, что множество $\mathbf{n}_H^0$ замкнуто в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Этим завершается доказательство.

Теорема 1. Пусть τ_X — T_2 -топология, $\mathcal{T}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$. Пусть $\alpha \in \mathbf{N}$ таково, что для всякого $\omega \in \Omega$ значение $\alpha(\omega)$ не пусто и компактно в (Z, τ_Z) . Тогда $\mathbf{n}_\Omega^0[\alpha]$ — непустой компакт в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$.

Теорема, в частности, утверждает (см. (3), (4)), что всякое МО, удовлетворяющее указанным требованиям, обладает (однозначным) неупреждающим селектором.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем и зафиксируем $\alpha \in \mathbf{N}$, удовлетворяющее условиям леммы. Определим семейство $\mathcal{H}_\alpha \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\Omega))$ в виде $\mathcal{H}_\alpha \triangleq \{H \in \mathcal{P}'(\Omega) \mid \mathbf{n}_H^0[\alpha] \neq \emptyset\}$. Отметим, что это семейство не пусто, так как синглетоны Ω , очевидно, содержатся в нем. Схема доказательства утверждения следующая: сначала мы покажем, пользуясь леммой Цорна, что в $\mathcal{H}_\alpha$ существует максимальный элемент, а затем убедимся, что он совпадает с Ω .

1. Пусть $(H_s)_{s \in S}$ некоторая цепь в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$. Положим $\bar{H} \triangleq \cup_{s \in S} H_s$ и проверим, что $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Из условий, наложенных на α , следует, что при всяком $s \in S$ для α и H_s выполняются условия леммы 1. Следовательно, при всяком $s \in S$ множество $\mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha]$ компактно в пространстве $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Из хаусдорфовости топологии τ_X и определения топологии τ_{Z^Ω} следует, что τ_{Z^Ω} есть T_2 топология и, следовательно, всякое компактное в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ множество замкнуто. То есть $(H_s)_{s \in S}$ — семейство замкнутых множеств в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$. Кроме того, так как $(H_s)_{s \in S}$ — цепь, то (см. (4)) семейство $(\mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha])_{s \in S}$, также образует цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}'(Z^\Omega), \subset)$. В частности, это семейство центрировано. В силу теоремы Тихонова [7, Теорема 3.2.4] из непустоты и компактности $\alpha(\omega)$ при любом $\omega \in \Omega$ следует компактность в пространстве $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ множества $\prod_{\omega \in \Omega} \alpha(\omega)$, содержащего (см. (4)) все множества семейства $(\mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha])_{s \in S}$. Следовательно, $\cap_{s \in S} \mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha] \neq \emptyset$.

Покажем, что $\cap_{s \in S} \mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha] \subset \mathbf{n}_{\bar{H}}^0[\alpha]$, то есть $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Пусть $\beta \in \cap_{s \in S} \mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha]$, $A \in \mathcal{T}$, $\omega_1, \omega_2 \in \bar{H}$ и

$$(\omega_1 \mid A) = (\omega_2 \mid A). \quad (11)$$

Так как $\bar{H}$ есть объединение элементов цепи $(H_s)_{s \in S}$, найдется индекс $\bar{s} \in S$ такой, что $\omega_1, \omega_2 \in H_{\bar{s}}$. Из выбора β имеем соотношения

$$\beta \in \bigcap_{s \in S} \mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha] \subset \mathbf{n}_{H_{\bar{s}}}^0[\alpha].$$

Из (11), (4) и последнего выражения получаем $(\beta(\omega_1) \mid A) = (\beta(\omega_2) \mid A)$. С учетом произвольного выбора ω_1, ω_2 имеем (см. (4)) $\beta \in \mathbf{n}_{\bar{H}}^0[\alpha]$. Так как β выбиралась произвольно, получим вложение $\cap_{s \in S} \mathbf{n}_{H_s}^0[\alpha] \subset \mathbf{n}_{\bar{H}}^0[\alpha]$, а значит и включение $\bar{H} \in \mathcal{H}_\alpha$. Принимая во внимание вложения $H_s \subset \bar{H}$, очевидно, справедливые при всех $s \in S$, заключаем, что $\bar{H}$ есть верхняя грань $(H_s)_{s \in S}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$. Так как цепь $(H_s)_{s \in S}$ выбиралась произвольно, мы можем воспользоваться леммой Цорна: обозначим $\hat{H}$ произвольно выбранный максимальный элемент в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$.

2. Покажем, что $\hat{H} = \Omega$. Предположим противное: существует $\hat{\omega} \in \Omega \setminus \hat{H}$. Положим

$$\mathbf{A} \triangleq \{B \in \mathcal{T} \mid \exists \omega \in \hat{H} : (\omega \mid B) = (\hat{\omega} \mid B)\}. \quad (12)$$

Возможны два взаимоисключающих случая:

a. $A = \emptyset$

b. $A \neq \emptyset$

Выберем произвольно $\beta \in \mathbf{n}_{\hat{H}}^0[\alpha]$ и покажем, что в каждом из этих случаев, изменив значение функции β разве что для аргумента $\hat{\omega}$, можно получить новую функцию $\hat{\beta}$, удовлетворяющую включению

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}_{\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}}^0[\alpha], \quad (13)$$

которое означает, что $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$ и, следовательно, противоречит свойству максимальнойности элемента $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$.

Случай a. Так как в этом случае посылка условия неупреждаемости (см. (2)) выполняется лишь когда $\omega_1, \omega_2 \in \hat{H}$ или $\omega_1 = \omega_2 = \hat{\omega}$, то уже сама функция β , очевидно, удовлетворяет включению (13).

Случай b. Напомним, что по условию теоремы $\mathcal{T}$ — цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$. Следовательно, всякое подсемейство из $\mathcal{T}$ также есть цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$.

Определим отображение $\{\xi_B\}_{B \in A} \in \alpha(\hat{\omega})^A$ следующим образом:

— для всякого $B \in A$ выберем (см. (12)) произвольно $\omega_B \in \hat{H}$, удовлетворяющую $(\omega_B | B) = (\hat{\omega} | B)$;

— в силу условия неупреждаемости (см. (1)) имеем равенство $(\alpha(\hat{\omega}) | B) = (\alpha(\omega_B) | B)$; кроме того, по выбору β выполняется включение $\beta(\omega_B) \in \alpha(\omega_B)$; значит, пользуясь аксомой выбора, можно назначить $\xi_B \in Z$, удовлетворяющий требованию

$$(\xi_B \in \alpha(\hat{\omega})) \& ((\xi_B | B) = (\beta(\omega_B) | B)) \quad \forall B \in A. \quad (14)$$

Итак, для всякого $B \in A$ мы определили $\xi_B \in \alpha(\hat{\omega})$. Напомним, что как подсемейство цепи $\mathcal{T}$, семейство A образует цепь в ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$. Таким образом, отображение $\{\xi_B\}_{B \in A}$ можно рассматривать как направленность, определенную на A со значениями в $\alpha(\hat{\omega})$. По условию теоремы $\alpha(\hat{\omega})$ — компактное множество в топологическом пространстве (Z, τ_Z) , следовательно, существует предельная точка $\hat{\xi} \in \alpha(\hat{\omega})$ направленности $\{\xi_B\}_{B \in A}$: для любых $B \in A$, $\hat{O} \in \tau_Z$, $\hat{\xi} \in \hat{O}$ найдется $B' \in A$ такое, что

$$(B \subset B') \& (\xi_{B'} \in \hat{O}). \quad (15)$$

Используя элемент $\hat{\xi}$, переопределим функцию β :

$$\hat{\beta}(\zeta) \triangleq \begin{cases} \beta(\zeta), & \zeta \neq \hat{\omega}, \\ \hat{\xi}, & \zeta = \hat{\omega}, \end{cases} \quad \zeta \in \Omega. \quad (16)$$

Так как $\hat{\omega} \notin \hat{H}$ функция $\hat{\beta}$ наследует (см. (16)) неупреждаемость β на множестве $\hat{H}$:

$$\hat{\beta} \in \mathbf{n}_{\hat{H}}^0[\alpha]. \quad (17)$$

Воспользуемся этим и проверим неупреждаемость $\hat{\beta}$ на множестве $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$.

Выберем произвольно и зафиксируем $\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{H} \cup \{\hat{\omega}\}$ и $E \in \mathcal{T}$, для которых выполняется равенство

$$(\zeta_1 | E) = (\zeta_2 | E). \quad (18)$$

Опустим для краткости два простейших (с учетом (17)) случая ($\zeta_1, \zeta_2 \in \hat{H}$ или $\zeta_1 = \zeta_2 = \hat{\omega}$) и рассмотрим один с точностью до обозначений оставшийся вариант:

$$(\zeta_1 \in \hat{H}) \& (\zeta_2 = \hat{\omega}). \quad (19)$$

Из (18), (19) вытекает

$$(\zeta_1 | E) = (\hat{\omega} | E) \quad (20)$$

и по определению $\mathbf{A}$ (см. (12)) имеем включение $E \in \mathbf{A}$.

Покажем, что для всякого $t \in E$ направленность $\{\xi_B(t)\}_{B \in \mathbf{A}}$ стационарна не позже (в смысле порядка на ЧУМ $(\mathcal{P}(T), \subset)$), чем с элемента $\xi_E(t)$. В самом деле, пусть $F \in \mathbf{A}$ и $E \subset F$. Тогда в силу определений для элементов $\omega_E, \omega_F \in \hat{H}$ верны равенства $(\hat{\omega} | E) = (\omega_E | E)$, $(\omega_F | F) = (\hat{\omega} | F)$ и, стало быть, равенство

$$(\omega_F | E) = (\omega_E | E). \quad (21)$$

Из (14), (17) и (21) получаем

$$(\xi_F | E) = (\beta(\omega_F) | E) = (\beta(\omega_E) | E) = (\xi_E | E).$$

Ввиду произвольного выбора F отсюда следует

$$\xi_F(t) = \xi_E(t) \quad \forall t \in E, \forall F \in \mathbf{A}, E \subset F. \quad (22)$$

По определению топология τ_Z задает поточечную сходимость элементов Z , то есть для всякой предельной точки ξ направленности $\{\xi_B\}_{B \in \mathbf{A}}$ в (Z, τ_Z) и любого $t \in T$ значение $\xi(t)$ определяется как предельная точка направленности $\{\xi_B(t)\}_{B \in \mathbf{A}}$ в (X, τ_X) . Тогда из (15), (22) и хаусдорфовости топологии τ_X следует, что для всякой предельной точки ξ направленности $\{\xi_B\}_{B \in \mathbf{A}}$ выполняется

$$\xi(t) = \xi_E(t) \quad \forall t \in E, \quad (23)$$

в частности, для $\hat{\xi}$ из (23) получим

$$(\hat{\xi} | E) = (\xi_E | E). \quad (24)$$

Из (16), (17), (20) и $\zeta_1, \omega_E \in \hat{H}$ имеем

$$(\hat{\beta}(\zeta_1) | E) = (\beta(\zeta_1) | E) = (\beta(\omega_E) | E). \quad (25)$$

Тогда из (25), (14), (24), (14) и (19) получаем, соответственно, равенства

$$(\hat{\beta}(\zeta_1) | E) = (\beta(\omega_E) | E) = (\xi_E | E) = (\hat{\xi} | E) = (\hat{\beta}(\hat{\omega}) | E) = (\hat{\beta}(\zeta_2) | E). \quad (26)$$

Итак (см. (18), (26)), имеем импликацию

$$((\zeta_1 | E) = (\zeta_2 | E)) \Rightarrow ((\hat{\beta}(\zeta_1) | E) = (\hat{\beta}(\zeta_2) | E)).$$

Так как множество E и элементы ζ_1, ζ_2 выбирались произвольно, установлено включение (13). И, значит, $\hat{H} \cup \{\hat{\omega}\} \in \mathcal{H}_\alpha$.

Мы показали, что предположение $\hat{H} \neq \Omega$ влечет противоречие с максимальнойностью $\hat{H}$ в ЧУМ $(\mathcal{H}_\alpha, \subset)$, то есть имеет место другая альтернатива: $\hat{H} = \Omega$. Значит, $\Omega \in \mathcal{H}_\alpha$, иными словами, $\mathbf{n}_\Omega^0[\alpha] \neq \emptyset$. Компактность множества $\mathbf{n}_\Omega^0[\alpha]$ в $(Z^\Omega, \tau_{Z^\Omega})$ сразу следует из леммы 1. Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Roxin E.* Axiomatic approach in differential games // Journal of Optimization Theory and Applications. 1969. Vol. 3. № 3. P. 153-163.
2. *Ryll-Nardzewski C.* A theory of pursuit and evasion // Advances in Game Theory. Princeton: Princeton University Press, 1964. 691 p.
3. *Varaiya P., Lin J.* Existence of saddle points in differential games // SIAM Journal on Control. 1969. Vol. 7. № 1. P. 141-157.
4. *Elliott R.J., Kalton N.J.* The existence of value in differential games of pursuit and evasion // Journal of Differential Equations. 1972. Vol. 12. № 3. P. 504-523.
5. *Ченцов А.Г.* Об игровой задаче на минимакс функционала // Доклады Академии наук СССР. 1976. Т. 230. № 5. С. 1047-1050.
6. *Ченцов А.Г.* Селекторы многозначных квазистратегий в дифференциальных играх. Свердловск, 1978. 22 с. Деп. в ВИНТИ, № 3101-78.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Серков Дмитрий Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела динамических систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: serkov@imm.uran.ru

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела управляемых систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725

ON THE EXISTENCE OF A NON-ANTICIPATING SELECTION OF NON-ANTICIPATING MULTIVALUED MAPPING

D. A. Serkov^{1,2)}, A. G. Chentsov^{1,2)}

¹⁾ Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch, Russian Academy of Sciences,
16, S. Kovalevskoy St., Yekaterinburg 620219, Russian Federation

²⁾ Ural Federal University named after B.N. Eltsin,
19, Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: serkov@imm.uran.ru, chentsov@imm.uran.ru

Abstract. The existence of a non-anticipating selection of a non-anticipating multifunction is considered. For the case ordinary used in applications, it is shown that every non-anticipating multifunction with non-empty compact values has a non-anticipating selection.

Keywords: non-anticipating multifunction; non-anticipating selection

REFERENCES

1. Roxin E. Axiomatic approach in differential games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1969, vol. 3, no. 3, pp. 153-163.
2. Ryll-Nardzewski C. A theory of pursuit and evasion. *Advances in Game Theory*. Princeton, Princeton University Press, 1964, 691 p.
3. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games. *SIAM Journal on Control*, 1969, vol. 7, no. 1, pp. 141-157.
4. Elliott R.J., Kalton N.J. The existence of value in differential games of pursuit and evasion. *Journal of Differential Equations*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 504-523.
5. Chentsov A.G. Ob igrovoy zadache na minimaks funktsionala [On the game problem on minimax of a functional]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1976, vol. 230, no. 5, pp. 1047-1050. (In Russian).
6. Chentsov A.G. *Selektory mnogoznachnykh kvazistrategiy v differentsial'nykh igrakh* [Selections of Multivalued Strategies in Differential Games]. Sverdlovsk, 1978, 22 p. (In Russian).
7. Engelking R. *General Topology*. Warszawa, PWN, 1985, 752 p.

Received 18 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, ; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: serkov@imm.uran.ru

Chentsov Aleksandr Georgievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

For citation: Serkov D.A., Chentsov A.G. O sushchestvovanii neuprezhdayushchego selektora neuprezhdayushchego mnogoznachnogo otobrazheniya [On the existence of a non-anticipating selection of non-anticipating multivalued mapping]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 717–725. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-717-725 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737

УДК 517.962.8

ТЕОРЕМА БОЛЯ–ПЕРРОНА ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ И ЕЕ ОБРАЩЕНИЕ

✉ П. М. Симонов

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
392000, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15
E-mail: rector@psu.ru

Аннотация. Рассматривается абстрактная гибридная система двух уравнений с двумя неизвестными: векторной функцией x , являющейся абсолютно непрерывной на каждом конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, и последовательностью числовых векторов y . В исследовании применяется W -метод Н.В. Азбелева. В качестве модельной используется система, содержащая функционально-дифференциальное уравнение относительно x , и разностное уравнение относительно y . Изучены пространства решений. Для гибридной системы получена теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости и теорема об обращении.

Ключевые слова: теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости; гибридная линейная система функционально-дифференциальных уравнений; метод модельных уравнений, теорема об обращении

Введение

Проблемам устойчивости решений линейных гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) посвящено крайне мало работ. В работе В.М. Марченко и Ж.Ж. Луазо [1] исследована задача об устойчивости решений стационарных ГЛФДСП. В этой работе получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости для систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t), \\ x_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t-h), \\ x_1(0) &= x_{10} \in \mathbb{R}^k, \quad x_2(\tau) = \psi(\tau) \text{ при } \tau \in [-h, 0), \end{aligned}$$

где $A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$, $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, $\psi : [-h, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ — кусочно-непрерывная вектор-функция.

Данная статья продолжает исследование, начатое в [2–7]. В работах [2–5] получена теорема Боля–Перрона для ГЛФДСП в случае экспоненциальной устойчивости, в работах [6, 7] — для ГЛФДСП в случае асимптотической устойчивости.

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений [8–10] позволила дать ясное и лаконичное описание основных свойств решений, в том числе свойства устойчивости решений. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем ГЛФДСП, а именно, систем гибридных линейных функционально-дифференциальных уравнений с последействием, формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально-дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для задач устойчивости, в частности, теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для ГЛФДСП и теорема об обращении.

1. Схема W-метода

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha = \text{col}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$.

Обозначим через $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots$, являющимися векторами из пространства $\mathbb{R}^n$, а через $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ — бесконечную матрицу со столбцами $g(i) \in \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots$. Каждой бесконечной матрице $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ сопоставим вектор-функцию

$$y(t) = y(-1)\chi_{[-1,0)}(t) + y(0)\chi_{[0,1)}(t) + y(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + y(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Аналогично, каждой бесконечной матрице $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ можно сопоставить вектор-функцию

$$g(t) = g(0)\chi_{[0,1)}(t) + g(1)\chi_{[1,2)}(t) + \dots + g(N)\chi_{[N,N+1)}(t) + \dots$$

Пусть $[t]$ — целая часть действительного числа t . Символом $y(t) = y[t]$ обозначим вектор-функцию $y(t) = y([t])$, $t \in [-1, \infty)$, аналогично, символом $g[t]$ — вектор-функцию $g(t) = g([t])$, $t \in [0, \infty)$. Множество вектор-функций $y[\cdot]$ обозначим символом ℓ_0 , а множество вектор-функций $g[\cdot]$ — символом ℓ . Положим $(\Delta y)(t) = y(t) - y(t-1) = y[t] - y[t-1]$ при $t \sim 1$, $(\Delta y)(t) = y(t) = y[t] = y(0)$ при $t \in [0, 1)$.

В работе используются следующие пространства: пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]} = \int_0^T \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n} dt$ для всех $T > 0$; пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]} = \|\dot{x}\|_{L[0,T]} + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$, $T > 0$; пространство ℓ бесконечных

матриц $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ с полунормами $\|g\|_{\ell_T} = \sum_{i=0}^T \|g_i\|_{\mathbb{R}^n}$, $T > 0$; пространство ℓ_0 бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ с полунормами $\|y\|_{\ell_{0T}} = \sum_{i=1}^T \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}$, $T > 1$; $\ell_{\infty 0} = \{y \in \ell_0 : \|y\|_{\ell_{\infty 0}} = \sup_{k=1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}$; $\ell_{\infty} = \{g \in \ell : \|g\|_{\ell_{\infty}} = \sup_{k=0,1,\dots} \|g(k)\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty\}$.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему в виде

$$\begin{aligned} Q_{11}x + Q_{12}y &= \dot{x} & F_{11}x & F_{12}y = f, \\ Q_{21}x + Q_{22}y &= \Delta y & F_{21}x & F_{22}y = g. \end{aligned} \quad (1)$$

Операторы $Q_{11}, F_{11} : D \rightarrow L$, $Q_{12}, F_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $Q_{21}, F_{21} : D \rightarrow \ell$, $Q_{22}, F_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми.

Пусть заданы банаховы пространства $D \rightarrow D$, $M_0 \rightarrow \ell_0$, $B \rightarrow L$, $M \rightarrow \ell$, и имеет место изоморфизм $D \circ M_0 \subseteq (B \circ \mathbb{R}^n) \circ (M \circ \mathbb{R}^n)$. Если все элементы $\{x, y\} \in D \circ M_0$ обладают какими-нибудь специфическими асимптотическими свойствами, например,

$$\sup_{t \rightarrow 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{k=1,0,1,\dots} \|y(k)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty,$$

и задача Коши для уравнения $Q\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $Q : D \circ M_0 \rightarrow B \circ M$ однозначно разрешима, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Пусть модельное уравнение [8–10] $Q_{11}x = z$ и банахово пространство B выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть, кроме того, решение при любой правой части $z \in B$ записывается в виде формулы Коши $x(t) = U_{11}(t)x(0) + (W_{11}z)(t)$. Определим банахово пространство $D(Q_{11}, B)$ с нормой $\|x\|_{D(Q_{11}, B)} = \|Q_{11}x\|_B + \|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ (вложение $B \rightarrow L$ предполагается непрерывным). Предположим, что оператор W_{11} непрерывно действует из пространства B в пространство B , и оператор U_{11} действует из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство B . Это условие эквивалентно (см. [9, 10, гл. IV]) тому, что пространство $D(Q_{11}, B)$ линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}[0, \infty)$ с нормой $\|x\|_{W_B^{(1)}[0, \infty)} = \|x\|_B + \|x\|_B$. Будем обозначать это пространство символом W_B . Справедливо $W_B \rightarrow D$, и это вложение непрерывно. Будем говорить, что уравнение $Q_{11}x = z$ с оператором $Q_{11} : D(Q_{11}) \rightarrow B$ $D(Q_{11}, B)$ -устойчиво [8], если для каждой правой части $z \in B$ каждое решение x принадлежит $D(Q_{11}, B)$. Здесь $D(Q_{11}) \rightarrow D$ — область определения оператора Q_{11} . Уравнение $Q_{11}x = z$ с оператором $Q_{11} : D(Q_{11}, B) \subseteq W_B \rightarrow B$, удовлетворяющим вышеприведенному условию, $D(Q_{11}, B)$ -устойчиво (W_B -устойчиво) тогда и только тогда, когда оно сильно B -устойчиво. Уравнение $Q_{11}x = z$ сильно B -устойчиво, если для любого $z \in B$ каждое решение x этого уравнения обладает свойством: $x \in B$ и $\dot{x} \in B$ (см. [8, 10, гл. IV, § 4.6]).

Операторы $Q_{11} : D \rightarrow L$, $Q_{12} : \ell_0 \rightarrow L$, $Q_{21} : D \rightarrow \ell$, $Q_{22} : \ell_0 \rightarrow \ell$ рассматриваются как приведения на пары $(D(Q_{11}, B), B)$, (M_0, B) , $(D(Q_{11}, B), M)$, (M_0, M) . Эти операторы предполагаются линейными вольтерровыми и ограниченными.

Предположим, что общее решение уравнения $\mathcal{Q}_{22}y = g$ для $g \in \mathcal{L} \ell$ принадлежит пространству ℓ_0 и представляется формулой Коши:

$$y[t] = (Y_{22}y(-1))[t] + (C_{22}g)[t] = Y_{22}[t]y(-1) + \sum_{s=0}^t C_{22}[t, s]g[s], \quad t \sim 0.$$

Обозначим: $\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда (1) записывается в виде $\mathcal{Q}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$.

Предположим, что для любых $x(0) \in \mathbb{R}^n$ и $y(-1) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы

$$\mathcal{Q}_{11}^0 x + \mathcal{Q}_{12}^0 y = \dot{x} \quad F_{11}^0 x \quad F_{12}^0 y = z, \quad \mathcal{Q}_{21}^0 x + \mathcal{Q}_{22}^0 y = \Delta y \quad F_{21}^0 x \quad F_{22}^0 y = u,$$

где операторы $\mathcal{Q}_{11}^0, F_{11}^0 : D \rightarrow L$, $\mathcal{Q}_{12}^0, F_{12}^0 : \ell_0 \rightarrow L$, $\mathcal{Q}_{21}^0, F_{21}^0 : D \rightarrow \ell$, $\mathcal{Q}_{22}^0, F_{22}^0 : \ell_0 \rightarrow \ell$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно записать в виде $\mathcal{Q}_0\{x, y\} = \text{col}\{z, u\}$. Пусть ее решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} : L \circ \ell \rightarrow D \circ \ell_0$ — непрерывный вольтерров оператор Коши модельной системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n \rightarrow D \circ \ell_0$ — ее фундаментальная матрица.

2. Теоремы Боля–Перрона

Для обыкновенного дифференциального уравнения еще в монографиях [11, 12], отмечались явления, которые в терминах $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости можно сформулировать следующим образом. При определенных условиях относительно оператора $\mathcal{Q}_{11}$ из $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивости следует более тонкое асимптотическое свойство, а именно $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_1)$ -устойчивость, где $\mathbf{B}_1$ — некоторое подпространство пространства $\mathbf{B}$. Следуя традиции Пермского семинара [8–10], соответствующие утверждения будем называть *теоремами Боля–Перрона*. В основе следующих доказательств таких теорем лежат свойства подпространства $\mathbf{B} \rightarrow L$, вытекающие из их *порядковой структуры*, которую определим следующим образом. В векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *частичную упорядоченность*: $\alpha = \text{col}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \sim 0$, если $\alpha_i \sim 0$, $i = 1, \dots, n$; $\alpha \sim \beta$, если, $\alpha - \beta \sim 0$. Через $\|\alpha\|$ будем обозначать вектор, определяемый равенством $\|\alpha\| = \text{col}\{\|\alpha_1\|, \dots, \|\alpha_n\|\}$. Будем предполагать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирована норма $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$, обладающая свойством *монотонности*: $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n} \geq \|\beta\|_{\mathbb{R}^n}$, если $\|\alpha\| \geq \|\beta\|$. В соответствии с порядком в пространстве $\mathbb{R}^n$ введем *отношение порядка* в пространстве L . А именно $y \sim 0$, если $y(t) \sim 0$ почти всюду на $[0, \infty)$; $y \sim z$, если $y - z \sim 0$. Через $\|y\|$ будем обозначать функцию, почти всюду на $[0, \infty)$ определяемую равенством $\|y\|(t) = \|y(t)\|$. Относительно банахова пространства $\mathbf{B} \rightarrow L$ будем предполагать,

что норма в пространстве $\mathbf{B}$ согласована с порядком через условие *идеальности*: если $z \in \mathcal{L} L$, $y \in \mathcal{L} \mathbf{B}$ и $\|z\| \geq \|y\|$ то $z \in \mathcal{L} \mathbf{B}$ и $\|z\|_{\mathbf{B}} \geq \|y\|_{\mathbf{B}}$. Среди прочих свойств пространств, удовлетворяющих этому условию (*банаховых идеальных пространств* [13]), отметим следующие: 1) норма в таком пространстве $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонности; 2) любое ограниченное по порядку подмножество пространства $\mathbf{B}$ имеет точные грани ($\mathbf{B} - K$ -пространство); 3) в пространстве $\mathbf{B}$ определены “срезки” — операторы умножения на характеристические функции χ_M измеримого множества $M \rightarrow [0, \infty)$; 4) вложение $\mathbf{B} \rightarrow L$ непрерывно.

3. Асимптотическая устойчивость

Введем подмножество $\mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}$ всех таких функций $z \in \mathcal{L} \mathbf{B}$, что для каждой функции z выполняется равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\chi_{[s, \infty)} z\|_{\mathbf{B}} = 0$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{B}_0$ состоит из всех функций $z \in \mathcal{L} \mathbf{B}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{B}$, причем нетрудно показать, что $\mathbf{B}_0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{B}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$ линейного многообразия всех финитных функций $z \in \mathcal{L} \mathbf{B}$.

Пусть далее C_0 — это подпространство пространства C , состоящее из всех таких $x \in \mathcal{L} C$, для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\|x\|_{C_0} = \|x\|_C$. Здесь и ниже C — пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n}$.

Будем предполагать, что для пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения $\mathcal{Q}_{11}x = z$ выполнены условия:

- а) оператор Коши W_{11} действует из пространства $\mathbf{B}_0$ в пространство C_0 и ограничен;
- б) столбцы фундаментальной матрицы U_{11} уравнения $\mathcal{Q}_{11}x = 0$ принадлежат пространству C_0 .

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0) \rightarrow C_0$ и асимптотическая устойчивость первого модельного уравнения.

Лемма 1. *Имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow C$.*

Таким образом, в указанных предположениях относительно пространства $\mathbf{B}$ и модельного уравнения, $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчивость уравнения $\mathcal{Q}_{11}x = z$ гарантирует устойчивость по Ляпунову, а $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ -устойчивость — асимптотическую устойчивость.

Теорема 1. *Пусть уравнение $\mathcal{Q}_{11}x = f$ $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ -устойчиво и оператор $\mathcal{Q} : D(\mathcal{Q}) \rightarrow L$ действует из пространства $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ в пространство $\mathbf{B}_0$. Тогда это уравнение $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ устойчиво.*

В условиях теоремы 1 уравнение $\mathcal{Q}_{11}x = f$ асимптотически устойчиво.

Отметим, что для некоторых специальных классов уравнений аналоги теоремы 1 были получены ранее другими авторами (см. [14, 15, гл. 3, § 4, 4.1, 4.2], [16, 17, §§ 2.5, 5.1], [18–25]).

Предварительно сформулируем две леммы о свойствах линейного вольтеррова ограниченного оператора $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ и о разрешимости функционального уравнения $\mathcal{U}_{11}z = f$ в пространстве $\mathbf{B}_0$.

Лемма 2. Для линейного ограниченного вольтеррова оператора $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ справедливо включение $\mathcal{U}_{11}^{\geq} \mathbf{B}_0^{\geq} \rightarrow \mathbf{B}_0^{\geq}$.

Лемма 3. Пусть линейный ограниченный оператор $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ вольтерров и $\mathcal{U}_{11} \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$. Тогда если этот оператор имеет обратный оператор $\mathcal{U}_{11}^{-1} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$, то $\mathcal{U}_{11}^{-1} \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$.

В виде замечания к лемме 3 укажем условия, при выполнении которых из включения $\mathcal{U}_{11} \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ и обратимости сужения $\mathcal{U}_{110} = \mathcal{U}_{11}|_{\mathbf{B}_0} : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ следует обратимость оператора $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$.

Предположим, что пространство $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством (В)) ([13, гл. IV, § 3, 3.2, гл. X, § 4, 4.1], [26, с. 143]): если для $z_k \in \mathbf{B}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено $z_{k+1} \sim z_k \sim 0$ и $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|z_k\|_{\mathbf{B}} < \infty$, то существует такой элемент $z \in \mathbf{B}$, что $z_k(t) \rightarrow z(t)$ почти всюду на $[0, \infty)$, причем $\|z\|_{\mathbf{B}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|z_k\|_{\mathbf{B}}$.

Предположим, далее, что линейный регулярный оператор $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ удовлетворяет условию порядковой непрерывности ([13, гл. X, § 2, 2.1]): если $f_n(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для почти всех $t \in [0, \infty)$, $\|f_n\| \geq g \in \mathbf{B}$, то $(\mathcal{U}_{11} f_n)(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для почти всех $t \in [0, \infty)$.

Отметим, что условию порядковой непрерывности удовлетворяют линейные регулярные интегральные операторы и линейные операторы внутренней суперпозиции — два основных в приложениях класса линейных операторов.

В этих предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. Пусть пространство $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством (В)) и линейный регулярный вольтерров оператор $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ удовлетворяет условию порядковой непрерывности. Если справедливо $\mathcal{U}_{11} \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ и обратимо сужение $\mathcal{U}_{110} = \mathcal{U}_{11}|_{\mathbf{B}_0} : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$, то оператор $\mathcal{U}_{11} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ обратим.

Близкие результаты содержатся в монографии [27, Ch. III, 3.2.6, 3.2.7].

Теорема 1 допускает обращение.

Теорема 2. Пусть пространство $\mathbf{B}$ обладает свойством монотонной полноты нормы (свойством (В)) и оператор $\mathcal{U}_{11} = \mathcal{Q}_{11} W_{11}$ регулярен и удовлетворяет условию порядковой непрерывности. Тогда эквивалентны утверждения:

- а) уравнение $\mathcal{Q}_{11} x = f \in D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ устойчиво;
- б) уравнение $\mathcal{Q}_{11} x = f \in D(\mathcal{Q}_{11}^0, \mathbf{B})$ устойчиво и оператор $\mathcal{Q} : D(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbf{L}$ действует из пространства $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ в пространство $\mathbf{B}_0$.

Определим банахово пространство всех функций $g \in \mathcal{L}(\ell_{\infty}^0 \rightarrow \ell_{\infty})$ ($g \in \mathcal{L}(\ell_{\infty}^0 \rightarrow \ell_{\infty})$) таких, что для каждой функции g выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}} = 0 \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_{[n, \infty)} g\|_{\ell_{\infty}^0} = 0 \right).$$

Введем банахово пространство $\mathbf{b} \rightarrow \ell$ бесконечных матриц $g = \{g(0), g(1), \dots, g(N), \dots\}$ с нормой $\|g\|_{\mathbf{b}}$, а также определим банахово пространство $\mathbf{b}_0 \rightarrow \ell_0$ бесконечных матриц $y = \{y(-1), y(0), y(1), \dots, y(N), \dots\}$ с нормой $\|y\|_{\mathbf{b}_0}$. Вложение $\mathbf{b} \rightarrow \ell$ ($\mathbf{b}_0 \rightarrow \ell_0$)

непрерывно. Пусть для пространств $\mathbf{b}, \mathbf{b}_0$ выполнены все предыдущие условия п. 3. Определим подмножество $\mathbf{b}^0 \rightarrow \mathbf{b}$ всех таких функций $g \in \mathcal{L} \mathbf{b}$, что для каждой функции g выполняется равенство $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\chi_{[s, \infty)} g\|_{\mathbf{b}} = 0$. Здесь и ниже χ_M — характеристическая функция множества $M \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Иначе говоря, пространство $\mathbf{b}^0$ состоит из всех функций $g \in \mathcal{L} \mathbf{b}$, стремящихся при $t \rightarrow \infty$ к нулю по метрике пространства $\mathbf{b}$. Нетрудно показать, что $\mathbf{b}^0$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{b}$ и совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{b}}$ линейного многообразия всех финитных функций $g \in \mathcal{L} \mathbf{b}$. Аналогично определяем пространство $\mathbf{b}_0^0$.

Далее будем предполагать, что для пространства $\mathbf{b}$ и модельного уравнения $\mathcal{Q}_{22} y = u$ выполнены условия:

а) оператор Коши W_{22} действует из пространства $\mathbf{b}^0$ в пространство ℓ_{∞}^0 и ограничен;

б) столбцы фундаментальной матрицы U_{22} уравнения $\mathcal{Q}_{22} y = 0$ принадлежат пространству ℓ_{∞}^0 .

Таким образом, имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}^0) \rightarrow \ell_{\infty}^0$ и асимптотическая устойчивость второго модельного уравнения.

Лемма 5. *Имеет место непрерывное вложение $D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}) \rightarrow \ell_{\infty}^0$.*

Предположим, что линейный оператор $\mathcal{U}_{22} : \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$ регулярен. В этом случае оператор $\mathcal{U}_{22}$ удовлетворяет условию порядковой непрерывности ([13, гл. X, § 2, 2.1]): если $g_n(t) \rightarrow 0$ всюду для $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ при $n \rightarrow \infty$, $\|g_n\| \geq \varepsilon \in \mathbb{R}$, то $(\mathcal{U}_{22} g_n)(t) \rightarrow 0$ всюду для $t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ при $n \rightarrow \infty$.

Сформулируем распространение теоремы Боля–Перрона на уравнение $\mathcal{Q}\{x, y\} = \{f, g\}$.

Теорема 3. *Пусть операторы $\mathcal{Q}_{12} : D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathcal{Q}_{21} : D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{b}$ регулярны, причем $\mathcal{Q}_{12}(D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b})) \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathcal{Q}_{21}(D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})) \rightarrow \mathbf{b}$. Предположим, что уравнение $\mathcal{Q}_{11} x = f$ в $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ устойчиво и уравнение $\mathcal{Q}_{22} y = g$ в $D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b})$ устойчиво, а операторы $\mathcal{Q}_{11} : D(\mathcal{Q}_{11}) \rightarrow \mathbf{L}$, $\mathcal{Q}_{22} : D(\mathcal{Q}_{22}) \rightarrow \ell$ регулярны из пространства $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}_0)$ и $D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}^0)$ в пространства $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{b}^0$. Пусть банаховы пространства $\mathbf{B}$ и $\mathbf{b}$ обладают свойством монотонной полноты нормы (свойством (В)), операторы $\mathcal{Q}_{11} : D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathcal{Q}_{12} : D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathcal{Q}_{21} : D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{b}$, $\mathcal{Q}_{22} : D(\mathcal{Q}_{22}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{b}$ порядково непрерывны. Пусть, далее, уравнение $\mathcal{Q}_1 x = (\mathcal{Q}_{11} - \mathcal{Q}_{12} C_{22} \mathcal{Q}_{21}) x = f_1$ в $D(\mathcal{Q}_{11}, \mathbf{B})$ устойчиво и оператор $\mathcal{Q}_1 W_{11} : \mathbf{B}_0 \rightarrow \mathbf{B}_0$ ограничен и порядково непрерывен.*

Тогда эквивалентны утверждения:

- уравнение $\mathcal{Q}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ является $D(\mathcal{Q}, \mathbf{B}_0 \circ \mathbf{b}^0)$ устойчивым;*
- уравнение $\mathcal{Q}\{x, y\} = \text{col}\{f, g\}$ является $D(\mathcal{Q}, \mathbf{B} \circ \mathbf{b})$ устойчивым.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Марченко В.М., Луазо Ж.Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728–740.
- Симонов П.М. Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 2 (33). С. 56–60.

3. *Симонов П.М.* К вопросу о теореме Боля–Перрона для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18. № 1. С. 75–81.
4. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона для гибридных линейных систем с последействием // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 122–126.
5. *Simonov P.M.* The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 775–781.
6. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости для гибридных линейных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГЛФДСП) // Вестник Российской академии естественных наук. 2016. Т. 16. № 3. С. 55–59.
7. *Симонов П.М.* Теорема Боля–Перрона об асимптотической устойчивости гибридных систем // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь: ПНИПУ, 2018. С. 230–235.
8. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 196–204.
9. *Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В.* Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1659–1668.
10. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Перм. ун-т, 2001. 230 с.
11. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
12. *Массера Х.Л., Шеффер Х.Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970. 456 с.
13. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. 816 с.
14. *Носов В.Р.* Теорема Перрона для стационарных и периодических систем дифференциально-функциональных уравнений // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом / Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1979. Т. 11. С. 44–51.
15. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
16. *Курбатов В.Г.* Об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 6. С. 963–972.
17. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. 168 с.
18. *Пуляев В.Ф., Цалок З.Б.* К вопросу о допустимости некоторых пар пространств для линейных операторов и уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 4. С. 684–692.
19. *Пуляев В.Ф.* О допустимости некоторых пар пространств относительно линейных интегральных уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20. № 10. С. 1800–1805.
20. *Пуляев В.Ф.* О спектре линейных непрерывных операторов // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1985. № 4. С. 25–28.
21. *Пуляев В.Ф.* О спектре операторов Вольтерра // Интегральные операторы и уравнения: сб. науч. тр. Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 1987. С. 29–37.

22. Пуляев В.Ф. О взаимосвязи нетеровости линейных непрерывных операторов и их сужений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1990. № 8 (339). С. 65-73.
23. Пуляев В.Ф. Развитие теории линейных интегральных уравнений с периодическими и почти периодическими ядрами: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2001. 31 с.
24. Пуляев В.Ф., Цалюж З.Б. Об асимптотическом поведении решений интегральных уравнений Вольтерра в банаховых пространствах // Известия высших учебных заведений. Математика. 1991. № 12 (355). С. 47-55.
25. Сокол Д.Г. О допустимости некоторых пар пространств для интегральных операторов и уравнений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: естественные науки. 2000. № 1. С. 135-137.
26. Бухвалов А.В., Векслер А.И., Лозановский Г.Я. Банаховы решетки – некоторые банаховы аспекты теории // Успехи математических наук. 1979. Т. 34. Вып. 2 (206). С. 137-183.
27. Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999. 433 p.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 25 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Симонов Петр Михайлович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: simprm@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737

THE THEOREM OF BOHL–PERRON ON THE ASIMPTOTIC STABILITY OF HYBRID SYSTEMS AND INVERSE THEOREM

P. M. Simonov

Perm State National Research University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: simpmp@mail.ru

Abstract. We consider an abstract hybrid system of two equations with two unknowns: a vector function x that is absolutely continuous on each finite interval $[0, T]$, $T > 0$, and a sequence of numerical vectors y . The study uses the W -method N.V. Azbelev. As a model, a system containing a functional differential equation with respect to x is used, and a difference equation with respect to y . Solutions spaces are studied. For a hybrid system, the Bohl–Perron theorem on asymptotic stability and the converse theorem are obtained.

Keywords: the theorem of Bohl–Perron about the asymptotic stability; hybrid linear system of functional differential equations; method of the model equations, converse theorem

REFERENCES

1. Marchenko V.M, Luazo J.J. Ob ustoychivosti gibridnykh differentsial'no-raznostnykh sistem [On the stability of hybrid difference-differential systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 728-740. (In Russian).
2. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh sistem s posledeystviyem [Theorem of Bohl–Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, no. 2 (33), pp. 56-60. (In Russian).
3. Simonov P.M. K voprosu o teoreme Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh funktsional'no-differentsial'nykh sistem s posledeystviyem (GLFDSP) [On the question of the theorem of Bohl–Perron of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva – Middle Volga Mathematical Society Journal*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 75-81. (In Russian).
4. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona dlya gibridnykh lineynykh sistem s posledeystviyem [The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskiye obzory – Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 132, pp. 122-126. (In Russian).
5. Simonov P.M. The Bohl–Perron theorem for hybrid linear systems with aftereffect. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 775-781.

6. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti dlya gibridnykh lineynykh funktsional’no-differentsial’nykh sistem s posledeystviyem (GLFDSP) [Theorem of Bohl–Perron on asymptotic stability of hybrid linear functional differential systems with aftereffect (HLFDSA)]. *Vestnik Rossiyskoy akademii estestvennykh nauk – Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences*, 2016, vol. 16, no. 3, pp. 55–59. (In Russian).
7. Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti gibridnykh sistem [The Bohl–Perron theorem on the asymptotic stability of hybrid systems]. *Materialy konferentsii «Funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N.V. Azbeleva* [Proceedings of the Conference “Functional and Differential Equations: Theory and Applications” Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbleev]. Perm, 2018, pp. 230–235. (In Russian).
8. Azbelev N.V., Berezenskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost’ lineynykh sistem s posledeystviyem. IV [Stability of linear systems with aftereffect. IV]. *Differentsial’nye uravneniya – Differential Equations*, 1993, vol. 29, no. 2, pp. 196–204. (In Russian).
9. Azbelev N.V., Berezenskiy L.M., Simonov P.M., Chistyakov A.V. Ustoychivost’ lineynykh sistem s posledeystviyem. III [Stability of linear systems with aftereffect. III]. *Differentsial’nye uravneniya – Differential Equations*, 1991, vol. 27, no. 10, pp. 1659–1668. (In Russian).
10. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost’ resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Equations Solutions with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm State University Publ., 2001, 230 p. (In Russian).
11. Barbashin E.A. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 224 p. (In Russian).
12. Massera J.L., Schaffer J.J. *Lineynyye differentsial’nyye uravneniya i funktsional’nyye prostranstva* [Linear Differential Equations and Function Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1970, 456 p. (In Russian).
13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis]. St. Petersburg, Nevskiy Dialekt Publ., BKHV–Peterburg Publ., 2004, 816 p. (In Russian).
14. Nosov V.R. Teorema Perrona dlya statsionarnykh i periodicheskikh sistem differentsial’no-funktsional’nykh uravneniy [Perron’s theorem for stationary and periodic systems of differential functional equations]. *Differentsial’nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom* [Differential Equations with Deviating Argument]. Moscow, 1979, vol. 11, pp. 44–51. (In Russian).
15. Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R. *Ustoychivost’ i periodicheskiye rezhimy reguliruyemykh sistem s posledeystviyem* [Stability and Periodic Regimes Controlled Systems with Aftereffect]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 448 p. (In Russian).
16. Kurbatov V.G. Ob ustoychivosti funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy [On functional differential equations stability]. *Differentsial’nye uravneniya – Differential Equations*, 1981, vol. 17, no. 6, pp. 963–972. (In Russian).
17. Kurbatov V.G. *Lineynyye differentsial’no-raznostnyye uravneniya* [Linear Differential Equations]. Voronezh, Voronezh University Publ., 1990, 168 p. (In Russian).
18. Pulyaev V.F., Tsalyuk Z.B. K voprosu o dopustimosti nekotorykh par prostranstv dlya lineynykh operatorov i uravneniy Vol’terra [On the issue of the admissibility of certain spaces pairs for linear operators and the Volterra equations]. *Differentsial’nye uravneniya – Differential Equations*, 1983, vol. 19, no. 4, pp. 684–692. (In Russian).
19. Pulyaev V.F. O dopustimosti nekotorykh par prostranstv otnositel’no lineynykh integral’nykh uravneniy Vol’terra [On the admissibility of some pairs of spaces according to linear integral Volterra equations]. *Differentsial’nye uravneniya – Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 10,

pp. 1800-1805. (In Russian).

20. Pulyaev V.F. O spektre lineynykh nepreryvnykh operatorov [On the spectrum of linear continuous operators]. *Izvestiya Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey shkoly. Estestvennyye nauki – Izvestiya of the North Caucasus Scientific Centre of the Higher School. Natural Science*, 1985, no. 4, pp. 25-28. (In Russian).

21. Pulyaev V.F. O spektre operatorov Vol'terra [On the spectrum of Volterra operators]. *Sbornik nauchnykh trudov «Integral'nyye operatory i uravneniya»* [Proceedings of Scientific Works "Integral Operators and the Equation"]. Krasnodar, Kuban State University Publ., 1987, pp. 29-37. (In Russian).

22. Pulyaev V.F. O vzaimosvyazi neterovosti lineynykh nepreryvnykh operatorov i ikh suzheniy [On interrelation of Noetherian linear continuous operators and their restrictions]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1990, no. 8 (339), pp. 65-73. (In Russian).

23. Pulyaev V.F. *Razvitiye teorii lineynykh integral'nykh uravneniy s periodicheskimi i pochti periodicheskimi yadrami: avtoref. dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [Theory of Linear Integral Equations with Periodic and Almost Periodic Kernels Development. Dr. phys.-math. sci. diss. abstr.]. St. Petersburg, 2001, 31 p. (In Russian).

24. Pulyaev V.F., Tsalyuk Z.B. Ob asimptoticheskom povedenii resheniy integral'nykh uravneniy Vol'terra v banakhovykh prostranstvakh [On the asymptotic behavior of solutions of integral Volterra equations in Banach spaces]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1991, no. 12 (355), pp. 47-55. (In Russian).

25. Sokol D.G. O dopustimosti nekotorykh par prostranstv dlya integral'nykh operatorov i uravneniy [On the admissibility of certain space pairs for integral operators and equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: estestvennyye nauki – University News North-Caucasian Region. Natural Sciences Series*, 2000, no. 1, pp. 135-137. (In Russian).

26. Bukhvalov A.V., Veksler A.I., Lozanovskiy G.Ya. Banakhovy reshetki – nekotoryye banakhovy aspekty teorii [Banach lattices – some Banach theory aspects]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, no. 2 (206), pp. 137-183. (In Russian).

27. Kurbatov V.G. *Functional Differential Operators and Equations*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 1999, 433 p.

Received 20 April 2018

Reviewed 25 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Simonov Pyotr Mikhailovich, Perm State National Research University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, e-mail: simpm@mail.ru

For citation: Simonov P.M. Teorema Bolya–Perrona ob asimptoticheskoy ustoychivosti gibridnykh sistem i yeyo obrashcheniye [The theorem of Bohl–Perron on the asymptotic stability of hybrid systems and inverse theorem]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 726–737. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-726-737 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744

УДК 517.911.5

АППРОКСИМАЦИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

© В. В. Скоморохов

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

E-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Аннотация. В работе изучаются гиперболические дифференциальные включения дробного порядка с импульсными воздействиями. Дано определение приближенного решения (δ -решения) гиперболического дифференциального включения дробного порядка с импульсными воздействиями, установлены асимптотические свойства множеств решений аппроксимирующих дифференциальных включений дробного порядка с внешними возмущениями.

Ключевые слова: гиперболические дифференциальные включения; дробная производная; импульсные воздействия; аппроксимирующее отображение; радиус внешних возмущений; модуль непрерывности отображения; δ -решение

Введение

Изучению дифференциальных включений дробного порядка посвящены работы многих известных российских и зарубежных математиков [1–3]. Это связано с тем, что дифференциальные включения дробного порядка оказались удобным инструментом в моделировании многих явлений в различных областях науки и техники. Действительно, мы можем найти многочисленное их применение к задачам прикладной математики, физики, экономики, биологии, химической технологии и т. д. Дифференциальные включения с импульсным воздействием стали важны при моделировании процессов и явлений реального времени [4, 5].

Стоит отметить, что процесс моделирования связан с теми или иными погрешностями. Они возникают, прежде всего, в связи с тем, что сама математическая модель описывает процесс с некоторыми допущениями и предположениями. Кроме того, построение самого многозначного отображения, порождающего дифференциальное включение дробного порядка и описывающего модель, связано с той или иной степенью точности.

Поэтому аппроксимация дифференциального включения дробного порядка является актуальной задачей (см., например, [6]).

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$; $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ – множество всех непустых, компактов $\mathbb{R}^n$; $h(A, B)$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами, содержащимися в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $C^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных функций $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|$. $L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\|_1 = \int_a^b \|u(t)\| dt$.

Будем говорить, что $F: [a, b] \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если выполняются следующие условия:

- 1) при каждом $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot)$ измеримо;
- 2) при почти всех $t \in [a, b]$ отображение $F(t, \cdot)$ непрерывно;
- 3) для каждого ограниченного множества $V \subset \mathbb{R}^n$ найдется такая функция $m_V: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ что при почти всех $t \in [a, b]$ и всех $u \in V$ выполняется неравенство $\|F(t, u)\| \leq m_V(t)$.

Пусть $t_k \in [a, b]$ ($1 \leq k \leq m$) – конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n([a, b], \mathbb{R}^n)$ множество всех непрерывных на каждом из промежутков $[t_{k-1}, t_k]$ ограниченных функций $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 2, 3, \dots, m$, с нормой $\|u\|_{\tilde{C}^n} = \max_{t \in [a, b]} \|u(t)\|$.

Пусть $\tilde{L}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ – множество функций $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|f\|_{\tilde{L}^1} = \int_a^b \|f(t)\| dt$.

Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для $f(t, x) \in L^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ выражение

$$I_0^{(r,p)} f(t, x) = \frac{2}{(r+p)} \int_0^t \int_0^x \frac{f(s, \tau)}{(s-r)(\tau-p)} ds d\tau,$$

назовем *смешанным левосторонним интегралом Римана–Лиувилля* порядка (r, p) , где $\Gamma(r, p)$ – гамма-функция. Дробная производная Капуто порядка (r, p) определяется выражением

$$D_0^{(r,p)} f(t, x) = I_0^{(1-r, 1-p)} \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} f(t, x)$$

Рассмотрим задачу

$$D_0^{(r,p)} u(t, x) \in F(t, x, u(t, x)), \quad u(t, x) \in [a, b] \times [a, b], \quad (2)$$

$$u(t_k, x) = \varphi_k(x), \quad t_k \in [a, b], \quad k = 2, 3, \dots, m, \quad (3)$$

$$u(t, 1) = \alpha(t), \quad u(1, x) = \beta(x), \quad (4)$$

где α, β непрерывны и $\alpha(1) = \beta(1)$ отображение $F: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Отображения $\varphi_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 2, 3, \dots, m$, непрерывны, $\varphi_k(t_k, x) = \varphi_k(t_k, x)$, $k = 2, 3, \dots, m$.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u \in L^n(\mathbb{R}^n)$, для которой существует такое $q \in L^n(\mathbb{R}^n)$, что при почти всех $t, x \in \mathbb{R}^n$ выполняется включение $q(t, x) \in F(t, x, u(t, x))$ и при всех $t, x \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление

$$u(t, x) = \alpha(t, x) + \beta(t, x) + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k, b]}(t) u(t_k, x) + \frac{2}{(r+p)} \int_0^t \int_0^x \frac{q(s, \tau)}{(s+r)(\tau+p)} ds d\tau.$$

Обозначим через K множество всех функций $\eta; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- 1) при каждом $u, \delta \in \mathbb{R}^n$ функция $\eta \otimes u, \delta$ измерима;
- 2) при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и всех $\delta \in \mathbb{R}^n$ функция $\eta(t, x, \delta)$ непрерывна;
- 3) для каждого $U \in \text{pro } s] \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [1, \infty)$ существует такая суммируемая функция $\mu_{U, \delta}; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$, что при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и всех $u \in U$ и $\tau \in [1, \delta]$ выполняется неравенство $\eta(t, x, u, \tau) \leq \mu_{U, \delta}(t, x)$;
- 4) при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и каждого $u \in \mathbb{R}^n$ выполняются равенства $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(t, x, z, \delta) = \eta(t, x, u, 1)$.

Обозначим через P множество всех функций $\eta; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$, обладающих свойствами из класса функций K , а также удовлетворяющих следующим условиям: для каждого $U \in \text{pro } s] \mathbb{R}^n$ и $\delta \in [1, \infty)$ найдутся такие числа $r(U, \delta) > 1$ и $\gamma(U, \delta) \geq 1$, что при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и всех $u \in U$ число $r(U, \delta)$ удовлетворяет неравенству $r(U, \delta) \leq \eta(t, x, u, \delta)$, а для числа $\gamma(U, \delta)$ при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и всех $u \in U$ и $\tau \in [1, \delta]$ имеет место оценка $\eta(t, x, u, \tau) \leq \gamma(U, \delta)$.

Пусть $\psi \otimes \eta \in P$. Определим функцию $\varphi \psi; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [1, \infty)$ равенством

$$\varphi \psi(t, x, u, \delta) = \sup_{v \in B[u, \psi(t, x, u, \delta)]} \inf_{s \in [1, \delta]} \eta(t, x, v, s)$$

Значения функции $\varphi \psi$ в точке (t, x, u, δ) будем называть *модулем непрерывности отображения $F; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{pro } s] \mathbb{R}^n$ в точке (t, x, u) по переменной u в шаре $B[u, \psi(t, x, u, \delta)]$ функцией радиуса модуля непрерывности* или просто радиусом непрерывности, а саму функцию $\varphi \psi$ – *функцией модуля непрерывности* или просто модулем непрерывности отображения $F; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{pro } s] \mathbb{R}^n$ относительно радиуса непрерывности ψ .

Будем говорить, что многозначное отображение $\tilde{F}; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{pro } s] \mathbb{R}^n$ аппроксимирует отображение $F; [1, a] \times [1, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{pro } s] \mathbb{R}^n$, если найдется такая функция $\xi \in K$, что при почти всех $t, x \in [1, a] \times [1, b]$ и всех $u, \delta \in \mathbb{R}^n$ выполняется оценка

$$h(F)(t, x, u, \delta) \leq \xi(t, x, u, \delta) \quad (5)$$

Отображение $\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A}$ будем называть *аппроксимирующим отображением* $F) \times \times \times \mathbb{A}$ или просто аппроксимирующим. Функция $\xi) \times \times \times \mathbb{I} K)]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in +$ в неравенстве (4) определяет степень близости значения $\tilde{F})t, x, u, \delta +$ в точке $)t, x, u + \mathbb{I}]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n$ к значению $F)t, x, u +$ для каждого фиксированного $\delta \mathbb{I}]1, \in +$. Эту функцию $\xi) \times \times \times \mathbb{A}$ будем называть *степенью аппроксимации отображения* $F;]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \infty$ по $s] \mathbb{R}^n$ а отображением $\tilde{F};]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in + \infty$ по $s] \mathbb{R}^n$ а или просто степенью аппроксимации.

Пару $)\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A}, \xi) \times \times \times \mathbb{A} +$ будем называть *аппроксимацией отображения* $F) \times \times \times \mathbb{A}$ или просто аппроксимацией, а если при почти всех $)t, x + \mathbb{I}]1, a \circ]1, b \circ$ и всех $)u, \delta + \mathbb{I} \mathbb{R}^n \circ]1, \in +$ выполняется включение $F)t, x, u + \rightarrow \tilde{F})t, x, u, \delta +$, то *аппроксимацией вложением*.

Значения аппроксимирующего отображения $\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A}$ могут вычисляться с некоторой степенью точности, которую можно задать некоторой функцией

$$\eta) \times \times \times \mathbb{I} K)]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in +$$

В связи с этим рассмотрим отображение $Q_\eta;]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in + \infty$ по $s] \mathbb{R}^n$ а, определенное равенством

$$Q_\eta)t, x, u, \delta + [\tilde{F})t, x, u, \delta + \rho(t, x, u, \delta), \quad)6 +$$

где функция $\eta) \times \times \times \mathbb{I} K)]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in +$ в каждой точке $)t, x, u + \mathbb{I}]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $\delta \mathbb{I}]1, \in +$ определяет погрешность вычисления значений аппроксимирующего отображения $\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A}$. Далее, функцию $\eta) \times \times \times \mathbb{A}$ будем называть *радиусом внешних возмущений аппроксимирующего отображения* $\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A}$ или просто радиусом внешних возмущений.

2. Основные результаты

Пусть $\eta) \times \times \times \mathbb{I} K)]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in +$. Рассмотрим при каждом фиксированном $\delta \mathbb{I}]1, \in +$ дифференциальное включение

$$D_0^{(r,p)}u)t, x + \mathbb{I} Q_\eta)t, x, u)t, x + \delta + \quad)7 +$$

где отображение $Q_\eta;]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \circ]1, \in + \infty$ по $s] \mathbb{R}^n$ а задано равенством (5). Дифференциальное включение (6) будем называть *аппроксимирующим дифференциальное включение* (1) с *внешними возмущениями*.

Каждое решение включения (6) с импульсными воздействиями (2) и условиями (3) при фиксированном $\delta > 1$ будем называть δ -*решением* (приближенным решением с точностью до δ или просто приближенным решением) *включения* (1).

Пусть отображение $F;]1, a \circ]1, b \circ \mathbb{R}^n \infty$ по $s] \mathbb{R}^n$ а удовлетворяет условиям Каратеодори. Рассмотрим задачу

$$D_0^{(r,p)}u)t, x + \mathbb{I} p F)t, x, u)t, x + \quad)8 +$$

$$()u)t_k, x + [\{k\}u)t_k, x + \quad k [2, 3, \dots, m, \quad)9 +$$

$$u)t, 1+[\alpha)t \mp u)1, x+[\beta)x \mp]: +$$

где $\text{ip } F) \times \times u) \times \times \mathbb{A} +$ — выпуклая оболочка множества $F) \times \times u) \times \times \mathbb{A} \mp$, отображения $\{k; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, k \in [2, 3, \dots, m]$, непрерывны, $(\cdot)u)t_k, x \mp [\cdot)u)t_k 0 1, x \mp u)t_k, x \mp, k \in [2, 3, \dots, m]$, $\alpha) \times \beta) \times$ непрерывны и $\alpha)1 \mp [\beta)1 \mp$.

Обозначим через $H)V \mp H_{\text{co}})V +$ множества решений задач (1)–(3) и (7)–(9), соответственно, принадлежащих множеству $V \rightarrow \tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \mp$.

Пусть $V \rightarrow \tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \mp, \eta) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} K)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$. Обозначим через $H_{\eta(\delta)}V +$ множество всех решений задачи (6), (2), (3) с заданным радиусом внешних возмущений, принадлежащих множеству V .

Теорема 1. Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$ и пусть $\psi) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} P)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A} \xi) \times \times \times \mathbb{A} +$ аппроксимирует отображения $F) \times \times \mathbb{A}$ вложением. Тогда для любой функции $\eta) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} K)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$ для которой существует такое число $\varepsilon > 1$, что при почти всех $)t, x \mathbb{I}]1, a \circ [1, b \mathbb{A}$ всех $u \mathbb{I})U)V + \mathbb{E}$ и $\delta \mathbb{I}]1, \in +$ имеет место неравенство

$$\varphi)\psi \mathbb{I} t, x, u, \delta \mathbb{I} \leq \eta)t, x, u, \delta \mathbb{I}$$

где $\varphi)\psi \mathbb{I} t, x, u, \delta \mathbb{I} +$ — модуль непрерывности отображения $F) \times \times \mathbb{A}$, выполняется соотношение

$$H_{\text{co}})V \mathbb{I} \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}V^\delta} \mathbb{I} \mp$$

где $\overline{H_{\eta(\delta)}V^\delta} +$ — замыкание в пространстве $\tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$ множества $H_{\eta(\delta)}V^\delta \mathbb{I} \mp V^\delta$ — замкнутая в пространстве $\tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$ δ — окрестность множества V .

Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$ и пусть $\psi) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} P)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$. Будем говорить, что аппроксимация дифференциального включения (1) устойчива на ограниченном замкнутом множестве $V \rightarrow \tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$ относительно внешних возмущений из класса $K)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$, если для любой функции $\eta) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} K)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$ выполняется равенство

$$\overline{H)V} \mathbb{I} \bigcap_{\delta > 0} \overline{H_{\eta(\delta)}V^\delta} \mathbb{I} \mp$$

Теорема 2. Пусть V — ограниченное замкнутое множество пространства $\tilde{C}^n)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} +$. Далее, пусть пара $(\tilde{F}) \times \times \times \mathbb{A} \xi) \times \times \times \mathbb{A} +$ аппроксимирует отображения $F) \times \times \mathbb{A}$ вложением. Тогда для того, чтобы для любой функции

$$\eta) \times \times \times \mathbb{A} \mathbb{I} K)]1, a \circ [1, b \mathbb{A} \circ \mathbb{R}^n \circ [1, \in \mp \mathbb{A}$$

аппроксимация дифференциального включения была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для задачи (1)–(3) на множестве V выполнялось равенство

$$\overline{H)V} \mathbb{I} H_{\text{co}})V \mathbb{I} \mp$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
3. Витюк А.Н. Существование решений дифференциальных включений с частными производными дробных порядков // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 8. С. 13-19.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев: Вища школа, 1987.
5. Завалишин С.Т., Сесекин А.Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М.: Наука, 1991.
6. Булгаков А.И., Скоморохов В.В., Филиппова О.В. Асимптотические свойства множества δ -решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1039-1043.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Скоморохов Виктор Викторович, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744

APPROXIMATION OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL INCLUSIONS OF FRACTIONAL ORDER WITH IMPULSES

V. V. Skomorokhov

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: uaa@nnn.tstu.ru

Abstract. In this paper there are considered hyperbolic differential inclusions of fractional order with impulses. Here we represent the concept of approximate solution (δ -solution) for a hyperbolic differential inclusion of fractional order with impulses. The asymptotic properties of solutions sets to approximating differential inclusions of fractional order with external disturbance are derived.

Keywords: hyperbolic differential inclusions; fractional derivative; impulses; approximating map; radius of external perturbations; modulus of continuity; δ -solution.

REFERENCES

1. Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with Discontinuity Right Part]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya* [Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987. (In Russian).
3. Vityuk A.N. Sushchestvovaniye resheniy differentsial'nykh vklyucheniye s chastnymi proizvodnymi drobnnykh poryadkov [Existence of solutions of partial differential inclusions of fractional order]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1997, no. 8, pp. 13-19. (In Russian).
4. Samoylenko A.M., Perestyuk N.A. *Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem* [Impulsive Differential Equations]. Kiev, Vishcha shkola Publ., 1987. (In Russian).
5. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snyye protsessy. Modeli i prilozheniya* [Impulse Processes. Models and Applications]. Moscow, Nauka Publ., 1991. (In Russian).
6. Bulgakov A.I., Skomorokhov V.V., Filippova O.V. Asimptoticheskiye svoystva mnozhestva δ -resheniy funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami [Asymptotic properties of the set of δ -solutions to differential inclusion with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 1039-1043. (In Russian).

Received 18 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Skomorokhov Victor Victorovich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: uaa@nnn.tstu.ru

For citation: Skomorokhov V.V. Approksimatsiya giperbolicheskikh differentsial'nykh vklyucheniye drobnogo poryadka s impul'snymi vozdeystviyami [Approximation of hyperbolic differential inclusions of fractional order with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 738–744. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-738-744 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756

УДК 517.95

ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

© В. И. Сумин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: v_sumin@mail.ru

Аннотация. Дается обзор некоторых результатов, полученных в теории оптимизации распределенных систем методом вольтерровых функционально-операторных уравнений. Рассматриваются, в частности, следующие вопросы: условия сохранения глобальной разрешимости управляемых начально-краевых задач, условия оптимальности, сингулярные управляемые системы в смысле Ж.-Л. Лионса, особые оптимальные управления, вопросы обоснования численных методов оптимального управления и др.

Ключевые слова: вольтерровы функционально-операторные уравнения; управляемые начально-краевые задачи; условия сохранения глобальной разрешимости; задачи оптимизации; условия оптимальности; методы оптимизации

В [1, 2] была предложена весьма общая форма описания управляемых *начально-краевых задач* (НКЗ) с помощью *вольтерровых функционально-операторных уравнений* (ВФОР) вида

$$z(t) = f(t, A[z](t), v(t)), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m(\Pi), \quad (1)$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ и $f(., ., .) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m$ заданы; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ – управление; $A : L_p^m \rightarrow L_q^l$ – линейный оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$ (это определение вольтерровости [1, 2] – непосредственное многомерное обобщение известного определения А.Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра; множества системы T естественно назвать вольтерровыми множествами

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2016 гг. (проект № 1727).

оператора A и ВФОУ (1)); $p, q, k \in [1, +\infty]$. К ВФОУ (1) с достаточно богатыми системами T естественным образом (например, обращением главной части) приводятся самые разнообразные НКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с запаздываниями и др.), в том числе при понимании решения НКЗ в обобщенном смысле (см., например, [3–13] и обзор [14]). Подчеркнем, что мы рассматриваем уравнение (1) прежде всего как удобную эквивалентную форму записи управляемой НКЗ; как правило, управление $v(\cdot)$ в (1) соответствует распределенному управлению в НКЗ, а наличие в НКЗ граничных управлений, управляемой границы или управляемых старших коэффициентов уравнения означает, что в эквивалентном ВФОУ (1) оператор A является управляемым (см., например, [5, 6], обзоры [12, 14], статью М.С. Коржавиной и В.И. Сумина в этом номере журнала). Переход к описанию НКЗ с помощью ВФОУ (1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации. Он, возможно, позволяет достичь разумного компромисса между естественным стремлением к общности теоретических построений (призванной выявить новые связи и закономерности), с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме – с другой. Иногда бывает удобно в качестве эквивалента НКЗ вместо (1) или наряду с (1) использовать ВФОУ и другого вида (см., например, [15–17], обзор [14]). Коротко расскажем о некоторых результатах теории оптимизации, полученных с использованием ВФОУ.

При выводе *необходимых условий оптимальности* (НУО), при обосновании численных методов решения задач оптимального управления и во многих других случаях возникает следующая ситуация. Некоторая управляемая НКЗ рассматривается на фиксированном множестве Π изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, то есть определенные на всем Π , решения НКЗ из выбранного класса W функций на Π . Пусть $\mathcal{R}$ — множество тех управлений из класса допустимых, каждому из которых отвечает единственное в W решение рассматриваемой НКЗ; назовем $\mathcal{R}$ множеством глобальной разрешимости НКЗ. Важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из $\mathcal{R}$, то есть вопрос о достаточных условиях *устойчивости* (при возмущении управления) *существования глобальных решений* (УСГР) данной НКЗ. Так, при выводе НУО недостаток информации об УСГР по возмущению управления часто вынуждает считать управляемую НКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [18] и переходить от классического случая «управление $\rightarrow$ состояние» к рассмотрению оптимизационных задач в классе пар «управление, состояние», когда «управление» и «состояние» равноправны; при этом построения в сингулярном случае часто оказываются намного более сложными, чем аналогичные построения в несингулярном (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в главах 1, 2 [18]).

Для сосредоточенных управляемых систем теоремы о достаточных условиях УСГР хорошо известны: простейшие варианты дают теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от числового параметра, более общие случаи параметра из метрического и топологического пространств детально рассмотрены, например, в [19, 20],

в [19] можно найти и подробную библиографию по этому вопросу, имеющему богатую историю. Гораздо меньше внимания уделялось вопросам УСГР распределенных управляемых систем. Условия УСГР управляемых НКЗ изучались, как правило, лишь при специальных возмущениях (вариациях) управлений, требующихся, например, для получения тех или иных НУО. Причем набор рассматривавшихся под таким углом зрения управляемых НКЗ относительно невелик. История вопроса кратко описана в [12].

В [6, 21, 22] представлена общая схема получения достаточных условий УСГР для распределенных управляемых систем, основанная на приведении НКЗ к эквивалентному ВФОУ вида (1) (первоначальный вариант схемы был описан для случая $p = q = k = \infty$ в [1], а затем в модернизированном виде – в [2–5]). На многочисленных примерах показано, что в терминах эквивалентных ВФОУ (1) условия УСГР управляемых НКЗ формулируются достаточно естественно и в то же время удобно для приложений; эти условия сопровождаются некоторыми утверждениями о непрерывной зависимости решений от управлений и оценками приращений решений. Схема позволяет получать конструктивные условия УСГР самых разнообразных НКЗ для различных нелинейных уравнений с частными производными при возмущении распределенных, граничных, начальных управлений и управлений, входящих в старшие коэффициенты уравнений (см., например, [1, 3–13], обзоры [12, 14], статью М.С. Коржавиной и В.И. Сумина в данном номере журнала). При этом используется продолжение локальных решений (управляемой НКЗ или эквивалентного ВФОУ) вдоль цепочки вольтерровых множеств, которое в общем виде можно описать следующим образом: если фиксировано некоторое допустимое управление u_0 из множества глобальной разрешимости $\mathcal{R}$, то всякому допустимому управлению u , для которого величина $r(u, u_0)$ отклонения u от u_0 в некоторой полуметрике r , определяемой правой частью эквивалентного ВФОУ, достаточно мала, можно сопоставить конечную упорядоченную по вложению последовательность $H_1, H_2, \dots, H_k$, $H_k = \Pi$, вольтерровых множеств ВФОУ так, что на H_1 управлению u отвечает локальное решение (НКЗ и эквивалентного ВФОУ) и это решение последовательными продолжениями с H_1 на H_2 , ..., с H_{k-1} на H_k допускает продолжение до глобального решения, причем отклонение этого глобального решения от глобального решения, отвечающего управлению u_0 , оценивается через $r(u, u_0)$. Заметим, что эта простая конструкция «цепочки вольтерровых множеств» оказалась весьма полезной в различных вопросах не только теории вольтерровых функционально-операторных уравнений, но и в теории вольтерровых операторов (см. ниже), а также в собственно теории оптимального управления распределенными системами и теории «функционально-операторных игр» (см. обзор [14]).

Распространение теории УСГР НКЗ, использующей указанную вольтеррову функционально-операторную переформулировку НКЗ в виде ВФОУ (1), с первоначально рассматривавшегося случая $p = q = k = \infty$ (см., например, [1–5] и обзоры [12, 14]) на общий случай $1 \leq p, q, k \leq \infty$ (что существенно расширило семейство охватываемых этой теорией НКЗ, см., например, [6–13] и обзоры [12, 14]) потребовало введения [20] и подробного изучения [6, 21, 22] нового понятия «равностепенная квазинильпотентность семейства операторов». При этом получила развитие идея работы [23], посвященной признаку квазинильпотентности вольтерровых функциональных операторов, опираю-

щемся на понятие цепочки вольтерровых множеств (точнее, на понятие так называемой δ -цепочки вольтерровых множеств [5]) оператора.

В [5, 24] доказательства упомянутых теорем УСГР ВФОУ (1), $p = q = k = \infty$, были распространены на нелинейные ВФОУ второго рода общего вида над L_∞^m с варьируемой правой частью. В [15–17] схема [6, 20] вывода условий УСГР ВФОУ (1) в лебеговых пространствах была распространена на случай рассматриваемых над банаховым пространством вольтерровых операторных уравнений второго рода общего вида с варьируемой правой частью; при этом понятие «вольтерровость функционального оператора на системе множеств» в смысле [1, 2] заменяется более общим понятием «вольтерровость оператора на системе проекторов».

Теоремы УСГР нашли применение прежде всего при изучении вопросов варьирования и дифференцирования функционалов и операторов распределенных оптимизационных задач. Так, в [6, 25] для управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, было дано обоснование предложенного В.И. Плотниковым в [26] общего подхода к вычислению вариаций функционалов и операторов оптимизационной задачи, использующего линеаризацию задачи и соответствующие линейные интегральные представления приращений функционалов и операторов. Это позволило в [6] доказать, следуя общей схеме [26] вывода НУО в задачах с ограничениями, принцип максимума для связанной с управляемым ВФОУ (1) оптимизационной задачи достаточно общего вида со смешанными функциональными ограничениями и операторным ограничением типа включения (в качестве конкретного примера в [6] был получен принцип максимума для оптимизационной задачи с функциональными и фазовыми ограничениями, связанной с НКЗ для нелинейного параболического уравнения, при понимании решения НКЗ в обобщенном смысле). Заметим, что переход от управляемой НКЗ к ВФОУ (1), как правило, удобен при выводе НУО (например, принципа максимума) уже потому, что при этом дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы НКЗ, действующие в пространствах C_k или W_p^l , заменяются на (как правило, интегральные) операторы, действующие в более удобных для построения «сопряженной задачи» данного НУО лебеговых пространствах. Если эквивалентом НКЗ является ВФОУ (1), то сопряженная задача также имеет вид ВФОУ и не обязательно переписывается в дифференциальной (интегро-дифференциальной) форме подобно первоначальной управляемой НКЗ (см., примеры в [1, 6, 25, 27–29]).

В [3] с помощью теорем УСГР [2] для широкого класса оптимизационных задач с ограниченным множеством допустимых значений управления, связанных с НКЗ, допускающими описание ВФОУ (1) при $p = q = k = \infty$, было дано обоснование применению градиентных методов при произвольных порядках роста каратеодориевских «правых частей» НКЗ по «фазовым» и управляющим переменным (часто применяемое дифференцирование функционалов по управлению в пространствах типа L_2 требует, вообще говоря, линейных порядков роста (см., например, [30, гл. 8])).

Теоремы УСГР [6, 21] позволили решить в [6, 7] некоторые вопросы, связанные с проблемой сингулярности управляемых НКЗ в смысле Ж.-Л. Лионса [18]. В [18] предложено управляемую НКЗ называть сингулярной, в частности, тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неиз-

вестно, отвечает ли, единственное глобальное решение данной НКЗ. В этом случае для вывода НУО в [18] было предложено переходить к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар «управление, состояние» и ограничение в виде управляемого уравнения «снимать» методом адаптированного штрафа. Как сказано выше, вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений. В [6, 7] показано, что ряд конкретных управляемых НКЗ, рассматриваемых в [18] как сингулярные, можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО придерживаться классической схемы. При этом бывает удобно «преодолевать сингулярность», переходя в описании управляемой НКЗ к ВФОУ и используя соответствующие теоремы УСГР или теоремы о неявных функциях. Так в [6, 7] удалось решить ряд поставленных в [18] задач получения «сингулярных НУО» (см. также [8]).

В [31, 27] был предложен аксиоматический подход в теории вариаций функционалов задач оптимизации, использующий представление управляемых систем (1), $p = q = k = \infty$, и аксиоматическое описание способов варьирования управлений; описание охватывает большинство традиционных для теории НУО способов варьирования (классическое варьирование, игольчатое, импульсное на полосах, пакетами, сдвигом и др.). Это позволило единообразно рассмотреть широкий класс НУО первого и более высоких порядков (в случае так называемых особых управлений, на которых НУО первого порядка вырождается). В [31, 27], в частности, получил развитие способ [1] изучения особых управлений поточечного принципа максимума для систем (1), использующий при вычислении старших вариаций функционалов тензорные произведения лебеговых пространств. В [31, 27, 6] представлена обобщающая этот способ схема изучения особых управлений, использующая упомянутый аксиоматический подход. Показано, что для распределенных задач оптимизации достаточно характерно «сильное вырождение особых управлений», когда вместе с НУО первого порядка (например, поточечным принципом максимума, который можно считать НУО первого порядка при игольчатом варьировании управлений) вырождаются и НУО второго порядка. Описан способ компактной унификации построения НУО сильно вырожденных особых управлений, позволивший с единых позиций взглянуть на известные НУО особых управлений сосредоточенных и распределенных систем и получить ряд новых НУО подобных управлений для распределенных задач оптимизации (в частности, для задач, не рассматривавшихся в этом плане ранее; в теории оптимизации распределенных систем НУО особых управлений изучались в основном для поточечного принципа максимума в задачах оптимизации систем Гурса–Дарбу и близких к ним, при этом для систем Гурса–Дарбу рассматривались, как правило, терминальные задачи оптимизации; см., например, обзоры литературы в [31–32]). Подробное изложение схемы [31, 27, 6] применительно к особым управлениям поточечного принципа максимума для достаточно общей задачи оптимизации ВФОУ (1) дано в [32]. В [28–29] возможности варианта [32] схемы [31, 27, 6] демонстрируются на примере управляемой системы Гурса–Дарбу, являющейся, как известно, своеобразным «пробным камнем» теории оптимального управления распределенными системами.

Автор ограничился кратким обзором некоторых полученных в разное время им лично и в соавторстве результатов по рассматриваемой теме. Ряд интересных результатов

по теме (свойства множеств глобальной разрешимости, обоснование численных методов распределенной оптимизации, функционально-операторные игры и др.) получил в последние годы А.В. Чернов (см., например, обзор [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин В.И.* Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький: ГГУ, 1975. 158 с.
2. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Доклады Академии наук СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.
3. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3-21.
4. *Сумин В.И.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097-2109.
5. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
6. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределенными системами: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 1998. 346 с.
7. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145-155.
8. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198-204.
9. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164-174.
10. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. IV // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1 (27). С. 185-193.
11. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493-495.
12. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математика. 2003. Вып. 1. С. 91-107.
13. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Нелинейная управляемая задача Гурса-Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 858-870.
14. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: труды Междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург: Изд-во ИММ УрО РАН – УРФУ, 2015. С. 293-300.

15. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения в банаховых пространствах: устойчивость существования глобальных решений. Деп. в ВИНТИ 25.04.00. № 1198-В00. 75 с.
16. *Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 2000. 177 с.
17. *Сумин В.И., Чернов А.В.* О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровых операторных уравнений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2003. Вып. 1 (26). С. 39-49.
18. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
19. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
20. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
21. *Сумин В.И.* Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2 (19). С. 138-151.
22. *Sumin V.I.* Uniform quasinilpotency: definitions, conditions, examples of applications // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 453-466.
23. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтеровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402-1411.
24. *Сумин В.И.* О функциональных вольтерровых уравнениях // Известия высших учебных заведений. Математика. 1995. № 9. С. 67-77.
25. *Плотников В.И., Сумин В.И.* Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сибирский математический журнал. 1981. Т. 22. № 6. С. 142-161.
26. *Плотников В.И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида // Доклады Академии наук СССР. 1971. Т. 199. № 2. С. 275-278.
27. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в задачах оптимизации распределенных систем // Оптимизация. Новосибирск, 1993. № 52 (69). С. 74-94.
28. *Лисаченко И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях принципа максимума для задачи оптимизации системы Гурса–Дарбу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25. Вып. 4. С. 483-491.
29. *Горохова И.В., Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума для задачи оптимизации системы Гуса–Дарбу // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2018. Т. 23. Вып. 122. С. 278-284.
30. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 433 с.
31. *Сумин В.И.* Сильное вырождение особых управлений в распределенных задачах оптимизации // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 295-299.
32. *Сумин В.И.* Об особых управлениях поточечного принципа максимума в распределенных задачах оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 20. Вып. 3. С. 70-80.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сумин Владимир Иосифович, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, e-mail: v_sumin@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756

VOLTERRA FUNCTIONAL-OPERATOR EQUATIONS AND DISTRIBUTED OPTIMIZATION PROBLEMS

V. I. Sumin

Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: v_sumin@mail.ru

Abstract. A survey of the results obtained in the theory of optimization of distributed systems by the method of Volterra functional-operator equations is given. Topics are considered: the conditions for preserving the global solvability of controllable initial-boundary value problems, optimality conditions, singular controlled systems in the sense of J.L. Lions, singular optimal controls, numerical optimization methods substantiation and others.

Keywords: Volterra functional-operator equations; controlled initial-boundary value problems; conditions for preserving global solvability; optimization problems; optimality conditions; optimization methods

REFERENCES

1. Sumin V.I. *Optimizatsiya upravlyayemykh obobshchennykh vol'terrovyykh sistem: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Optimization of Generalized Controlled Volterra Systems. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Gorky, State University of Gorky Publ., 1975, 158 p. (In Russian).
2. Sumin V.I. Volterra Functional-Operator Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1989, vol. 39, no. 2, pp. 374-378.
3. Sumin V.I. The Features of Gradient Methods for Distributed Optimal-Control Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1990, vol. 30, pp. 1-15.
4. Sumin V.I. Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 12, pp. 1579-1590.
5. Sumin V.I. *Funktsional'nyye vol'terrovyye uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra Equations in the Theory of Optimal Control of Distributed Systems]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 1992, 110 p. (In Russian).
6. Sumin V.I. *Funktsional'nyye vol'terrovyye uravneniya v matematicheskoy teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk* [Functional Volterra Equations in the Mathematical Theory of Optimal Control of Distributed Systems. Dr. phys.-math. sci. diss.]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 1998, 346 p. (In Russian).

The work is executed at financial support of the Ministry of education and science of the Russian Federation in the framework of the project part of state task in the sphere of scientific activities in 2014-2016 (project № 1727).

7. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. I [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1999, no. 2 (21), pp. 145-155. (In Russian).
8. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. II [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. II]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2001, no. 1 (23), pp. 198-204. (In Russian).
9. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. III [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. III]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2002, no. 1 (25), pp. 164-174. (In Russian).
10. Sumin V.I. K probleme singulyarnosti raspredelennykh upravlyayemykh sistem. IV [On problem of singularity of controllable distributed parameter systems. IV]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2004, no. 1 (27), pp. 185-193. (In Russian).
11. Sumin V.I. Usloviya ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyayemykh krayevykh zadach dlya nelineynykh parabolicheskikh uravneniy [Conditions of the existence of global solutions of controlled boundary problems for non-linear parabolic equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 493-495. (In Russian).
12. Sumin V.I. Problema ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy upravlyayemykh krayevykh zadach i vol'terrovyy funktsional'nyye uravneniya [The problem of sustainability of global solutions existence of controlled boundary problems and Volterra functional equations]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematika – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematics*, 2003, no. 1, pp. 91-107. (In Russian).
13. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Nonlinear Goursat-Darboux Control Problem: Conditions for the Preservation of Global Solvability. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 863-876.
14. Sumin V.I., Chernov A.V. Vol'terrovyy funktsional'no-operatornyye uravneniya v teorii optimizatsii raspredelennykh sistem [Volterra functional-operator equations in the distributed systems optimization theory]. *Trudy Mezhdunarodnoy konferentsii «Dinamika sistem i protsessy upravleniya», posvyashchennoy 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika N.N. Krasovskogo* [Proceedings of the International Conference “Systems Dynamics and Control Processes” dedicated to the 90th Anniversary of Academician N.N. Krasovskiy]. Ekaterinburg, IMM UB RAS Publ., 2015, pp. 293-300. (In Russian).
15. Sumin V.I., Chernov A.V. Vol'terrovyy operatornyye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh: ustoychivost' sushchestvovaniya global'nykh resheniy [Volterra Operator Equations in Banach Spaces: Sustainability of Global Solutions Existence]. 75 p. (In Russian).
16. Chernov A.V. Vol'terrovyy operatornyye uravneniya i ikh primeneniye v teorii optimizatsii giperbolicheskikh sistem: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [Volterra Operator Equations and Their Application to the Hyperbolic Systems Optimization Theory. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2000, 177 p. (In Russian).

17. Sumin V.I., Chernov A.V. O dostatochnykh usloviyakh ustoychivosti sushchestvovaniya global'nykh resheniy vol'terrovyykh operatornykh uravneniy [About sufficient conditions for the existence stability of Volterra operator equations global solutions]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 2003, no. 1 (26), pp. 39-49. (In Russian).
18. Lions J.L. *Contrôle des systèmes distribués singuliers*. Paris, Gauthier-Villars, 1983. (In French).
19. Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with a Disconnected Right Part]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (In Russian).
20. Alekseyev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noye upravleniye* [Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (In Russian).
21. Sumin V.I. Upravlyayemyye funktsional'nyye vol'terrovyy uravneniya v lebegovykh prost-ranstvakh [Controlled functional Volterra equations in Lebesgue space]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe uprav-lenie – Nizhny Novgorod University Reports. Series: Mathematical Modeling and Optimal Control*, 1998, no. 2 (19), pp. 138-151. (In Russian).
22. Sumin V.I. Uniform quasinilpotency: definitions, conditions, examples of applications. *Vest-nik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 453-466.
23. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in Spaces of Measurable Functions: the Volterra Property and Quasinilpotency. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403-1411.
24. Sumin V.I. On functional Volterra Equations. *Russian Mathematics*, 1995, no. 9, pp. 65-75.
25. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Optimization of distributed systems in Lebesgue space. *Siberian Mathematical Journal*, 1981, vol. 22, no. 6, pp. 913-929.
26. Plotnikov V.I. Necessary conditions of optimality for control systems of general type. *Pro-ceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1971, vol. 199, no. 2, pp. 1069-1073.
27. Sumin V.I. Sil'noye vyrozhdeniye osobykh upravleniy v zadachakh optimizatsii raspredelen-nykh sistem [Strong degeneration of singular controls in problems of optimization of distributed systems]. *Optimizatsiya – Optimization*, 1993, no. 52 (69), pp. 74-94. (In Russian).
28. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa-Darbu [On singular controls of a maximum principle for the problem of the Goursat-Darboux system optimization]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Me-khanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 483-491. (In Russian).
29. Gorokhova I.V., Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimuma dlya zadachi optimizatsii sistemy Gursa-Darbu [About singular controls of pointwise maximum principle for optimization problem connected with Goursat-Darboux system]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tam-bov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 278-284. (In Russian).
30. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Moscow, 2011, 433 p. (In Russian).

31. Sumin V.I. Strong degeneration of singular controls in distributed optimization problems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1991, vol. 320, no. 2, pp. 295-299.

32. Sumin V.I. Ob osobykh upravleniyakh potochechnogo printsipa maksimuma v raspredelennykh zadachakh optimizatsii [On singular controls in the sense of the pointwise maximum principle in distributed optimization problems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 70-80. (In Russian).

Received 19 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Sumin Vladimir Iosifovich, Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: v_sumin@mail.ru

For citation: Sumin V.I. Volterrovy funktsional'no-operatornye uravneniya i raspredelyennye zadachi optimizatsii [Volterra functional-operator equations and distributed optimization problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 745–756. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775

УДК 517.97

ЗАЧЕМ НУЖНА РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА И ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА И ЧТО ОНА ДАЕТ

✉ М. И. Сумин

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23
E-mail: m.sumin@mail.ru

Аннотация. Рассматривается регуляризация классических принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в выпуклых задачах математического программирования и оптимального управления. На примере «простейших» задач условной бесконечномерной оптимизации обсуждаются два основных вопроса: зачем нужна регуляризация классических условий оптимальности и что она дает?

Ключевые слова: выпуклое программирование; двойственная регуляризация; регуляризованный принцип Лагранжа; оптимальное управление; обратная задача; регуляризованный принцип максимума Понтрягина

Введение

Хорошо известно, что задачам оптимизации и оптимального управления, в целом, свойственны различные проявления некорректности [1]. Естественно, в полной мере эти природные недостатки оптимизационных задач наследуют и соответствующие условия оптимальности, к которым, в первую очередь, относятся привычные классические принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина [2, 3]. В частности, мы говорим о неустойчивости классических условий оптимальности, понимая под этим, что сколь угодно малым возмущениям исходных данных оптимизационной задачи могут отвечать сколь угодно большие возмущения выделяемых этими условиями элементов.

Задачи оптимального управления, в которых имеют место проявления неустойчивости классических условий оптимальности, в большом числе возникают в различных естественнонаучных приложениях. К таким задачам следует, прежде всего, отнести задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа равенства и неравенства. К задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями–равенствами, по сути дела, относятся самые разнообразные обратные задачи естествознания, без умения

эффективно решать которые трудно представить современные научные исследования. В этой связи, неустойчивость классических условий оптимальности ставит непреодолимую преграду на пути их непосредственного использования для решения большого класса актуальных естественнонаучных задач, в которых погрешности исходных данных жестко увязываются с физической сутью их постановок. Следующий простой, но в то же время содержательный пример характеризует вышесказанное.

Рассмотрим задачу

$$(P) \quad \sqrt{z}^2 \rightarrow \min, \quad Az = p, \quad z \in Z,$$

где $A : Z \rightarrow Z$ — линейный вполне непрерывный инъективный оператор с инъективным (и естественно вполне непрерывным) сопряженным A^* ; Z — гильбертово пространство, $p \in Z$ любой такой элемент, для которого, во-первых, задача разрешима (очевидно, единственным образом) и, во-вторых, это решение z_p удовлетворяет регулярному принципу Лагранжа в дифференциальной форме $z_p = \frac{1}{2} A^* \lambda \leq z[\lambda]$ и в эквивалентной недифференциальной форме

$$L_p(z_p, \lambda) \geq L_p(z, \lambda) \quad \forall z \in Z, \quad L_p(z, \lambda) \leq \sqrt{z}^2 + \langle \lambda, Az - p \rangle.$$

Легко видеть, что в качестве элемента p можно взять, например, $p = 0$.

Так как операторы A , A^* являются линейными вполне непрерывными и инъективными, то, с учетом равенства $(A^*)^* = A$, имеют место равенства $\overline{R(A)} = Z$, $\overline{R(A^*)} = Z$, причем $R(A) \neq Z$, $R(A^*) \neq Z$ (см. [4, с. 225, Теорема 1]), то есть исходное и сопряженное уравнения — плотно разрешимы (см. [5, с. 106]).

Возьмем последовательность элементов $z^k \in Z$, $k = 1, 2, \dots$, такую, что $z^k \not\leq z_p$, $k \in \mathbb{N}$ (сильно), но одновременно $Az^k \rightarrow Az_p \leq p$, $k \in \mathbb{N}$ (сильно). В качестве такой последовательности годится, например, слабо сходящаяся к z_p последовательность $z^k \in Z$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $\overline{R(A^*)} = Z$, для любого элемента z^k найдется элемент $\lambda^k \in Z$, для которого соответствующий элемент $z^k \leq z[\lambda^k]$ можно считать сколь угодно близким к z^k . Пусть ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда считая, что элемент λ^k выбирается так, что $z^k - z^k \geq \epsilon^k$, $k = 1, 2, \dots$, получаем, что $z^k \not\leq z_p$, $k \in \mathbb{N}$, но одновременно $Az^k \leq p^k \rightarrow p$, $k \in \mathbb{N}$ и, к тому же, в каждой задаче

$$\sqrt{z}^2 \rightarrow \min, \quad Az = Az^k \leq p^k, \quad z \in Z,$$

решением которой является элемент z^k , существует, как можно заметить, вектор Куна-Таккера и, соответственно, выполняется регулярный принцип Лагранжа.

Таким образом, можно утверждать, что существуют такие $p^k \rightarrow p$, $k \in \mathbb{N}$, для которых в аппроксимирующих (при $p = p^k$) задачах (P) справедливо утверждение регулярного принципа Лагранжа, такого же как и в случае невозмущенной ($p = p$) задачи (P) , но для которых одновременно оптимальные «аппроксимирующие» элементы не сходятся к решению невозмущенной задачи как по аргументу, так и по функции.

Рассмотрим далее обратную задачу финального наблюдения по нахождению начальной функции $v \in L_2(0, 1)$ в третьей начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$z_t - z_{xx} = 0, \quad z(x, 0) = v(x), \quad x \in \Omega \subseteq (0, 1), \quad (0.1)$$

$$z_x(0, t) - z(0, t) = 0, \quad z_x(1, t) + z(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

которую можно трактовать также как задачу оптимального управления с фазовым ограничением типа равенства в финальный момент времени (такое ограничение иногда называют полуфазовым) по нахождению начального управления в третьей начально-краевой задаче (0.1)

$$(P_{OC}) \quad \int_0^1 v^2(x) dx \rightarrow \inf, \quad z[v](\times T) = p \in L_2(0, 1),$$

где $z[v]$ — обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ начально-краевой задачи (0.1), соответствующее управлению $v \in L_2(0, 1)$. Она может быть переписана в форме задачи (P)

$$\sqrt{v}^2 \rightarrow \min, \quad Av = p, \quad v \in Z \leq L_2(0, 1)$$

с $A[v](\times) \leq z[v](\times T)$, $A[v] \leq Av$, $A^*[q](\times) \leq \eta[q](\times 0)$, $A^*[q] \leq A^*q$, $\eta[q]$ — соответствующее элементу q обобщенное решение сопряженной третьей краевой задачи

$$\eta_t + \eta_{xx} = 0, \quad \eta(x, 1) = q(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$\eta_x(0, t) - \eta(0, t) = 0, \quad \eta_x(1, t) + \eta(1, t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

Здесь в качестве пространства Z выступает пространство $L_2(0, 1)$, а определенные выше операторы $A, A^*: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ являются инъективными (эта инъективность может быть установлена, например, на основе результатов [6, 7]), а значит, и $R(A) = L_2(0, 1)$, $R(A^*) = L_2(0, 1)$ (в силу инъективности и свойств линейных уравнений (см. [5, с. 106])), причем $R(A) \neq L_2(0, 1)$, $R(A^*) \neq L_2(0, 1)$ (в силу «заглаженности» решений краевых задач, см., например, [8, гл. III]).

Таким образом, анализ задачи (P) позволяет высказать важное утверждение, состоящее в том, что ни принцип Лагранжа, ни принцип максимума Понтрягина в их обычной классической форме не могут быть непосредственными инструментами для решения задачи (P_{OC}) и многих других аналогичных обратных задач, задач оптимального управления. Это порождает естественную мотивацию к такому «исправлению» классических условий оптимальности, которое приводит к следующим двум «ожидаемым» свойствам: 1) «исправленные» условия должны быть устойчивы к возмущениям исходных данных оптимизационной задачи; 2) они должны быть структурно устроены так же, как их классические аналоги.

С общих позиций понятно, что исправление данных природой недостатков классического принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина должно быть связано с использованием идей теории регуляризации. Однако не всякий метод регуляризации подходит для этой цели. По-видимому, наиболее адекватными, с точки зрения выполнимости указанных выше двух свойств, являются методы регуляризации, основанные на двойственности [9–11]. Применение основанных на двойственности методов регуляризации и одновременный переход к понятию минимизирующей последовательности допустимых элементов, как основному понятию в оптимизационной теории (вместо

классического понятия оптимального элемента), открывают возможность естественной трансформации классических условий оптимальности. Эта трансформация приводит к их секвенциальным обобщениям в терминах классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина, которые: 1) обладают устойчивостью по отношению к ошибкам исходных данных задач; 2) полностью сохраняют общую структуру своих классических аналогов. Такие трансформированные условия оптимальности мы называем устойчивыми секвенциальными или, другими словами, регуляризованными, соответственно, принципом Лагранжа и принципом максимума Понтрягина [2, 3, 12–15]. Тем самым, трансформирование классических условий оптимальности в утверждения секвенциального характера, являющиеся одновременно устойчивыми к ошибкам исходных данных регуляризирующими алгоритмами решения оптимизационных задач, позволяет принципиально расширить сферу действия оптимизационной теории, основанной на привычных конструкциях функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина [12–17].

Итак, основной целью работы является обсуждение, на примере простейших по форме бесконечномерных оптимизационных задач, двух основных вопросов: зачем нужна регуляризация классических условий оптимальности и что она дает? Статья состоит из введения и четырех основных разделов, первый из которых посвящен постановке «простейшей» задачи выпуклого программирования с сильно выпуклым целевым функционалом и с операторным ограничением–равенством в гильбертовом пространстве. Во втором разделе кратко излагаются, применительно к этой задаче выпуклого программирования, основанные на двойственности методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации, формулируются теоремы их сходимости. В третьем разделе указанные теоремы сходимости применяются для доказательства в задаче выпуклого программирования регуляризованных принципа Лагранжа и принципа Лагранжа в итерационной форме. Наконец, в заключительном четвертом разделе результаты третьего раздела «расшифровываются» в форме регуляризованных итерационных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления с фазовым ограничением–равенством для параболического уравнения, которую можно трактовать и как обратную задачу финального наблюдения для того же уравнения.

1. «Простейшая» задача выпуклого программирования

Рассмотрим «простейшую» задачу выпуклого программирования

$$(P^\delta) \quad \sqrt{z}^2 \rightarrow \min, \quad A^\delta z = h^\delta, \quad z \in \mathcal{H} \rightarrow Z.$$

Здесь: $A^\delta : Z \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, $h^\delta \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{H} \rightarrow Z$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P^δ) означает, что эти данные являются точными ($\delta = 0$) или возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, величину которой и характеризует число $\delta \in [0, \delta_0]$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Предположим, что $(A^\delta - A^0)z \leq C\delta(1 + \sqrt{z}) \|Dz\|_Z$, $\|h^\delta - h^0\|_H \leq C\delta$, где $C > 0$ не зависит от δ . Обозначим единственное решение задачи (P^0) , в случае его существования, через z^0 . Обозначим: $\beta \leq \sqrt{z^0}^2$, если z^0 существует; $+\infty$ в противном случае.

Введем необходимые обозначения: $\mathcal{H}^{\delta, \epsilon} = \{z \in \mathcal{H} : \|A^\delta z - h^\delta\| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$,
 $L^\delta(z, \lambda) = \frac{1}{2} \|z - A^\delta z - h^\delta\|^2 + \lambda \|A^\delta z - h^\delta\|$, $z^\delta[\lambda] \leq \operatorname{argmin}_{z \in \mathcal{H}} L^\delta(z, \lambda)$, $V^\delta(\lambda) \leq \min_{z \in \mathcal{H}} L^\delta(z, \lambda)$

и определим двойственную к (P^0) задачу

$$V^0(\lambda) \propto \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda) \leq \min_{z \in \mathcal{H}} L^0(z, \lambda).$$

Ниже при доказательстве регуляризованных принципов Лагранжа нам понадобятся следующие две связанные с двойственной задачей оценки, доказательство которых можно найти в [18].

Лемма 1.1. Справедлива оценка $\|z^\delta[\lambda] - z^0[\lambda]\| \leq C \sqrt{\delta(1 + \lambda)}$, где $C > 0$ — постоянная, не зависящая от δ и $\lambda \in H$.

Лемма 1.2. Пусть $\|z^\delta[\lambda]\| \geq M$ и $\|z^0[\lambda]\| \geq M$ и M не зависит от δ . Тогда $\|V^\delta(\lambda) - V^0(\lambda)\| \geq C \sqrt{\delta}$, где постоянная $C > 0$ зависит от M , но не зависит от δ , а также от $\lambda \in H$ таких, что $\|z^\delta[\lambda]\| \geq M$ и $\|z^0[\lambda]\| \geq M$.

Центральную роль ниже при рассмотрении задачи (P^0) будет играть понятие минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [19]. Напомним, что минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) называется последовательность элементов $z^k \in \mathcal{H}$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения $\|z^k\|^2 \propto \beta$, $z^k \in \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}$, $\delta^k \propto \epsilon^k$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности ϵ^k , $k = 1, 2, \dots$ неотрицательных чисел.

Благодаря дифференцируемости по Фреше функционала $\|x\|^2$ справедлива следующая (доказательство см., например, в [18]).

Лемма 1.3. Пусть $\beta < +\infty$. Тогда для любого минимизирующего приближенного решения z^k , $k = 1, 2, \dots$ в разрешимой в этом случае задаче (P^0) справедливо предельное соотношение $z^k \propto z^0$, $k \in \mathbb{N}$.

Как легко заметить, упрощенность задачи характеризуется, во-первых, заданием конкретного простейшего функционала качества и, во-вторых, отсутствием ограничений-неравенств. С одной стороны, благодаря упрощенной постановке, задача (P^0) очень удобна для формулировки указанных выше регуляризованных условий оптимальности, которые в этом случае получаются также более компактными по записи и, как следствие, более удобными для понимания. С другой же стороны, эти формулировки достаточно полно передают основной содержательный смысл аналогичных результатов и для существенно более общих по форме оптимизационных задач на условный экстремум.

Попутно здесь представляется целесообразным отметить и то, что рассматриваемая «простейшая» по форме записи задача выпуклого программирования (P^0) является, в известном смысле, если так можно выразиться, и «самодостаточной» классической оптимизационной задачей, изучение которой имеет первостепенное значение с точки зрения многих естественнонаучных приложений [14–17].

2. Двойственная регуляризация и итеративная двойственная регуляризация

Опишем в данном разделе методы двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации [9–11] и сформулируем соответствующие теоремы сходимости для них, доказательство которых можно найти в указанных работах [9–11], а также в работах [2, 3, 14, 15].

Метод двойственной регуляризации. Обозначим через $\lambda^{\delta, \alpha}$ единственную в H точку, дающую на этом множестве максимум функционалу $R^{\delta, \alpha}(\lambda) \leq V^{\delta}(\lambda)$ $\alpha \searrow 0, \lambda \in H$. Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0, \quad \alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.1)$$

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.1. Пусть задача (P^0) разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, при условии согласования (2.1) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(\delta) \sqrt{\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}}^2 &\rightarrow 0, \quad \sqrt{z^{\delta}[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}]}^2 \rightarrow \sqrt{z^0}^2, \quad A^0 z^{\delta}[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}] - h^0 \rightarrow 0, \\ &|\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}, A^{\delta} z^{\delta}[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}] - h^{\delta}| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

и, как следствие (благодаря дифференцируемости по Фреше функционала χ^2), предельное соотношение (см. лемму 1.3) $\sqrt{z^{\delta}[\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}]}^2 \rightarrow \sqrt{z^0}^2, \delta \rightarrow 0$. Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм двойственной регуляризации является регуляризирующим. Одновременно справедливо и предельное соотношение $V^0(\lambda^{\delta, \alpha(\delta)}) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda) = \sqrt{z^0}^2, \delta \rightarrow 0$. Если же двойственная к (P^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\lambda^{\delta, \alpha(\delta)} \rightarrow \lambda^0$ при $\delta \rightarrow 0$, где $\lambda^0 \in H$ есть ее нормальное решение.

Метод итеративной двойственной регуляризации. Введем в рассмотрение итерационный процесс

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k (A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k}) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}^0 \in H \quad (2.2)$$

с условиями согласования: $\alpha^k > 0, \beta^k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} (\delta^k + \alpha^k + \beta^k) = 0$,

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^{k+1}} \geq C_0, \quad \frac{\|\alpha^{k+1} - \alpha^k\|}{(\alpha^k)^3 \beta^k} \rightarrow 0, \quad \frac{\beta^k}{(\alpha^k)^3} \rightarrow 0, \quad \frac{\delta^k}{(\alpha^k)^6} \rightarrow 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \beta^k = +\infty. \quad (2.3)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Последовательности α^k и $\beta^k, k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющие соотношениям (2.3), существуют. Например, в этом качестве можно использовать последовательности $\alpha^k = k^{-1/6}, \beta^k = k^{-1/(5/3)}, k = 0, 1, 2, \dots$

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.2. Пусть задача (P^0) разрешима и выполняются условия согласования (2.3). Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, для генерируемой итерационным процессом (2.2) последовательности $\bar{\lambda}^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, выполняются предельные соотношения

$$\alpha^k \sqrt{\bar{\lambda}^k} \sqrt{\infty} 0, \quad \sqrt{z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]} \sqrt{\infty} \sqrt{z^0} \sqrt{\infty}, \quad A^0 z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \quad h^0 \infty 0, \\ \sqrt{\bar{\lambda}^k}, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \quad h^{\delta^k} \infty 0, \quad \delta^k \infty 0, \quad k \infty \in.$$

Как следствие, справедливо и предельное соотношение $\sqrt{z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]} \sqrt{z^0} \sqrt{\infty} 0$, $k \infty \in$. Одновременно с указанными предельными соотношениями выполняется и предельное соотношение $\lim_{\delta^k \infty +0} V^0(\bar{\lambda}^k) = \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda) = \sqrt{z^0} \sqrt{\infty}$. Если двойственная к (P^0) задача разрешима, то имеет место сходимость $\bar{\lambda}^k \infty \lambda^0$, $k \infty \in$, где λ^0 / H есть ее решение с минимальной нормой.

Эта теорема снабжается регуляризирующим правилом останова итерационного процесса (2.2) в случае, когда исходные данные оптимизационной задачи задаются с определенной фиксированной (конечной) погрешностью $\delta > 0$. Пусть числовые последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (2.3). Зафиксируем следующее правило останова итерационного процесса (2.2)

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k (A^{\delta} z^{\delta}[\bar{\lambda}^k] \quad h^{\delta}) \quad 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \bar{\lambda}^0 / H \quad (2.4)$$

при фиксированном конечном уровне погрешности $\delta > 0$: при каждом $\delta > 0$, $\delta \geq \delta^1$, итерации продолжают до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, при котором выполняются неравенства

$$\delta^k \subset \delta, \quad k = 1, 2, \dots, k(\delta). \quad (2.5)$$

Справедлива следующая [9–11, 14, 15]

Теорема 2.3. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливы предельные соотношения $\sqrt{z^{\delta}[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]} \sqrt{\infty} \sqrt{z^0} \sqrt{\infty}$, $A^0 z^{\delta}[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] \quad h^0 \infty 0$ и, как следствие, предельное соотношение $\sqrt{z^{\delta}[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]} \sqrt{z^0} \sqrt{\infty} \sqrt{\delta} \infty 0$, где $\bar{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.4). Другими словами, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче (P^0) .

3. Регуляризованные принципы Лагранжа в «простейшей» задаче выпуклого программирования

Сформулируем и докажем в данном разделе регуляризованные принципы Лагранжа [2, 3, 14, 15] для задачи (P^0) . Приводимые ниже доказательства основаны на сформулированных в предыдущем разделе теоремах сходимости 2.1, 2.2, 2.3 методов двойственной регуляризации и итеративной двойственной регуляризации с правилом останова итерационного процесса [9–11].

Формулируемые ниже регуляризованные принципы Лагранжа, которые можно также именовать регуляризованными теоремами Куна–Таккера (используемая функция

Лагранжа регулярна) для задачи (P^0) , имеют вид утверждений о необходимых и достаточных условиях существования минимизирующего приближенного решения в задаче и о возможности аппроксимации решения z^0 точками минимума ее регулярной функции Лагранжа. Одновременно в них конструктивно предъявляются конкретные минимизирующие приближенные решения, аппроксимирующие решение z^0 и состоящие из указанных точек минимума регулярной функции Лагранжа.

Теорема 3.1. [*Регуляризованный принцип Лагранжа*] Пусть задана произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел δ^k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, для существования ограниченного минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность λ^k / H , $k = 1, 2, \dots$, такая, что выполняются соотношения

$$\delta^k \sqrt{\lambda^k}^2 \infty 0, \quad z^{\delta^k}[\lambda^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \infty 0, \quad \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k} | \infty 0, \quad k \infty \in, \quad (3.1)$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ была ограничена. Более того, эта последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением задачи (P^0) и $z^{\delta^k}[\lambda^k] \infty z^0$, $k \infty \in$. Кроме того, выполняется предельное соотношение

$$V^0(\lambda^k) \infty \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda). \quad (3.2)$$

В качестве последовательности λ^k / H , $k = 1, 2, \dots$, может быть взята последовательность $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \dots$, $\delta^k / \alpha(\delta^k) \infty 0$, $k \infty \in$, генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 2.1.

Доказательство. Для доказательства необходимости, прежде всего, заметим, что задача (P^0) разрешима благодаря существованию ограниченного минимизирующего приближенного решения. Теперь выполнимость соотношений (3.1), (3.2) теоремы вытекает из теоремы 2.1, если в качестве точек λ^k и $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ взять соответственно точки $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$ и $z^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}]$, $k = 1, 2, \dots$.

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что задача (P^0) разрешима ввиду включения $z^{\delta^k}[\lambda^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, и условий на исходные данные задачи (P^0) . Далее, так как точка $z^{\delta^k}[\lambda^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k}(\lambda^k)$, можем записать

$$\sqrt{z^{\delta^k}[\lambda^k]}^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - h^{\delta^k} | \geq \sqrt{z}^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} | \mathcal{D}z / \mathcal{H}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует, что

$$\sqrt{z^{\delta^k}[\lambda^k]}^2 \geq \sqrt{z}^2 + \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z - h^{\delta^k} | + \psi^k \mathcal{D}z / \mathcal{H}, \quad \psi^k \infty 0, \quad k \infty \in.$$

Положим здесь $z = z^0$ и используем условие согласования $\delta^k \sqrt{\lambda^k}^2 \infty 0$, $k \infty \in$. Тогда получаем $\sqrt{z^{\delta^k}[\lambda^k]}^2 \geq \sqrt{z^0}^2 + \psi^k$, $\psi^k \infty 0$, $k \infty \in$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k}[\lambda^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}$, а следовательно, и $z^{\delta^k}[\lambda^k] / \mathcal{H}^{0, \bar{\epsilon}^k}$, $\bar{\epsilon}^k \infty 0$, $k \infty \in$,

то можем утверждать, что последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) и, более того, $z^{\delta^k}[\lambda^k] \rightarrow z^0$, $k \rightarrow \infty$. Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ ограничена, то в силу оценки леммы 1.1 и предельного соотношения $\delta^k \lambda^{k-2} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ последовательность $z^0[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \dots$ также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1, 2, \dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\lambda^k]$, $z^0[\lambda^k]$ и оценки леммы 1.2 получаем предельное соотношение $V^{\delta^k}(\lambda^k) - V^0(\lambda^k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\lambda^k] \rightarrow z^0$, $k \rightarrow \infty$ и третьего из условий (3.1) имеет место сходимость $V^{\delta^k}(\lambda^k) \rightarrow \sqrt{z^0}^2$, $k \rightarrow \infty$, то получаем окончательно

$$V^0(\lambda^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in DH} V^0(\lambda) = \sqrt{z^0}^2.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Подчеркнем, что сформулированная регуляризованная теорема Куна–Таккера 3.1 отличается от своего классического аналога двумя важными обстоятельствами: 1) она справедлива без каких-либо предположений регулярности (существования вектора Куна–Таккера) задачи (P^0) ; 2) она «устойчива» по отношению к ошибкам исходных данных и может использоваться, в частности, для решения некорректных задач, если последовательность λ^k , $k = 1, 2, \dots$ выбирается в соответствии с алгоритмом двойственной регуляризации. При этом содержащиеся в ней условия обеспечивают одновременно как достаточное, так и необходимое условие существования минимизирующего приближенного решения в задаче. В этом состоит ее принципиальное отличие от классической теоремы Куна–Таккера.

Сформулируем далее регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме, который можно также именовать регуляризованной теоремой Куна–Таккера в итерационной форме. Приводимая формулировка, как и формулировка теоремы 3.1, содержит необходимые и достаточные условия существования минимизирующего приближенного решения в задаче (P^0) . Однако, в отличие от теоремы 3.1, в формулируемой ниже теореме одновременное конструктивное предъявление конкретного минимизирующего приближенного решения, аппроксимирующего решение z^0 и состоящего из точек минимума регулярной функции Лагранжа, основано на итерационной процедуре регуляризованного градиентного подъема в процессе максимизации функционала V^0 двойственной задачи.

Теорема 3.2. [*Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа*] Для того чтобы в задаче (P^0) существовало ограниченное минимизирующее приближенное решение (и, следовательно, сильно сходилось к z^0), необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\bar{\lambda}^k \in H$, $k = 0, 1, \dots$, порождаемой итерационным процессом (2.2), с условиями согласования (2.3) выполнялись соотношения

$$z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \in \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad \langle \bar{\lambda}^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

а последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 0, 1, \dots$, была ограниченной. В этом случае последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 0, 1, \dots$, представляет собой искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (P^0) и имеет место сходимость $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \rightarrow z^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно выполняется и предельное соотношение $V^0(\bar{\lambda}^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in DH} V^0(\lambda)$.

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, прежде всего, что задача (P^0) разрешима в силу существования ограниченного минимизирующего приближенного решения и условий на ее исходные данные. Поэтому предельные соотношения (3.3) доказываемой теоремы являются следствиями теоремы 2.2. Далее, для доказательства достаточности, в первую очередь заметим, что задача (P^0) разрешима благодаря включениям $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}$, $k = 0, 1, \dots$, ограниченности последовательности $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 0, 1, \dots$, и условиям на исходные данные задачи. Тогда в силу той же теоремы 2.2 последовательность $\bar{\lambda}^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, порождаемая итерационным процессом (2.2) с условиями согласования (2.3), удовлетворяет помимо предельных соотношений (3.3) и предельному соотношению $\sqrt[k]{z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]}^2 \propto \sqrt[k]{z^0}^2$, $k \in \infty$. По этой причине последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 0, 1, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (P^0) , а значит, она и сходится к z^0 . Далее, так как последовательность $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, ограничена, то в силу оценки леммы 1.1, условия согласования $\delta^k/(\alpha^k)^6 \propto 0$, $k \in \infty$ в (2.3) и предельного соотношения $\alpha^k \sqrt[k]{\bar{\lambda}^k} \propto 0$, $k \in \infty$ теоремы 2.2 последовательность $z^0[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, также ограничена. Одновременно в силу равномерной по $k = 1, 2, \dots$ ограниченности элементов $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $z^0[\bar{\lambda}^k]$ и оценки леммы 1.2 получаем предельное соотношение $V^{\delta^k}(\bar{\lambda}^k) - V^0(\bar{\lambda}^k) \propto 0$, $k \in \infty$. Так как при этом в силу доказанной сходимости $z^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \propto z^0$, $k \in \infty$ и второго из условий (3.3) имеет место сходимость $V^{\delta^k}(\lambda^k) \propto \sqrt[k]{z^0}^2$, $k \in \infty$, то получаем окончательно $V^0(\lambda^k) \propto \sup_{\lambda \in \mathcal{H}} V^0(\lambda) = \sqrt[k]{z^0}^2$.

Регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме теоремы 3.2 может быть снабжен и правилом останова итерационного процесса (2.2) в случае, когда исходные данные задачи (P^0) задаются с фиксированной конечной ошибкой. Это обстоятельство важно с точки зрения решения практических неустойчивых оптимизационных и сводящихся к ним задач. Тем самым оно обеспечивает возможность непосредственного применения регуляризованного итерационного принципа Лагранжа при решении самых разнообразных задач современного естествознания. Пусть последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям согласования (2.3) и правило останова итерационного процесса (2.2), задаваемого в этой ситуации итерационной процедурой (2.4) с фиксированной конечной характеризующей ошибку исходных данных величиной δ , определяется как и в случае итеративной двойственной регуляризации: для каждого $\delta > 0$ такого, что $\delta \geq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, для которого выполняются неравенства (2.5). Тогда теорема 2.3 позволяет утверждать, что справедлива

Теорема 3.3. Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, справедливы предельные соотношения $\sqrt[k]{z^{\delta}[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]}^2 \propto \sqrt[k]{z^0}^2$, $V^0(\bar{\lambda}^{k(\delta)}) \propto \sup_{\lambda \in \mathcal{H}} V^0(\lambda)$, $\delta \in \infty$, где $\bar{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.4) с правилом останова, определяемым формулой (2.5). Таким образом, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче (P^0) .

4. Регуляризованные итерационные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах

Основной целью данного раздела является иллюстрация того, как устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа раздела 2 могут применяться для решения неустойчивых задач оптимального управления и сводящихся к ним обратных задач. Формулируемая ниже задача оптимального управления с упрощенным функционалом качества может трактоваться одновременно как обратная задача финального наблюдения. Для нее формулируются регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в итерационной форме с правилом останова итерационного процесса [12, 13].

Задача оптимального управления с фазовым ограничением–равенством. Пусть $Q_T \leq \Omega \subset (0, T)$, $S \leq \partial\Omega$, $S_T \leq \{(x, t) : x \in S, t \in (0, T)\}$, Ω — ограниченная область в R^n , $H \leq L_2(\Omega)$, $\mathcal{H} \leq \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_3 \rightarrow L_2(Q_T) \circ L_2(\Omega) \circ L_2(S_T) \leq \mathcal{N}$, $\mathcal{H}_1 \rightarrow L_2(Q_T)$, $\mathcal{H}_2 \rightarrow L_2(\Omega)$, $\mathcal{H}_3 \rightarrow L_2(S_T)$ — выпуклые замкнутые множества. Обозначим тройки элементов гильбертова пространства $\mathcal{N}$ через $\pi \leq (u, v, w)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с фиксированным временем и с операторным ограничением равенством

$$(OC^\delta) \quad \|\pi\|^2 \leq \|y\|_{L_2(Q_T)}^2 + \|y\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|y\|_{L_2(S_T)}^2 \rightarrow \min, \quad A^\delta \pi \leq z^\delta[\pi](\times T) = h^\delta, \quad \pi \in \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N} \leq Z.$$

Здесь: $h^\delta \in H$ заданная функция, $z^\delta[\pi]$ — обобщенное решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ [8] третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{i,j}(x, t) z_{x_j} \left(+ a^\delta(x, t) z = u(x, t), \quad z(x, 0) = v(x), \quad x \in \Omega, \right. \quad (4.1)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} + \sigma^\delta(x, t) z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T, \right\}$$

соответствующее тройке $\pi \leq (u, v, w) \in \mathcal{N} = Z$, $\frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \leq a_{i,j}(x, t) z_{x_j}(x, t) \cos \alpha_i(x, t)$, $\alpha_i(x, t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i . Как и в разделе 1, верхний индекс δ в исходных данных задачи (OC^δ) означает, что эти данные соответствуют либо ситуации их точного задания ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), то есть задаются с ошибкой, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число. Решение задачи с точными исходными данными (OC^0) (единственное), если оно существует (существует хотя бы одна допустимая тройка π , удовлетворяющая равенству $A^0 \pi = h^0$), будем обозначать через π^0 .

Считаем, что исходные данные задачи (OC^δ) удовлетворяют следующим условиям:

- а) функции $a_{i,j}, a^\delta : \Omega \times [0, T] \rightarrow R^1$, $i, j = 1, \dots, n$ являются измеримыми по Лебегу;
- б) выполняются оценки

$$\nu \|\xi\|^2 \geq a_{i,j}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu \|\xi\|^2 \quad \mathcal{D}(x, t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0,$$

$$\|a^\delta(x, t)\| \geq K \text{ при п.в. } (x, t) \in Q_T, \quad \|\sigma^\delta(x, t)\| \geq K \text{ при п.в. } (x, t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — не зависящая от δ постоянная;

с) граница S является кусочно-гладкой.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных от точных

$$\sqrt{q^\delta} \quad a^0 \sqrt{q}, Q_T \geq \delta, \quad \sqrt{g^\delta} \quad \sigma^0 \sqrt{g}, S_T \geq \delta, \quad \sqrt{h^\delta} \quad h^0 \sqrt{h}, \Omega \geq \delta. \quad (4.2)$$

Регуляризованные итерационные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина. Задача (OC^δ) формально может быть записана как задача выпуклого программирования

$$(P^\delta) \quad \sqrt{\pi}^2 \infty \min, \quad A^\delta \pi = h^\delta, \quad \pi / \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N} = Z,$$

совпадающая по форме с задачей выпуклого программирования (P^δ) раздела 1: $Z = \mathcal{N}$, $H = L_2(\Omega)$, $A^\delta : Z \rightarrow H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta \pi = z^\delta[\pi](\times T)$. В силу условий а) - с), теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью (см. [8, гл. III, §5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (4.1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $(u, v, w) / Z$ и любого $T > 0$. Более того, мы имеем в этом случае и априорную оценку

$$\|z^\delta[\pi]\|_{Q_T} + \sqrt{z}^\delta[\pi] \sqrt{z}, Q_T \geq C(\sqrt{u} \sqrt{u}, Q_T + \sqrt{v} \sqrt{v}, \Omega + \sqrt{w} \sqrt{w}, S_T),$$

в которой постоянная $C > 0$ не зависит от $\delta / [0, \delta_0]$. Используя эту оценку в совокупности с оценками (4.2), получаем оценку для отклонения возмущенного оператора $A^\delta : Z \rightarrow H = L_2(\Omega)$, $A^\delta \pi = z^\delta[\pi](\times T)$ от его невозмущенного аналога в виде неравенства $\sqrt{(A^\delta - A^0)\pi} \geq C\delta(1 + \sqrt{\pi})$, в котором $C > 0$ — постоянная, не зависящая от δ (см., например [9]). Определим множество $\mathcal{H}^{\delta, \epsilon} \subseteq \pi / \mathcal{H} : \sqrt{(A^\delta \pi - h^\delta)} \geq \epsilon$, функционал Лагранжа $L^\delta(\pi, \lambda) \leq \sqrt{\pi}^2 + \lambda, A^\delta \pi - h^\delta$, его единственный минимизирующий элемент $\pi^\delta[\lambda]$ (функционал качества задачи (OC^δ)) является сильно выпуклым и двойственную к (OC^δ) задачу $V^\delta(\lambda) \leq \min_{\pi \in \mathcal{N}} L^\delta(\pi, \lambda) \infty \sup, \lambda / H = L_2(\Omega)$.

Теорема 3.2 позволяет сформулировать нам принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи оптимального управления (OC^δ) . Его формулировка использует классическую конструкцию функционала Лагранжа и не зависит от того, существует или нет, вектор Куна–Таккера в рассматриваемой задаче. Попутно заметим, что вопрос существования вектора Куна–Таккера в подобных задачах представляет собою самостоятельную сложную проблему.

Теорема 4.1. [Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа] Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, для существования ограниченного минимизирующего приближенного решения в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности двойственной переменной $\bar{\lambda}^k$, $k = 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k (A^{\delta^k} \pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k}) - 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}^0 / H = L_2(\Omega)$$

с условиями согласования (2.3) выполнялись соотношения

$$\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad \langle \bar{\lambda}^k, A^{\delta^k} \pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Более того, последовательность $\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, является искомым минимизирующим приближенным решением в задаче (OC^0) и $\pi^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \rightarrow \pi^0$, $k \rightarrow \infty$. Одновременно выполняется и предельное соотношение $V^0(\bar{\lambda}^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in \mathcal{DH}} V^0(\lambda)$.

Естественно, мы можем здесь сформулировать и соответствующее правило останова для итерационного процесса. В этом случае следствием теоремы 3.3 является

Теорема 4.2. Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к (OC^0) задача, справедливы предельные соотношения $\sqrt{\pi^{\delta}[\bar{\lambda}^{k(\delta)}]} \rightarrow \pi^0$, $V^0(\bar{\lambda}^{k(\delta)}) \rightarrow \sup_{\lambda \in \mathcal{DH}} V^0(\lambda)$, $\delta \rightarrow 0$, где $\bar{\lambda}^{k(\delta)}$ — результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (2.4) с правилом останова, определяемым формулой (2.5). Таким образом, указанное правило останова порождает регуляризирующий алгоритм в задаче (OC^0) .

Получим далее регуляризованный принцип максимума Понтрягина в итерационной форме из принципа Лагранжа в итерационной форме теоремы 4.1. Предположим для простоты, что множества $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ имеют более привычный для теории оптимального управления вид: $\mathcal{H}_1 \leq \{u / L_2(Q_T) : u(x, t) / U \text{ п.в. на } Q_T\}$, $\mathcal{H}_2 \leq \{v / L_2(\Omega) : v(x) / V \text{ п.в. на } \Omega\}$, $\mathcal{H}_3 \leq \{w / L_2(S_T) : w(x, t) / W \text{ п.в. на } S_T\}$, где $U \rightarrow R^1$, $V \rightarrow R^1$, $W \rightarrow R^1$ — выпуклые компакты. С целью перехода к регуляризованному принципу максимума Понтрягина запишем принцип максимума Понтрягина в простейшей задаче оптимального управления с сильно выпуклым функционалом Лагранжа в качестве функционала качества (см., например, [9])

$$L^\delta(\pi, \lambda) \leq \sqrt{\pi}^2 + \langle \lambda, z^\delta[\pi](\times T) - h^\delta \rangle \rightarrow \min, \quad \pi / \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N} \quad (4.3)$$

при произвольном фиксированном λ / H . Очевидно, в силу выпуклости задачи (4.3) формулируемый ниже принцип максимума Понтрягина является критерием оптимальности для нее. Введем функции Гамильтона–Понтрягина: $H_u(u, \eta) \leq \eta u - u^2$, $H_v(v, \eta) \leq \eta v - v^2$, $H_w(w, \eta) \leq \eta w - w^2$.

Лемма 4.1. Тройка $\pi^\delta[\lambda] \leq (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta[\lambda])$ удовлетворяет обычному принципу максимума Понтрягина в задаче (4.3): для $\pi \leq (u, v, w) = \pi^\delta[\lambda]$ выполняются соотношения максимума

$$\max_{r \in \mathcal{DU}} H_u(x, t, r, \eta^\delta[\lambda](x, t)) = H_u(x, t, u(x, t), \eta^\delta[\lambda](x, t)) \quad \text{для п.в. } (x, t) / Q_T, \quad (4.4)$$

$$\max_{r \in \mathcal{DV}} H_v(x, r, \eta^\delta[\lambda](x, 0)) = H_v(x, v(x), \eta^\delta[\lambda](x, 0)) \quad \text{для п.в. } x / \Omega,$$

$$\max_{r \in \mathcal{DN}_3} \int_{S_T} w H_w(s, t, w(s, t), \eta^\delta[\lambda](s, t)) r(s, t) ds dt =$$

~

$$\int_{S_T} w H_w(s, t, w(s, t), \eta^\delta[\lambda](s, t)) w(s, t) ds dt,$$

где $\eta^\delta[\lambda] / V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение сопряженной задачи

$$\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j} a_{i,j}(x, t) \eta_{x_i} \left(+ a^\delta(x, t) \eta = 0, \quad \eta(x, T) = \lambda(x), \quad x / \Omega, \right. \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \{ \right.} + \sigma^\delta(x, t) \eta = 0, \quad (x, t) / S_T.$$

Обратно, в силу выпуклости задачи (OC^δ) , любая тройка $\pi / \mathcal{H}$, удовлетворяющая при некотором $\lambda / \mathcal{N}$ соотношениям (4.4), (4.5), дает минимум в задаче (4.3).

Обозначим через $\pi_{\max}^\delta[\lambda]$ элемент $\pi / \mathcal{H}$, удовлетворяющий всем соотношениям принципа максимума (4.4) леммы 4.1. Очевидно, в условиях данной работы $\pi_{\max}^\delta[\lambda] = \pi^\delta[\lambda]$. Благодаря лемме 4.1, регуляризованный итерационный принцип Лагранжа теоремы 4.1 может быть переписан в форме регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме.

Теорема 4.3. [*Принцип максимума Понтрягина в итерационной регуляризованной форме*] Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к (OC^0) задача, для существования минимизирующего приближенного решения в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности двойственной переменной $\bar{\lambda}^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, порождаемой итерационным процессом

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k \left(A^{\delta^k} \pi_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \sum 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}^0 / H, \right.$$

с условиями согласования (2.3), выполнялись соотношения

$$\pi_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] / \mathcal{H}^{\delta^k, \epsilon^k}, \quad \epsilon^k \rightarrow 0, \quad \langle \bar{\lambda}^k, A^{\delta^k} \pi_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] - h^{\delta^k} \sum 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k \rangle \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

При этом последовательность $\pi_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k]$, $k = 1, 2, \dots$, представляет собою искомое минимизирующее приближенное решение в задаче (OC^0) и $\pi_{\max}^{\delta^k}[\bar{\lambda}^k] \rightarrow \pi^0$, $k \rightarrow \infty$. Более того, выполняется предельное соотношение $V^0(\bar{\lambda}^k) \rightarrow \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda)$.

Существенной особенностью регуляризованного принципа максимума Понтрягина в итерационной форме теоремы 4.3 является то, что, как и регуляризованный итерационный принцип Лагранжа теоремы 4.1, он предполагает, что величина δ^k , характеризующая ошибку отклонения возмущенных исходных данных от точных, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Однако, как и теорема 4.1, теорема 4.3 снабжается соответствующим регуляризирующим правилом останова итерационного процесса, почти дословно совпадающим с правилом останова, сформулированным после теоремы 4.1 (см. теорему 4.2). Оно может быть использовано для практического решения неустойчивых задач на основе устойчивого итерационного принципа максимума Понтрягина теоремы 4.3, так как представляет собою устойчивый алгоритм построения минимизирующего приближенного решения в задаче (OC^0) . Пусть последовательности δ^k , α^k , β^k , $k = 0, 1, 2, \dots$

удовлетворяют условиям согласования (2.3). Пусть правило останова итерационного процесса (2.2)

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \beta^k \left) A^\delta \pi_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^k] - h^\delta \sum 2\beta^k \alpha^k \bar{\lambda}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{\lambda}^0 / H, \quad (4.6)$$

с фиксированной конечной ошибкой $\delta > 0$ задается следующим образом: для каждого $\delta > 0$ такого, что $\delta \geq \delta^1$, итерации продолжаются до такого наибольшего номера $k = k(\delta)$, для которого

$$\delta^k \subset \delta, \quad k = 1, 2, \dots, k(\delta). \quad (4.7)$$

Теорема 4.4. *Вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к (OC^0) задача, выполняются предельные соотношения $\pi_{\max}^\delta[\bar{\lambda}^{k(\delta)}] \propto \pi^0$, $V^0(\bar{\lambda}^{k(\delta)}) \propto \sup_{\lambda \in H} V^0(\lambda)$, $\delta \propto 0$, где $\bar{\lambda}^{k(\delta)}$ есть результат $k(\delta)$ итераций итерационного процесса (4.6) с правилом останова (4.7). Другими словами, данное правило останова представляет собою регуляризирующий алгоритм в задаче (OC^0) .*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации: в 2 т. М.: МЦНМО, 2011.
2. Сумин М.И. Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
3. Сумин М.И. Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
5. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
6. Плотников В.И. О сходимости конечномерных приближений (в задаче об оптимальном нагреве неоднородного тела произвольной формы) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8. № 1. С. 136–157.
7. Плотников В.И. Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций // Известия АН СССР. Серия математическая. 1968. Т. 32. № 4. С. 743–755.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
9. Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 11. С. 2001–2019.
10. Сумин М.И. Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
11. Сумин М.И. Параметрическая двойственная регуляризация в оптимизации, оптимальном управлении и обратных задачах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2010. Т. 15. Вып. 1. С. 467–492.
12. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении I: оптимизация сосредоточенной системы // Вестник

Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26. Вып. 4. С. 474-489.

13. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении II: оптимизация распределенной системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 1. С. 26-41.

14. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. О регуляризованном принципе Лагранжа в итерационной форме и его применении для решения неустойчивых задач // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 11. С. 3-18.

15. Кутерин Ф.А., Сумин М.И. Устойчивый итерационный принцип Лагранжа в выпуклом программировании как инструмент для решения неустойчивых задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 55-68.

16. Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Устойчивые секвенциальные принципы Лагранжа в обратной задаче финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 608-624.

17. Калинин А.В., Сумин М.И., Тюхтина А.А. Об обратных задачах финального наблюдения для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении и устойчивых секвенциальных принципах Лагранжа для их решения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57. № 2. С. 187-209.

18. Сумин М.И. Некорректные задачи и методы их решения. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета, 2009. 289 с.

19. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 15 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Сумин Михаил Иосифович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: m.sumin@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775

WHY REGULARIZATION OF LAGRANGE PRINCIPLE AND PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE IS NEEDED AND WHAT IT GIVES

M. I. Sumin

Nizhnii Novgorod State University named after N.I. Lobachevskii
23 Gagarin St., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: m.sumin@mail.ru

Abstract. We consider the regularization of the classical Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle in convex problems of mathematical programming and optimal control. On example of the “simplest” problems of constrained infinite-dimensional optimization, two main questions are discussed: why is regularization of the classical optimality conditions necessary and what does it give?

Keywords: convex programming; dual regularization; regularized Lagrange principles; optimal control; inverse problem; regularized iterative Pontryagin maximum principle

REFERENCES

1. Vasil'yev F.P. *Metody optimizatsii: v 2 t.* [Optimization Methods: in 2 Vols.]. Moscow, Moscow Center for Continuous Mathematical Education Publ., 2011. (In Russian).
2. Sumin M.I. Regularizovannaya parametricheskaya teorema Kuna–Takera v gil'bertovom prostranstve [Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1594-1615. (In Russian).
3. Sumin M.I. Ustoychivoye sekventsial'noye vypukloye programmirovaniye v gil'bertovom prost-ranstve i ego prilozheniye k resheniyu neustoychivyykh zadach [Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematika i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 25-49. (In Russian).
4. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 496 p. (In Russian).
5. Krein S.G. (ed.). *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p. (In Russian).
6. Plotnikov V.I. O skhodimosti konechnomernyykh priblizheniy (v zadache ob optimal'nom nagreve neodnorodnogo tela proizvol'noy formy) [The convergence of finite-dimensional approximations (in the problem of the optimal heating of an inhomogeneous body of arbitrary shape)]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1968, vol. 8, no. 1, pp. 136-157. (In Russian).
7. Plotnikov V.I. Energeticheskoye neravenstvo i svoystvo pereopredelennosti sistemy sobstvennykh funktsiy [An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions].

Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya – Mathematics of the USSR – Izvestiya, 1968, vol. 32, no. 4, pp. 743-755. (In Russian).

8. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type]. Moscow, Nauka, 1967, 736 p. (In Russian).

9. Sumin M.I. Regularizovannyi gradiyentnyy dvoystvennyy metod resheniya obratnoy zadachi final'nogo nablyudeniya dlya parabolicheskogo uravneniya [A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 11, pp. 2001-2019. (In Russian).

10. Sumin M.I. Regularizatsiya v lineyno vypukloy zadache matematicheskogo programmirovaniya na osnove teorii dvoystvennosti [Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 602-625. (In Russian).

11. Sumin M.I. Parametricheskaya dvoystvennaya regularizatsiya v optimizatsii, optimal'nom upravlenii i obratnykh zadachakh [Parametric dual regularization in optimization, optimal control and inverse problems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 467-492. (In Russian).

12. Kuterin F.A., Sumin M.I. Regularizovannyi iteratsionnyy printsip maksimuma Pontryagina v optimal'nom upravlenii I: optimizatsiya sosredotochennoy sistemy [The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 474-489. (In Russian).

13. Kuterin F.A., Sumin M.I. Regularizovannyi iteratsionnyy printsip maksimuma Pontryagina v optimal'nom upravlenii II: optimizatsiya raspredelennoy sistemy [The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. II. Optimization of a distributed system]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 26-41. (In Russian).

14. Kuterin F.A., Sumin M.I. O regularizovannom printsipe Lagranzha v iteratsionnoy forme i ego primenении dlya resheniya neustoychivyykh zadach [On the regularized Lagrange principle in the iterative form and its application for solving unstable problems]. *Matematicheskoye modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016, vol. 28, no. 11, pp. 3-18. (In Russian).

15. Kuterin F.A., Sumin M.I. Ustoychivyy iteratsionnyy printsip Lagranzha v vypuklom programmirovanii kak instrument dlya resheniya neustoychivyykh zadach [Stable iterative Lagrange principle in convex programming as a tool for solving unstable problems]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 1, pp. 55-68. (In Russian).

16. Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Ustoychivyye sekventzial'nyye printsipy Lagranzha v obratnoy zadache final'nogo nablyudeniya dlya sistemy uravneniy Maksvella v kvazistatsionarnom magnitnom priblizhenii [Stable sequential Lagrange principles in the inverse final observation problem for the system of Maxwell equations in the quasistationary magnetic approximation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 608-624. (In Russian).

17. Kalinin A.V., Sumin M.I., Tyukhtina A.A. Ob obratnykh zadachakh final'nogo nablyudeniya dlya sistemy uravneniy Maksvella v kvazistatsionarnom magnitnom priblizhenii i ustoychivyykh

sekventsial'nykh printsipakh Lagranzha dlya ikh resheniya [Inverse final observation problems for Maxwell's equations in the quasi-stationary magnetic approximation and stable sequential lagrange principles for their solving]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 2, pp. 187-209. (In Russian).

18. Sumin M.I. *Nekorrektnyye zadachi i metody ikh resheniya* [Ill-Posed Problems and their Solutions]. Nizhny Novgorod, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod Publ., 2009, 289 p. (In Russian).

19. Warga J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations*. New York, Academic Press, 1972, 531 p.

Received 10 April 2018

Reviewed 15 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Sumin Mikhail Iosifovich, Nizhnii Novgorod State University named after N.I. Lobachevskii, Nizhnii Novgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, e-mail: m.sumin@mail.ru

For citation: Sumin M.I. Zachem nuzhna regulyarizatsiya printsipa Lagranzha i printsipa maksimuma Pontryagina i chto ona daet [Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 757–775. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-757-775 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783

УДК 519.237; 519.24

МОДЕЛИ МОНИТОРИНГА И УПРАВЛЕНИЯ РИСКОМ В ГАУССОВСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

✉ А. Н. Тырсин¹⁾, А. А. Сурина²⁾

¹⁾ ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19
E-mail: at2001@yandex.ru

²⁾ ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)»
454080, Российская Федерация, г. Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: dallila87@ru

Аннотация. Описана модель риска многомерных стохастических систем. Она основана на гипотезе, состоящей в том, что риск характеризуется вероятностными свойствами компонент системы, в качестве которых используют факторы риска. Исследован случай гауссовских стохастических систем. Модель мониторинга риска позволяет оценивать текущий риск системы и вклад в него всех ее компонент. Модели управления риском представляют собой оптимизационные задачи. В качестве целевых функций могут использоваться условный минимум риска и достижение им заданного уровня при минимальных изменениях вероятностных характеристик системы.

Ключевые слова: модель; риск; стохастическая система; случайный вектор; нормальное распределение; мониторинг; оптимизация

Введение

Исследование безопасности сложных систем опирается на теорию риска. В широком смысле под риском понимают возможную опасность какого-либо неблагоприятного исхода. Реальные системы, как правило, являются многомерными, их функционирование во многом носит стохастический характер, у них часто можно выделить десятки различных факторов риска [1]. При решении задачи управления риском необходимо опираться на модель риска. Обычно моделирование риска сводится к выделению опасных

исходов, количественному заданию последствий от их наступления и оцениванию вероятностей этих исходов [2]. Для относительно простых объектов, когда можно априори указать все опасные исходы при наличии статистической информации или экспертных оценок о шансах их появления в целом, данный подход дает приемлемые на практике результаты. Однако для многих сложных систем, например в экономике, обществе, здравоохранении и др., выделить все эти опасные исходы не представляется возможным.

В [3] предложен подход к моделированию риска, согласно которому стохастическую систему представляют в виде случайного вектора с взаимно коррелированными компонентами, а в качестве управляющих переменных используют его числовые характеристики. Целью статьи является описание модели мониторинга и управления риском на основе данного подхода на примере гауссовской стохастической системы.

1. Модель анализа риска

Представим состояние сложной системы в виде некоторой многомерной стохастической системы. Выделим в этой системе факторы риска $X_1, X_2, \dots, X_m$. В результате получим представление системы в виде случайного вектора $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ с некоторой плотностью вероятности $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$.

Вместо выделения конкретных опасных ситуаций будем задавать геометрические области неблагоприятных исходов. Они могут выглядеть произвольным образом в зависимости от конкретной задачи и определяются на основе имеющейся априорной информации. Для определенности опишем предлагаемый подход на примере распространенной концепции опасных состояний как больших и маловероятных отклонений случайной величины. Тогда опасными ситуациями будем считать большие и маловероятные отклонения выборочных значений x_{ij} любой из компонент X_j относительно наилучших в смысле безопасности значений θ_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Если априорная информация о значениях θ_j отсутствует, то считаем, что они равны математическим ожиданиям $\mu_j = M[X_j]$ случайных величин X_j , то есть $\theta_j = \mu_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда вероятность неблагоприятного исхода для каждой из компонент X_j определим как

$$P(D_j) = P(X_j \nabla D_j) = P(X_j \nabla \bar{D}_j), \bar{D}_j = \{x : d_j < x < d_j^+\},$$

где d_j, d_j^+ – заданные левая и правая границы допустимых значений ($d_j < d_j^+$), то есть область благоприятных исходов ограничена диапазоном $(d_j; d_j^+)$.

Введем нижний b_j и верхний b_j^+ пороговые уровни допустимых отклонений относительно значений θ_j как $b_j = \theta_j - d_j$, $b_j^+ = d_j^+ - \theta_j$, при этом область благоприятных исходов $\bar{D}_j$ для каждой компоненты X_j описывается диапазоном $(\theta_j - b_j; \theta_j + b_j^+)$.

Если задана только правая граница d_j^+ допустимых значений, то считаем $d_j = -\infty$ и $\bar{D}_j = \{x : x < d_j^+\} = \{x : x < \theta_j + b_j^+\}$, при только определенной левой границе d_j имеем $d_j^+ = +\infty$ и $\bar{D}_j = \{x : x > d_j\} = \{x : x > \theta_j - b_j\}$. Выражение $d_j = -\infty$ ($d_j^+ = +\infty$) означает, что значения фактора риска X_j менее (более) θ_j являются такими же безопасными, как и $X_j(\theta_j)$.

Теперь необходимо описать многомерную область опасных ситуаций D , учтя взаимное влияние компонент на появление неблагоприятных исходов. Она равна $D = \mathbf{R}^m \setminus \bar{D}$,

где $\bar{D}$ – область допустимых значений факторов риска. Опишем область $\bar{D}$. Это можно сделать различными способами. Наиболее оправданным с геометрической точки зрения представляется задать ее в виде внутренней области m -осного эллипсоида

$$\bar{D} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - \theta_j)^2}{b_j^2} < 1 \right\}$$

с центром в точке $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, причем для любого $j = 1, 2, \dots, m$

$$\theta_j = \begin{cases} \theta_j, & d_j = \in \{ d_j^+ = +\infty, \\ \frac{(d_j^- + d_j^+)}{2}, & d_j > \in \vee d_j^+ < +\infty, \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} \frac{(b_j^- + b_j^+)}{2}, & d_j > \in \vee d_j^+ < +\infty, \\ b_j, & d_j^+ = +\infty, \\ b_j^+, & d_j = \in. \end{cases}$$

Тогда для случайного вектора $\mathbf{X}$ вероятность неблагоприятного исхода будет равна

$$P(D) = P(\mathbf{X} \forall D), D = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \sum_{j=1}^m \frac{(x_j - \theta_j)^2}{b_j^2} \rightarrow 1 \right\}. \quad (1)$$

Область D в (1) представляет собой внешнюю область m -осного эллипсоида, у которого полуоси по каждой из координат равны b_j соответственно. Очевидно, когда исход не лежит на одной из осей, то событие $(\mathbf{X} \forall D)$ может реализоваться и при отсутствии рискованных отклонений по всем компонентам (возможны ситуации $\mathbf{X} \forall D$ и $\wedge j X_j \forall D_j$). Задав функцию последствий от опасных ситуаций (функцию риска) в виде $g(\mathbf{x})$, получим модель для количественной оценки уровня риска

$$r(\mathbf{X}) = \int_{\mathbf{R}^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Если в (2) принять $g(\mathbf{x}) = 1 \wedge \mathbf{x} \forall D$ и $g(\mathbf{x}) = 0 \wedge \mathbf{x} \forall D$, то $r(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X} \forall D)$, то есть уровень риска будет равен вероятности неблагоприятного исхода. На ранней стадии исследования системы сложно достаточно точно описать функцию $g(\mathbf{x})$, поэтому формула (2) становится оценкой $P(D)$ и является удобным начальным приближением модели риска.

Для задания функции $g(\mathbf{x})$ требуется количественная оценка последствий для исследуемой системы в зависимости от значений факторов риска. Это требует проведения отдельного исследования. Предложим вариант задания функции риска.

1. Считаем, что функция $g(\mathbf{x})$ является неотрицательной и непрерывной всюду на $\mathbf{R}^m$, причем $g(\theta) = 0$.

2. Считаем, что $\wedge \mathbf{z} \forall \mathbf{R}^m$ и $\wedge \alpha > 1$ $g(\theta + \alpha \mathbf{z}) \rightarrow g(\theta + \mathbf{z})$, то есть функция $g(\mathbf{x})$ не убывает по любому направлению из точки θ .

3. Считаем, что по каждому фактору риска есть информация хотя бы об одном из предельных значениях: D_j левее θ_j и D_j^+ правее θ_j , при достижении которых последствия становятся практически неуправляемыми или необратимыми. Если $d_j = \in$ ($d_j^+ = +\infty$), то считаем, что $D_j = \in$ ($D_j^+ = +\infty$).

4. $\wedge D_j > \in g(\theta_1, \dots, D_j, \dots, \theta_m) = 1$ и $\wedge D_j^+ < +\in g(\theta_1, \dots, D_j^+, \dots, \theta_m) = 1$. Тогда функцию риска можно задать, например, как

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j (x_j - \theta_j)^2, \quad (3)$$

или

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_j (x_j - \theta_j)^2, & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in \bar{D}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha_j = 1/(D_j - \theta_j)^2$, $\wedge x_j < \theta_j$ и $\alpha_j = 1/(D_j^+ - \theta_j)^2$, $\wedge x_j \rightarrow \theta_j$.

Очевидно, что если $D_j = \in$ и $x_j < \theta_j$ или $D_j^+ = +\in$ и $x_j \rightarrow \theta_j$, то $\alpha_j = 0$.

В задачах мониторинга риска, наряду с оценкой уровня риска $r(\mathbf{X})$ по всем факторам риска $X_1, X_2, \dots, X_m$ многомерной системы, целесообразно оценить вклад каждого фактора в суммарный риск. Введем случайный вектор $\mathbf{X}_k = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_m)$. Тогда абсолютное и относительное изменение риска многомерной системы за счет добавления фактора X_k равно

$$\Delta r(X_k) = r(\mathbf{X}) - r(\mathbf{X}_k), \delta r(X_k) = \Delta r(X_k)/r(\mathbf{X}_k). \quad (5)$$

Отметим, что наряду с вкладом в общий риск одного фактора формулы (1)–(5) позволяют оценивать влияние и группы факторов.

Мониторинг риска на основе модели (1)–(5) заключается в последовательном оценивании во времени фактических значений величин $r(\mathbf{X})$, $\Delta r(X_k)$, $\delta r(X_k)$, $j = 1, 2, \dots, m$, а также динамики их изменения.

2. Модели управления риском в гауссовских системах

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда $\mathbf{X}$ имеет совместное нормальное распределение с плотностью вероятности

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \right\},$$

где $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ – вектор математических ожиданий, $\Sigma = \{\sigma_{ij}\}_{m \times m}$ – ковариационная матрица, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ – дисперсия.

Использование гауссовского случайного вектора опирается на центральную предельную теорему [4]. Следует отметить, что данное упрощение не столь критично, и если есть какие-либо основания считать, что плотности вероятностей компонент вектора $\mathbf{X}$ имеют «более вытянутые хвосты», то это можно скорректировать за счет соответствующего задания функции $g(\mathbf{x})$.

Суть управления риском гауссовской системой состоит в следующем. Задав функцию последствий от опасных ситуаций $g(\mathbf{x})$ и введя ограничения на допустимые значения элементов ковариационной матрицы $G(\Sigma)$ и средних значений компонент системы $H(\mathbf{a})$, сформулируем задачу минимизации риска с переменными $\Sigma, \mathbf{a}$

$$\begin{cases} r(\Sigma, \mathbf{a}) = \int_{\mathbf{R}^m} g(\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \propto \min_{\Sigma, \mathbf{a}}, \\ \Sigma \forall G(\Sigma), \mathbf{a} \forall H(\mathbf{a}). \end{cases} \quad (6)$$

Задача (6) является задачей нелинейного программирования. Ее можно решить разными методами. Одним из них является метод барьерных функций (внутренних штрафных функций) [5]. Его основная идея состоит в преобразовании задачи поиска условного экстремума к последовательности задач нахождения безусловного экстремума вспомогательной функции $F(\mathbf{X}, b_k) = r(\Sigma, \mathbf{a}) + P(\Sigma, \mathbf{a}, b_k)$, где $P(\Sigma, \mathbf{a}, b_k)$ – штрафная функция, b_k – параметр штрафа.

Управление многомерным риском в виде задачи условной минимизации (6) может приводить к мало реализуемым на практике решениям. В таких случаях решается задача достижения требуемого значения риска при минимальном изменении числовых характеристик случайного вектора $\mathbf{X}^0$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m (\sigma_{jk} - \sigma_{jk}^0)^2 + \sum_{i=1}^m (a_i - a_i^0)^2 \propto \min_{\mathbf{a}, \Sigma}, \\ r(\mathbf{X}) = r', \Sigma \forall G(\Sigma), \mathbf{a} \forall H(\mathbf{a}). \end{cases}$$

Заключение

1. Предложен новый подход к риск-анализу сложных систем. В его основе лежит моделирование системы в виде многомерной случайной величины, компоненты которой являются факторами риска.

2. Рассмотрены два варианта анализа риска. В первом случае оценивается вероятность опасных состояний системы, а во втором – непосредственно риск на основе введенной функции риска.

3. Для гауссовских стохастических систем предложены модели управления риском на основе его минимизации или достижения заданного уровня, используя в качестве управляющих переменных числовые характеристики случайного вектора – вектор математических ожиданий и ковариационную матрицу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Мажутов Н.А. Управление риском и устойчивое развитие: Человеческое измерение // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8. № 6. С. 12-26.
2. Вишняков Я.Д., Радаев Н.Н. Общая теория рисков. М.: Академия, 2008. 368 с.
3. Тырсин А.Н., Сурина А.А. Моделирование риска в многомерных стохастических системах // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 2 (39). С. 65-72.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 2005. 448 с.
5. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008. 544 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Тырсин Александр Николаевич, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор технических наук, зав. кафедрой прикладной математики, e-mail: at2001@yandex.ru

Сурина Альфия Адгамовна, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск, Российская Федерация, аспирант, кафедра прикладной математики и программирования, e-mail: dallila87@mail.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783

MODELS OF MONITORING AND MANAGEMENT OF RISK IN GAUSSIAN STOCHASTIC SYSTEMS

A. A. Tyrsin¹⁾, A. A. Surina²⁾

¹⁾ Ural Federal University named after first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

E-mail: at2001@yandex.ru

²⁾ South Ural State University (national research university)
76 Lenin Prospekt, Chelyabinsk 454080, Russian Federation

E-mail: dallila87@mail.ru

Abstract. The risk model of multidimensional stochastic systems is described. It is based on the hypothesis that the risk is characterized by probabilistic properties of components of multidimensional stochastic system which are used as risk factors. The case of the Gaussian stochastic systems is investigated. The model of risk monitoring allows to estimate the current risk of system and the contribution of all its components. Models of risk management are optimizing tasks. As the target functions the conditional minimum of risk and achievement of the given level by it can be used at minimum changes of probabilistic characteristics of the system.

Key words: model; risk; stochastic system; random vector; normal distribution; monitoring; optimization

REFERENCES

1. Vorob'ev Yu.G., Malinetskiy G.G., Makhutov N.A. Upravleniye riskom i ustoychivoye razvitiye: Chelovecheskoye izmereniye [Risk management and sustainable development. Humanitarian dimension]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2000, vol. 8, no. 6, pp. 12-26. (In Russian).
2. Vishnyakov Ya.D., Radaev N.N. *Obshchaya teoriya riskov* [General Theory of Risks]. Moscow, Akademiya Publ., 2008, 368 p. (In Russian).
3. Tyrsin A.N., Surina A.A. Modelirovaniye riska v mnogomernykh stokhasticheskikh sistemakh [Modeling of risk in multidimensional stochastic systems]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2017, no. 2 (39), pp. 65-72. (In Russian).
4. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Probability Theory Course]. Moscow, Editorial URSS, 2005, 448 p. (In Russian).
5. Panteleyev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh* [Optimization Methods in Examples and Tasks]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2008, 544 p. (In Russian).

Received 16 April 2018

Reviewed 18 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Tyrsin Alexander Nikolaevich, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Science in technology, Head of Department of Applied Mathematics, e-mail:at2001@yandex.ru

Surina Alfiya Adgamovna, South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics and Programming, e-mail: dallila87@mail.ru

For citation: Tyrsin A.N., Surina A.A. Modeli monitoringa i upravleniya riskom v gaussianovskikh stokhasticheskikh sistemakh [Models of monitoring and management of risk in Gaussian stochastic systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 776–783. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-776-783 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ С ВОЗМУЩЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

⇨ В. И. Усков

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения с малым параметром при производной с возмущенным с помощью некоторого параметра фредгольмовым оператором в банаховом пространстве. Исследуется влияние этого параметра. Находится решение в виде асимптотического разложения. При решении задачи используется метод каскадной декомпозиции уравнения, позволяющий расцепить уравнение на уравнения в подпространствах.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; асимптотическое решение; малый параметр; возмущение в правой части; фредгольмов оператор; явление погранслоя

Введение

Рассматривается задача:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (A + c \oplus I)x(t, \varepsilon) + F(t), \quad (0.1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad (0.2)$$

где A — линейный замкнутый, вообще говоря неограниченный, фредгольмов оператор с нулевым индексом (далее, Φ_0 -оператор), действующий в банаховом пространстве, $\overline{\text{dom}} A = E$; $F(t)$ — заданная функция со значениями в E ; $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$; $t \in [0, T]$.

Об актуальности задачи свидетельствует широкое прикладное значение уравнения (1): движение сильновязкой жидкости (напр., крови в сосудах), поведение тонких упругих оболочек, процессы обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа и т. д.

Приложением исходной задачи может быть начально-краевая задача для уравнения

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\varepsilon c \frac{\partial u}{\partial t} + 2c \frac{\partial u}{\partial x} + (\gamma^2 + c^2)u(x, t, \varepsilon) = \varphi(x, t).$$

Это уравнение встречается в теории дифракции, в задачах математической физики, связанных с потенциальными барьерами квантовой физики [1]. В работе [2] исследовано влияние параметра c на поведение решения, а также найдено это решение в виде тригонометрического ряда с обоснованием его сходимости.

Поставленная задача при значении $c = 0$ изучена многими авторами; построено асимптотическое решение различными методами [3–6].

В настоящей работе выявляется условие регулярности вырождения; строится асимптотическое разложение решения задачи (0.1), (0.2) по степеням параметра ε в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \bar{x}_m(t, \varepsilon) + \bar{v}_m(t, \varepsilon) + R_m(t, \varepsilon), \\ \bar{x}_m(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^m \varepsilon^k x_k(t), \quad \bar{v}_m(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^k v_k(\tau), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (0.3)$$

где $\bar{x}_m(t, \varepsilon)$ — регулярная часть, $\bar{v}_m(t, \varepsilon)$ — погранслоиная часть, $R_m(t, \varepsilon)$ — остаточный член разложения. Доказывается асимптотичность этого разложения.

1. Основные сведения

Приведем сведения, необходимые для решения поставленной задачи.

С в о й с т в о 1.1. Линейный Φ_0 -оператор $A : E \Rightarrow E$ обладает свойством:

$$E = \text{Ker } A \bigcirc \text{Coim } A, \quad E = \text{Coker } A \bigcirc \text{Im } A, \quad (1.1)$$

где $\text{Coim } A$ — прямое дополнение к $\text{Ker } A$, $\text{Coker } A$ — дефектное подпространство; сужение $\tilde{A} = A|_{\text{Coim } A \rightarrow \text{dom } A}$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$; $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Coker } A < \infty$ [7].

Пусть P — проектор на $\text{Ker } A$, Q — проектор на $\text{Coker } A$, отвечающие разложениям (1.1), I — единичный оператор в соответствующем подпространстве, $A = \tilde{A}^{-1}(I - Q)$ — полуобратный оператор.

Имеет место следующее утверждение о решении линейного уравнения [8, 9].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение с Φ_0 -оператором A*

$$A\xi = \eta$$

равносильно системе

$$\xi = A^{-1}\eta + P\xi \quad \text{для любого } P\xi \in \text{Ker } A,$$

$$Q\eta = 0.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Ограниченная функция $v(t, \varepsilon)$, определенная на $[0, T]$, называется *функцией погранслоя* вблизи $t = 0$, если при $\varepsilon \Rightarrow 0$ имеет место $v(t, \varepsilon) \propto 0$ на $[t^\infty, T]$ для всех $t^\infty \in (0, T)$, и $v(t, \varepsilon) \not\Rightarrow 0$ на $[0, T]$ [10].

Возможно следующее поведение решения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \Rightarrow 0$:

1) $x(t, \varepsilon) \propto \bar{x}(t)$ на $[0, T]$, где $\bar{x}(t)$ — решение предельного уравнения

$$(A + c \oplus I)\bar{x}(t) = F(t). \quad (1.2)$$

2) $x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + v(t, \varepsilon)$, где $v(t, \varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t = 0$;

3) $\|x(t, \varepsilon)\| \Rightarrow +\infty$;

4) $x(t, \varepsilon)$ не имеет предела.

Вводятся следующие обозначения: $U(t)$ — полугрупповой оператор, порожденный оператором A , $R(\lambda)$ — резольвента оператора A .

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\frac{dw}{dt} = Aw(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Имеет место следующее утверждение [11].

Теорема 1.1. Для того, чтобы задача Коши для уравнения (1.3) с замкнутым оператором A была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы для резольвенты $R(\lambda)$ выполнялось условие:

$$\|R^n(\lambda)\| \leq \frac{\mu}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}, \quad (\operatorname{Re} \lambda > \omega) \quad (1.4)$$

при некоторых ω и μ . При этом для соответствующей полугруппы справедливо неравенство:

$$\|U(t)\| \leq \mu e^{\omega t}.$$

Число ω называется типом полугруппы $U(t)$.

2. Решение линейного уравнения с возмущенным оператором

Рассматривается уравнение

$$(A + c \oplus I)v = w \quad (2.1)$$

с линейным Φ_0 -оператором A , действующим в банаховом пространстве E ; единичным оператором I ; некоторым комплексным параметром $c \neq 0$; заданным элементом $w \in E$. Требуется найти элемент $v \in E$.

Исследуется случай, когда операторы A_j , $j = 1, 2, \dots$, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} A_0 &= A, \quad P_0 = P, \quad Q_0 = Q, \\ S_1 &= I, \quad S_j = Q_j^{-1} S_{j-1} A_j^{-1} S_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, \\ A_j &= Q_j^{-1} S_j P_j^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

ненулевые.

У с л о в и е 2.1. Существует такое число r , что оператор A_r обратим (в подпространстве $\text{Ker } A_r$). Пусть p – минимум из таких r .

Строятся проекторы P на $\text{Ker } A$, Q на $\text{Coker } A$, отвечающие разложениям:

$$E = \text{Ker } A \circ \text{Coim } A, \quad E = \text{Coker } A \circ \text{Im } A;$$

проекторы P_j на $\text{Ker } A_j$, Q_j на $\text{Coker } A_j$, отвечающие разложениям:

$$\text{Ker } A = \text{Ker } A_1 \circ \text{Coim } A_1, \quad \text{Coker } A = \text{Coker } A_1 \circ \text{Im } A_1;$$

$$\text{Ker } A_j = \text{Ker } A_{j+1} \circ \text{Coim } A_{j+1}, \quad \text{Coker } A_j = \text{Coker } A_{j+1} \circ \text{Im } A_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots;$$

полуобратные операторы A , A_j , $j = 1, 2, \dots$.

Вводятся обозначения:

$$w_0 = w,$$

$$w_j = Q_{j-1} S_j (I + c \oplus (-1)^{j+1} A_{j-1} S_j)^{-1} A_{j-1} w_{j-1} + c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} w_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Перейдем к решению исходного уравнения. Оно решается в несколько шагов с применением метода каскадной декомпозиции уравнения. Применяется утверждение леммы 1.1.

1 шаг. Уравнение (2.1) равносильно системе

$$v = A(-cv + w) + Pv, \quad (2.3)$$

$$Q(-cv + w) = 0 \quad (2.4)$$

с искомым элементом $Pv \in \text{Ker } A$. Из соотношения (2.3) имеем:

$$(I + c \oplus A)v = A^{-1}w + Pv. \quad (2.5)$$

Пусть выполнено условие:

$$\|c \oplus A\| < 1.$$

Тогда равенство (2.5) можно обратить:

$$v = (I + c \oplus A)^{-1} A^{-1}w + (I + c \oplus A)^{-1} Pv. \quad (2.6)$$

Подставив (2.6) в (2.4), с учетом обозначений (2.2), получим уравнение

$$Q(I + c \oplus A)^{-1} Pv = w_1. \quad (2.7)$$

Пусть $p = 1$ и выполнены равенства:

$$(A_j)^j P = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда, раскрыв левую часть уравнения (2.7), получим уравнение

$$QPv = w_1,$$

то есть (так как $P^2 = P$) уравнение

$$QP(Pv) = w_1,$$

которое в силу обратимости оператора $A_1 = QP$ имеет решение

$$Pv = A_1^{-1}w_1. \quad (2.8)$$

Подставив выражение (2.8) в (2.6), получим искомое решение уравнения.

Если же $p \notin 1$, то переходим к следующему шагу.

2 шаг. Пусть $p = 2$ и выполнены равенства:

$$(A_1)^j P = 0, \quad j = 2, 3, \dots$$

Тогда раскрытие уравнения (2.7) приводит к уравнению

$$QPv - c \oplus QA_1 Pv = w_1. \quad (2.9)$$

В силу Φ_0 -свойства оператора A_1 , (2.9) равносильно системе

$$Pv = c \oplus A_1 QA_1 Pv + A_1 w_1 + P_1 v, \quad (2.10)$$

$$c \oplus Q_1 QA_1 Pv + Q_1 w_1 = 0 \quad (2.11)$$

с искомым элементом $P_1 v \notin \text{Ker } A_1$. Уравнение (2.10) — это уравнение относительно элемента Pv :

$$(I - c \oplus A_1 QA_1) Pv = A_1 w_1 + P_1 v,$$

которое при выполнении условия

$$\|c \oplus A_1 QA_1\| < 1$$

можно обратить:

$$Pv = (I - c \oplus A_1 QA_1)^{-1} A_1 w_1 + (I - c \oplus A_1 QA_1)^{-1} P_1 v. \quad (2.12)$$

Подстановка выражения (2.12) в (2.11) с учетом обозначений (2.2) приводит к уравнению относительно элемента $P_1 v$:

$$Q_1 QA_1 (I - c \oplus A_1 QA_1)^{-1} P_1 v = w_2. \quad (2.13)$$

Пусть выполнены равенства:

$$(A_1 QA_1)^j P_1 = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Тогда уравнение (2.13) приводится к уравнению

$$Q_1 QA_1 P_1 v = w_2,$$

то есть к уравнению

$$Q_1 Q A P_1(P_1 v) = w_2,$$

которое в силу обратимости оператора $A_2 = Q_1 Q A P_1$ имеет решение

$$P_1 v = A_2^{-1} w_2. \quad (2.14)$$

Подставив сначала выражение (2.14) в (2.12); затем подставив полученное выражение в (2.6), получим искомое решение уравнения.

Дальнейшее расщепление исходного уравнения производится аналогично.

Получен следующий результат.

Лемма 2.1. Пусть выполнено условие 2.1. Пусть выполнены неравенства:

$$\|c \oplus A_j S_{j+1}\| < 1, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (2.15)$$

Пусть выполнены соотношения:

$$(A_j S_{j+1})^{p+i-j} P_j = 0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (2.16)$$

Тогда уравнение (2.1) имеет решение, определяемое по формулам:

$$\begin{aligned} v &= (I + c \oplus A)^{-1} (A w + v_0), \\ v_j &= (I + c \oplus A)^{j+1} \oplus A_{j+1} S_{j+2}^{-1} (A_{j+1} w_{j+1} + v_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, p-2, \\ v_{p-1} &= A_p^{-1} w_p, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где w_j определяются по формулам (2.2).

З а м е ч а н и е 2.1. Решение предельного уравнения (1.2) определяется по той же формуле (2.17).

3. Оценка на полугрупповой оператор оператора $A + c \oplus I$

Введем следующие обозначения: $A_c = A + c \oplus I$, $U_c(t)$ — полугрупповой оператор, порожденный оператором A_c , $\omega_c = \omega + \|c\|$, $R_c(\lambda)$ — резольвента оператора A_c .

Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω .

Выразим резольвенту $R_c(\lambda)$ через резольвенту $R(\lambda)$. Применим соотношение

$$R_c(\lambda) = R(\lambda - c)$$

и тождество Гильберта

$$R(\mu_1) - R(\mu_2) = (\mu_1 - \mu_2) R(\mu_1) R(\mu_2).$$

Взяв $\mu_1 = \lambda$, $\mu_2 = \lambda - c$, получим равенство

$$R(\lambda) = (I + c \oplus R(\lambda)) R_c(\lambda). \quad (3.1)$$

Пусть выполнено неравенство

$$\|c \oplus R(\lambda)\| < 1. \quad (3.2)$$

Тогда соотношение (3.1) обращается слева:

$$R_c(\lambda) = (I + c \oplus R(\lambda))^{-1} R(\lambda).$$

Раскроем последнее равенство:

$$R_c(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c^k (\cdot)^k R^k(\lambda) \right) R(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c^k (\cdot)^k R^{k+1}(\lambda) = c^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} (\cdot)^{k+1} R^{k+1}(\lambda).$$

Пусть выполнено условие

$$0 < \frac{\|c\|}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} < 1,$$

то есть

$$\operatorname{Re} \lambda > \omega_c. \quad (3.3)$$

Оценим резольвенту $R_c(\lambda)$, пользуясь неравенством (1.4):

$$\begin{aligned} \|R_c(\lambda)\| &= \|c^{-1} \oplus \sum_{k=0}^{\infty} c^{k+1} (\cdot)^{k+1} R^{k+1}(\lambda)\| \leq \|c^{-1} \oplus \sum_{k=0}^{\infty} \|c^{k+1}\| \oplus \|R^{k+1}(\lambda)\|\| \leq \\ &\leq \|c^{-1} \oplus \sum_{k=0}^{\infty} \|c\|^{k+1} \oplus \frac{\mu}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+1}}\| = \mu \|c^{-1} \oplus \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\|c\|}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \right)^{k+1}\| = \frac{\mu}{\operatorname{Re} \lambda - \omega_c}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом, в силу теоремы 1.1, для полугруппы $U_c(t)$ справедлива оценка:

$$\|U_c(t)\| \leq \mu e^{\omega_c t}. \quad (3.5)$$

З а м е ч а н и е 3.1. При выполнении условия (3.3) имеет место неравенство (3.2).

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω . При выполнении условия (3.3) задача Коши для уравнения

$$\frac{dw}{dt} = A_c w(t)$$

также равномерно корректна. Для резольвенты $R_c(\lambda)$ оператора A_c имеет место оценка (3.4). При этом для соответствующей полугруппы $U_c(t)$ имеет место оценка (3.5).

4. Асимптотическое решение задачи (0.1), (0.2)

Для вычисления компонент разложения (0.3) воспользуемся методом Васильевой–Вишика–Люстерника, разработанным в работах [12, 4]. Получим уравнения первого итерационного процесса:

$$A_c x_0(t) = F(t), \quad (4.1)$$

$$A_c x_k(t) = \frac{dx_{k-1}}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad (4.2)$$

уравнения второго итерационного процесса:

$$\frac{dv_k}{d\tau} = A_c v_k(\tau), \quad k = 0, 1, \dots, m; \quad (4.3)$$

уравнение для остаточного члена:

$$\varepsilon \frac{dR_m}{dt} = A_c R_m(t, \varepsilon) - \varepsilon^{m+1} \frac{dx_m}{dt}; \quad (4.4)$$

уравнения для нахождения начальных значений:

$$x_0(0) + v_0(0) = x^0, \quad (4.5)$$

$$x_k(0) + v_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$R_m(0, \varepsilon) = 0. \quad (4.6)$$

Решение уравнений первого итерационного процесса

Уравнения первого итерационного процесса (4.1), (4.2) — это уравнения вида (2.1). Применим к ним результаты, полученные в главе 2.

Вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_{00}(t) &= F(t), \\ F_{0j}(t) &= Q_{j-1} S_j (I + c \oplus (-1)^{j+1} A_{j-1} S_j)^{-1} A_{j-1} F_{0j-1} + c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} F_{0j-1}(t), \\ F_{k0}(t) &= \frac{dx_{k-1}}{dt}, \\ F_{kj}(t) &= Q_{j-1} S_j (I + c \oplus (-1)^{j+1} A_{j-1} S_j)^{-1} A_{j-1} F_{kj-1}(t) + \\ &+ c^{-1} (-1)^{j+1} Q_{j-1} F_{kj-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Пусть выполнено условие 2.1. Пусть функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема m раз. Пусть выполнены неравенства (2.15) и соотношения (2.16). Тогда уравнения (4.1), (4.2) имеют решения, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= (I + c \oplus A)^{-1} (A F(t) + y_{00}(t)), \\ y_{0j}(t) &= (I + c \oplus (-1)^{j+1} A_{j+1} S_{j+2})^{-1} (A_{j+1} F_{0j+1}(t) + y_{0j+1}(t)), \quad j = 0, 1, \dots, p-2, \\ y_{0p-1}(t) &= A_p^{-1} F_{0p}(t); \\ x_k(t) &= (I + c \oplus A)^{-1} (A \frac{dx_{k-1}}{dt} + y_{k0}(t)), \\ y_{kj}(t) &= (I + c \oplus (-1)^{j+1} A_{j+1} S_{j+2})^{-1} (A_{j+1} F_{kj+1}(t) + y_{kj+1}(t)), \quad j = 0, 1, \dots, p-2, \\ y_{kp-1}(t) &= A_p^{-1} F_{kp}(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решение уравнений второго итерационного процесса

Решение уравнений (4.3) с начальным значением $v_k(0)$ равно [11]

$$v_k(\tau) = U_c(t)v_k(0), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (4.9)$$

Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω . Функции (4.9) являются функциями погранслоя тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\omega_c < 0, \quad (4.10)$$

вытекающее из оценки (3.5) теоремы 3.1. Это условие регулярности вырождения.

Начальные значения $v_k(0)$ определяются из соотношений (4.5) и формул (4.8) для $x_k(t)$ при $t = 0$.

5. Асимптотичность разложения (0.3)

Вводится оператор $A_\varepsilon = \varepsilon^{-1}A_c$ и его полугрупповой оператор $U_\varepsilon(t)$.

Решив уравнение (4.4) с начальным условием (4.6), получим:

$$R_m(t, \varepsilon) = \varepsilon^m \int_0^t U_\varepsilon(t-s) \frac{dx_m}{ds} ds. \quad (5.1)$$

Для доказательства асимптотичности разложения (0.3) достаточно установить справедливость следующего соотношения на остаточный член $R_m(t, \varepsilon)$:

$$R_m(t, \varepsilon) = o(\varepsilon^m(x_m(t) + v_m(\tau))), \quad \varepsilon \Rightarrow 0, \quad t \in [0, T],$$

то есть оценки:

$$\|R_m(t, \varepsilon)\| \leq \mu_1 \varepsilon^{m+1}, \quad \mu_1 = \text{const},$$

или, как это следует из соотношения (5.1), оценки:

$$\left\| \int_0^t U_\varepsilon(t-s) \frac{dx_m}{ds} ds \right\| < \mu_1 \varepsilon.$$

Справедлива оценка, вытекающая из неравенства (3.5):

$$\|U_\varepsilon(t)\| = \left\| U_c\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right\| \leq \mu_1 \exp\left(\omega_c \frac{t}{\varepsilon}\right), \quad \mu_1 = \text{const} > 0. \quad (5.2)$$

В силу ограниченности полугруппы $U_\varepsilon(t)$ и функции $\frac{dx_m}{dt}$, имеем:

$$\left\| \int_0^t U_\varepsilon(t-s) \frac{dx_m}{ds} ds \right\| \leq \mu_2 \int_0^t \|U_\varepsilon(t-s)\| ds, \quad \mu_2 = \text{const} > 0.$$

Пусть выполнено условие (4.10). Оценим интеграл в правой части последнего неравенства, пользуясь оценкой (5.2):

$$\begin{aligned} \int_0^t \|U_\varepsilon(t-s)\| ds &\leq \mu_2 \int_0^t \exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon} \oplus (t-s)\right) ds = \mu_2 \frac{\varepsilon}{\omega_c} \left(1 - \exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon} \oplus t\right)\right) \leq \\ &\leq \mu_2 \frac{\varepsilon}{\omega_c} \left(1 - \exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon} \oplus T\right)\right) = \frac{\mu_2}{\omega_c} \left(1 - \exp\left(\frac{\omega_c}{\varepsilon} \oplus T\right)\right) \oplus = \mu_3 \oplus, \quad \mu_3 = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 5.1. Пусть задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна и имеет тип ω . Пусть функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема m раз. Пусть выполнено условие (4.10). Тогда имеет место асимптотическое разложение (0.3) решения задачи (0.1), (0.2).

Пусть выполнено условие 2.1. Пусть выполнены неравенства (2.15) и соотношения (2.16). Тогда компоненты $x_k(t)$ разложения определяются по формулам (4.8), (4.7) и являются непрерывно дифференцируемыми функциями.

Компоненты $v_k(\tau)$ разложения определяются по формулам (4.9), (4.5).

Теорема 5.2. Имеет место следующее поведение решения $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \Rightarrow 0$. Случай 1) имеет место, если все точки спектра оператора A находятся в полуплоскости $\text{Re } \lambda < \omega_c < 0$. Случай 3) — если хотя бы одна точка спектра оператора A находится в полуплоскости $\text{Re } \lambda > \|c\|$. Случай 4) имеет место, если хотя бы одна точка спектра оператора A находится в полуплоскости $\text{Re } \lambda = \|c\|$, а остальные — в $\text{Re } \lambda < \|c\|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. Вып. 5 (77). С. 3-122.
2. Зубова С.П., Усков В.И. Приложения матрично-дифференциального оператора к решению задач для уравнений в частных производных // Итоги науки: избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. М.: РАН, 2017. Вып. 31. 253 с.
3. Крейн С.Г., Нго Зуи Кан Асимптотический метод в задаче о колебаниях сильно вязкой жидкости // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 3. С. 456-464.
4. Треногин В.А. Развитие и приложения асимптотического метода Люстерника–Вишика // Успехи математических наук. 1970. Т. 25. Вып. 4 (154). С. 123-156.
5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Издательство Московского государственного университета, 2011. 456 с.
6. Зубова С.П., Усков В.И. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2016. № 3. С. 143-155.
7. Никольский С.М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1943. Т. 7. Вып. 3. С. 147-166.

8. *Зубова С.П., Чернышов К.И.* О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовским оператором при производной // Дифференциальные уравнения и их применение. 1976. Вып. 14. С. 21-39.

9. *Зубова С.П., Усков В.И.* Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай // Математические заметки. 2018. Т. 103. Вып. 3. С. 392-403.

10. *Зубова С.П.* О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной // Доклады Академии наук. 2014. Т. 454. № 4. С. 383-386.

11. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

12. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Усков Владимир Игоревич, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация, ассистент, кафедра математики, e-mail: vum1@yandex.ru

Для цитирования: Усков В.И. Асимптотическое решение уравнения первого порядка с малым параметром при производной с возмущенным оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 784–796. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796

ASYMPTOTIC SOLUTION OF FIRST-ORDER EQUATION WITH SMALL PARAMETER UNDER THE DERIVATIVE WITH PERTURBED OPERATOR

V. I. Uskov

Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation
E-mail: vum1@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to the Cauchy problem for a differential equation with a small parameter when using a Fredholm operator in a Banach space with a certain method. The investigated effect of this parameter. The solution is in the form of an asymptotic expansion. When solving the problems of using the cascade decomposition method for equations, which allows us to split the equation into equations in subspaces.

Keywords: differential equation; asymptotic solution; small parameter; perturbation in the right-hand side; Fredholm operator; boundary layer phenomenon

REFERENCES

1. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regulyarnoye vyrozhdeniye i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy s malym parametrom [Regular degeneracy and boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, no. 5 (77), pp. 3-122. (In Russian).
2. Zubova S.P., Uskov V.I. Prilozheniya matrichno-differentsial'nogo operatora k resheniyu zadach dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Applications of the matrix-differential operator to the solution of problems for partial differential equations]. *Izbrannyye trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma po fundamental'nyim i prikladnym problemam nauki «Itogi nauki»* [Selected Works of the International Symposium on Fundamental and Applied Problems of Science “The Results of Science”]. Moscow, RAS Publ., 2017, no. 31, 253 p. (In Russian).
3. Krein S.G., Ngo Zuy Kan Asimptoticheskiy metod v zadache o kolebaniyakh sil'no vyazkoy zhidkosti [Asymptotic method in the problem of oscillations of a highly viscous fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 33, no. 3, pp. 456-464. (In Russian).
4. Trenogin V.A. Razvitiye i prilozheniya asimptoticheskogo metoda Lyusternika-Vishika [Development and applications of the Lyusternik-Vishik asymptotic method]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, no. 4 (154), pp. 123-156. (In Russian).
5. Lomov S.A., Lomov I.S. *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* [Fundamentals of the Mathematical Theory of the Boundary Layer]. Moscow, Moscow State University Publ., 2011, 456 p. (In Russian).
6. Zubova S.P., Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye singulyarno vozmushchennoy zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka v banakhovom prostranstve [The asymptotic solution

of a singularly perturbed cauchy problem for the first-order equation in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 143-155. (In Russian).

7. Nikolsky S.M. Lineynyie uravneniya v lineynykh normirovannykh prostranstvakh [Linear equations in linear normed spaces]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya – Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 147-166. (In Russian).

8. Zubova S.P., Chernyshov K.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii s fredgol'movskim operatorom pri proizvodnoy [On a linear differential equation with a Fredholm operator under the derivative]. *Differentsial'nyie uravneniya i ikh primeneniye – Differential Equations and Its Applications*, 1976, no. 14, pp. 21-39. (In Russian).

9. Zubova S.P., Uskov V.I. Asimptoticheskoye resheniye zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s malym parametrom v banakhovom prostranstve. Regulyarnyy sluchay [Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 392-403. (In Russian).

10. Zubova S.P. O roli vozmushcheniy v zadache Koshi dlya uravneniya s fredgol'movym operatorom pri proizvodnoy [On the role of perturbations in the Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator under the derivative]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2014, vol. 454, no. 4, pp. 383-386. (In Russian).

11. Krein S.G. *Lineynyie differentsial'nyie uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 464 p. (In Russian).

12. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskiye razlozheniya resheniy singulyarno vozmushchennykh uravneniy* [Asymptotic Expansions of Solutions of Singularly Perturbed Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p. (In Russian).

Received 23 April 2018

Reviewed 24 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Uskov Vladimir Igorevich, Voronezh State Forestry University named after G.F. Morozov, Voronezh, the Russian Federation, Assistant, Department of Mathematics, e-mail: vum1@yandex.ru

For citation: Uskov V.I. Asimptoticheskoe reshenie uravneniya pervogo poryadka s malym parametrom pri proizvodnoy s vozmushchennym operatorom [Asymptotic solution of first-order equation with small parameter under the derivative with perturbed operator]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 784-796. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-784-796 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804

УДК 517.977

ЕВКЛИДОВО РАССТОЯНИЕ ДО ЗАМКНУТОГО МНОЖЕСТВА КАК МИНИМАКСНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

≈ А. А. Успенский, П. Д. Лебедев

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Аннотация. Предложен комбинированный (сочленяющий аналитические методы и вычислительные процедуры) подход к построению решений в одном классе краевых задач для уравнения гамильтонова типа. В рассматриваемом классе задач минимаксное (обобщенное) решение совпадает с евклидовым расстоянием до краевого множества. Изучены свойства этой функции в зависимости от геометрии краевого множества и дифференциальных свойств его границы. Разработаны методы выявления псевдовершин краевого множества и построения с их помощью сингулярных множеств решения. Методы опираются на свойства локальных диффеоморфизмов и используют частичные односторонние пределы. Эффективность развиваемых подходов исследования проиллюстрирована на примере решения плоской задачи управления по быстродействию для случая невыпуклого целевого множества с границей переменной гладкости.

Ключевые слова: евклидово расстояние; уравнение Гамильтона–Якоби; задача Дирихле; минимаксное решение; функция оптимального результата; быстродействие; сингулярное множество; локальный диффеоморфизм

Задача вычисления евклидова расстояния до замкнутого множества конечномерного пространства актуальна для различных разделов математики и приложений, что позволяет отнести ее к числу проблем, заслуживающих внимания. В данном случае эта проблема исследуется в контексте решения плоской краевой задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби:

$$\left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\nu: \nu \leq 1} \left(\nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left\{ 0 \leq \nu_1 \leq 1, \nu_2 \leq 1 \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$. Краевое условие в (1) определено на границе ∂M замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Кривая не имеет точек самопересечения, ее дифференциальные свойства указаны ниже в теоремах.

Минимаксное решение [1] краевой задачи (1) (другими словами, обобщенное решение, определение которого опирается на конструкции теории позиционных дифференциальных игр [2]) имеет вид [3]:

$$u(x, y) = \inf_{\nu \in M} \rho(x, y, \nu) \quad (2)$$

где $\rho(x, y, \nu) = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ — евклидово расстояние от $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ до множества M . Отметим, что $u(x, y) = \inf_{\nu \in M} \rho(x, y, \nu)$ является функцией оптимального результата в задаче управления по быстрдействию [1] с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases} \quad (3)$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in M$ удовлетворяет ограничению $\|\nu\| \leq 2$, M — цель.

Динамическая система (3) относительно проста и известен класс разрешающих функций (2). Однако это не отменяет ряд сложностей при формировании оптимальной стратегии управления. Чтобы сформировать управляющие воздействия, надо научиться конструировать функцию оптимального результата — аналитическими, численными или комбинированными методами. Здесь следует подчеркнуть, что евклидово расстояние $u(x, y) = \inf_{\nu \in M} \rho(x, y, \nu)$ является супердифференцируемой функцией на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus M$ [4]. Негладкость функции затрудняет ее построение как в аналитическом виде, так и в аппроксимационных формах. Невыпуклость краевого множества влечет наличие у нее сингулярного множества, которое относится к множествам симметрии [5]. В общем случае сингулярное множество состоит из нуль- и одномерных многообразий. Их конструирование в аналитическом виде или же с помощью численных процедур облегчает построение решения краевой задачи в целом. При этом существенная роль отводится псевдовершинам — особым точкам границы краевого множества, которые «отвечают» за зарождение одномерных многообразий, ветвей множества симметрии.

Пусть $\gamma: T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение числового интервала $T = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$ на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является по крайней мере один раз дифференцируемой функцией всюду на T за исключением, быть может, конечной совокупности точек $T^0 \subset T$. Образ $\gamma(T)$ этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что γ является регулярной в области дифференцируемости, то есть $|\dot{\gamma}(t)| > 0$ для всех $t \in T \setminus T^0$, и не имеет точек самопересечения. В рассмотрение также входят контуры — кривые, заданные на конечных интервалах $T = [t_0, t_1]$, $t_0 < t_1$, допускающие доопределение в концевых точках $t = t_0$ и $t = t_1$ так, что $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

О п р е д е л е н и е 1. [6] Псевдовершиной кривой называется точка

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow 0} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \gamma(t_0, t_1)$$

$$\begin{pmatrix} x & \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_1 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_1 \\ x & \gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_2 + \gamma_1 t_2 + \gamma_2 t_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$
$$G)t_1, t_2 + [1. \quad (5)$$

1) $x \rightarrow y \rightarrow z$ — точка пересечения касательных к кривой γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$;
 2) $G(t_1, t_2) = \rho^2(\gamma(t_1))x \rightarrow y \rightarrow z + \rho^2(\gamma(t_2))x \rightarrow y \rightarrow z$.

$$(A1) \quad t_2 \geq t_0, \quad \delta_1, t_0 \in [0, \infty), \quad \delta_2 \geq \delta_1 > 1, \quad \delta_2 > 1,$$

$$(A3) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{dt_2}{dt_1} [c, c/\gamma] \in [0, 1].$$

Приведем теоремы о необходимых условиях существования псевдовершин, применяемые для их отыскания при построении сингулярного множества решения задачи (1). Разграничим точки по их порядку гладкости. Обозначим $T^k \triangleq \{\bar{t} \in T, k = 1, 2, 3, \dots, \text{совокупность значений аргумента } \bar{t} \in T \text{ точек } \gamma(\bar{t}), \text{ в которых координатные функции имеют непрерывные производные до } k\text{-го порядка включительно, при этом существуют конечные не равные друг другу односторонние производные } k+2\text{-го порядка.}\}$

$$\gamma_2^\epsilon \text{ ef }) \gamma^\epsilon, \gamma^\epsilon \text{ A } \gamma^\epsilon \text{ }^2 \quad 4 \text{ ef }) \gamma^\epsilon, \gamma^\epsilon \text{ O } \gamma^\epsilon, \gamma^\epsilon \text{ } ([\quad 1, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1^\epsilon \text{ ef })\gamma^\epsilon, \gamma^\epsilon - A\gamma^\epsilon \\ 4 \text{ ef })\gamma^\epsilon, \gamma^\epsilon + O\gamma^\epsilon \end{aligned} \right\} [1. \quad (7)$$

Здесь условие

$$(B1) \quad \det \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_2(t_0) \\ \gamma_1'(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

где $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ обозначает определитель второго порядка, построенный на векторах $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, записанных по строкам, $|a, b| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Условие (B1) означает отличие от нуля кривизны кривой в указанной точке, что гарантирует существование решений системы (1) в определении псевдовершины.

Теорема 2. [10] Если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\gamma(t)$ ограничивающей краевое множество M в задаче Дирихле (1), при этом $t_0 \in T^1$ и имеет место условие (B2), то псевдовершина, определяемая локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ из (5), удовлетворяет одному из условий:

$$\gamma_1(t_0) = 1, \gamma_2(t_0) = 1, \quad (8)$$

$$\gamma_1(t_0) = 1, \gamma_2(t_0) = -1, \quad (9)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{2}{t_1 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_2(t_2) - \gamma_2'(t_1)\gamma_1(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1(t_2) - \gamma_1'(t_1)\gamma_2(t_2)} \right) \neq 0, \quad (10)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0} \frac{2}{t_2 - t_0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{\gamma_1'(t_1)\gamma_2(t_2) - \gamma_2'(t_1)\gamma_1(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1(t_2) - \gamma_1'(t_1)\gamma_2(t_2)} \right) \neq 0, \quad (11)$$

Здесь условие

(B2) Определители $\det \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_2(t_0) \\ \gamma_1'(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix}$ и $\det \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_2(t_0) \\ \gamma_1'(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix}$ конечны, имеет один и тот же знак (в нестрогом смысле) $\det \begin{pmatrix} \gamma_1(t_0) & \gamma_2(t_0) \\ \gamma_1'(t_0) & \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$.

Нижние индексы $-$ и 0 обозначают односторонние производные (левые и правые соответственно) указанного порядка скалярных и векторных функций.

Не трудно показать [11], что если $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\gamma(t)$ ограничивающей краевое множество M в задаче (1), при этом $t_0 \in T^0$, то псевдовершина совпадает с крайней точкой сингулярной кривой.

Авторами разработан теоретический аппарат выявления псевдовершин на совокупностях T^0, T^1, T^3 и, как следствие, на совокупностях T^k при $k > 4$. Получены соотношения, позволяющие находить псевдовершины границы краевого множества в точках трех типов — 1) в точках излома границы; 2) в точках минимальной гладкости, в которых существуют не совпадающие друг с другом односторонние кривизны, но при этом не определена классическая кривизна; 3) в точках стационарности кривизны, то есть в точках, в которых существуют производные третьего и более высокого порядка. Недоисследованной остается проблема выявления псевдовершин на совокупности T^2 , то есть в точках, в которых существует классическая кривизна, но при этом «рвутся» производные третьего порядка. На базе этих конструкций предложен комбинированный подход построения функции (2), опирающийся на аналитический поиск псевдовершин с помощью приведенных выше соотношений (6)–(11), и численные алгоритмы формирования ветвей сингулярного множества, основанные на решении системы уравнений, сопряженной к (4) (см. технологию, например, [8]).

К сферам приложения созданных процедур построения евклидова расстояния до замкнутого множества и его сингулярных кривых относятся, например, сглаживание негладкой границы множества разрешимости дифференциальной игры [12], вычисление меры невыпуклости плоского замкнутого множества [13].

Пример 1. Проиллюстрируем эффективность разрабатываемого аппарата исследования негладких динамических задач на примере задачи управления по быстродействию с динамикой (3), когда целевое множество M ограничено кривой

$$\gamma_1)t + [r)t + \text{dst } t, \gamma_2)t + [r)t + \text{tlo } t, t /]1, 3\pi^{\wedge}, \quad (12)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \quad 1.96 \text{tlo}^2 t \quad 1.6 \text{tlo})t/3 + t /]1, \pi^{\wedge}, \\ \sqrt{2.6 \quad 1.96 \text{tlo}^2 t, t /)\pi, 2.6\pi^{\wedge}, \\ 3 \quad 2.36 \text{tlo}^2 t, t /)2.6\pi, \pi^{\wedge}. \end{array} \right.$$

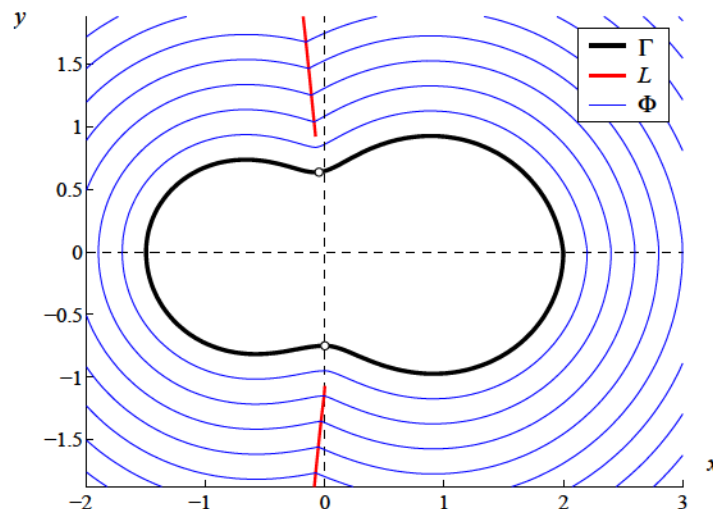


Рис. 1. Сингулярное множество и карта линий уровня функции $u(x) = \rho(x, M)$

У кривой (12) две псевдовершины различного типа. В одной из них $A \in (1.15; 1.7491)$ кривизна достигает локального максимума, а в другой $B \in (1.15; 1.96)$ имеет место разрыв кривизны. Линии уровня функции оптимального результата $\tilde{u}$, сингулярное множество L и граница целевого множества показаны на рис. 1. Псевдовершины отмечены на нем в виде маркеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 336 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2008. Т. 14. № 2. С. 182-191.

4. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
5. Брус Дж., Джиббин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
6. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрого действия с круговой индикатрисой // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2008. Т. 14. № 4. С. 82-100.
7. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 171-185.
8. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 282-293.
9. Успенский А.А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2015. Т. 21. № 1. С. 250-263.
10. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Выявление сингулярности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнений типа эйконала в условиях минимальной гладкости границы краевого множества // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. Ижевск, 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 59-73.
11. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрого действия // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 276-290.
12. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г. Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 209-224.
13. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 431-440.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Успенский Александр Александрович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, зав. сектором, e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: pleb@yandex.ru

Для цитирования: Успенский А.А., Лебедев П.Д. Евклидово расстояние до замкнутого множества как минимальное решение задачи Дирихле для уравнения Гамильтона–Якоби // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 797–804. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797–804

EUCLIDEAN DISTANCE TO A CLOSED SET AS A MINIMAX SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE HAMILTON–JACOBI EQUATION

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev

N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: uspen@imm.uran.ru, pleb@yandex.ru

Abstract. A combined (jointing analytical methods and computational procedures) approach to the construction of solutions in a class of boundary-value problems for a Hamiltonian-type equation is proposed. In the class of problems under consideration, the minimax (generalized) solution coincides with the Euclidean distance to the boundary set. The properties of this function are studied depending on the geometry of the boundary set and the differential properties of its boundary. Methods are developed for detecting pseudo-vertices of a boundary set and for constructing singular solution sets with their help. The methods are based on the properties of local diffeomorphisms and use partial one-sided limits. The effectiveness of the research approaches developed is illustrated by the example of solving a planar time-control problem for the case of a nonconvex target set with boundary of variable smoothness.

Keywords: Euclidean distance; Hamilton–Jacobi equation; Dirichlet problem; minimax solution; optimal result function; velocity; singular set; local diffeomorphism

REFERENCES

1. Subbotin A.I. *Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective*. Boston, Birkhäuser, 1995.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).
3. Lebedev P.D., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Postroyeniye minimaksnogo resheniya uravneniya tipa eykonala [Construction of a minimax solution for an eikonal-type equation]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 182–191. (In Russian).
4. Dem'yanov V.F., Vasil'yev L.V. *Nondifferentiable Optimization*. N.Y., Springer-Verlag, 1985.
5. Bruce J.W., Giblin P.J. *Curves and Singularities*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1984.
6. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Usloviya transversal'nosti vetvey resheniya nelineynogo uravneniya v zadache bystrodeystviya s krugovoy indikatrissoy [Transversality conditions for solution branches of a nonlinear equation in a time-optimal problem with circular indicatrix]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 82–100. (In Russian).
7. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. O mnozhestve predel'nykh znacheniy lokal'nykh diffeomorfizmov pri evolyutsii volnovykh frontov [On the set of limit values of local diffeomorphisms in wavefront

The work was supported by the basic research program of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project № 18-1-1-10).

evolution]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 16, no. 1, pp. 171-185. (In Russian).

8. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Postroyeniye singulyarnykh krivyykh dlya obobshchennykh resheniy uravneniy tipa eykonala v usloviyakh razryva krivizny granitsy krayevogo mnozhestva [The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the boundary set]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 282-293. (In Russian).

9. Uspenskii A.A. Neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya psevdovershin krayevogo mnozhestva v zadache Dirikhle dlya uravneniya eykonala [Necessary conditions for the existence of pseudovertices of the boundary set in the Dirichlet problem for the eikonal equation]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 250-263. (In Russian).

10. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Vyyavleniye singulyarnosti obobshchennogo resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniy tipa eykonala v usloviyakh minimal'noy gladkosti granitsy krayevogo mnozhestva [Identification of the singularity of the generalized solution of the Dirichlet problem for an eikonal type equation under the conditions of minimal smoothness of a boundary set]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2018, vol. 28, no. 1, pp. 59-73. (In Russian).

11. Uspenskii A.A. Formuly ischisleniya negladkikh osobennostey funktsii optimal'nogo rezul'tata v zadache bystrodeystviya [Calculation formulas for nonsmooth singularities of the optimal result function in a time-optimal problem]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 20, no. 3, pp. 276-290. (In Russian).

12. Ushakov V.N., Uspenskii A.A., Malev A.G. Otsenka defekta stabil'nosti mnozhestva pozitsionnogo pogloshcheniya, podvergnutogo diskriminantnym preobrazovaniyam [An estimate of the stability defect for a positional absorption set subjected to discriminant transformations]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2011, vol. 17, no. 2, pp. 209-224. (In Russian).

13. Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Procedures for Calculating the Nonconvexity Measures of a Plane Set. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2009, vol. 49, no. 3, pp. 418-427.

Received 13 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Uspenskii Alexandr Alexandrovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Head of a Sector, e-mail: uspen@imm.uran.ru

Lebedev Pavel Dmitrievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Scientist, e-mail: pleb@yandex.ru

For citation: Uspenskii A.A., Lebedev P.D. Evklidovo rasstoyanie do zamknutogo mnozhestva kak minimaksnoe reshenie zadachi Dirihle dlya uravneniya Gamil'tona–Yakobi [Euclidean distance to a closed set as a minimax solution of the Dirichlet problem for the Hamilton–Jacobi equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 797–804. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-797-804 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-805-812

УДК 517.911, 517.968

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

✉ О. В. Филиппова¹⁾, А. И. Шиндяпин²⁾

¹⁾ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

E-mail: philippova.olga@rambler.ru

²⁾ Университет имени Эдуардо Мондлане
3453, Мозамбик, г. Мапуту, ул. Джулиуса Нейрере

E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Аннотация. Исследуется функционально-дифференциальное включение с вольтеровым многозначным отображением. Предполагается, что в заданные моменты времени решение терпит разрыв, величина которого принадлежит значению заданного многозначного отображения. Получены оценки отклонения в пространстве кусочно-непрерывных функций множества решений задачи Коши от заданной функции. Получены условия непрерывной зависимости от начальных условий множества решений.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; задача Коши; многозначные импульсные воздействия; априорная ограниченность

Введение

В работе исследуется функционально-дифференциальное включение с многозначными импульсными воздействиями. Показано, что если множество всех локальных решений задачи Коши для такого включения априорно ограничено, то множество решений этой задачи почти реализует расстояние в пространстве суммируемых функций от любой суммируемой функции до своих значений. На основе этого утверждения получены эффективные оценки решений задачи Коши. Изучен вопрос о непрерывной зависимости множества решений задачи Коши от начальных условий.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00227; № 17-41-680975p_a; № 16-01-00677A).

1. Основные понятия

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n -мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $\|\cdot\|$ и $\text{comp } \mathbb{R}^n$ — множество его непустых компактных подмножеств; $\rho_X[x, U]$ — расстояние от точки $x \in X$ до множества $U \subset X$ в метрическом пространстве X ; $h_X^+[U_1, U] = \inf_{x \in U_1} \rho_X[x, U]$ — полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1 \subset X$ от множества U в пространстве X ; $h_X[U_1, U] = \max\{h_X^+[U_1, U], h_X^+[U, U_1]\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве X ; $B_X(x, \delta)$ — открытый шар с центром в точке $x \in X$ радиусом $\delta > 0$. Для измеримого по Лебегу множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, мера которого $\mu(\Omega) < \infty$, обозначаем $L^n(\Omega)$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $x \in L^n(\Omega)$ с нормой $\|x\|_{L^n(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |x(s)|^n ds \right)^{1/n}$; $L_+^1(\Omega)$ — конус неотрицательных функций пространства $L^1(\Omega)$; $Q(L^n)$ — множество всех непустых замкнутых и ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $L^n(\Omega)$.

Пусть $t_k \in [a, b]$, $k = 2, 3, \dots, m$, $a < t_1 < \dots < t_m < b$ — конечный набор точек. Обозначим через $\tilde{C}^n[a, b]$ пространство всех непрерывных на каждом из промежутков $[a, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\dots$, $[t_m, b]$ функций $x \in C^n$, имеющих пределы справа в точках t_k , $k = 2, 3, \dots, m$, с нормой $\|x\|_{\tilde{C}^n[a, b]} = \max\{\|x\|_{C^n}, t \in [a, b]\}; \tilde{C}_+^1[a, b]$ — конус неотрицательных функций пространства $\tilde{C}^1[a, b]$.

Пусть заданы непрерывные по Хаусдорфу отображения $(\cdot; \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow Q)L^n[a, b]; I_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^n$, $k = 2, 3, \dots, m$, и вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что отображение $(\cdot)$ — вольтеррово. Рассмотрим следующую задачу Коши для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями:

$$\dot{x} \in (\cdot)x \quad (1.1)$$

$$x(t_k) \in 1 + I_k(x)(t_k), \quad k = 2, \dots, m, \quad (1.2)$$

$$x(a) \in x_0. \quad (1.3)$$

О п р е д е л е н и е 1.1. Под *решением задачи* (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in \tilde{C}^n[a, b]$, для которой существуют такие $\Phi_k \in I_k(x)(t_k)$, $k = 2, 3, \dots, m$, и $q \in (\cdot)x$, что при всех $t \in [a, b]$ имеет место представление

$$x(t) \in x_0 + \int_a^t q(s) ds + \sum_{k=1}^m \chi_{(t_k, b]}(t) \Phi_k, \quad t \in [a, b] \quad (1.4)$$

(здесь символом $\chi_{(t_k, b]}$ обозначена характеристическая функция интервала $(t_k, b]$).

Пусть $\tau \in [a, b]$. Определим линейный ограниченный оператор

$$V_\tau; \tilde{C}^n[a, \tau] \rightarrow \tilde{C}^n[a, b], \quad V_\tau x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{если } t \in [a, \tau] \\ x(\tau) & \text{если } t \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Обозначим $N_\tau = \{k; t_k \in [a, \tau]\}$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что функция $x \in \tilde{C}^n[a, \tau]$ является *решением задачи* (1.1)–(1.3) на отрезке $]a, \tau[$, $\tau \in]a, b[$, если существуют такие $\Phi_k \in I_k(x)t_k + \tau$, $k \in N_\tau$, и $q \in L^1([a, \tau])$, что функция x представима в виде

$$x(t) = x_0 + \int_a^t q(s) ds + \sum_{k \in N_\tau} \chi_{(t_k, b]}(t) \Phi_k, \quad t \in]a, \tau[.$$

Множество всех решений на $]a, \tau[$ обозначим $H(x_0, \tau)$, а $H(x_0, b)$ – множество сужений на $]a, \tau[$ всех функций из $H(x_0, b)$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Будем говорить, что множество решений задачи (1.1)–(1.3) *априорно ограничено*, если найдется такое $r > 1$, что для любого $\tau \in]a, b[$ не существует решения x этой задачи на $]a, \tau[$ такого, что $\|x\|_{C^n[a, \tau]} > r$.

З а м е ч а н и е 1.1. Если для заданного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество решений задачи (1.1)–(1.3) априорно ограничено, то оно будет априорно ограничено при всех начальных значениях из некоторой окрестности точки x_0 .

В [1–6] для случая выпуклого по переключению многозначного отображения (доказано, что если множество решений задачи (1.1)–(1.3) априорно ограничено, то $H(x_0, b) \neq \emptyset$ и существует такой выпуклый компакт $K \subset \tilde{C}^n[a, b]$, что справедливо $H(x_0, b) \rightarrow K$, и для любого $\tau \in]a, b[$ выполнено $H(x_0, \tau) \subset H(x_0, b)$).

О п р е д е л е н и е 1.4. Будем говорить, что множество решений задачи (1.1)–(1.3) *почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции*, если для любого $v \in L^n[a, b]$ и любого $\varepsilon > 1$ существует такое решение $x \in \tilde{C}^n[a, b]$ задачи (1.1)–(1.3), что для любого измеримого множества $U \subset]a, b[$ выполняется неравенство

$$q \in L^1(U) \leq \rho_{L^n(U)}(v), \quad (x \neq 0, \varepsilon \mu) \quad (1.5)$$

где функция $q \in L^1([a, b])$ удовлетворяет равенству (1.4).

В [1–6] показано, что при условиях выпуклости по переключению отображения (и априорной ограниченности множества всех локальных решений задачи (1.1)–(1.3), множество ее решений почти реализует расстояние до произвольной суммируемой функции.

О п р е д е л е н и е 1.5. Будем говорить, что многозначные импульсные воздействия – отображения $I_k : \mathbb{R}^n \times \text{comp } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k \in \{2, 3, \dots, m\}$, обладают свойством $\mathcal{U}$, если для каждого $k \in \{2, 3, \dots, m\}$ найдется непрерывная неубывающая функция $\tilde{I}_k : \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{I}_k(1) \subset [1, h]I_k(x) \cup \tilde{I}_k(x) \cup \{x\} \cup \{y\}$$

Определим отображение $Z : \tilde{C}^n[a, b] \rightarrow \tilde{C}_+^1[a, b]$ равенством $Zx(t) = \|x\|_t$. Пусть заданы функция $u \in L^n[a, b]$ и числа $\varepsilon, \nu \geq 1$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Будем говорить, что отображения $(\cdot; \tilde{C}^n]a, b \in Q) L^n]a, b +$ и $I_k; \mathbb{R}^n \in \text{comp} \mathbb{R}^n, k \in [2, 3, \dots, m]$, обладают свойством $\mathcal{U}^{u, \varepsilon, \nu}, \tilde{I}_k, k \in [2, 3, \dots, m]$, если отображения I_k обладают свойством $\mathcal{U}$, и если найдется такой изотонный непрерывный вольтерров оператор $\cdot; \tilde{C}_+^1]a, b \in L_+^1]a, b$, удовлетворяющий условию $\mathcal{U}1 + [1$, что для любых функций $x, y \in \tilde{C}^n]a, b$ и любого измеримого множества $\{ \rightarrow]a, b$ выполняется неравенство

$$h_{L^n(\mathcal{U})}[(\cdot) x + (\cdot) y] \leq (\cdot) Z) x - y + L^1(\mathcal{U}),$$

а множество всех локальных решений задачи

$$a[- u \in 0 \cdot] z + z) t_k \in 0 \cdot 1 + z) t_k + [\tilde{I}_k) z) t_k +, k \in [2, 3, \dots, m, z) a + [\nu \quad (1.6)$$

априорно ограничено.

2. Основные результаты

Следующая теорема позволяет получить оценки нормы разности решения задачи (1.1)–(1.3) и заданной кусочно-непрерывной функции.

Теорема 2.1. Пусть для функции $y \in \tilde{C}^n]a, b$ существуют такие $\Phi_k \in I_k) y) t_k +, k \in [2, 3, \dots, m, \tilde{q} \in L^n]a, b$ и $\chi \in L_+^1]a, b$, что имеет место представление

$$y) t + [y) a + 0 \int_a^t \tilde{q}) s + ds \in 0 \sum_{k=1}^m \chi(t_k, b] t + \Phi_k, \quad t \in]a, b,$$

и для каждого измеримого множества $\{ \rightarrow]a, b$ справедливо неравенство

$$\rho_{L^n(\mathcal{U})}[\tilde{q} - (\cdot) y] \leq \int_{\mathcal{U}} \chi) s + ds.$$

Далее, пусть существует такое $\varepsilon > 1$, что отображения $(\cdot; \tilde{C}^n]a, b \in Q) L^n]a, b +$ и $I_k; \mathbb{R}^n \in \text{про } s \mathbb{R}^n, k \in [2, 3, \dots, m]$, обладают свойством $\mathcal{U}^{u, \varepsilon, \nu}, \tilde{I}_k, k \in [2, 3, \dots, m]$ при значениях $u \in [\chi, \nu \in [\|x_0 - y) a + \|$. Тогда для любого решения $x \in \tilde{C}^n]a, b$ задачи $\mathcal{U}2.2 + \mathcal{U}2.5 +$, удовлетворяющего для любого измеримого множества $\{ \rightarrow]a, b$ неравенству $\mathcal{U}2.6 + c$ функцией $v \in [\tilde{q}$, имеет место оценка

$$\|x) t + y) t + \| \leq \xi) t +, \quad t \in]a, b,$$

и почти всюду на $]a, b$ справедливо неравенство

$$\|q) t + \tilde{q}) t + \| \leq \chi) t + 0 \in 0 \cdot) \xi + t +,$$

где $\xi \in \tilde{C}^n]a, b$ — верхнее решение задачи $\mathcal{U}2.:$ +

З а м е ч а н и е 2.2. Теорема 2.1 не устанавливает факт существования решения, удовлетворяющего оценке $\mathcal{U}2.6 +$. Условия существования такого решения получены в теоремах 1–3 (см. [1–6]).

Впервые вопрос об оценке нормы разности решения задачи Коши обыкновенного дифференциального включения с выпуклой правой частью и заданной абсолютно непрерывной функцией был исследован А. Плисом (см. [7]). Решение этой задачи для обыкновенного дифференциального включения с невыпуклой правой частью, удовлетворяющей условию Липшица по второму аргументу, получено А.Ф. Филипповым (см. [8]). Впоследствии установлению более общих оценок были посвящены работы А.А. Толстоногова, П.И. Чугунова, В.И. Благодатских, Е.С. Половинкина, В.В. Обуховского и других авторов (см. [9]).

Теорема 2.1 позволяет получить следующее утверждение о непрерывной зависимости от начальных условий множества решений задачи Коши для функционально-дифференциального включения с многозначными импульсными воздействиями.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при некотором $\delta > 1$ для любой последовательности $\alpha^i / B_{\mathbb{R}^n} x_0, \delta + i [2, 3, \dots$, сходящейся (при $i \infty \in$) в $\mathbb{R}^n$ к x_0 , выполняется:

- 1) для любого $\tilde{y} / H) x_0, b +$ найдется такая последовательность $y_i / H) \alpha^i, b +$ $i [2, 3, \dots$, что $y_i \in \tilde{y}$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$ при $i \infty \in$;
- 2) для любой последовательности $y_i / H) \alpha^i, b +$ $i [2, 3, \dots$, имеющей при $i \infty \in$ предел $\hat{y}$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$, найдется такая последовательность $\hat{y}_i / H) x_0, b +$ $i [2, 3, \dots$, что $\hat{y}_i \in \hat{y}$ в пространстве $\tilde{C}^n[a, b]$ при $i \infty \in$.

Для обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений условия непрерывной зависимости решений от начальных условий и других параметров получены в работах J. Kurzweil, Z. Vorel, М.Ф. Бокштейна, Н.Н. Петрова, Е.С. Жуковского и многих других авторов (см., [10, 11] и библиографию в этих работах). Задача о непрерывной зависимости от параметров решений дифференциальных включений и систем управления исследована В.И. Благодатским, А.Ф. Филипповым, А.И. Булгаковым (см., например, [12, 13]).

Отметим, что теорема 2.2 может иметь приложения, связанные с корректностью математических моделей реальных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 1 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1275-1283.
2. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 2 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1284-1288.
3. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 3 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1289-1298.
4. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 4 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1299-1304.

5. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 5 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1305-1312.
6. Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В. Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Часть 6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-2. С. 1313-1318.
7. *Plis A.* On trajectories of orientor fields // *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math.* 1965. Vol. 13. № 8. P. 571-573.
8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
9. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Книжный дом «Либроком», 2011. 226 с.
10. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523-1537.
11. Жуковский Е.С. Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.
12. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194-252.
13. Булгаков А.И., Панасенко Е.А., Сергеева А.О. О непрерывной зависимости множеств фазовых траекторий системы с фазовыми ограничениями по управлению от параметров // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. № 1. С. 55-57.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Шиндяпин Андрей Игоревич, Университет имени Эдуардо Мондлане, г.Мапуту, Мозамбик, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-805-812

SOME PROPERTIES OF THE GENERALIZED SOLUTIONS OF AN INITIAL VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSION WITH MULTIPLE-VALUED IMPULSES

O. V. Filippova¹⁾, A. I. Shindiapin²⁾

¹⁾ Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: philippova.olga@rambler.ru

²⁾ Eduardo Mondlane University
Julius Nyerere Av., Maputo 3453, Mozambique
E-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

Abstract. Deviation estimates in space of piecewise continuous functions of a set of the generalized decisions from beforehand given function are received. The continuous dependence of the generalized decisions on starting conditions is established.

Keywords: functional-differential inclusion; multiple-valued impulses; a-priori boundedness

REFERENCES

1. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 1 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 1]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1275-1283. (In Russian).
2. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 2 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 2]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1284-1288. (In Russian).
3. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 3 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 3]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1289-1298. (In Russian).
4. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 4 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 4]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1299-1304. (In Russian).
5. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 5 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 5]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1305-1310. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-31-00227; № 17-41-680975 p_a; № 16-01-00677A).

Part 5]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1305-1312. (In Russian).

6. Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V. Funktsional'no-differentsial'nyye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. Chast' 6 [Functional-differential inclusions with impulses. Part 6]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-2, pp. 1313-1318. (In Russian).

7. Plis A. On trajectories of orientor fields. *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math.*, 1965, vol. 13, no. 8, pp. 571-573.

8. Filippov A.F. *Differentsial'nyye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential Equations with an Discontinuous Right Part]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p. (In Russian).

9. Borisovich J.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obuhovskiy V.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Reflection and Differential Inclusion]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011, 226 p. (In Russian).

10. Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S., Zhukovskii S.E. On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative. *Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1541-1555.

11. Zhukovskii E.S. Nepreryvnaya zavisimost' ot parametrov resheniy uravneniy Vol'terra [The continuous dependence on parameters of solutions of the equations of Voltaire]. *Matematicheskii sbornik – Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 10, pp. 33-56. (In Russian).

12. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differentsial'nyye vklyucheniya i optimal'noye upravleniye [Differential inclusions and optimal control]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1985, vol. 169, pp. 194-252. (In Russian).

13. Bulgakov A.I., Panasenko E.A., Sergeyeva A.O. O nepreryvnoy zavisimosti mnozhestv fazovykh trayektoriy sistemy s fazovymi ogranicheniyami po upravleniyu ot parametrov [On continuous dependence of sets of phase trajectories to a system with constrains by control on parameters]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 1, pp. 55-57. (In Russian).

Received 13 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

Shindiapin Andrey Igorevich, Eduardo Mondlane University, Mozambique, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, e-mail: andrei.olga@tvcabo.co.mz

For citation: Filippova O.V., Shindiapin A.I. Nekotoryie svoystva obobshchennykh resheniy zadachi Koshi dlya funktsionalno-differentsialnogo vklyucheniya s mnogoznachnymi impulsnymi vozdeystviyami [Some properties of the generalized solutions of an initial value problem for functional-differential inclusion with multiple-valued impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 805–812. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-805-812 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

УДК 517.1

О БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ КОМПЛЕКСНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© В. И. Фомин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106

E-mail: vasiliyfomin@bk.ru

Аннотация. Рассмотрена банахова алгебра комплексных операторов, находящих применение при исследовании линейных дифференциальных уравнений с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве.

Ключевые слова: комплексный оператор; линейные операции; операция умножения; норма; банахова алгебра; алгебраическая форма комплексного оператора; операторная экспонента

Введение

При изучении в банаховом пространстве E задачи Коши

$$u^{\infty}(t) + A_1 u^{\infty}(t) + A_2 u(t) = f(t), \quad 0 \leq t < \infty; \quad u(0) = u_0, \quad u^{\infty}(0) = u_0^{\infty}$$

с операторными коэффициентами $A_1, A_2 \in L(E)$ и правой частью $f(t) \in C([0, \infty); E)$, где $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E ; $C([0, \infty); E)$ – нормированное пространство непрерывных функций, действующих из $[0, \infty)$ в E , приходится находить характеристические операторы соответствующего однородного уравнения $u^{\infty}(t) + A_1 u^{\infty}(t) + A_2 u(t) = 0$, то есть корни Λ_1, Λ_2 характеристического операторного уравнения $\Lambda^2 + A_1 \Lambda + A_2 = O$, где O – нулевой оператор. Вид этих корней определяется видом операторного дискриминанта $D = A_1^2 - 4A_2$. В случае $D = F^2$, где $F \in GL(E)$, $GL(E) = \{Q \in L(E) \mid Q^{-1} \in L(E)\}$, характеристические операторы имеют вид $\Lambda_{1,2} = 2^{-1}(-A_1 \pm F)$; в случае $D = 0$ $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = 2^{-1}A_1$ [1], то есть в обоих случаях $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L(E)$. Иначе обстоит дело в случае $D = -F^2$, где $F \in GL(E)$: характеристические операторы определяются упорядоченными парами операторов из $L(E)$: $\Lambda_1 = (A, B)$, $\Lambda_2 = (A, -B)$, где $A = 2^{-1}A_1$, $B = 2^{-1}F$ [2]. В связи с этим целесообразно изложить основные понятия для таких пар операторов.

1. Основные понятия

Комплексным оператором называется упорядоченная пара $Z = (A, B)$, где $A, B \in L(E)$. Рассмотрим множество комплексных операторов

$$C_{L(E)} = \{Z = (A, B) \mid A, B \in L(E)\}.$$

Заметим, что $C_{L(E)} = [L(E)]^2$, где $[L(E)]^2 = L(E) \oplus L(E)$ – декартов квадрат банаховой алгебры $L(E)$.

Согласно известному правилу введения линейных операций в декартовом (прямом) произведении двух линейных пространств [3, с. 17], имеем: для любых $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2) \in C_{L(E)}$

$$Z_1 + Z_2 = (A_1 + A_2, B_1 + B_2); \quad (1)$$

для любого $Z = (A, B) \in C_{L(E)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\alpha Z = (\alpha A, \alpha B). \quad (2)$$

Множество $C_{L(E)}$, наделенное операциями (1), (2), является линейным пространством. В этом пространстве $\Theta = (O, O)$ – нулевой элемент; $Z = (A, B)$ – противоположный элемент для $Z = (A, B)$.

Операция умножения в линейном пространстве $C_{L(E)}$ вводится следующим образом: для любых $Z_1 = (A_1, B_1)$, $Z_2 = (A_2, B_2) \in C_{L(E)}$

$$Z_1 Z_2 = (A_1 A_2 + B_1 B_2, A_1 B_2 + B_1 A_2). \quad (3)$$

Заметим, что эта операция не обладает свойством коммутативности, ибо операция умножения в пространстве $L(E)$ некоммутативна [4, с. 126].

Операция умножения, определенная формулой (3), обладает следующими свойствами: для любых $Z_1, Z_2, Z_3 \in C_{L(E)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}$

- 1) $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1 (Z_2 Z_3)$ (в силу этого свойства допустима запись $Z_1 Z_2 Z_3$);
- 2) $Z_1 (Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$; $(Z_2 + Z_3) Z_1 = Z_2 Z_1 + Z_3 Z_1$;
- 3) $\alpha (Z_1 Z_2) = (\alpha Z_1) Z_2 = Z_1 (\alpha Z_2)$;
- 4) $(I, O) Z = Z (I, O) = Z$, $\forall Z \in C_{L(E)}$, где I – единичный оператор.

Следовательно, линейное пространство $C_{L(E)}$ является некоммутативной алгеброй с единицей (I, O) .

Используя известные выражения для норм в декартовом произведении двух нормированных пространств [5, с. 103], норму в линейном пространстве $C_{L(E)}$ можно ввести по любой из следующих формул: для любого $Z = (A, B) \in C_{L(E)}$

$$\|Z\|_p = \left(\|A\|_p^p + \|B\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty; \quad (4)$$

$$\|Z\|_\infty = \max \{ \|A\|_\infty, \|B\|_\infty \}, \quad p = \infty, \quad (5)$$

причем эти нормы эквивалентны. В целях определенности будем использовать в дальнейшем норму (4) при $p = 1$:

$$\|Z\|_1 = \|A\|_1 + \|B\|_1$$

Заметим, что $\sqrt{(I, O)} = 1$. Кроме того, используя аксиомы нормы пространства $L(E)$ и неравенство $\sqrt{F_1 F_2} \leq \sqrt{F_1} \sqrt{F_2}$, $\exists F_1, F_2 \in L(E)$, получаем для любых $Z_1, Z_2 \in C_{L(E)}$

$$\sqrt{Z_1 Z_2} \leq \sqrt{Z_1} \sqrt{Z_2}.$$

Следовательно, алгебра $C_{L(E)}$ является нормированной.

Известно [3, с. 48], что декартово произведение двух банаховых пространств является банаховым пространством. Следовательно, нормированная алгебра $C_{L(E)}$ является банаховой.

Таким образом, пространство комплексных операторов $C_{L(E)}$ с линейными операциями (1), (2), операцией умножения (3) и любой из норм (4), (5) является некоммутативной банаховой алгеброй с единицей (I, O) .

Рассмотрим множество комплексных операторов вида $\Omega = \{Z = (A, O) \mid A \in L(E)\}$. Между множествами Ω и $L(E)$ существует взаимно однозначное соответствие

$$(A, O) \Leftrightarrow A, \quad \exists A \in L(E). \quad (6)$$

Заметим, что в силу определений (1), (3) и соответствия (6) для любых $(A_1, O), (A_2, O) \in \Omega$

$$(A_1, O) + (A_2, O) = (A_1 + A_2, O) \Leftrightarrow A_1 + A_2,$$

$$(A_1, O)(A_2, O) = (A_1 A_2, O) \Leftrightarrow A_1 A_2,$$

то есть комплексные операторы из множества Ω складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие им операторы из $L(E)$. Следовательно, любой комплексный оператор $(A, O) \in \Omega$ можно отождествить с соответствующим ему оператором $A \in L(E)$:

$$(A, O) = A, \quad \exists A \in L(E), \quad (7)$$

в частности, $(O, O) = O, (I, O) = I$.

В силу соглашения (7) можно считать, что $L(E) \rightarrow C_{L(E)}$, то есть пространство комплексных операторов является расширением пространства ограниченных линейных операторов.

Укажем запись комплексных операторов в виде, аналогичном алгебраической форме комплексных чисел. Любой комплексный оператор $Z = (A, B)$ можно представить в виде

$$Z = (A, B) = (A, O) + (O, I)(B, O). \quad (8)$$

Из равенства (8) видно, что комплексный оператор (O, I) имеет особое значение в пространстве $C_{L(E)}$. Обозначим (O, I) символом I и назовем его мнимой комплексной единицей. Заметим, что $I^2 = I \cdot I = (O, O) = O$. В силу этого равенства допустима запись $I = \sqrt{-1}$. В силу соглашения (7) формула (8) принимает вид

$$Z = A + IB. \quad (9)$$

Выражение (9) называется алгебраической формой комплексного оператора $Z = (A, B)$, при этом операторы A и B называются, соответственно, действительной и мнимой частью комплексного оператора Z (обозначения: ReZ и ImZ). Если

$ImZ = O$, то $Z = A / L(E)$ (такие операторы называются действительными). Если $ReZ = O$, $ImZ \neq O$, то $Z = IB$ (такие операторы называются чисто мнимыми).

Для коммутационности комплексных операторов $Z_1 = A_1 + IB_1$, $Z_2 = A_2 + IB_2$ достаточно, чтобы $A_1A_2 = A_2A_1$, $A_1B_2 = B_2A_1$, $B_1A_2 = A_2B_1$, $B_1B_2 = B_2B_1$.

Сопряженным для комплексного оператора $Z = A + IB$ называется оператор $\bar{Z} = A - IB$, в частности,

$$\bar{\bar{A}} = A, \quad \exists A / L(E). \quad (10)$$

Для любых $Z / C_L(E)$, α / R очевидно соотношение

$$\overline{\alpha Z} = \alpha \bar{Z}. \quad (11)$$

Заметим, что $Z\bar{Z} = A^2 + B^2 + I(AB + BA)$, в частности, если $AB = BA$, то $Z\bar{Z} = A^2 + B^2$. Для любых $Z_1, Z_2 / C_L(E)$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2; \quad (12)$$

$$\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2. \quad (13)$$

Методом математической индукции свойства (12), (13) распространяются на любое конечное число операторов: для любых $Z_1, Z_2, \dots, Z_m / C_L(E)$

$$\overline{\sum_{k=1}^m Z_k} = \sum_{k=1}^m \bar{Z}_k; \quad (14)$$

$$\overline{\prod_{k=1}^m Z_k} = \prod_{k=1}^m \bar{Z}_k. \quad (15)$$

Обратным оператором для комплексного оператора $Z = A + IB / C_L(E)$ называется комплексный оператор $Z^{-1} / C_L(E)$, обладающий следующими свойствами:

$$Z Z^{-1} = I, \quad Z^{-1} Z = I. \quad (16)$$

З а м е ч а н и е 1. Если $F / L(E)$, $H / GL(E)$ и $FH = HF$, то $FH^{-1} = H^{-1}F$.

Теорема 1. Пусть комплексный оператор $Z = A + IB$ удовлетворяет следующим условиям:

$$AB = BA; \quad (17)$$

$$A^2 + B^2 / GL(E). \quad (18)$$

Тогда существует обратный оператор Z^{-1} и справедлива формула

$$Z^{-1} = A(A^2 + B^2)^{-1} - IB(A^2 + B^2)^{-1}. \quad (19)$$

Доказательство. В силу условия (17) операторы A и B коммутируют с оператором $H = A^2 + B^2$. Следовательно, в силу замечания 1,

$$(A^2 + B^2)^{-1}A = A(A^2 + B^2)^{-1}; \quad (A^2 + B^2)^{-1}B = B(A^2 + B^2)^{-1}. \quad (20)$$

Используя операцию умножения (3), условие (17) и соотношения (20), проверим выполнимость равенств (16):

$$\begin{aligned} Z Z^{-1} &= A^2 (A^2 + B^2)^{-1} + B^2 (A^2 + B^2)^{-1} + \\ &+ I[AB(A^2 + B^2)^{-1} + BA(A^2 + B^2)^{-1}] = (A^2 + B^2)(A^2 + B^2)^{-1} + \\ &+ I[(AB + BA)(A^2 + B^2)^{-1}] = I + IO = I; \\ Z^{-1}Z &= A(A^2 + B^2)^{-1}A + B(A^2 + B^2)^{-1}B + \\ &+ I[A(A^2 + B^2)^{-1}B + B(A^2 + B^2)^{-1}A] = A^2(A^2 + B^2)^{-1} + B^2(A^2 + B^2)^{-1} + \\ &+ I[AB(A^2 + B^2)^{-1} + BA(A^2 + B^2)^{-1}] = (A^2 + B^2)(A^2 + B^2)^{-1} + \\ &+ I[(AB + BA)(A^2 + B^2)^{-1}] = I + IO = I. \end{aligned}$$

Равенства (16) выполняются. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При выполнении условий (17), (18) сопряженный оператор $\bar{Z} = A - IB$ имеет обратный

$$\bar{Z}^{-1} = A(A^2 + B^2)^{-1} + IB(A^2 + B^2)^{-1}. \quad (21)$$

В силу соотношений (19), (21) справедливо равенство $\bar{Z}^{-1} = \overline{Z^{-1}}$.

Изложим некоторые факты из теории нормированных пространств применительно к пространству $C_{L(E)} = [L(E)]^2$, при этом используем тот факт, что сходимость по норме декартова произведения нормированных пространств равносильна покоординатной сходимости.

Рассмотрим последовательность $Z_n = X_n + iY_n$, $n \in \mathbb{N}$, элементов из пространства $C_{L(E)}$. Пусть $Q = A + iB \in C_{L(E)}$. Тогда

$$\bigwedge_{n'} \lim Z_n = Q \iff (\bigwedge_{n'} \lim X_n = A) \{ (\bigwedge_{n'} \lim Y_n = B),$$

то есть вопрос о сходимости последовательности элементов из пространства $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух последовательностей элементов из пространства $L(E)$.

Рассмотрим ряд с членами $Z_n = X_n + iY_n$, $n \in \mathbb{N}$, из пространства $C_{L(E)}$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ сходится к $S = S^{(1)} + iS^{(2)} \iff$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ сходится к $S^{(1)}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ сходится к $S^{(2)}$, то есть вопрос о сходимости ряда с членами из пространства $C_{L(E)}$ сводится к вопросу о сходимости двух рядов с членами их пространства $L(E)$.

Рассмотрим функцию $W = f(Z) = U(X, Y) + iV(X, Y)$, где $f : D(f) \leq C_{L(E)} \leftrightarrow C_{L(E)}$. Пусть $Z_0 = X_0 + iY_0$ – предельная точка множества $D(f)$, $Q = A + iB$. Тогда

$$\bigwedge \lim_{Z' \rightarrow Z_0} f(Z) = Q \iff \left(\bigwedge \lim_{\substack{X \leftrightarrow X_0 \\ Y \leftrightarrow Y_0}} U(X, Y) = A \right) \{ \left(\lim_{\substack{X \leftrightarrow X_0 \\ Y \leftrightarrow Y_0}} V(X, Y) = B \right).$$

Непрерывность функции $f(Z)$ в данной точке $Z_0 \in D(f)$ (на данном множестве $M \subseteq D(f)$) равносильна непрерывности ее действительной и мнимой частей в этой точке (на этом множестве).

Пусть Z_0 – внутренняя точка множества $D(f)$. Функция $W = f(Z)$ называется дифференцируемой в точке Z_0 , если $\bigwedge \Psi \in C_{L(E)}, \bigwedge O_\delta(Z_0) \ni H \in D(f) : Z_0 + H \in O_\delta(Z_0)$ выполняется: $f(Z_0 + H) - f(Z_0) = \Psi H + \omega(H)$, где $\omega(H) = o(\|H\|)$ при $H \rightarrow 0$, при этом Ψ называется производной функции $f(Z)$ в точке Z_0 : $f'(Z_0) = \Psi$.

Как и в теории функций комплексного переменного, под аналитичностью функции $f(Z)$ в точке Z_0 понимается ее дифференцируемость в некоторой окрестности этой точки; под аналитичностью на открытом множестве $D \subseteq D(f)$ – ее аналитичность в каждой точке этого множества.

Укажем одно приложение комплексных операторов. Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$u^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} u' + A_n u = f(t), \quad 0 \leq t \leq \epsilon, \quad (22)$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \leq i \leq n$; $f(t) \in C([0, \epsilon]; E)$.

Известно [6], что общее решение уравнения (22) имеет вид $u = u_{0,0} + u_{\rightarrow}$, где $u_{0,0}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$u^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} u' + A_n u = 0, \quad 0 \leq t \leq \epsilon; \quad (23)$$

$u_{\rightarrow}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (22).

Рассмотрим для (23) характеристическое операторное уравнение

$$P(\Lambda) = 0, \quad (24)$$

где

$$P(\Lambda) = \Lambda^n + A_1 \Lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \Lambda + A_n \quad (25)$$

характеристический операторный многочлен уравнения (23). Задача о нахождении $u_{\rightarrow}$ решена: в случае, когда правая часть $f(t)$ уравнения (22) имеет общий вид, $u_{\rightarrow}$ найдено методом вариации произвольных постоянных в работе [6]; в случае, когда $f(t)$ имеет специальный вид, $u_{\rightarrow}$ получено методом неопределенных коэффициентов в работе [7]. Вид $u_{0,0}$ определяется видом корней уравнения (24). Общее решение $u_{0,0}$ найдено в работе [6] в случае, когда уравнение (24) имеет n различных корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n \in L(E)$; в работе [8] в случае, когда уравнение (24) имеет p корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p \in L(E)$ с кратностями соответственно $r_1, r_2, \dots, r_p$ ($r_1 + r_2 + \dots + r_p = n$), при этом при построении $u_{0,0}$ была использована операторная экспонента

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad A \in L(E), \quad (26)$$

для которой, как известно [9, с. 41],

$$(e^{At})^\infty = A e^{At}. \quad (27)$$

Пусть среди корней многочлена $P(\Lambda)$ (то есть среди корней уравнения (24)) имеется хотя бы один комплексный оператор. В целях ясности дальнейшего изложения напомним два понятия из работы [8]: формальной производной m -го порядка многочлена $P(\Lambda)$ называется операторное выражение, получаемое из $P(\Lambda)$ путем его формального дифференцирования по Λ по обычным правилам дифференцирования функций вещественной переменной; при $0 \subset m \subset n$ справедлива формула

$$P^{(m)}(\Lambda) = m! \sum_{k=0}^n C_n^m A_k \Lambda^{n-m-k}, \quad (28)$$

где $A_0 = I$ (в частности, $P^{(0)}(\Lambda) = P(\Lambda)$); оператор $\Lambda_0 / C_{L(E)}$ (в частности, оператор $\Lambda_0 / L(E)$) называется корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$, если

$$P^{(m)}(\Lambda_0) = O, \quad 0 \subset m \subset r-1; \quad (29)$$

$$P^{(r)}(\Lambda_0) \neq O. \quad (30)$$

Лемма 1. Пусть комплексный оператор $\Lambda_0 = A_0 + IB_0$ является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$. Тогда сопряженный ему оператор $\bar{\Lambda}_0 = A_0 - IB_0$ также является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$.

Доказательство. По условию леммы 1 выполняются соотношения (29), (30). Следовательно, $\overline{P^{(m)}(\Lambda_0)} = \bar{O}$, $0 \subset m \subset r-1$; $\overline{P^{(r)}(\Lambda_0)} \neq \bar{O}$. Учитывая вид $P(\Lambda_0)$, $P^{(m)}(\Lambda_0)$ (см. формулы (25), (28)) а также соотношения (10), (11), (14), (15), получаем: $P^{(m)}(\bar{\Lambda}_0) = O$, $0 \subset m \subset r-1$; $P^{(r)}(\bar{\Lambda}_0) \neq O$, а это означает, по определению, что $\bar{\Lambda}_0$ является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$. Лемма 1 доказана.

Доказанная лемма позволяет лучше представить структуру характеристических операторов уравнения (23).

Пусть уравнение (24) имеет p действительных операторных корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p$ (то есть $\Lambda_i / L(E)$, $1 \subset i \subset p$) с кратностями соответственно $r_1, r_2, \dots, r_p$ и q пар комплексно сопряженных операторных корней $Z_1 = F_1 + IB_1$, $\bar{Z}_1 = F_1 - IB_1$, $Z_2 = F_2 + IB_2$, $\bar{Z}_2 = F_2 - IB_2$, ..., $Z_q = F_q + IB_q$, $\bar{Z}_q = F_q - IB_q$ с кратностями соответственно $s_1, s_2, \dots, s_q$, при этом $r_1 + r_2 + \dots + r_p + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_q) = n$. Известно [10], что в этом случае при построении общего решения уравнения (23) приходится наряду с (26) рассматривать операторную экспоненту с комплексным оператором $Z = A + IB$:

$$e^{Zt} = e^{(A+IB)t} = e^{At} (\cos Bt + I \sin Bt), \quad (31)$$

где e^{At} определяется формулой (26),

$$\cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}; \quad \sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Заметим, что

$$(\cos Bt)^\infty = B \sin Bt; \quad (32)$$

$$(\sin Bt)^\infty = B \cos Bt. \quad (33)$$

Покажем, что для производной функции e^{Zt} имеет место аналог формулы (27). Для этого установим вначале одно вспомогательное утверждение. Рассмотрим функцию $F : [0, \infty) \leftrightarrow C_{L(E)}$, $F(t) = \mu(t) + I\nu(t)$, где $\mu, \nu : [0, \infty) \leftrightarrow L(E)$.

Лемма 2. Если действительная и мнимая части функции $F(t)$ дифференцируемы на полуоси $[0, \infty)$, то $F(t)$ дифференцируема на $[0, \infty)$ и справедлива формула

$$F^\infty(t) = \mu^\infty(t) + I\nu^\infty(t). \quad (34)$$

Утверждение леммы 2 справедливо в силу равенства $C_{L(E)} = [L(E)]^2$ и того факта, что производная функции определяется с помощью предельного перехода, а предельный переход в декартовом произведении нормированных пространств равносильен покоординатному предельному переходу.

Действительная и мнимая части операторной экспоненты (31) дифференцируемы на $[0, \infty)$. Следовательно, в силу леммы 2, эта экспонента дифференцируема на $[0, \infty)$.

Теорема 2. Пусть

$$AB = BA. \quad (35)$$

Тогда

$$(e^{Zt})^\infty = Z e^{Zt}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу (34), получаем равенство

$$(e^{Zt})^\infty = (e^{At} \cos Bt)^\infty + I(e^{At} \sin Bt)^\infty.$$

Применяя правило дифференцирования композиции операторных функций, а также формулы (27), (32), (33), имеем:

$$(e^{At} \cos Bt)^\infty = Ae^{At} \cos Bt - e^{At} B \sin Bt;$$

$$(e^{At} \sin Bt)^\infty = Ae^{At} \sin Bt + e^{At} B \cos Bt.$$

Тогда

$$(e^{Zt})^\infty = e^{At}[A \cos Bt - B \sin Bt + I(A \sin Bt + B \cos Bt)].$$

Заметим, что

$$A \cos Bt - B \sin Bt + I(A \sin Bt + B \cos Bt) = (A + IB)(\cos Bt + I \sin Bt).$$

Следовательно,

$$(e^{Zt})^\infty = e^{At}(A + IB)(\cos Bt + I \sin Bt).$$

В силу условия (35)

$$e^{At}(A + IB) = (A + IB)e^{At}.$$

Тогда

$$(e^{Zt})^\infty = (A + IB)e^{At}(\cos Bt + I \sin Bt) = Z e^{Zt}.$$

Теорема 2 доказана.

2. Основные результаты

При изучении линейных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве E возникает задача изучения множества комплексных операторов вида $C_{N(E)} = \{Z = A + IB \mid A, B \in N(E)\}$, где $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E , с плотными в E областями определения. В этом случае $C_{N(E)} = [N(E)]^2$, где $[N(E)]^2 = N(E) \pm N(E)$ – декартов квадрат множества $N(E)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1140-1141.
2. Фомин В.И. О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2008. Т. 13. Вып. 1. С. 38-42.
3. Функциональный анализ / под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
5. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 896 с.
6. Фомин В.И. Об общем решении линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 656-660.
7. Фомин В.И. О линейном дифференциальном уравнении n -го порядка в банаховом пространстве со специальной правой частью // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1518-1520.
8. Фомин В.И. О случае кратных корней характеристического операторного многочлена линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 710-713.
9. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
10. Фомин В.И. О случае комплексных характеристических операторов линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции. Воронеж: ВГУ, 2007. С. 231-232.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Фомин Василий Ильич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технической механики и деталей машин, e-mail: vasilyfomin@bk.ru

Для цитирования: Фомин В.И. О банаховой алгебре комплексных операторов // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 813–823. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823

ABOUT THE BANACH ALGEBRA OF COMPLEX OPERATORS

V. I. Fomin

Tambov State Technical University
 106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
 E-mail: vasilijfomin@bk.ru

Abstract. The Banach algebra of complex operators that are used in the study of linear differential equations with constant bounded operator coefficients in a Banach space is considered.

Keywords: complex operator; linear operations; operation of multiplication; norm; Banach algebra; algebraic form of a complex operator; operator exponent

REFERENCES

1. Fomin V.I. O reshenii zadachi Koshi dlya lineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve [On the solution of the Cauchy problem for a second-order linear differential equation in a Banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 8, pp. 1140-1141. (In Russian).
2. Fomin V.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve v sluchaye negativnogo operatornogo diskriminanta [On the second-order linear differential equation in Banach space in the case of negative operator discriminant]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 38-42. (In Russian).
3. Krein S.G. (ed.). *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 544 p. (In Russian).
4. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 496 p. (In Russian).
5. Danford N., Shvarts D. *Lineynyye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. General Theory]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 896 p. (In Russian).
6. Fomin V.I. Ob obshchem reshenii lineynogo differentsial'nogo uravneniya n -go poryadka s postoyannymi ogranichenymi operatornymi koeffitsiyentami v banakhovom prostranstve [On the general solution of a linear n th-order differential equation with constant bounded operator coefficients in a Banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2005, vol. 41, no. 5, pp. 656-660. (In Russian).
7. Fomin V.I. O lineynom differentsial'nom uravnenii n -go poryadka v banakhovom prostranstve so spetsial'noy pravoy chast'yu [On a linear n th-order differential equation with special right-hand side in a Banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1518-1520. (In Russian).
8. Fomin V.I. O sluchaye kratnykh korney kharakteristicheskogo operatornogo mnogochlena lineynogo odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya n -go poryadka v banakhovom prostranstve [On the case of multiple roots of the characteristic operator polynomial of an n th-order linear

homogeneous differential equation in a banach space]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 5, pp. 710-713. (In Russian).

9. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).

10. Fomin V.I. O sluchaye kompleksnykh kharakteristicheskikh operatorov lineynogo odnorodnogo differentsial'nogo uravneniya n -go poryadka v banakhovom prostranstve [On the case of complex characteristic operators of a n -th order linear homogeneous differential equation in a Banach space]. *Materialy konferentsii «Sovremennyye metody teorii funktsiy i smezhnyye problemy»* [Conference Materials “Modern Methods of Function Theory and Related Problems”]. Voronezh, Voronezh State University Publ., 2007, pp. 231-232. (In Russian).

Received 18 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Fomin Vasiliy Ilyich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Technical Mechanics and Machine Parts Department, e-mail: vasiliyfomin@bk.ru

For citation: Fomin V.I. O banahovoj algebre kompleksnykh operatorov [About the Banach Algebra of Complex Operators]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 813–823. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-813-823 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

УДК 519.6

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЧТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

✉ Р. А. Хачатрян

Ереванский государственный университет
0025, Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Аннотация. Установлена взаимосвязь условий почти выпуклости и проксимальной гладкости (называемой также нижним C^2 свойством) функций. Для компактных множеств доказано, что условия почти выпуклости и проксимальной гладкости эквивалентны. Построены конусы касательных направлений в смысле Булигана для множеств, которые задаются почти выпуклыми функциями.

Ключевые слова: многозначное отображение; почти выпуклое множество; звездное множество; проксимально гладкое множество; нижнее C^2 свойство; касательный конус

1. Почти выпуклость и проксимальная гладкость множеств

Пусть M — подмножество конечномерного евклидова пространства R^n . В дальнейшем, через $\text{int}M, \overline{M}, \partial M$ будем обозначать соответственно внутренность, замыкание и границу множества $M \leq R^n$. Через $\langle x, y \rangle$ будем обозначать скалярное произведение элементов x и y пространства R^n , через $B_r(x)$ — замкнутый шар с центром в x радиуса r .

Положим

$$M^0 = \{x \in M \mid \lambda x + (1 - \lambda)y \in M, \forall y \in M, \forall \lambda \in [0, 1]\}.$$

Подмножество $M^0 \leq M$ называется ядром звездности множества M . Если $M^0 \neq \emptyset$, то множество M называется звездным. Звездное множество M называется звездным телом, если $\text{int } M^0 \neq \emptyset$.

Положим

$$d(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|,$$

$$\pi_M(x) = \{y \in M \mid \|x - y\| = d(x, M)\}.$$

В.В. Остапенко в работе [1] ввел понятие θ -выпуклых множеств.

О п р е д е л е н и е 1. [1] Множество M называется почти выпуклым с константой $\theta \subset 0$, если для любых таких $x_i, \lambda_i, i \in I$ (I — конечное множество индексов), что $x_i \in M, \lambda_i \subset 0, \bigcap_{i \in I} \lambda_i = 1$, выполняется включение:

$$\bigcup_{i \in I} \lambda_i x_i \in M + \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2 B_1(0).$$

Из этого определения непосредственно следует, что если множество M почти выпукло с константой θ , то почти выпуклым с той же константой будет и замыкание $\overline{M}$ множества M .

Отметим, что понятие почти выпуклости служит обобщением понятия выпуклости.

О п р е д е л е н и е 2. [2] Множество $M \subseteq R^n$ называется проксимально гладким с константой $r > 0$, если функция расстояния $d(x, M)$ непрерывно дифференцируема на множестве

$$U(M, r) = \{x \in R^n \mid 0 < d(x, M) < r\}.$$

О п р е д е л е н и е 3. [3] Будем говорить, что множество M удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости с константой r , если из того, что $u \in U(M, r)$ и $x \in \pi_M(u)$, следует равенство

$$d\left(x + \frac{r}{\|u - x\|}(u - x), M\right) = r.$$

Свойством почти выпуклых множеств посвящены многочисленные исследования (см., например, работы [3, 4], монографии [5, 6]). М.В. Балашов и Г.Е. Иванов доказали (см. [3, теорема 2.4]), что если $M \subseteq R^n$ — замкнутое множество, то опорное условие слабой выпуклости с константой r эквивалентно условию проксимальной гладкости с той же константой. В.В. Остапенко в [1, теорема 2] показал, что если множество $M \subseteq R^n$ компактно, то опорное условие слабой выпуклости эквивалентно условию почти выпуклости с точностью до константы. В этой же работе в теореме 3 доказано, что если $M \subseteq R^n$ замкнутое почти выпуклое множество с константой θ , то на множестве $M + \varepsilon B_1(0)$, $\varepsilon \geq 1/(16\theta)$, отображение π_M однозначно. Позже Ф. Кларком, Р. Стерном и П. Воленским (см. [8, теорема 4.11]) доказано, что если множество M замкнуто, то условие проксимальной гладкости с константой R эквивалентно тому, что оператор π_M однозначно на множестве $U(M, r)$.

Таким образом, учитывая вышеуказанные соображения, окончательно мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. Пусть $M \subseteq R^n$ — компактное подмножество. Тогда следующие условия эквивалентны с точностью до константы.

1. M проксимально гладко;
2. M почти выпукло;
3. M удовлетворяет опорному условию слабой выпуклости.

2. Непрерывные и липшицевые свойства почти выпуклых функций

О п р е д е л е н и е 4. [7] Пусть множество $M \subseteq R^n$ выпуклое. Функция $f(x)$ называется слабо почти выпуклой на M с константой θ , если для любых векторов $x_i \in M$ и чисел $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, где I — конечное множество индексов, выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) + \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2.$$

Легко заметить, что если f почти выпукла, то ее надграфик

$$\text{epi}(f) \subseteq \{(\alpha, x) \in R^{n+1} \mid \alpha \in f(x), x \in M\}$$

является почти выпуклым множеством.

О п р е д е л е н и е 5. [7] Пусть множество $M \subseteq R^n$ выпуклое. Функция $f(x)$ называется сильно почти выпуклой на M с константой θ , если для любых векторов $x_i \in M$ и чисел λ_i , $i \in I$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, существует вектор $y \in M$ такой, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \geq \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2, \quad f(y) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i).$$

В [7, лемма 1] показано, что если функция f сильно выпукла и липшицева, то она слабо выпукла.

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть f — сильно почти выпуклая функция с константой θ . Тогда множество $M = \{x \in R^n \mid f(x) \geq 0\}$ почти выпукло с той же константой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i \in M$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. Тогда существует вектор $y \in R^n$ такой, что

$$f(y) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i) \geq 0.$$

Это означает, что $y \in M$ и, поэтому

$$d\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i, M\right) \geq \theta \max_{i,j \in I} \|x_i - x_j\|^2,$$

то есть множество M почти выпукло с константой θ .

Теорема 2. Пусть f слабо почти выпукла и $x^\dagger \in \text{int dom}(f)$. Тогда существует окрестность U точки $x^\dagger$ такая, что функция f удовлетворяет условию Гельдера с константой $\nu/2/3$ на этой окрестности, то есть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq C \|x_1 - x_2\|^\nu, \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

Доказательство. Сначала предположим, что $x^\perp = 0$ и покажем непрерывность функции f в этой точке. Определим множество

$$P = \{x \in R^n \mid r \geq x_i \geq r, i = 1, 2, \dots, n, r > 0\}.$$

Покажем, что на множестве P функция f ограничена. Пусть $x \in P$. Тогда этот вектор можно представить как выпуклую комбинацию вершин гиперкуба P , то есть $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, где x^i , $i = 1, 2, \dots, m$ — вершины гиперкуба P . По определению почти выпуклой функции имеем

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) + \theta \max_{i,j \in [1:m]} |x_i - x_j|^2 \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i \max_{i \in [1:m]} f(x^i) + \theta \max_{i,j \in [1:m]} |x_i - x_j|^2 \geq \alpha + 4\theta r^2 n,$$

где $\alpha = \min_{i \in [1:m]} f(x^i)$. Отсюда следует, что функция f ограничена сверху на гиперкубе P .

Произвольному $\varepsilon \in (0, 1)$ поставим в соответствие окрестность нуля вида $U_\varepsilon = \varepsilon^2 P$. Для любой точки $x \in U_\varepsilon$, учитывая условие $f(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right) + (1 - \varepsilon) f(0) + \theta \left(\varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i - 0\right)^2 \geq \\ &\geq \varepsilon f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right) + 4\theta \varepsilon n r^2 = \varepsilon \alpha + 4\theta n r^2 \varepsilon; \\ 0 = f(0) &= f\left(\frac{x}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right) \geq \frac{1}{1+\varepsilon} f(x) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \alpha + \theta \left(\frac{x}{1+\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i\right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$0 \geq f(x) + \varepsilon \alpha + 4(1 + \varepsilon)^2 \varepsilon \theta n r^2.$$

Таким образом доказано, что

$$\|f(x)\| \leq \varepsilon \alpha + 4(1 + \varepsilon)^2 n \theta r^2 \varepsilon.$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $x^\perp = 0$.

Рассмотрим общий случай. Определим функцию

$$\varphi(x) = f(x^\perp + x) - f(x^\perp).$$

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$. Покажем, что функция φ почти выпукла. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \varphi \sum_{i \in I} \lambda_i x_i &= f \sum_{i \in I} \lambda_i x_i + x^\perp - f(x^\perp) = f \sum_{i \in I} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I} \lambda_i x^\perp - f(x^\perp) = \\ &= f \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i + x^\perp) - f(x^\perp) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i + x^\perp) - f(x^\perp) + \\ &+ \theta \max_{i,j \in I} |x_i + x^\perp - (x_j + x^\perp)|^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i \varphi(x_i) + \theta \max_{i,j \in I} |x_i - x_j|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, функция φ почти выпукла и $\varphi(0) = 0$. Поэтому она непрерывна в нуле, что означает непрерывность функции f в точке $x^\perp$.

Так как функция f непрерывна в точке $x^\perp$, то существует окрестность $U = x^\perp + 2\delta B_1(0)$ ($0 < \delta < 1$) этой точки и число β такие, что $\|f(x)\| \geq \beta$, $\emptyset x \notin U$. Для разных x_1, x_2 из множества $x^\perp + \delta B_1(0)$ положим $x_3 = x_2 + (\delta/\alpha)(x_2 - x_1)$, где $\alpha = \|x_2 - x_1\|^\nu$ ($\nu \geq 1$), и заметим, что $x_3 \notin U$. Имеет место соотношение

$$x_2 = \frac{\delta}{\delta + \alpha}x_1 + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}x_3,$$

поэтому из почти выпуклости f получаем

$$f(x_2) \geq \frac{\delta}{\delta + \alpha}f(x_1) + \frac{\alpha}{\alpha + \delta}f(x_3) + \theta \left(1 + \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|x_2 - x_1\|^2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f(x_2) - f(x_1)\| &\geq \frac{\alpha}{\alpha + \delta} \|f(x_3) - f(x_1)\| \left(1 + \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|x_2 - x_1\|^2\right) \geq \\ &\geq \frac{2\beta}{\delta} \|x_1 - x_2\|^\nu + \theta \left(1 + \frac{\delta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \|x_2 - x_1\|^2\right) = \\ &= \|x_1 - x_2\|^\nu \left(\frac{2\beta}{\delta} + \theta \sum_{i=1}^n \|x_2 - x_1\|^{2-2\nu} + \delta^2 \sum_{i=1}^n \|x_2 - x_1\|^{2-3\nu}\right) \end{aligned}$$

Вследствие неравенства $\nu < 2/3$ выражение в скобках ограничено некоторым числом $C > 0$.

Так как в полученных соотношениях x_1 и x_2 можно поменять местами, то заключаем, что функция f гильбертова в окрестности точки $x^\perp$.

Изучим теперь липшицево свойство почти выпуклых функций. Ниже будет доказано, что почти выпуклые функции липшицевы, если их надграфики являются звездными множествами.

Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ — многозначное отображение. Обозначим

$$\text{graph}(a) = \{(x, y) \in R^{n+m} \mid y \in a(x)\}.$$

Определим отображение a^0 , графиком которого является множество $(\text{graph}(a))^0$.

Предложение 2. Пусть $a: R^n \rightarrow 2^{R^m}$ — многозначное отображение со звездным и замкнутым графиком и $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$. Тогда существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$d(y, a(x)) \geq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma} \left(1 + \|y - y_0\| \right), \quad \emptyset x \in B_\gamma(x_0), \quad \emptyset y \in \text{Im}(a).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \text{int dom}(a^0)$, $y_0 \in a^0(x_0)$. Тогда из [8, предложение 3.3.8] следует, что

$$x_0 \in \text{int } (a^0)^{-1}(K \left[B_1(y_0) \right]), \quad \text{где } K \text{ dom}(a^0)^{-1}.$$

Значит, существует такое $\gamma > 0$, что $B_{2\gamma}(x_0) \leq (a^0)^{-1}(K \sum B_1(y_0))$. Пусть $y \notin \text{Im}(a)$ и $x \notin B_\gamma(x_0)$. Если $y \notin a(x)$, то $d(y, a(x)) = 0$. Если $y \in a(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $z \in a^{-1}(y)$, что $\|x - z\| \geq d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon$. Так как $B_\gamma(x) \leq (a^0)^{-1}(K \sum B_1(y_0))$, то

$$\frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma} \gamma \notin (a^0)^{-1} K \left[\sum B_1(y_0) \right] \cap x. \quad (1)$$

Положим

$$\lambda = \frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma}.$$

Ясно, что $\lambda \in (0, 1)$. Включение (1) можно записать следующим образом:

$$(1 - \lambda)(x - z) \notin \lambda(a^0)^{-1} K \left[\sum B_1(y_0) \right] \cap \lambda x. \quad (2)$$

Поскольку $z \in a^{-1}(y)$ и график отображения a^{-1} является звездным множеством, то из (2) следует, что существует $y_1 \in K \sum B_1(y_0)$, такое, что

$$\|x - \lambda(a^0)^{-1}(y_1) + (1 - \lambda)a^{-1}(y)\| \leq \|a^{-1}(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y)\|.$$

Следовательно, $\|y_x - \lambda y_1 + (1 - \lambda)y\| \leq \|a(x)\|$. Кроме того, так как $y_1 \in B_1(y_0)$, то

$$\|y_x - y\| = \|\lambda(y_1 - y) + (1 - \lambda)(y - y_0) + (1 - \lambda)(y_0 - y)\| \geq \lambda(1 + \|y - y_0\|).$$

Далее,

$$\lambda \frac{\|x - z\|}{\|x - z\| + \gamma} \geq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma}.$$

Таким образом, для всех $x \notin B_\gamma(x_0)$ выполнено

$$d(y, a(x)) \geq \frac{d(x, a^{-1}(y)) + \varepsilon}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$d(y, a(x)) \geq \frac{d(x, a^{-1}(y))}{\gamma} (1 + \|y - y_0\|), \quad x \notin B_\gamma(x_0).$$

Следствие 1. Пусть $f: R^n \rightarrow R$ — непрерывная функция, надграфиком которой является звездное множество. Пусть a — многозначное отображение, графиком которого является надграфик функции f , то есть

$$\text{graph}(a) = \text{epi}(f) \subseteq \{(\alpha, x) \in R^{n+1} \mid \alpha \in f(x)\}.$$

Тогда функция f локально липшицева на $\text{int dom}(a^0)$.

Доказательство. Применим предыдущее утверждение к отображению F , которое является обратным к отображению $a(x) = f(x) + R_+$. Выберем $x_0 \in \text{dom}(F^0)$. В силу непрерывности $f(x)$ в x_0 существует число $\gamma_1 \geq \gamma$ такое, что $\|f(x) - f(x_0)\| \geq \gamma_1$

для всех $x \in B_{\gamma_0}(x_0)$. Пусть $x_1, x_2 \in B_{\gamma_0}(x_0)$ и $f(x_1) > f(x_2)$. Применим предложение 2, которое утверждает, что если $x_1, x_2 \in B_{\gamma_0}(x_0)$ и $f(x_2) \in \text{dom} F$, то

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= f(x_1) - f(x_2) = \inf_{\lambda \in F^{-1}(x_1)} \|\lambda - f(x_2)\| = d(F^{-1}(x_1), f(x_2)) \geq \\ &\geq \frac{1}{\gamma} d(x_1, F(f(x_2))) [1 + \|f(x_2) - f(x_0)\|] \geq \frac{2}{\gamma} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

Имея в виду этот результат и учитывая, что слабо почти выпуклая функция непрерывна в любой точке $x \in \text{int dom}(f)$ (она гелдерева в окрестности этой точки, см. теорему 2), мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — почти выпуклая функция, надграфиком которой является звездное множество. Далее, пусть $\Omega \subseteq \text{int dom}(a^0)$ — компактное подмножество. Тогда функция f липшицева на Ω .

3. Нижнее C^2 свойство слабо почти выпуклых функций

Имеет место следующий результат [2, теорема 5.1 и теорема 5.2].

Предложение 3. Пусть функция $f(x)$ липшицева на открытом выпуклом и ограниченном подмножестве $P \subseteq R^n$. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. Функция f обладает нижним $\sigma - C^2$ свойством [2], то есть

$$f(x) = \sup_{s \in S} \{ \sigma |x|^2 + \langle b(s), x \rangle + c(s) \}, \quad \forall x \in P,$$

где σ — некоторое положительное число, S — компакт, $b(s), c(s)$ — непрерывные функции, определенные на S .

2. Для $x \in P$, $x^\perp \in \partial_C f(x)$ имеет место неравенство

$$f(y) \leq \sigma |y - x|^2 + \langle x^\perp, y - x \rangle + f(x), \quad \forall y \in P,$$

здесь $\partial_C f(x)$ — субдифференциал функции f в точке x в смысле Кларка (см. [7]).

3. Множество $\text{epi}(f)$ проксимально гладко с константой σ .

Теорема 4. Пусть f — слабо почти выпуклая функция, надграфиком которой является звездное множество и P — открытое выпуклое ограниченное подмножество такое, что $\bar{P} \rightarrow \text{int dom}(a^0)$. Тогда

1. Функция f обладает нижним C^2 свойством на P ;
2. Функция f регулярна, то есть существует производная по направлениям и имеет место равенство

$$f'(x, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} = \max_{x^* \in \partial_C f(x)} \langle x^*, \bar{x} \rangle, \quad x \in P, \quad h \in R^n.$$

Более того, если f локально липшицева на открытом выпуклом подмножестве P и множество $\text{epi}(f)$ проксимально гладко, то f слабо почти выпукла на P .

Доказательство. Так как f почти выпуклая функция, то $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \mid \alpha \leq f(x), x \in P\}$ — почти выпуклое множество. Почти выпуклым также будет замыкание этого множества $\overline{\text{epi}(f)} = \{(\alpha, x) \mid \alpha \leq f(x), x \in \overline{P}\}$. Следовательно, согласно вышесказанному существует некоторая окрестность этого множества такая, что любая точка из этой окрестности имеет единственную проекцию на $\overline{\text{epi}(f)}$. Значит, множество $\overline{\text{epi}(f)}$ проксимально гладко. Так как имеет место очевидное равенство $d(x, M) = d(x, \overline{M})$, то проксимально гладким будет и множество $\text{epi}(f)$. Теперь первое и второе утверждение теоремы непосредственно следует из предложения 2.

Докажем вторую часть теоремы. Согласно предложению 3 функция f имеет следующее представление:

$$f(x) = \sup_{s \in S} \{ \sigma x^2 + |b(s), x| + c(s) \}, \quad \forall x \in P.$$

Покажем, что она почти выпукла. Сначала покажем, что для каждого $s \in S$ почти выпуклым будет следующая функция:

$$\varphi_s(x) = \sigma x^2 + |b(s), x| + c(s).$$

Пусть $x^i \in P$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\bar{x} = \sum_{i \in I} \lambda_i x^i$, $r = \max_{i, j \in I} |x^i - x^j|$. По формуле Тейлора

$$\varphi_s(x^i) = \varphi_s(\bar{x}) + \langle \varphi_s'(\bar{x}), x^i - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \varphi_s''(\bar{x})(x^i - \bar{x}), x^i - \bar{x} \rangle.$$

Отсюда, так как

$$\left\| \sum_{i \in I} \lambda_i \frac{1}{2} \langle \varphi_s''(\bar{x})(x^i - \bar{x}), x^i - \bar{x} \rangle \right\| \geq \sigma r^2,$$

то

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_s(x^i) = \varphi_s(\bar{x}) + \langle \varphi_s'(\bar{x}), \sum_{i \in I} \lambda_i (x^i - \bar{x}) \rangle + \sum_{i \in I} \lambda_i \frac{1}{2} \langle \varphi_s''(\bar{x})(x^i - \bar{x}), x^i - \bar{x} \rangle \geq \varphi_s(\bar{x}) - \theta r^2.$$

Значит,

$$\sup_{s \in S} \varphi_s(\bar{x}) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i \sup_{s \in S} \varphi_s(x^i) + \theta r^2,$$

то есть

$$f(\bar{x}) \geq \sum_{i \in I} \lambda_i f(x^i) + \theta r^2.$$

4. Касательный конус для множества $M = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$, где g — слабо почти выпуклая функция, и некоторые экстремальные свойства

Предложение 4. Пусть $g(x)$ — липшицева и слабо почти выпуклая функция на R^n и $M \subseteq \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$. Предположим также, что $x_0 \in M$ и $0 \notin \partial_C g(x_0)$. Для каждого $x^\perp \in \partial_C g(x_0)$ положим

$$K_M(x_0, x^\perp) \subseteq \{\bar{x} \in R^n \mid g^\perp(x_0, \bar{x}) \geq 0, \langle x^\perp, \bar{x} \rangle \leq 0\}.$$

Тогда существует непрерывное отображение $r(\bar{x}) = o(\bar{x})$, определенное в окрестности нуля, такое, что $x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M$ для достаточно малых $\bar{x} \in K_M(x_0, x^\perp)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно второму утверждению теоремы 4 липшицева функция f имеет обычную производную по направлениям. Нетрудно заметить, что для некоторой функции $r(\bar{x}) = o(\bar{x})$ выполнено

$$g(x_0 + \bar{x}) \geq g(x_0) + g^{\mathfrak{C}}(x_0, \bar{x}) + r(\bar{x}).$$

Положим $p(\lambda) \subseteq \sup\{r(\bar{x}) : \bar{x} \geq \lambda\}$. Ясно, что функция $p(\lambda)$ монотонно не убывает, $p(\lambda) = o(\lambda)$ и $r(\bar{x}) \geq p(\bar{x})$. Так как по предположению $0 \neq \partial_C g(x_0)$, существует вектор w такой, что $g^{\mathfrak{C}}(x_0, w) < 0$. Поэтому, для $\bar{x} \in K_M(x_0, x^\perp)$, $\gamma > 0$, получаем

$$\begin{aligned} g(x_0 + \bar{x} + \gamma \bar{x} w) &\geq g(x_0) + g^{\mathfrak{C}}(x_0, \bar{x} + \gamma \bar{x} w) + \\ p(\bar{x} + \gamma \bar{x} w) &\geq g^{\mathfrak{C}}(x_0, \bar{x}) + \gamma \bar{x} g^{\mathfrak{C}}(x_0, w) + \\ p(\bar{x}(1 + \gamma w)) &= \bar{x} \left[\gamma g^{\mathfrak{C}}(x_0, w) + \frac{p((1 + \gamma w)\bar{x})}{\bar{x}} \right]. \end{aligned}$$

Выберем число $\delta_\gamma^+ > 0$ достаточно малым для того, чтобы при $\bar{x} \geq \delta_\gamma^+$ выделенное в квадратных скобках выражение было меньше, чем $1/2\gamma g^{\mathfrak{C}}(x_0, w)$. Тогда

$$g(x_0 + \bar{x} + \gamma \bar{x} w) \geq 1/2\gamma g^{\mathfrak{C}}(x_0, w) \bar{x} < 0.$$

Так как функция g почти выпукла и липшицева, то согласно второму утверждению предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} g(x_0 + \bar{x} + \gamma \bar{x} w) - g(x_0) &\subseteq \langle x^\perp, \bar{x} + \gamma \bar{x} w | \sigma(\bar{x} + \gamma \bar{x} w)^2 = \\ &= \langle x^\perp, \bar{x} | + \gamma \bar{x} \langle x^\perp, w | \sigma(\bar{x}^2 - 2\langle \bar{x}, \gamma \bar{x} w | + \gamma \bar{x} w^2) = \\ &= \bar{x} \left[\gamma \langle x^\perp, w | \sigma(\bar{x} - 2\langle \bar{x}, \gamma w | - \gamma \bar{x} w^2) \right]. \end{aligned}$$

Так как $\langle x^\perp, w \rangle > 0$, то выберем $\delta_\gamma > 0$ настолько малым, что если $\bar{x} \geq \delta_\gamma$, то выражение в квадратных скобках больше, чем положительное число $1/2\gamma \langle x^\perp, w \rangle$. Положим $\delta_\gamma = \min\{\delta_\gamma^+, \delta_\gamma\}$ и при фиксированном $\bar{x}$, $\bar{x} \geq \delta$ рассмотрим функцию

$$q(\omega) \subseteq g(x_0 + \bar{x} + \omega \bar{x} w).$$

Имеем $q(\gamma) < 0$, $q(-\gamma) > 0$. Так как функция g непрерывна, то q тоже является непрерывной функцией. Поскольку функция q на отрезке $[-\gamma, \gamma]$ меняет знак, то в некоторой точке $\omega(\bar{x}) \in [-\gamma, \gamma]$ она обращается в нуль. Итак, для некоторого $\gamma > 0$ существует $\delta_\gamma > 0$ такое, что

$$g(x_0 + \bar{x}\omega(\bar{x})w) = 0, \quad \|\omega(\bar{x})\| \geq \gamma, \quad \bar{x} \geq \delta_\gamma.$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{g(x_0 + \bar{x} + (\omega + \Delta)\bar{x}w)}{\Delta} - \frac{g(x_0 + \bar{x} + \omega\bar{x}w)}{\Delta} \right] = \\ &= \bar{x} g^{\mathfrak{C}}(x_0 + \bar{x} + \omega\bar{x}w, w). \end{aligned}$$

Поэтому в силу полнепрерывности сверху функции $g^{\mathfrak{C}}(x, w)$ по x в точке x_0 и согласно условию $g^{\mathfrak{C}}(x_0, w) < 0$ при малых $\bar{x}$ имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{q(\omega + \Delta) - q(\omega)}{\Delta} < 0.$$

Отсюда следует, что функция q монотонно убывает и, следовательно, она имеет на отрезке единственный корень. Поэтому функция $\omega(\bar{x})$ для достаточно малых $\bar{x}$ определяется однозначно. Из $\|\omega(\bar{x})\| \geq \gamma$ и $\bar{x} \geq \delta_\gamma$ следует, что $\omega(\bar{x}) \in 0$ при $\bar{x} \in 0$. Покажем, что функция $\omega(\bar{x})$ непрерывна. Допустим противное. Пусть существуют две последовательности $\{\bar{x}_i\}$, $\{\bar{y}_i\}$, такие, что $\bar{x} \in \bar{x}_0$, $\bar{y}_i \in \bar{x}_0$, но

$$\omega(\bar{x}_i) \in \bar{\omega}, \quad \omega(\bar{y}_i) \in \underline{\omega}, \quad \bar{\omega} \not\equiv \underline{\omega}.$$

Из этих соотношений и из непрерывности функции f следует, что

$$g(x_0 + \bar{x}_0 + \bar{\omega} \mid \bar{x}_0 \mid w) = 0, \quad g(x_0 + \bar{x}_0 + \underline{\omega} \mid \bar{x}_0 \mid w) = 0, \quad \|\bar{\omega}\| \geq \gamma, \quad \|\underline{\omega}\| \geq \gamma.$$

Однако, $\bar{\omega} = \underline{\omega}$ в силу однозначности функции $\omega(\bar{x})$.

Таким образом, показано, что в малой окрестности нуля и при $\bar{x} \in K_M(x_0, x^\perp)$ функция $\omega(\bar{x})$ непрерывна, $\omega(\bar{x}) \in 0$,

$$g(x_0 + \bar{x} + \omega(\bar{x}) \mid \bar{x} \mid w) = 0.$$

Так как конус замкнут и $0 \in K_M(x_0, x^\perp)$, имеем $\pi_{K_M(x_0, x^\perp)}(\bar{x}) \geq \bar{x}$. Положим $\psi(\bar{x}) = \bar{x} + \omega(\pi_{K_M(x_0, x^\perp)}(\bar{x})) \mid \bar{x} \mid w$. Очевидно, что функция ψ непрерывна в некоторой окрестности U нуля и такова, что

$$g(x_0 + \psi(\bar{x})) = 0, \quad \psi(\bar{x}) \mid \bar{x} = o(\bar{x}), \quad \emptyset \bar{x} \in K_M(x_0, x^\perp) \cap U.$$

С помощью предложения 4 можно описывать конус Булигана для множеств вида $M = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$, где g — липшицева и почти выпуклая функция. Напомним, что касательный конус Булигана для множества M в точке $x \in M$ обозначается $T_M(x)$ и определяется следующим образом: $\bar{x} \in T_M(x)$ в том и только в том случае, если существует последовательности строго положительных чисел $\lambda_i \in 0$ и элементов $\bar{x}_i \in \bar{x}$, таких, что $x + \lambda_i \bar{x}_i \in M$.

Имеет место следующий результат.

Теорема 5. Пусть $g(x)$ — липшицева и слабо почти выпуклая функция на R^n и $M \subseteq \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}$. Предположим также, что $x_0 \in M$ и $0 \notin \partial_C g(x_0)$. Тогда

$$T_M(x_0) = \{\bar{x} \in R^n \mid g^{\mathfrak{C}}(x_0, \bar{x}) = 0\}.$$

Доказательство. Пусть $\bar{x}_0 \in T_M(x_0)$. Это означает, что существует последовательности строго положительных чисел $\lambda_i \in 0$ и элементов $\bar{x}_i \in \bar{x}_0$, таких, что $g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_i) = 0$. Следовательно,

$$0 = g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_i) = g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_0 + \lambda_i(\bar{x}_i - \bar{x}_0)) = g(x_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_0) - g(x_0) + g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_0 + \lambda_i(\bar{x}_i - \bar{x}_0)) - g(x_0 + \lambda_i \bar{x}_0) = \\
&= \lambda_i [g(x_0, \bar{x}) + \frac{o(\lambda_i)}{\lambda_i} + \langle x^\downarrow, \bar{x}_i - \bar{x}_0 \rangle] \{,
\end{aligned}$$

где $x^\downarrow \in \partial_C g(\xi)$, $\xi \in [x_0, x_0 + \lambda_i \bar{x}_i]$. Отсюда получаем $T_M(x_0) \subseteq \{\bar{x} / g(x_0, \bar{x}) = 0\}$. Покажем обратное включение. Очевидно, выполнено равенство

$$\{\bar{x} / g(x_0, \bar{x}) = 0\} = \bigcap_{x^* \in \partial_C g(x_0)} K_M(x_0, x^*).$$

Следовательно, если $g(x_0, \bar{x}) = 0$, то для некоторого $x^\downarrow \in \partial_C g(x_0)$ имеет место включение $\bar{x} \in K_M(x_0, x^\downarrow)$. Поэтому согласно предложению 4 существует функция $\varphi(\lambda) = o(\lambda)$ такая, что $x_0 + \lambda \bar{x} + \varphi(\lambda) \in M$ при малых $\lambda > 0$, то есть $\bar{x} \in T_M(x_0)$.

Имеет место следующий очевидный факт.

Предложение 5. Пусть f — липшицева и слабо почти выпуклая функция на $0 \in \partial_C f(x_0)$. Тогда существует число $\theta < 0$ такое, что x_0 — точка минимума функции $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2$ на R^n .

Доказательство. Действительно, по предложению 2 существует число $\theta < 0$ такое, что для любого $x^\downarrow \in \partial_C f(x_0)$ имеет место неравенство

$$f(y) \leq \theta \|y - x_0\|^2 + \langle x^\downarrow, y - x_0 \rangle + f(x_0).$$

Из условия $0 \in \partial_C f(x_0)$ следует $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2 \leq f(x_0)$, то есть x_0 — точка минимума $f(y) + \theta \|y - x_0\|^2$ на R^n .

Предложение 6. Пусть f — липшицева и слабо почти выпуклая функция на R^n , $M_0 \subseteq \{x \in R^n / f(x) = 0\}$. Пусть $x_0 \in M_0$ — точка минимума дифференцируемой и слабо выпуклой функции g на M . Если $\dim \text{con } \partial_C f(x_0) \leq 2$, то существует число $\vartheta < 0$ такое, что x_0 — точка минимума функции $g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$ на множестве $M \subseteq \{f(x) \in R^n / f(x) \geq 0\}$.

Доказательство. По предположению 4 для каждого $x^\downarrow \in \partial_C f(x_0)$ выпуклый конус

$$K(x_0, x^\downarrow) = \{\bar{x} \in R^n / f(x_0, \bar{x}) \geq 0, \langle x^\downarrow, \bar{x} \rangle \leq 0\}$$

является конусом касательных направлений для M в точке x_0 . Поэтому согласно необходимому условию экстремума имеем

$$g(x_0) / K^\downarrow(x_0, x^\downarrow) = \overline{(\text{con } \partial_C f(x_0) \cap \text{con } x^\downarrow)}, \quad \forall x^\downarrow \in \partial_C f(x_0).$$

Согласно [10, теорема 4]

$$g(x_0) / \bigcap_{x^* \in \partial_C f(x_0)} \overline{(\text{con } \partial_C f(x_0) \cap \text{con } x^*)} = \text{con } \partial_C f(x_0),$$

то есть $0 \in g(x_0) + \text{con } \partial_C f(x_0)$. Отсюда, существует число $\lambda < 0$ такое, что $0 \in g(x_0) + \lambda \partial_C f(x_0)$.

Поскольку f — регулярная функция, а g непрерывно дифференцируема, имеем $0 \notin \partial_C(g + \lambda f)(x_0)$. Поэтому согласно предположению 4 существуют числа $\theta_1, \theta_2 \subset 0$ такие, что x_0 — точка минимума функции

$$g(x) + \lambda f(x) + \theta_1 \lambda \|x - x_0\|^2 + \theta_2 \|x - x_0\|^2 = g(x) + \lambda f(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$$

на R^n , где $\vartheta = \theta_1 \lambda + \theta_2$, то есть

$$g(x_0) + \lambda f(x_0) + \vartheta \|x_0 - x_0\|^2 \geq g(x) + \lambda f(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2.$$

Теперь если $f(x) \geq 0$, то $g(x_0) \geq g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$, то есть x_0 — точка минимума функции $g(x) + \vartheta \|x - x_0\|^2$ на множестве M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Остапенко В.В. Об одном условии почти выпуклости // Украинский математический журнал. 1983. Т. 35. № 2. С. 169-172.
2. Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R. Proximal Smoothness and the Lower – C2 Property // Journal of Convex Analysis. 1995. Vol. 2. № 1/2. P. 117-144.
3. Балашов М.В., Иванов Г.Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Известия РАН. Серия математическая. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 23-66.
4. Амиргалиева С.Н. Условие телесности – обобщенные свойства выпуклых множеств // Вестник Казахского национального технического университета им. К.И. Сатпаева. 2006. № 2. С. 108-115.
5. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
6. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и их свойства // Математические заметки. 2006. Т. 79. Вып. 1. С. 60-86.
7. Остапенко В.В., Остапенко Е.В., Амиргалиева С.Н. Приближенные методы решения дифференциальных игр со случайной помехой // Методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор. 2005. № 4. С. 65-74.
8. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
10. Пшеничный Б.Н., Хачатрян Р.А. О необходимых условиях экстремума для негладких функций // Известия Академии наук Армянской ССР. Серия: Математика. 1983. Т. 18. № 4. С. 318-325.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения, доктор физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования, e-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Для цитирования: Хачатрян Р.А. О некоторых свойствах почти выпуклых функций и множеств // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 824–837. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837

ON SOME PROPERTIES OF QUASI CONVEX FUNCTIONS AND SETS

R. A. Khachatryan

Yerevan State University
 1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia
 E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

Abstract. The connection between quasi convexity and proximal smoothness (also known as low C^2 property) of functions is verified. For compact sets, it is proved that the properties of quasi convexity and proximal smoothness are equivalent. The Bouligand cones of tangent directions for the sets that are defined by convex functions are constructed.

Keywords: multi-valued map; quasi convex set; star set; proximal smooth set; low C^2 property; tangent cone

REFERENCES

1. Ostapenko V.V. Ob odnom uslovii pochtii vypuklosti [About one condition of almost convexity]. *Ukrainskiy matematicheskiy zhurnal – Ukrainian Mathematical Journal*, 1983, vol. 35, no. 2, pp. 169-172. (In Russian).
2. Clarke F.H., Stern R.J., Wolenski P.R. Proximal Smoothness and the Lower – C^2 Property. *Journal of Convex Analysis*, 1995, vol. 2, no. 1/2, pp. 117-144.
3. Balashov M.V., Ivanov G.E. Slabo vypuklyye i proksimal'no gladkiye mnozhestva v banakhovykh prostranstvakh [Weakly convex and proximally smooth sets in Banach spaces]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 2009, vol. 73, no. 3, pp. 23-66. (In Russian).
4. Amirgaliyeva S.N. Usloviye telesnosti – obobshchennyye svoystva vypuklykh mnozhestv [The condition of corporeality – generic properties of convex sets]. *Vestnik Kazakhskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta im. K.I. Satpayeva* [Bulletin of Kazakh National Technical University named after K.I. Satpayev], 2006, no. 2, pp. 108-115. (In Russian).
5. Leykhtveys K. *Vypuklyye mnozhestva* [Convex Set]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).
6. Ivanov G.E. Slabo vypuklyye mnozhestva i ikh svoystva [Weakly convex sets and their properties]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2006, vol. 79, no. 1, pp. 60-86. (In Russian).
7. Ostapenko V.V., Ostapenko E.V., Amirgaliyeva S.N. Priblizhennyye metody resheniya differentsial'nykh igr so sluchaynoy pomekhoy [Approximate methods for solving differential games with random interference]. *Metody optimizatsii, optimal'ne upravlinnya i teoriya igor* [Optimization Methods, Optimal Control and Game Theory], 2005, no. 4, pp. 65-74. (In Russian).
8. Aubin J.-P., Ekeland I. *Prikladnoy nelineyny analiz* [Applied Nonlinear Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1988. (In Russian).
9. Klark F. *Optimizatsiya i negladkiy analiz* [Optimization and Nonsmooth Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1988. (In Russian).

10. Pshenichnyy B.N., Khachatryan R.A. O neobkhodimyykh usloviyakh ekstremuma dlya ne-gladiikh funktsiy [On necessary conditions of extremum for nonsmooth functions]. *Izvestiya Akademii nauk Armyanskoy SSR. Seriya: Matematika* [Bulletin of Armenian SSR Academy of Sciences. Series: Mathematics], 1983, vol. 18, no. 4, pp. 318-325. (In Russian).

Received 19 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Khachatryan Rafik Agasievich, Yerevan State University, Yerevan, the Armenia, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor of Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department, e-mail: khachatryan.rafi@gmail.com

For citation: Khachatryan R.A. O nekotorykh svoystvakh pochti vypuklykh funktsiy i mnozhestv [On some properties of quasi convex functions and sets]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 824–837. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-824-837 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-838-845

УДК 517.922

СИМВОЛЫ В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ КВАНТОВАНИИ: ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ

✉ С. В. Цыкина

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

Аннотация. В настоящей статье мы предъявляем явные формулы для ковариантных символов в полиномиальном квантовании на параэрмитовых симметрических пространствах.

Ключевые слова: группы Ли и алгебры Ли; псевдо-ортогональные группы; представления групп Ли; параэрмитовы симметрические пространства; ковариантные символы; полиномиальное квантование

Предыдущие наши работы, см., например, [1–4], были посвящены построению полиномиального квантования на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H , с псевдо-ортогональной группой $G \in [SO]p, q \mp$ а подгруппа H накрывает прямое произведение $[SO]p-2, q-2 * [SO]2, 2 \mp$. Группа G действует линейно в $\mathbb{R}^n$, $n \in p \neq q$, и сохраняет форму $\int x, y d \in \sum \lambda_i x_i y_i$, где $\lambda_i \in 2$ для $i \in 2, \dots, p$ и $\lambda_i \in 2$ для $i \in p \neq 2, \dots, n$. Мы считаем, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \in xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p > 2, q > 2$.

В настоящей статье мы делаем добавление к этому построению: мы предъявляем *явные формулы* для символов. Квантование использует два вида символов операторов: ковариантные и контравариантные символы. В настоящей работе мы ограничимся ковариантными символами, мы не будем рассматривать контравариантные символы, поскольку они тесно связаны с ковариантными символами с помощью сопряжения, см. [3], и явные формулы для них легко получаются из аналогичных формул для ковариантных символов.

Пространство G/H можно реализовать несколькими способами. Прежде всего – как многообразие в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G . В этой алгебре группа действует по присоединенному представлению. Базис в $\mathfrak{g}$ образован матрицами $L_{ij} \in E_{ij} - \lambda_i \lambda_j E_{ji}$, $i < j$, где E_{ij} – матричная единица. Подгруппа H является стационарной подгруппой матрицы $Z_0 \in L_{1,n}$, так что G/H есть как раз G -орбита в $\mathfrak{g}$ точки Z_0 .

Другая реализация дает G/H как подмногообразие в прямом произведении проективизаций конуса $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^n$. Этот конус состоит из таких точек x , что $|x, x| \in 1$, $x \in 1$. Группа G действует на конусе транзитивно. Многообразие $\mathcal{D}$ образующих конуса $\mathcal{D}$ состоит из прямых (с удаленным началом координат) $|x| \in \mathbb{R}^n$, где $x \in \mathcal{D}$, $\mathbb{R}^n \in \mathbb{R}^n$. Фиксируем на конусе две точки s и s^+ :

$$s \in (2, 1, \dots, 1, -2), \quad s^+ \in (2, 1, \dots, 1, 2)$$

Группа G действует на $\mathcal{D}$ естественным образом: $|x| \in \mathcal{D} \rightarrow |xg| \in \mathcal{D}$, $g \in G$. На прямом произведении $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}$ группа G действует диагонально: $(|x|, |y|) \in \mathcal{D}^* \times \mathcal{D} \rightarrow (|xg|, |yg|) \in \mathcal{D}^* \times \mathcal{D}$. Стационарной подгруппой пары $(|s|, |s^+|)$ служит подгруппа H . Таким образом, пространство G/H есть G -орбита пары $(|s|, |s^+|)$ в $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}$. Она есть единственная открытая плотная G -орбита в $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}$. Эта орбита состоит из пар $(|x|, |y|)$, $x, y \in \mathcal{D}$, таких, что $|x, y| \in 1$. Обозначим ее через $\mathcal{D}^* \times \mathcal{D}^\dagger$.

Рассмотрим два сечения конуса:

$$\begin{aligned} E &= \{|x, s^+| \in 3, |x_1 - x_n| \in 3\}, \\ E^+ &= \{|x, s| \in 3, |x_1| \leq |x_n| \in 3\}. \end{aligned}$$

Эти сечения пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{D}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе дает «дробно-линейное» действие на каждом сечении, определенное почти всюду. Это позволяет ввести координаты (глобальные) на E и E^+ с помощью, соответственно, векторов $\xi \in (\xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ и $\eta \in (\eta_2, \dots, \eta_{n-1})$ из $\mathbb{R}^{n-2}$, а именно, векторам ξ и η отвечают следующие точки из E и E^+ , соответственно:

$$\begin{aligned} x) \xi & \in E \iff (|\xi, \xi|, 3\xi, 2|\xi, \xi|), \\ y) \eta & \in E^+ \iff (|\eta, \eta|, 3\eta, 2|\eta, \eta|). \end{aligned}$$

Здесь $\langle \times \times \rangle$ обозначает билинейную форму в пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$, которая получается ограничением из формы $\langle \times \times \rangle$:

$$\langle u, v \rangle \in \int_{j=2}^{n-1} \lambda_j u_j v_j.$$

Мы имеем

$$|x) \xi + y) \eta| \in 3N) \xi, \eta \in 2+$$

где

$$N) \xi, \eta \in 2 \iff |\xi, \eta| \leq |\xi, \xi| |\eta, \eta|.$$

Пространство $G/H \in \mathcal{D}^* \times \mathcal{D}^\dagger$ можно отождествить (с точностью до многообразия меньшей размерности) с прямым произведением $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^+$. Тем самым мы вводим в G/H координаты $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-2}$, назовем их *орисферическими координатами*. Для этих координат выполняется условие $N) \xi, \eta \in 1$.

Напомним некоторый материал [5] о представлениях группы $G \in (S_0)_{p,q}$ связанных с конусом. Мы будем использовать следующие обозначения для «обобщенных степеней»:

$$a^{[m]} \in a) a \in 0 \ 2+ \dots) a \in 0 \ m \ 2+ \quad a^{(m)} \in a) a \in 2+ \dots) a \in m \ 0 \ 2+$$

где a – число, а также обозначение

$$t^{\sigma, \varepsilon} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad t \in \mathbb{R}^\infty \setminus \{0\}.$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \in \{1, 2\}$. Обозначим через $\mathcal{E}_{\sigma, \varepsilon}(\mathcal{D})$ пространство функций f на конусе класса C и однородных «степени σ, ε », то есть

$$f(tx) = t^{\sigma, \varepsilon} f(x), \quad x \in \mathcal{D}, \quad t \in \mathbb{R}^\infty.$$

Представление $T_{\sigma, \varepsilon}$ группы G действует в этом пространстве сдвигами:

$$(T_{\sigma, \varepsilon} g)(x) = f(xg).$$

Оно порождает представление T_σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G (зависимость от ε исчезает), а также представление T_σ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ для алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Введем следующую билинейную форму в функциях на $\mathbb{R}^{n-2}$ (то есть в функциях на $\mathbb{R}^n$ и на $\mathbb{R}^2$):

$$\langle f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f(\xi + h) \xi + d\xi \int_{\mathbb{R}^{n-2}} f(\eta + h) \eta + d\eta,$$

интеграл берется по $\mathbb{R}^{n-2}$. В дальнейшем подразумевается, что все интегралы по $d\xi$ и по $d\eta$ берутся по $\mathbb{R}^{n-2}$. Оператор

$$A_{\sigma, \varepsilon} f(\xi) + N(\xi, \eta) f(\eta) + d\eta$$

сплетает представления $T_{\sigma, \varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma, \varepsilon}$, действующие в функциях на *разных* сечениях. Справедливо соотношение:

$$A_{2-n-\sigma, \varepsilon} A_{\sigma, \varepsilon} = c(\sigma, \varepsilon) E,$$

где $c(\sigma, \varepsilon)$ – некоторая функция, аналитическая по σ .

Напомним конструкцию квантования в духе Березина, см., например, [1, 6]. В качестве алгебры операторов, исходной для квантования, мы берем алгебру

$$U(\mathfrak{g}) \oplus T_\sigma(U(\mathfrak{g})),$$

образованную операторами $D \in T_\sigma(X)$, $X \in U(\mathfrak{g})$. В качестве аналога пространства Фока мы берем пространство $\mathcal{E}_{\sigma, \varepsilon}(\mathcal{D})$ функций $\varphi(\xi)$ на сечении конуса $\mathcal{D}$. Оно содержится в пространстве $C(\mathbb{R}^{n-2})$ функций $\varphi(\xi)$ на $\mathbb{R}^{n-2}$ и содержит пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-2})$. В качестве переполненной системы мы берем ядро сплетающего оператора $A_{2-n-\sigma, \varepsilon}$, а именно, функцию

$$(\cdot)(\xi, \eta) + N(\sigma, \varepsilon)(\xi, \eta) + N(\xi, \eta)^{\sigma, \varepsilon}.$$

Ковариантный символ F оператора $D \in T_\sigma(X)$ есть функция $F(x, y)$ на G/H , в орисферических координатах он определяется формулой

$$F(\xi, \eta) + \frac{2}{(\cdot)(\xi, \eta)} D \circ 2(\cdot)(\xi, \eta)$$

В первой реализации пространства G/H – как многообразия в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ – он есть функция от элемента Z алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

В второй реализации, указанной выше, ковариантный символ F есть функция от пары $(x, y) \in \mathcal{D}$ образующих конуса $\mathcal{D}$, таких что $(x, y) \in 1$, другими словами, он есть функция $F(x, y)$ от пары (x, y) точек конуса $\mathcal{D}$, таких что $(x, y) \in 1$, причем эта функция – однородная степени 0 по x и по y , то есть $F(tx, sy) = F(x, y)$ для всех $t, s \in \mathbb{R}^\infty$.

Функция $N(\xi, \eta)$ есть ограничение на $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}$ функции $(\xi, \eta) \in 2/3 \mathcal{D}$ см. (1), так что функция $N(\xi, \eta)$ есть (с точностью до множителя) ограничение на $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{g}$ функции $(x, y) \in \mathcal{D}$. Последняя функция как функция от ξ (и от η) принадлежит $\mathcal{E}_{\sigma, \varepsilon}(\mathcal{D})$. Поэтому ковариантный символ $F(x, y)$ оператора $D \in T_\sigma(X) \oplus X/\mathcal{O}(X) \oplus \mathfrak{g}$ есть

$$F(x, y) \in \frac{2}{(x, y) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}} (D \oplus 2) (x, y) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}.$$

Ковариантный символ *единичного оператора* есть функция, тождественно равная единице.

Напишем ковариантные символы для операторов, отвечающих элементам алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (элементам первой степени из $\mathcal{O}(X) \oplus \mathfrak{g}$).

Теорема 1. Пусть L – элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда ковариантный символ F оператора $D \in T_\sigma(L) \oplus \mathfrak{g}$ в первой реализации есть функция

$$F(Z) \in \frac{2}{3} \sigma \otimes L Z + \frac{2}{3n} \sigma \otimes B_{\mathfrak{g}}(L, Z),$$

где $B_{\mathfrak{g}}$ – форма Киллинга на $\mathfrak{g}$, а во второй реализации есть функция

$$F(x, y) \in \sigma \frac{(xL, y)}{(x, y)}.$$

Эта функция есть линейный многочлен на G/H .

Умножение операторов порождает умножение ковариантных символов, обозначим последнее звездочкой $\otimes$ (оно зависит от σ). Пусть F_1, F_2 – ковариантные символы операторов D_1, D_2 , соответственно. Так как $D_1 D_2 \in 2 \oplus (D_1 \oplus 2) (D_2 \oplus 2)$ то:

$$(F_1 \otimes F_2)(x, y) \in \frac{2}{(x, y) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}} (D_1 \oplus 2) (x, y) \in \mathcal{D}^{\varepsilon} F_2(x, y),$$

и – в сферических координатах:

$$(F_1 \otimes F_2)(\xi, \eta) \in \frac{2}{(\xi, \eta) \in \mathcal{D}^{\varepsilon}} (D_1 \oplus 2) (\xi, \eta) \in \mathcal{D}^{\varepsilon} F_2(\xi, \eta).$$

Приведем явные формулы для ковариантных символов, отвечающих элементам X из $\mathcal{O}(X) \oplus \mathfrak{g}$ произвольного порядка.

Пусть в формуле (3) оператор D_1 отвечает элементу L из алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда D_1 – дифференциальный оператор первого порядка, по правилу Лейбница мы имеем $D_1)f \otimes h + D_1f \otimes h = 0$, так что

$$(F_1 \otimes F_2)(x, y) + D_1(F_1 \otimes F_2)(x, y) = 0 \quad (4)$$

$$D_1(F_1 \otimes F_2)(x, y) = \frac{d}{dt} \left(F_2(xe^{tL}, y) \right) \quad (5)$$

Теорема 2. Для элемента $X \in \mathfrak{g}$ порядка k ковариантный символ оператора $D \in T_\sigma(X)$ есть многочлен на G/H порядка k с коэффициентами, зависящими от σ полиномиально.

Сначала – для наглядности – напомним с помощью формул (4), (5) в явном виде ковариантные символы для элементов X из алгебры $\mathfrak{g}$ порядка 2, 3, 4. Достаточно это сделать для X , которые являются произведениями элементов алгебры Ли. Пусть $L, M, K \in \mathfrak{g}$.

Для $X \in L$ имеем

$$F(x, y) = \sigma \frac{\partial L}{\partial x},$$

это – формула (2). Пусть $X \in LM$, тогда

$$F(x, y) = \sigma^{(2)} \frac{\partial^2 LM}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial LM}{\partial x}.$$

Пусть $X \in LMK$, тогда

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sigma^{(3)} \frac{\partial^3 LMK}{\partial x^3} \\ &= \sigma^{(2)} \frac{\partial^2 LMK}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial LMK}{\partial x}. \end{aligned}$$

Теперь напомним, с помощью формул (4), (5), в явном виде ковариантные символы для элементов X из алгебры $\mathfrak{g}$ любого порядка k , которые являются произведениями элементов алгебры Ли. Пусть $X \in L_1 L_2 \dots L_k$, где $L_i \in \mathfrak{g}$. Разобьем множество индексов $I \in \{2, 3, \dots, k\}$ на t подмножеств: $I \in I_1 \{ \dots \{ I_m$. Обозначим через A_s произведение – в порядке возрастания индексов – тех элементов L_j , индексы j которых принадлежат I_s .

Теорема 3. Для элемента $X \in L_1 L_2 \dots L_k$, где $L_i \in \mathfrak{g}$, из алгебры $\mathfrak{g}$ порядка k ковариантный символ $F(x, y)$ оператора $D \in T_\sigma(X)$ дается следующей формулой

$$F(x, y) = \int_{n=1}^k \sigma^{(n)} \int \frac{\partial^n A_1 \dots \partial^n A_m}{\partial x^n},$$

где внутреннее суммирование происходит по всем разбиениям множества I на t подмножеств: $I \in I_1 \{ \dots \{ I_m$.

С другой стороны, дальше мы решаем в некотором смысле *обратную задачу*: у нас есть некоторые специальные (важные) многочлены на G/H , и мы находим операторы, для которых эти многочлены являются символами.

Для σ общего положения пространство ковариантных символов есть пространство $S)G/H$ + всех многочленов на G/H .

Возьмем в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ максимальную коммутативную подалгебру (картановскую подалгебру) $\mathfrak{a}$, состоящую из матриц L , ненулевые элементы которых могут стоять только на побочной диагонали:

$$X \in \begin{pmatrix} 1 & 1 & \times \times \times & 1 & t_1 \\ 1 & 1 & \times \times \times & t_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_2 & \times \times \times & 1 & 1 \\ t_1 & 1 & \times \times \times & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

напомним, что мы рассматриваем общий случай $p > 2$, $q > 2$. Размерность алгебры $\mathfrak{a}$ равна целой части $\lfloor n/3 \rfloor$ числа $n/3$.

Представление сдвигами группы G в пространстве многочленов $S)G/H$ + разлагается в прямую сумму неприводимых конечномерных представлений в пространствах H_ν . Они нумеруются старшими весами ν относительно алгебры $\mathfrak{a}$. Старший вес – это вектор с $\lfloor n/3 \rfloor$ целочисленными координатами, из которых все координаты, начиная с третьей, равны нулю: $\nu \in \langle a, b, 1, \dots \rangle$ причем $a \geq b \geq 1$, $a \rightarrow b \pmod 3$.

Предъявим старшие и младшие векторы в пространствах H_ν . Старший вектор f_ν^+ и младший вектор f_ν^- в H_ν – это многочлены, собственные для матрицы $g \in X$ с собственными числами $g \mapsto at_1 - bt_2$ и $g \mapsto at_1 - bt_2$ соответственно. Обозначим

$$l \in \frac{a - b}{3}, \quad c \in \frac{a + b}{3}.$$

В орисферических координатах мы имеем

$$f_\nu^+ \rangle \xi, \eta \rangle \in \langle \xi_2 - \xi_{n-1} \rangle \langle \xi, \xi \rangle \eta_2 - \eta_{n-1} + \langle \xi, \xi \rangle^c \times N \rangle \xi, \eta \rangle^l,$$

$$f_\nu^- \rangle \xi, \eta \rangle \in \langle \eta_2 - \eta_{n-1} \rangle \langle \eta, \eta \rangle \xi_2 - \xi_{n-1} + \langle \eta, \eta \rangle^c \times N \rangle \xi, \eta \rangle^l.$$

Возьмем в пространстве $\mathfrak{g}$ элементы $M_i \in L_{1i} - \lambda_i L_{in}$, а в универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ + возьмем «частичный элемент Казимира»

$$\Phi \in \int_{j=2}^{n-1} \lambda_j M_j^2.$$

Элемент $M \in M_2 - M_{n-1}$ является собственным для элементов алгебры $\mathfrak{a}$ с собственным значением $-t_1 - t_2$. Возьмем следующий элемент из $U(\mathfrak{g})$ +:

$$X_\nu \in M^b \rangle \Phi \neq.$$

Теорема 4. Ковариантный символ F_ν оператора $D_\nu \in T_\sigma(X_\nu)$ есть с точностью до множителя минимальный вектор $f_\nu(\xi, \eta)$ из H_ν , а именно,

$$F_\nu(\xi, \eta) = \lambda_\nu(\sigma) f_\nu(\xi, \eta),$$

где

$$\lambda_\nu(\sigma) = \frac{n}{3} \sigma^{(l)} = \binom{n}{3}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молчанов В.Ф., Волотова Н.Б., Цыкина С.В., Гришина О.В. Полиномиальное квантование // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6-3. С. 1443-1474.
2. Цыкина С.В. Символы в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2093-2097. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097.
3. Цыкина С.В. Об умножении символов в полиномиальном квантовании // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6-1. С. 1341-1345. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345.
4. Tsykina S. V. Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudoorthogonal group of translations // Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics: international workshop. Moscow, 2007. Vol. 2. P. 63-71.
5. Молчанов В.Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом // Математический сборник. 1970. Т. 81. Вып. 3. С. 358-375.
6. Molchanov V.F., Volotova N.B. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces // Acta Appl. Math. 2004. Vol. 81. № 1-3. P. 215-232.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Цыкина Светлана Викторовна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры функционального анализа, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-838-845

SYMBOLS IN POLYNOMIAL QUANTIZATION:
EXPLICIT EXPRESSIONS

S. V. Tsykina

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: tsykinasv@yandex.ru

Abstract. In this work we give explicit expressions of covariant symbols in polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces.

Keywords: Lie groups and Lie algebras; pseudo-orthogonal groups; representations of Lie groups; para-Hermitian symmetric spaces; covariant symbols; polynomial quantization

REFERENCES

1. Molchanov V.F., Volotova N.B., Tsykina S.V., Grishina O.V. Polinomial'noye kvantovaniye [Polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2009, vol. 14, no. 6-3, pp. 1443-1474. (In Russian).
2. Tsykina S.V. Simvoly v polinomial'nom kvantovanii [Symbols in polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2093-2097. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2093-2097.
3. Tsykina S.V. Ob umnozhenii simvolov v polinomial'nom kvantovanii [On multiplication of symbols in polynomial quantization]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6-1, pp. 1341-1345. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1341-1345.
4. Tsykina S.V. Polynomial quantization on para-Hermitian symmetric spaces with pseudoorthogonal group of translations. *International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics”*. Moscow, 2007, vol. 2, pp. 63-71.
5. Molchanov V.F. Predstavleniya psevdootogonal'noy gruppy, svyazannyye s konusom [Representations of pseudo-orthogonal groups associated with a cone]. *Matematicheskiiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1970, vol. 81, no. 3, pp. 358-375. (In Russian).
6. Molchanov V.F., Volotova N.B. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. *Acta Appl. Math.*, 2004, vol. 81, no. 1-3, pp. 215-232.

Received 12 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Tsykina Svetlana Victorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Functional Analysis Department, e-mail: tsykinasv@yandex.ru

For citation: Tsykina S.V. Simvoly v polinomial'nom kvantovanii: yavnye formuly [Symbols in polynomial quantization: explicit expressions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 838–845. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-838-845 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860

УДК 519.6

МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ И УЛЬТРАФИЛЬТРЫ ШИРОКО ПОНИМАЕМЫХ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

✉ А. Г. Ченцов

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Аннотация. Рассматриваются два типа семейств множеств широко понимаемого измеримого пространства: ультрафильтры (максимальные фильтры) и максимальные сцепленные системы. Получающиеся при этом множества ультрафильтров и максимальных сцепленных систем оснащаются каждое парой сравнимых топологий (по смыслу «волмэновской» и «стоуновской»), в результате чего реализуются два битопологических пространства, одно из которых оказывается подпространством другого; точнее, ультрафильтры являются максимальными сцепленными системами, а тогда совокупность последних образует объемлющее битопологическое пространство. С использованием топологических конструкций устанавливаются некоторые характеристические свойства ультрафильтров и (в меньшей степени) максимальных сцепленных систем (речь идет о необходимых и достаточных условиях максимальнойности фильтров и сцепленных систем).

Ключевые слова: битопологическое пространство; топология; ультрафильтр

Введение

Ультрафильтры (у/ф) используются в различных конструкциях общей топологии, теории меры, теории булевых алгебр. Широко известны компактификация Стоуна–Чеха, расширение Волмэна, пространства Стоуна. В первом случае используются у/ф семейства всех подмножеств (п/м) фиксированного множества (единицы), во втором – у/ф семейства замкнутых множеств топологического пространства (ТП), удовлетворяющего аксиоме T_1 , а в третьем – у/ф алгебры множеств. Представляется полезным

объединить упомянутые (и многие другие) случаи, полагая, что упомянутые семейства являются частными случаями некоторого общего варианта структуры одного достаточно универсального типа. В качестве данного варианта предлагается (для каждого фиксированного множества – «единицы») использовать π -систему [1, с. 14] с «нулем» (в виде пустого множества) и «единицей» в виде исходного объемлющего множества (сама же π -система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Топологии, семейства замкнутых множеств в ТП, алгебры и полуалгебры множеств являются π -системами упомянутого типа. Среди π -систем особо выделяем решетки π/μ объемлющего множества (решеточность понимается в смысле упорядоченности по включению).

Итак, будем рассматривать μ/ϕ π -систем (см. [2]) и, в частности, μ/ϕ решеток с «нулем» и «единицей», привлекая два естественных варианта оснащения топологии: имеется в виду аналог схемы Стоуна, применяемой обычно в случае измеримого пространства (ИП) с алгеброй множеств, и топологию волмэновского типа, которая, в частности, использовалась при построении суперрасширения ТП (см. [3–5] и др.; особо отметим систематическое изложение в [6, гл. VII, 4]). С конструкцией суперрасширения, применяемой обычно в случае T_1 -пространств, связано и свойство суперкомпактности [3–6], реализующееся для пространства максимальных сцепленных систем (МСС) замкнутых множеств (см. [6, гл. VII, 4]); при этом замкнутые μ/ϕ (точнее, μ/ϕ семейства замкнутых множеств) являются МСС. Обратное, вообще говоря, неверно (см. [6, гл. VII, 4.18]). В этой ситуации логично рассматривать пространство МСС как объемлющее к пространству μ/ϕ , что естественно порождает вопрос о битопологическом его оснащении (см. [7]), коль скоро такое оснащение реализуется, как уже отмечалось, для множества μ/ϕ . Оказывается, данное оснащение удастся реализовать посредством схем, подобных используемым в случае μ/ϕ . Итак, множество МСС также оснащаем, имея в виду идейную аналогию, «стоуновской» и «волмэновской» топологиями (последнюю называют обычно топологией волмэновского типа). В ряде случаев упомянутые топологии совпадают, а соответствующее битопологическое пространство (БТП) вырождается, реализуя при этом суперкомпакт (суперкомпактное T_2 -пространство). С другой стороны, известны случаи, когда «стоуновская» и «волмэновская» топологии на множестве МСС различаются (аналогичные случаи известны и для пространств μ/ϕ). Упомянутые возможности обсуждаются в настоящей работе.

1. Общие положения

Используем стандартную теоретико-множественную символику: кванторы, связи, A – пустое множество; def заменяет фразу «по определению», $\stackrel{\varepsilon}{=}$ – равенство по определению. Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Для произвольных объектов a и b через $\{a; b\}$ обозначаем множество, содержащее a , b и не содержащее никаких других элементов. Если x – объект, то $\{x\} \stackrel{\varepsilon}{=} \{x\}$ есть синглетон со свойством $x \in \{x\}$. Заметим, что для любых двух объектов (см. [8, гл. II, 2]) u и v имеем $\{u; v\} = \{u\} \cap \{v\}$; для трех объектов p , q и r $\{p; q; r\} \stackrel{\varepsilon}{=} \{p; q\} \cap \{r\} = \{p\} \cap \{q\} \cap \{r\}$. Множества являются

объектами; поэтому, следуя [8, гл. II, 2, (1)], полагаем при всяком выборе объектов m и n , что $(m, n) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \} m \langle ; \} m; n \langle \langle$, получая упорядоченную пару с первым элементом m и вторым элементом n . Для каждой упорядоченной пары z через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z , однозначно определяемые условием $z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z))$.

Если X – множество, то через $\mathcal{S}(X)$ (через $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X , $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(X) = \mathcal{S}(X) \S \mathcal{A}$; $\text{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(X)$. Для произвольного непустого семейства $\mathfrak{X}$ полагаем, что

$$\begin{aligned} \} \cap \langle (\mathfrak{X}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \bigcup_{X \Delta \langle} X : \mathcal{Y} / \mathcal{S}(\mathfrak{X}) \langle, \} \vee \langle (\mathfrak{X}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \bigcap_{X \Delta \langle} X : \mathcal{Y} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathfrak{X}) \langle, \\ \} \cap \langle_{\#} (\mathfrak{X}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \bigcup_{X \Delta \mathcal{L}} X : \mathcal{L} / \text{Fin}(\mathfrak{X}) \langle, \} \vee \langle_{\#} (\mathfrak{X}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \bigcap_{X \Delta \mathcal{L}} X : \mathcal{L} / \text{Fin}(\mathfrak{X}) \langle, \end{aligned} \quad (1.1)$$

получая четыре семейства п/м объединения всех множеств из $\mathfrak{X}$; само $\mathfrak{X}$ является под-семейством каждого из вышеупомянутых четырех семейств (см. (1.1)). В дальнейшем семейства (1.1) используются как правило при условии $\mathcal{A} / \mathfrak{X}$. Если $\mathbb{M}$ – множество и $\mathcal{P} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathcal{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{P}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathbb{M} \S M : M / \mathcal{P} \langle / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(\mathbb{M})).$$

Для непустого семейства $\mathcal{E}$ и множества B в виде $\mathcal{E} \setminus_B \stackrel{\varepsilon}{=} \} A \vee B : A / \mathcal{E} \langle / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(B))$ имеем след $\mathcal{E}$ на множество B . Каждому семейству $\mathcal{I}$ и множеству S сопоставляем семейство $[\mathcal{I}](S) \stackrel{\varepsilon}{=} \} H / \mathcal{I} \setminus S \rightarrow H \langle / \mathcal{S}(\mathcal{I})$.

Если U и V – множества, то V^U есть def множество всех отображений из U в V ; при f / V^U и $W / \mathcal{S}(U)$ в виде $f^1(W) \stackrel{\varepsilon}{=} \} f(x) : x / W \langle / \mathcal{S}(V)$ реализуется образ W при действии f . Как обычно, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, $\mathbb{N} \stackrel{\varepsilon}{=} \} 1; 2; \dots \langle$ и при $n / \mathbb{N}$ $\overline{1, n} \stackrel{\varepsilon}{=} \} k / \mathbb{N} \setminus k \subset n \langle$, а также $n, \overleftarrow{\in} \stackrel{\varepsilon}{=} \} k / \mathbb{N} \setminus k \subset k \langle$. Если S – множество и $n / \mathbb{N}$, то вместо $S^{\overline{1, n}}$ используем более традиционное обозначение S^n , полагая при этом, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. Если M – множество, то

$$\pi[M] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{P} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(M)) \setminus (\mathcal{A} / \mathcal{P}) \& (M / \mathcal{P}) \& (A \vee B / \mathcal{P} \exists A / \mathcal{P} \exists B / \mathcal{P}) \langle$$

есть семейство всех π -систем п/м множества M с «нулем» и «единицей», а

$$\tilde{\pi}^0[M] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{P} / \pi[M] \setminus \exists L / \mathcal{P} \exists x / M \S L \emptyset \Lambda / \mathcal{P} : (x / \Lambda) \& (\Lambda \vee L = \mathcal{A}) \langle$$

есть семейство всех отделимых π -систем п/м упомянутого множества; в виде $(\text{alg})[M] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{P} / \pi[M] \setminus \exists E \S L / \mathcal{P} \exists L / \mathcal{P} \langle$ имеем семейство все алгебр п/м M .

Заметим, что при всяком выборе непустого множества X , π -системы $\mathcal{Y} / \pi[X]$ и множества $Y / \mathcal{Y}$ в виде $[\mathcal{C}_X[\mathcal{Y}]](Y)$ имеем непустое семейство п/м X , а потому определено пересечение всех множеств данного семейства; эти множества называем квазиокрестностями Y . С учетом этого корректно следующее определение: если X – непустое множество, то

$$\pi^{\natural}[X] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{Y} / \pi[X] \setminus \bigcap_{\Lambda \Delta [\mathcal{C}_X[\cdot]](Y)} \Lambda / \mathcal{C}_X[\mathcal{Y}] \exists Y / \mathcal{Y} \langle;$$

ясно, что $\pi^h[X] = \} \mathcal{Y} / \pi[X] \setminus \exists Y / \mathcal{Y} \emptyset \Lambda_0 / [C_X[\mathcal{Y}]](Y) : \Lambda_0 \rightarrow \Lambda \exists \Lambda / [C_X[\mathcal{Y}]](Y) \langle$. Введено семейство π -систем с наименьшими квазиокрестностями всех своих множеств.

Элементы топологии. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$. Через $(\text{top})[\mathbf{I}]$ обозначаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$ и полагаем $(\text{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} C_{\mathbf{I}}[\tau] : \tau / (\text{top})[\mathbf{I}] \langle$ (семейства из $(\text{top})[\mathbf{I}]$ и $(\text{clos})[\mathbf{I}]$ находятся в естественной двойственности). Полагаем, что

$$(\text{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \beta / \mathcal{S}^q(\mathcal{S}(\mathbf{I})) \setminus \langle \mathbf{I} = \bigcup_{B \Delta \beta} B \rangle \& (\exists B_1 / \beta \exists B_2 / \beta \exists x / B_1 \vee B_2 \emptyset B_3 / \beta : \\ (x / B_3) \& (B_3 \rightarrow B_1 \vee B_2)) \langle,$$

$$(\text{cl} \text{ BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \beta / \mathcal{S}^q(\mathcal{S}(\mathbf{I})) \setminus \langle \mathbf{I} / \beta \rangle \& (\bigcap_{B \Delta \beta} B = \mathcal{A} \& (\exists B_1 / \beta \exists B_2 / \beta \exists x / \mathbf{I} \S (B_1 \cap B_2) \\ \emptyset B_3 / \beta : (B_1 \cap B_2 \rightarrow B_3) \& (x / B_3)) \langle ;$$

введены базы топологий (открытые базы) и базы семейств замкнутых множеств (замкнутые базы). Если $\tau / (\text{top})[\mathbf{I}]$, то семейства из $(\tau \text{ BAS})_0[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \beta / (\text{BAS})[\mathbf{I}] \setminus \tau = \} \cap \langle (\beta) \langle$ являются (открытыми) базами ТП $(\mathbf{I}, \tau)$, а семейства из $(\text{cl} \text{ BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \beta / (\text{cl} \text{ BAS})[\mathbf{I}] \setminus C_{\mathbf{I}}[\tau] = \} \vee \langle (\beta) \langle$, соответственно, замкнутыми базами этого ТП. Семейства из $(\text{p} \text{ BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \kappa / \mathcal{S}^q(\mathcal{S}(\mathbf{I})) \setminus \vee \langle \#(\kappa) / (\text{BAS})[\mathbf{I}] \langle$ – суть открытые предбазы топологий на $\mathbf{I}$ (предбазы открытых множеств), а семейства из $(\text{p} \text{ BAS})_{\text{cl}}[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \chi / \mathcal{S}^q(\mathcal{S}(\mathbf{I})) \setminus \cap \langle \#(\chi) / (\text{cl} \text{ BAS})[\mathbf{I}] \langle$ – замкнутые предбазы топологий на $\mathbf{I}$. Наконец, при $\tau / (\text{top})[\mathbf{I}]$ в виде

$$(\text{p} \text{ BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \kappa / (\text{p} \text{ BAS})[\mathbf{I}] \setminus \vee \langle \#(\kappa) / (\tau \text{ BAS})_0[\mathbf{I}] \langle$$

имеем семейство всех открытых предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$; соответственно,

$$(\text{p} \text{ BAS})_{\text{cl}}^0[\mathbf{I}; \tau] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \chi / (\text{p} \text{ BAS})_{\text{cl}}[\mathbf{I}] \setminus \cap \langle \#(\chi) / (\text{cl} \text{ BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \langle$$

есть семейство всех замкнутых предбаз упомянутого ТП.

Если $\tau / (\text{top})[\mathbf{I}]$ и $x / \mathbf{I}$, то $N_{\tau}^0(x) \stackrel{\varepsilon}{=} \} G / \tau \setminus x / G \langle$ и $N_{\tau}(x) \stackrel{\varepsilon}{=} \} H / \mathcal{S}(\mathbf{I}) \setminus \emptyset G / N_{\tau}^0(x) : G \rightarrow H \langle$. Тогда при $\tau / (\text{top})[\mathbf{I}]$ и $A / \mathcal{S}(\mathbf{I})$ в виде

$$\text{cl}(A, \tau) \stackrel{\varepsilon}{=} \} x / \mathbf{I} \setminus G \vee A \not\equiv \mathcal{A} \exists G / N_{\tau}^0(x) \langle = \} x / \mathbf{I} \setminus H \vee A \not\equiv \mathcal{A} \exists H / N_{\tau}(x) \langle$$

имеем замыкание A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. Если $\chi / \mathcal{S}^q(\mathcal{S}(\mathbf{I}))$, то полагаем, что

$$(\text{COV})[\mathbf{I} \setminus \chi] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \kappa / \mathcal{S}^q(\chi) \setminus \mathbb{I} = \bigcup_{X \Delta \kappa} X \langle$$

(семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из κ). Тогда в виде

$$((\text{SC} \text{ top})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \tau / (\text{top})[\mathbf{I}] \setminus \emptyset \mathcal{T} / (\text{p} \text{ BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \exists \mathcal{H} / (\text{COV})[\mathbf{I} \setminus \mathcal{T}] \\ \emptyset G_1 / \mathcal{H} \emptyset G_2 / \mathcal{H} : \mathbf{I} = G_1 \cap G_2 \langle$$

имеем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП. Если же $\tau / ((\mathbb{S}\mathbb{C} \text{ top})[\mathbf{I}])$ и при этом $(\mathbf{I}, \tau)$ есть T_2 -пространство, то данное ТП $(\mathbf{I}, \tau)$ называют суперкомпактом.

Сцепленные системы и фильтры. Согласно [3–6] семейство $\mathcal{J}$ называется сцепленным (сцепленной системой), если $I_1 \vee I_2 \not\equiv \mathcal{A}\exists I_1 / \mathcal{J}\exists I_2 / \mathcal{J}$. Тогда

$$(\text{link})[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{J} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(\mathbf{I})) \setminus I_1 \vee I_2 \not\equiv \mathcal{A}\exists I_1 / \mathcal{J}\exists I_2 / \mathcal{J}$$

есть семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{S}(\mathbf{I})$. Логично рассматривать сцепленные подсемейства того или иного семейства множеств: если $\mathfrak{X} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{S}(\mathbf{I}))$, то $\rangle \mathfrak{X} \text{ link}[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{J} / (\text{link})[\mathbf{I}] \setminus \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{X} \langle$; тогда

$$\rangle \mathfrak{X} \text{ link}_0[\mathbf{I}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{V} / \rangle \mathfrak{X} \text{ link}[\mathbf{I}] \setminus \exists \cup / \rangle \mathfrak{X} \text{ link}[\mathbf{I}] (\mathcal{V} \rightarrow \cup) =_{\infty} (\mathcal{V} = \cup) \langle$$

есть [9] семейство всех МСС, содержащихся в $\mathfrak{X}$.

Фиксируем до конца настоящего раздела π -систему $\mathcal{K} / \pi[\mathbf{I}]$. Тогда

$$\rangle \mathcal{K} \text{ link}_0[\mathbf{I}] = \} \mathcal{J} / \rangle \mathcal{K} \text{ link}[\mathbf{I}] \setminus \exists J / \mathcal{K} (J \vee I \not\equiv \mathcal{A}\exists I / \mathcal{J}) =_{\infty} (J / \mathcal{J}) \langle.$$

Введем в рассмотрение фильтры широко понимаемого измеримого пространства (ИП) $(\mathbf{I}, \mathcal{K})$:

$$\mathbb{F}'(\mathcal{K}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{G} / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}}(\mathcal{K} \S \} \mathcal{A}) \setminus (A \vee B / \mathcal{G} \exists A / \mathcal{G} \exists B / \mathcal{G}) \& (\exists F / \mathcal{G} \exists J / \mathcal{K} (F \rightarrow J) =_{\infty} (J / \mathcal{G}) \langle / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \rangle \mathcal{K} \text{ link}[\mathbf{I}])$$

есть множество всех вышеупомянутых фильтров; если $x / \mathbf{I}$, то

$$(\mathcal{K} \text{ triv})[x] \stackrel{\varepsilon}{=} \} J / \mathcal{K} \setminus x / J \langle / \mathbb{F}'(\mathcal{K})$$

есть тривиальный (фиксированный) фильтр, соответствующий точке x . В виде

$$\begin{aligned} \mathbb{F}'_0(\mathcal{K}) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{V} / \mathbb{F}'(\mathcal{K}) \setminus \exists \mathcal{G} / \mathbb{F}'(\mathcal{K}) (\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}) =_{\infty} (\mathcal{V} = \mathcal{G}) \langle = \} \mathcal{V} / \mathbb{F}'(\mathcal{K}) \setminus \\ \exists J / \mathcal{K} (J \vee U \not\equiv \mathcal{A}\exists U / \mathcal{V}) =_{\infty} (J / \mathcal{V}) \langle = \} \mathcal{V} / \rangle \mathcal{K} \text{ link}_0[\mathbf{I}] \setminus \\ A \vee B / \mathcal{V} \exists A / \mathcal{V} \exists B / \mathcal{V} \langle / \mathcal{S}^{\mathfrak{q}} \rangle \mathcal{K} \text{ link}_0[\mathbf{I}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

имеем семейство всех у/ф ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{K})$; заметим, что у/ф данного ИП – суть максимальные центрированные подсемейства π -системы $\mathcal{K}$ и только они (см. [3, раздел 3]). Напомним, что с учетом леммы Цорна стандартным способом проверяется, что

$$\exists \mathcal{G} / \mathbb{F}'(\mathcal{K}) \emptyset \mathcal{V} / \mathbb{F}'_0(\mathcal{K}) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}.$$

Аналогичное свойство имеет место для сцепленных систем:

$$\exists \mathcal{F} / \rangle \mathcal{K} \text{ link}[\mathbf{I}] \emptyset \mathcal{T} / \rangle \mathcal{K} \text{ link}_0[\mathbf{I}] : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}.$$

Применение упомянутых двух свойств традиционно и специально в дальнейшем оговариваться не будет. В связи со свойствами тривиальных фильтров отметим, что (см. [10, (5.9)])

$$((\mathcal{K} \text{ triv})[x] / \mathbb{F}'_0(\mathcal{K}) \exists x / \mathbf{I}) \Rightarrow_{\infty} (\mathcal{K} / \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]). \quad (1.3)$$

В (1.3) имеем необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров. В связи с представлениями $\mathcal{U}/\mathcal{F}$ напомним известное свойство

$$(\mathcal{K} / (\text{alg})[\mathbf{I}]) =_{\infty} (\mathbb{F}'_0(\mathcal{K}) = \} \mathcal{V} / \mathbb{F}'(\mathcal{K}) \setminus \exists A / \mathcal{K} (A / \mathcal{V}) \{ (\mathbf{I} \S A / \mathcal{V}) \}.$$

Подобное представление имеет место и для МСС.

Предложение 1.1. Если $\mathcal{K} / (\text{alg})[\mathbf{I}]$, то справедливо равенство

$$\} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}] = \} \mathcal{F} / \} \mathcal{K} \text{ link}|[\mathbf{I}] \setminus \exists A / \mathcal{K} (A / \mathcal{F}) \{ (\mathbf{I} \S A / \mathcal{F}) \}. \quad (1.4)$$

Доказательство. Пусть Ω – семейство в правой части (1.4). Покажем, что $\} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}] = \Omega$. С использованием соотношений двойственности проверяется вложение $\} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}] \rightarrow \Omega$. Пусть $\mathcal{W} / \Omega$. Покажем, что $\mathcal{W} / \} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}]$. Допустим противное: $\mathcal{W} / \} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}]$. Тогда для некоторого $\mathcal{X} / \} \mathcal{K} \text{ link}|[\mathbf{I}]$ имеем свойства

$$(\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}) \& (\mathcal{W} \not\equiv \mathcal{X}). \quad (1.5)$$

Тогда (см. (1.5)) $\mathcal{X} \S \mathcal{W} \not\equiv \mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{W} / \mathcal{X} \S \mathcal{W}$. Тогда, в частности, $\mathcal{W} / \mathcal{K}$. По определению Ω имеем, что $(\mathcal{W} / \mathcal{W}) \{ (\mathbf{I} \S \mathcal{W} / \mathcal{W})$. По выбору $\mathcal{W}$ получаем, что $\mathbf{I} \S \mathcal{W} / \mathcal{W}$. Тогда $\mathbf{I} \S \mathcal{W} / \mathcal{X}$. Последнее невозможно, т.к. $\mathcal{W} / \mathcal{X}$, и мы получаем противоречие со сцепленностью $\mathcal{X}$. Данное противоречие доказывает требуемое свойство максимальности $\mathcal{W}$. Итак, $\Omega \rightarrow \} \mathcal{K} \text{ link}|_0[\mathbf{I}]$. $\square$

2. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем

Фиксируем в дальнейшем непустое множество E и π -систему $\mathcal{M} / \pi[E]$. Рассматриваем оснащения (топологиями) для непустого семейства $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$. Если $L / \mathcal{M}$ то полагаем

$$\Phi_{\mathcal{U}}(L) \stackrel{\varepsilon}{=} \} \mathcal{V} / \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) L / \mathcal{V} \{.$$

При этом $(\text{UF})[E; \mathcal{M}] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \Phi_{\mathcal{U}}(L) : L / \mathcal{M} / \pi[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})]$; в частности, $(\text{UF})[E; \mathcal{M}] / (\text{BAS})[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})]$ порождает топологию $\mathbf{T}'_{\mathcal{U}}[E] \stackrel{\varepsilon}{=} \} \cap \{ ((\text{UF})[E; \mathcal{M}] / (\text{top})[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})])$. В виде

$$(\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}), \mathbf{T}'_{\mathcal{U}}[E]) \quad (2.1)$$

имеем (см. [11]) нульмерное [12, 6.2] T_2 -пространство со свойством

$$(\text{UF})[E; \mathcal{M}] \rightarrow \mathbf{T}'_{\mathcal{U}}[E] \vee \mathbf{C}_{\mathbb{F}'_0(\mathcal{U})}[\mathbf{T}'_{\mathcal{U}}[E]]; \quad (2.2)$$

если $\mathcal{M} / (\text{alg})[E]$, то ТП (2.1) является нульмерным компактом, а (2.2) превращается в равенство.

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{M} / \tilde{\pi}^0[E]$. Тогда (см. (1.3)) имеем отображение

$$(\mathcal{M} \text{ triv})[\ast] \stackrel{\varepsilon}{=} ((\mathcal{M} \text{ triv})[x])_{x \Delta E} / \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})^E, \quad (2.3)$$

которое реализует погружение E в ТП (2.1) со свойствами [10, предложение 1, (3.5), (3.6)]. В частности, образ множества E при действии отображения (2.3) есть множество, всюду плотное в ТП (2.2). $\square$

В общем случае $\mathcal{M}/\pi[E]$ при $H/\mathcal{S}(E)$ рассматриваем множество

$$\mathbb{F}_C^h[\mathcal{M}H] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \mathcal{V} / \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \emptyset U / \mathcal{V} : U \rightarrow H \langle$$

(при $L/\mathcal{M}$ и $H = E \S L$ имеем равенство $\mathbb{F}_C^h[\mathcal{M}H] = \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \S \Phi_U(L)$). Как следствие

$$\mathfrak{F}_C^h[\mathcal{M}] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \mathbb{F}_C^h[\mathcal{M}\Lambda] : \Lambda / C_E[\mathcal{M}] = C_{\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})}[(\text{UF})[E; \mathcal{M}] / (\text{cl} \text{ BAS})_0[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}); \mathbf{T}'_U[E]] \}. \quad (2.4)$$

Вместе с тем, как легко видеть (см. (2.4)), $\mathfrak{F}_C^h[\mathcal{M}] / (\text{p BAS})[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})]$ и определена (см. [2, (5.4)]) топология

$$\mathbf{T}'_U[E] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \cap \langle (\{ \vee \langle \# (\mathfrak{F}_C^h[\mathcal{M}]) / (\text{top})[\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})] \}. \quad (2.5)$$

В связи с (2.5) обратимся к представлениям [2] для $\mathcal{U}/\Phi$, рассматриваемых как варианты МСС. В этой связи напомним, что семейство

$$\begin{aligned} \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] = \{ \mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|[E] \setminus \exists \mathcal{T} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|[E] \ (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{T}) = \infty \ (\mathcal{F} = \mathcal{T}) \langle \\ = \{ \mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|[E] \setminus \exists L / \mathcal{M}(L \vee \Sigma \not\equiv \mathcal{A} \exists \Sigma / \mathcal{F}) = \infty \ (L / \mathcal{F}) \langle \end{aligned}$$

содержит $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ и, следовательно, непусто;

$$\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \{ \mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \setminus \mathcal{A} \vee B / \mathcal{F} \exists \mathcal{A} / \mathcal{F} \exists B / \mathcal{F} \langle / \mathcal{S}^{\mathfrak{e}} \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \}.$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\begin{aligned} \langle \rangle \mathcal{M} \text{ link}|^0[E \setminus L] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \setminus L / \mathcal{F} \langle \exists L / \mathcal{M} \\ \& \langle \rangle \mathcal{M} \text{ link}|^0_{\text{op}}[E \setminus H] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \emptyset \Sigma / \mathcal{F} : \Sigma \rightarrow H \langle \exists H / \mathcal{S}(E) \rangle \end{aligned}$$

(см. [2, раздел 4]). В этих терминах определяем, следуя [2, (4.9)], два непустых семейства

$$(\hat{\mathfrak{C}}'_0[E; \mathcal{M}] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \rangle \mathcal{M} \text{ link}|^0[E \setminus L] : L / \mathcal{M} \} \& (\hat{\mathfrak{C}}^0_{\text{op}}[E; \mathcal{M}] \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \rangle \mathcal{M} \text{ link}|^0_{\text{op}}[E \setminus \Lambda] : \Lambda / C_E[\mathcal{M}] \}), \quad (2.6)$$

для которых (см. [2, (4.10)]) $\mathfrak{C}'_0[E; \mathcal{M}] = C_{\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E]}[\mathfrak{C}^0_{\text{op}}[E; \mathcal{M}]]$ (семейства (2.6) находятся в двойственности). Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\text{op}}[E; \mathcal{M}] / (\text{p BAS})[\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E]]$, а потому данное семейство порождает топологию

$$\mathbb{T}_0 \rangle E \setminus \mathcal{M} \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \cap \langle (\{ \vee \langle \# (\hat{\mathfrak{C}}^0_{\text{op}}[E; \mathcal{M}]) / (\text{top})[\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E]] \},$$

для которой $\hat{\mathfrak{C}}'_0[E; \mathcal{M}]$ является [2, предложение 4.1] замкнутой предбазой. Более того (см. [2, раздел 5]), $\mathbb{T}_0 \rangle E \setminus \mathcal{M} / ((\mathbb{S}\mathbb{C}) \text{ top})[\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E]]$, а ТП

$$\langle \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E], \mathbb{T}_0 \rangle E \setminus \mathcal{M} \quad (2.7)$$

есть суперкомпактное T_1 -пространство (см. [2, (5.6)]), для которого

$$\mathbf{T}'_U[E] = \mathbb{T}_0 \rangle E \setminus \mathcal{M}_{\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})}. \quad (2.8)$$

Таким образом, имеем в виде

$$(\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}), \mathbf{T}'_U[E]) \quad (2.9)$$

подпространство ТП (2.7). Как следствие (используем также построения на основе [11, (6.18)]) получаем следующее положение.

Предложение 2.1. В виде (2.9) реализуется компактное T_1 -пространство.

Заметим, что $\hat{\mathcal{C}}'_0[E; \mathcal{M}] / (\text{p-BAS})[\mathcal{M} \text{ link}|_0[E]]$, а потому определена топология

$$\mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M} \stackrel{\varepsilon}{=} \} \cap \langle (\} \vee \langle_{\#} (\hat{\mathcal{C}}'_0[E; \mathcal{M}] / (\text{top})[\mathcal{M} \text{ link}|_0[E]]),$$

превращающая [2, предложение 6.4] $\mathcal{M} \text{ link}|_0[E]$ в нульмерное T_2 -пространство

$$(\mathcal{M} \text{ link}|_0[E], \mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}). \quad (2.10)$$

При этом согласно [2, предложение 6.5] в виде (2.1) имеем подпространство ТП (2.10):

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E] = \mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}_{\mathbb{F}'_0(\mathcal{U})}. \quad (2.11)$$

Кроме того, отметим (см. [2, предложение 7.1]), что топологии $\mathbb{T}_0 \rangle E \backslash \mathcal{M}$ и $\mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}$ сравнимы, причем

$$\mathbb{T}_0 \rangle E \backslash \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}. \quad (2.12)$$

Итак (см. (2.9), (2.10)), получаем следующее БТП с элементами в виде МСС:

$$(\mathcal{M} \text{ link}|_0[E], \mathbb{T}_0 \rangle E \backslash \mathcal{M}, \mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}). \quad (2.13)$$

При этом (см. (2.8), (2.11), (2.12)) $\mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E] \rightarrow \mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E]$; в виде

$$(\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}, \mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E]), \mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E]) \quad (2.14)$$

имеем БТП с элементами в виде $\mathcal{U}/\Phi$ π -системы $\mathcal{M}$. В силу (2.8) и (2.11) логично рассматривать БТП (2.14) как подпространство БТП (2.13). В связи с исследованием БТП отметим монографию [13]. Если (X, τ_1, τ_2) – произвольное БТП (X – множество, $\tau_1 / (\text{top})[X]$, $\tau_2 / (\text{top})[X]$ и при этом $\tau_1 \rightarrow \tau_2$), то называем данное БТП вырожденным, если $\tau_1 = \tau_2$. Напомним, что имеет место следующее (см. [9, 8, 9])

Предложение 2.2. Если $\mathcal{M} / (\text{alg})[E]$ или $\mathcal{M} / (\text{top})[E]$, то БТП (2.13) вырождено, то есть $\mathbb{T}_0 \rangle E \backslash \mathcal{M} = \mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}$, а каждое из ТП (2.7), (2.10) является нульмерным суперкомпактом.

Отметим, кроме того, что справедливо

Предложение 2.3. Если $\mathcal{M} / \pi^1[E]$, то БТП (2.14) вырождено:

$$\mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E] = \mathbb{T}'_{\mathcal{U}}[E]; \quad (2.15)$$

при этом каждое из ТП (2.1), (2.9) является нульмерным компактом, то есть нульмерным компактным T_2 -пространством.

Из (2.8) и предложения 2.1 следует, что в общем случае $\mathcal{M} / \pi[E]$ множество $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ компактно в ТП (2.7). Как следствие (см. (2.11)) получаем следующее положение.

Предложение 2.4. Если $\mathcal{M} / \pi^1[E]$, то $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ замкнуто в ТП (2.10):

$$\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) / C_{\mathcal{U} \text{ link}|_0[E]}[\mathbb{T}, \rangle E \backslash \mathcal{M}].$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}/\pi^{\sharp}[E]$. Тогда в силу предложения 2.3 имеем равенство (2.15), означающее согласно предложению 2.1, что (2.1) есть компактное ТП. Стало быть (см. (2.11)), $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ есть компактное множество в T_2 -пространстве (2.10), откуда и вытекает требуемое утверждение. $\square$

В связи с вопросом об условиях невырожденности БТП (2.13) и (2.14) отметим положения [9, раздел 7]: если $\tau \neq (\text{top})[E]$, (E, τ) есть T_1 -пространство и при этом $\tau \neq \mathcal{S}(E)$, то при $\mathcal{M} \models C_E[\tau]$

$$(\mathbb{T}'_U[E] \neq \mathbb{T}'_U[E]) \& (\mathbb{T}_0)E \setminus \mathcal{M} \neq \mathbb{T}_1)E \setminus \mathcal{M}.$$

Итак, в случае T_1 -пространства, не являющегося дискретным, при $\mathcal{M} \models C_E[\tau]$, где τ – топология данного пространства, каждое из БТП (2.13), (2.14) является невырожденным (в [14] приведен целый ряд содержательных примеров такого рода).

Пусть до конца настоящего раздела $\mathcal{M}/\tilde{\pi}^0[E]$ (итак, $\mathcal{M}$ есть отделимая π -система). Поэтому в силу (1.3) $(\mathcal{M} \text{ трив})[x] \neq \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \exists x \neq E$. Тогда с учетом [10, предложение 1] при $A \neq \mathcal{S}(E)$ устанавливается, что

$$\text{cl}(\{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq A \setminus \mathbb{T}'_U[E]) = \mathcal{V} \neq \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \vee U \neq \mathcal{A} \exists U \neq \mathcal{V}.$$

С этим свойством связано одно следствие, показывающее, что в рассматриваемом случае две вышеупомянутые топологии на множестве U/Φ в некотором смысле близки:

$$\Phi_U(L) = \text{cl}(\{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq L \setminus \mathbb{T}'_U[E]) = \text{cl}(\{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq L \setminus \mathbb{T}'_U[E]) \exists L \neq \mathcal{M}$$

Это означает, в частности, что $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \text{cl}(\{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq E \setminus \mathbb{T}'_U[E]) = \text{cl}(\{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq E \setminus \mathbb{T}'_U[E])$. Грубо говоря, само исходное множество E всюду плотно в каждом из ТП (2.1) и (2.9).

3. Некоторые типы ультрафильтров

В общем случае $\mathcal{M}/\pi[E]$ определено следующее множество

$$\mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M}) \stackrel{\varepsilon}{=} \{\mathcal{M} \text{ трив}\}[x] : x \neq E \setminus \mathcal{S}(\mathbb{F}'(L))$$

(всех тривиальных фильтров ИП $(E, \mathcal{M})$). Тогда [10, (2.3)]

$$\mathbb{F}'_{0,f}(\mathcal{M}) \stackrel{\varepsilon}{=} \mathcal{V} \neq \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \bigcap_{L \Delta \mathcal{X}} L = \mathcal{A} = \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \S \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M}) \quad (3.1)$$

есть множество всех свободных U/Φ ИП $(E, \mathcal{M})$. Отметим некоторые примеры возможных вариантов представления $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$.

Пример 3.1. Рассмотрим случай, когда реализуется равенство $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,f}(\mathcal{M})$. Пусть $E = \mathbb{N}$ и $\mathcal{M} \models \{n, \tilde{\in} : n \neq \mathbb{N} \setminus \{\cap\} \mathcal{A}\}$; тогда $\mathcal{M}/(\text{top})[E]$ и, в частности, $\mathcal{M}/\pi[E]$. При этом $(E, \mathcal{M})$ является T_0 -пространством, $\mathcal{V}_0 \stackrel{\varepsilon}{=} \{n, \tilde{\in} : n \neq \mathbb{N} \setminus \{\cap\} \mathbb{F}'_{0,f}(\mathcal{M})$ является наибольшим (в упорядоченности по включению) элементом $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$. Если $t \neq E$, то $(\mathcal{M} \text{ трив})[t] = \{k, \tilde{\in} : k \neq \overline{1, t} \setminus \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M}) \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$, так как $(\mathcal{M} \text{ трив})[t] \rightarrow \mathcal{V}_0$ и при этом $(\mathcal{M} \text{ трив})[t] \neq \mathcal{V}_0$. Поскольку выбор t был произвольным, то $\mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M}) \vee \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$ откуда в силу (3.1) получаем требуемое равенство $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,f}(\mathcal{M})$. При этом $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,f}(\mathcal{M}) = \mathcal{V}_0$ по свойствам $\mathcal{V}_0$. $\square$

Пример 3.2. Рассмотрим случай, когда реализуется равенство $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$. Пусть $\mathcal{M} = C_E[\tau]$, где топология $\tau / (\text{top})[E]$ такова, что (E, τ) есть компактное T_1 -пространство. Тогда $\mathcal{M} / \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ в силу (1.3). Поскольку при $\mathcal{V} / \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ имеем, что $\mathcal{V}$ – центрированное семейство замкнутых множеств, получаем в силу компактности (E, τ) , что $\mathcal{V} / \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$. Итак, $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$, а тогда $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$. Данное равенство понятно в свете простейших свойств расширения Волмэна. $\square$

Замечание 3.1. Пусть топология $\tau / (\text{top})[E]$ такова, что (E, τ) есть компактное ТП, а $\mathcal{M} = C_E[\tau]$ (как и в примере 3.2). Тогда $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$ и $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \not\cong \mathcal{A}$. Итак, среди тривиальных фильтров есть максимальные. Как следствие реализуется свойство

$$(\exists x_1 / E \emptyset x_2 / E : ((\mathcal{M} \text{ triv})[x_1] \rightarrow (\mathcal{M} \text{ triv})[x_2]) \& ((\mathcal{M} \text{ triv})[x_2] / \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})). \quad (3.2)$$

Замечание 3.2. Пусть τ удовлетворяет условию предыдущего замечания, а π -система $\mathcal{M} / \pi[E]$ такова, что $\mathcal{M} \rightarrow C_E[\tau]$. Тогда $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$ и выполняется (3.2).

Пример 3.3. Отметим один вариант ситуации, упомянутой в замечании 3.2. Пусть $a / \mathbb{R}$, $b / \mathbb{R}$ и $a < b$. Полагаем, что $E = [a, b]$ и $\mathcal{M} \stackrel{\varepsilon}{=} \{[pr_1(z), pr_2(z)] : z / [a, b] \circ [a, b] \langle$ (мы допускаем при определении $[c, d]$, где $c / \mathbb{R}$ и $d / \mathbb{R}$, любые соотношения между c и d , полагая $[c, d] \stackrel{\varepsilon}{=} \{\xi / \mathbb{R} \setminus (c \subset \xi) \& (\xi \subset d) \langle$ и допуская возможность совпадения $[c, d]$ и $\mathcal{A}$). Тогда $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$ (учитываем очевидное свойство $\mathcal{M} / \tilde{\pi}^0[E]$).

В [7, раздел 5] указан пример π -системы (точнее, решетки) замкнутых множеств в T_0 -пространстве, в котором имеются и максимальные тривиальные фильтры, то есть тривиальные u/ϕ , и тривиальные фильтры, не являющиеся максимальными.

4. Некоторые свойства максимальных сцепленных систем

Фиксируем π -систему $\mathcal{M} / \pi[E]$, оговаривая по мере надобности те или иные дополнительные условия. Рассмотрим некоторые положения, касающиеся свойств МСС π -системы $\mathcal{M}$

Легко видеть, что при $L / \mathcal{M} \S \mathcal{A}$ непременно $\Phi_{\mathcal{U}}(L) = \rangle \mathcal{M} \text{ link} |^0 [E \setminus L] \vee \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \not\cong \mathcal{A}$. Напомним здесь же, что $\mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$ есть множество, компактное в ТП (2.7). С учетом [11, (2.12)] проверяется

Предложение 4.1. Если $\mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link} |_0 [E] \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M})$, то

$$\bigcap_{\Sigma \Delta \mathcal{K}} \Sigma = \mathcal{A} \quad (4.1)$$

Итак, МСС, не являющиеся u/ϕ , в некотором отношении подобны свободным u/ϕ . Вполне очевидны следующие два предложения.

Предложение 4.2. Справедливо равенство $\rangle \mathcal{M} \text{ link} |_0 [E] \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) = \rangle \mathcal{M} \text{ link} |_0 [E] \S \mathbb{F}'(\mathcal{M})$.

Предложение 4.3. Если $\mathcal{F} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \S \mathbb{F}'_{0,t}(\mathcal{M})$, то справедливо (4.1).

Совсем кратко рассмотрим вопрос о существовании МСС, не являющихся u/ϕ ; будем при этом использовать конструкцию примера 4.18 в [6, гл. VII]. В частности, в дальнейших построениях, связанных с π -системами, будем всякий раз оговаривать естественное в свете упомянутого примера условие, связанное с тем, что множество E содержит не менее трех элементов.

Предложение 4.4. Если $\emptyset x / E \emptyset y / E \emptyset z / E$:

$$(x \neq y) \& (y \neq z) \& (x \neq z) \& (\{x; y\} / \mathcal{M} \& \{y; z\} / \mathcal{M} \& \{x; z\} / \mathcal{M}), \quad (4.2)$$

то справедливо следующее свойство непустоты:

$$\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \S \mathbb{F}'(\mathcal{M}) \neq \mathcal{A} \quad (4.3)$$

Доказательство. Зафиксируем x, y и z со свойством (4.2). Введем трех-элементное сцепленное семейство

$$\mathcal{U} \stackrel{\varepsilon}{=} \{ \{x; y\}; \{y; z\}; \{x; z\} \}, \quad (4.4)$$

для которого в силу (4.2) имеем включение $\mathcal{U} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|[E]$, а тогда для некоторой МСС $\mathcal{P} / \rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E]$ выполняется вложение $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}$.

Покажем, что $\mathcal{P} / \mathbb{F}'(\mathcal{M})$. В самом деле, допустим противное: пусть $\mathcal{P} / \mathbb{F}'(\mathcal{M})$. Тогда, в частности,

$$A \vee B / \mathcal{P} \quad \exists A / \mathcal{P} \quad \exists B / \mathcal{P}. \quad (4.5)$$

Поэтому согласно (4.4) и (4.5) $\{y\} = \{x; y\} \vee \{y; z\} / \mathcal{P}$ и по сцепленности $\mathcal{P}$ имеем из (4.4), что $\{x; z\} \vee \{y\} \neq \mathcal{A}$ что невозможно. Противоречие доказывает, что на самом деле $\rangle \mathcal{M} \text{ link}|_0[E] \S \mathbb{F}'(\mathcal{M}) \neq \mathcal{A}$ $\square$

В дальнейшем условии того, что множество E имеет мощность не менее трех, будем записывать в форме, подобной (4.2), с тем, чтобы подчеркнуть связь доказываемых ниже утверждений с последним предложением.

Следствие 4.1. Если

$$\emptyset x / E \emptyset y / E \emptyset z / E : (x \neq y) \& (y \neq z) \& (x \neq z), \quad (4.6)$$

то для $\mathcal{M} \models \mathbf{C}_E[\tau]$, где $\tau / (\text{top})[E]$ и при этом (E, τ) есть T_1 -пространство, справедливо (4.3).

Пусть $(\text{alg})_0^\varepsilon[E] \stackrel{\varepsilon}{=} \rangle \mathcal{M} / (\text{alg})[E] \setminus \{x\} / \mathcal{M} \exists x / E$ (тем самым введены алгебры п/м E , содержащие каждая синглетоны всех точек из E).

Следствие 4.2. Если выполнено условие (4.6) и $\mathcal{M} / (\text{alg})_0^\varepsilon[E]$, то справедливо свойство (4.3).

Разумеется, согласно предложению 4.2 имеем при условии (4.6) следующее положение: если $\mathcal{M} = C_E[\tau]$, где $\tau / (\text{top})[E]$ превращает E в T_1 -пространство (E, τ) , то

$$\langle \mathcal{M} \mid \text{link}|_0[E] \rangle \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M}) \neq \mathcal{A} \quad (4.7)$$

Аналогичным образом, при условии (4.6) для $\mathcal{M}/(\text{alg})_0^{\leq}[E]$ (4.7) также выполняется.

Напомним предложение 2.4. С учетом этого предложения и следствия 4.2 получаем

Предложение 4.5. Если выполнено (4.6) и $\mathcal{M}/(\text{alg})_0^{\leq}[E]$, то

$$\langle \mathcal{M} \mid \text{link}|_0[E] \rangle \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M} / T, \langle E \setminus \mathcal{M} \rangle \S \mathcal{A}.$$

Итак, если исходная π -система является алгеброй множеств с синглетами, то МСС, не являющиеся у/ф, составляют в своей совокупности непустое открытое множество в ТП (2.10), то есть в «стоуновской» топологии. По аналогии с предложением 4.4 (учитывается также предложение 4.16 в [6, гл. VII]) устанавливается

Предложение 4.6. Если выполнено условие (4.6) и $\mathcal{M} = C_E[\tau]$, где $\tau / (\text{top})[E]$ и при этом (E, τ) есть нормальное [12, 1.5] пространство, то

$$\langle \mathcal{M} \mid \text{link}|_0[E] \rangle \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M} / T_0) \langle E \setminus \mathcal{M} \rangle \S \mathcal{A}.$$

Следствие 4.3. Если выполнены все условия предложения 4.6, то

$$\langle \mathcal{M} \mid \text{link}|_0[E] \rangle \S \mathbb{F}'_0(\mathcal{M} / T, \langle E \setminus \mathcal{M} \rangle \S \mathcal{A}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
2. Ченцов А.Г. Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 257-272.
3. de Groot J. Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89-90.
4. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam. Math. Center Tract. Amsterdam, 1977. Vol. 85. 238 p.
5. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89. № 1. P. 81-91.
6. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
7. Ченцов А.Г. Суперрасширение как битопологическое пространство // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55-79.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
9. Ченцов А.Г. Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 3. С. 365-388.

10. *Ченцов А.Г.* Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87-101.
11. *Ченцов А.Г.* Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 113-142. DOI: 10.20537/vm110112.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
13. *Dvalishvili B.P.* Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures and applications // Mathematics Studies. Nort-Holland, 2005. 422 p.
14. *Chentsov A.G.* Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems // Ural Mathematical Journal. 2017. Vol. 3. № 2. P. 100-121.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела управляемых систем; Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация, профессор кафедры вычислительных методов и уравнений математической физики, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860

MAXIMAL LINKED SYSTEMS AND ULTRAFILTERS OF WIDELY UNDERSTOOD MEASURABLE SPACES

A. G. Chentsov

N.N.Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academii of Science
16 Kovalevskaja St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
The Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation
E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Abstract. Two types of set families (ultrafilters or maximal filters and maximal linked systems) for widely understood measurable space are considered. The resulting sets of ultrafilters and maximal linked systems are equipped with the pair of comparable topologies (within the meaning of «Wallman» and «Stone»). As a result, two bitopological spaces are realized; one of them turns out a subspace of another. More precisely, ultrafilters are maximal linked systems and the totality of the latter forms a cumulative bitopological space. With employment of topological constructions some characteristic properties of ultrafilters and (in smaller power) maximal linked systems are obtained (the question is necessary and sufficient conditions of maximality of filters and linked systems).

Keywords: bitopological space; topology; ultrafilters

REFERENCES

1. Bulinskiy A.V., Shiryayev A.N. *Teoriya sluchaynykh protsessov* [The Theory of Random Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. (In Russian).
2. Chentsov A.G. Bitopologicheskiye prostranstva ul'trafil'trov i maksimal'nykh stseplennykh sistem [Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257-272. (In Russian).
3. de Groot J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications*. Berlin, VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89-90.
4. van Mill J. Supercompactness and Wallman spaces. *Amsterdam. Math. Center Tract.*, Amsterdam, 1977, vol. 85, 238 p.
5. Strok M., Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81-91.
6. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnyye konstruksii* [General Topology. Main Constructions]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. (In Russian).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00410).

7. Chentsov A.G. Superrasshireniye kak bitopologicheskoye prostranstvo [Superextension as bitopological space]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU – Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at UdSU*, 2017, vol. 49, pp. 55-79. (In Russian).
8. Kuratovskiy K., Mostovskiy A. *Teoriya mnozhestv* [The Theory of Sets]. Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
9. Chentsov A.G. Ul'trafil'try i maksimal'nyye stseplennyye sistemy mnozhestv [Ultrafilters and maximal linked systems]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365-388. (In Russian).
10. Chentsov A.G. Nekotoryye svoystva ul'trafil'trov, svyazannyye s konstruktsiyami rasshireniy [Some ultrafilter properties connected with extension constructions]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2014, no. 1, pp. 87-101. (In Russian).
11. Chentsov A.G. Fil'try i ul'trafil'try v konstruktsiyakh mnozhestv prityazheniya [Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2011, no. 1, pp. 113-142. (In Russian). DOI: 10.20537/vm110112.
12. Engel'king R. *Obshchaya topologiya* [General Topology]. Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p. (In Russian).
13. Dvalishvili B.P. Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures and applications. *Mathematics Studies*. Nort-Holland, 2005, 422 p.
14. Chentsov A.G. Some representations connected with ultrafilters and maximal linked systems. *Ural Mathematical Journal*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 100-121.

Received 16 April 2018

Reviewed 22 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Chentsov Aleksandr Georgievich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of RAS, Chief Researcher; Institute of Radioelectronics and Information Technologies of Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, the Russian Federation, Professor, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

For citation: Chentsov A.G. Maksimal'nye stseplennyye sistemy i ul'trafil'try shiroko ponimaemykh izmerimyykh prostranstv [Maximal linked systems and ultrafilters of widely understood measurable spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 846–860. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-846-860 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876

УДК 517.977.56

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ЗАДАЧ В РАМКАХ МЕТОДА ПОДВИЖНЫХ УЗЛОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СВОБОДНЫМ ВРЕМЕНЕМ

≡ А. В. Чернов

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
603950, Российская Федерация, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, 23
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева»
603950, Российская Федерация, г. Н. Новгород, ул. Минина, 24
E-mail: chavnn@mail.ru

Аннотация. Дается строгое обоснование формул производных функционалов аппроксимирующих задач, возникающих при использовании метода подвижных узлов в рамках техники параметризации управления для решения задач оптимального управления со свободным временем. В качестве примера приводятся результаты численного решения задачи о посадке на Луну.

Ключевые слова: задача оптимального управления со свободным временем; техника параметризации управления; метод подвижных узлов

Введение

Как отмечено в [1], «проблема синтеза оптимального управления для сложных динамических систем аналитически неразрешима и сопряжена с принципиальными и вычислительными трудностями». При условии тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения однозначной глобальной разрешимости управляемой системы эффективным подходом к решению этой проблемы является применение техники параметризации управления, см., например, [2, 3]. Суть ее состоит в том, что за счет дискретизации управление отождествляется с конечным набором параметров, функционалы оптимизационной задачи обращаются в функции конечного числа переменных, а сама задача оптимизации — в конечномерную задачу математического программирования (*аппроксимирующую задачу*). Основная идея этой техники для одной конкретной распределенной системы первого порядка была описана в [4]. Там же было предложено использовать подвижную (управляемую) сетку при кусочно постоянной дискретизации управления и

были получены формулы частных производных функционала по параметрам. При этом для предотвращения переопределенности при налегании прямоугольников – элементов сетки друг на друга предлагалось итерационно поддерживать специальную систему ограничений на управляемые узлы сетки, а также производить коррекцию сетки, основанную на удалении «накрываемых» узлов (при вычислении значений управления) на каждой итерации. Позже в [5] для сосредоточенных систем в рамках техники последовательной линеаризации (предполагающей дискретизацию всей задачи, включая дискретизацию управляемой системы) был предложен *метод плавающих узлов* – с целью рационального выбора узлов сетки, см. также [6, п. 2.2.5]. Метод основан на замене независимой переменной $t = v(\tau)$, $\tau \in [0; 1]$, $v(0) = 0$, $v(1) = T$, $\frac{dv}{d\tau} \approx 0$. Разбиение отрезка $[0; 1]$ берется фиксированным, а функция $v(\tau)$, рассматриваемая как дополнительное управление, обеспечивает варьирование соответствующего разбиения отрезка $[0; T]$. Неотрицательность производной обеспечивает неналегание элементов разбиения друг на друга. Та же идея плавающих узлов, но уже в рамках техники параметризации управления, была предложена в [7, 8] под названием *control parametrization enhancing transform*. Там же было показано, что каждая из аппроксимирующих задач, рассматриваемая как конечномерная задача математического программирования, разрешима; проведен анализ сходимости аппроксимаций; приведено несколько примеров численного решения, продемонстрировавших эффективность метода. Поскольку управление $v(\tau)$ в [7, 8] подвергается кусочно постоянной дискретизации и входит всюду, куда входит независимая переменная, здесь можно увидеть некоторые трудности. Кроме того, при использовании методов первого порядка для решения аппроксимирующей задачи потребуются дифференцируемость правой части и интегранта функционала по переменной времени. В [9] была предложена более простая конструкция, обеспечивающая неналегание отрезков разбиения друг на друга и не предполагающая никаких дополнительных ограничений, введения новых функций и т.п. Кроме того, при строго сформулированных условиях были приведены «быстрые» формулы производных функций аппроксимирующей задачи для сосредоточенных задач оптимального управления со свободным временем в рамках метода подвижных узлов. В качестве примеров, подтверждающих эффективность соответствующей реализации метода подвижных узлов, были представлены результаты численного решения линейной задачи быстрогодействия и задачи о прокладке трассы. Однако никаких доказательств в [9] не приводилось ввиду их громоздкости. В [10] были представлены и строго доказаны формулы производных целевой функции аппроксимирующей задачи в рамках аналогичной реализации метода подвижных узлов для задачи оптимального управления системой Гурса–Дарбу на варьруемой области. Доказательство проводилось на основе полученной там же формулы приращения функционала по паре (u, T) для задачи оптимального управления абстрактным функционально-операторным уравнением типа Гаммерштейна на варьруемой по набору параметров T области (u – управляющая функция). Данная работа посвящена обоснованию формул [9] на основе абстрактной формулы приращения [10]. В качестве примера, подтверждающего эффективность метода, представлены результаты численного решения известной задачи о мягкой посадке на Луну.

1. Краткое описание метода подвижных узлов

Пусть $\ell, s \in \mathbb{N}$ – заданные числа; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^s, \alpha \geq 0 \geq \beta, \theta \in \mathbb{R}^\ell$ – заданные векторы; $\mathcal{F} = \{u \in L_{\mathbb{R}}^s[0; +\infty) : u(t) \in [\alpha; \beta] \text{ для п.в. } t \in [0; +\infty)\}$ – множество допустимых управлений; $f(t, \xi, v) : [0; +\infty) \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ – заданная функция, непрерывно дифференцируемая по переменным $\xi \in \mathbb{R}^\ell, v \in \mathbb{R}^s$ и вместе с производными измеримая по $t \in [0; +\infty)$, непрерывная по $(\xi, v) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s$ и при $\Pi_T = [0; T], m = \ell$ удовлетворяющая условиям:

- F₁)** $\forall T \in \mathbb{R}_+, x \in L_{\mathbb{R}}^\ell(\Pi_T), u \in L_{\mathbb{R}}^s(\Pi_T)$ имеем: $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L_1^m(\Pi_T)$;
- F₂)** $\forall T \in \mathbb{R}_+, x \in L_{\mathbb{R}}^\ell(\Pi_T), u \in L_{\mathbb{R}}^s(\Pi_T)$ имеем: $f_\xi^\infty(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L_{\mathbb{R}}^{m \times \ell}(\Pi_T)$;
- F₃)** функция $f_v^\infty(t, \xi, v)$ не зависит от v и непрерывна;
- F₄)** для любых $T \in \mathbb{R}_+$ и $x \in L_{\mathbb{R}}^\ell(\Pi_T)$ имеем $f_v^\infty(\cdot, x(\cdot)) \in L_{\mathbb{R}}^{m \times s}(\Pi_T)$.

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}^\infty = f(t, x, u), \quad t \in [0; +\infty), \quad x \in \mathbb{AC}^\ell[0; +\infty), \quad u \in \mathcal{F}; \quad x(0) = \theta. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbb{AC}^\ell[0; +\infty)$ – пространство функций, принадлежащих $\mathbb{AC}^\ell[0; T]$ для любого фиксированного $T > 0$; $\mathbb{AC}[0; T]$ – пространство функций, абсолютно непрерывных на $[0; T]$, наделенное нормой $\|x\|_{\mathbb{AC}[0; T]} = \|x(0)\| + x^\infty_{L_1[0; T]}$. Норму вектор-функции понимаем как норму ее модуля; модуль вектора – как сумму модулей компонент. Будем считать выполненным предположение

H) $\forall T \in \mathbb{R}_+$ существует константа $\gamma(T) > 0$ такая, что управляемая задача Коши (1.1) имеет единственное решение $x[u, T] \in C(\Pi_T)^\ell \cap \mathcal{R}u \in \mathcal{F}$, $\|x[u, T]\|_{L_\infty(\Pi_T)} \geq \gamma(T)$.

Достаточные условия выполнения предположения **H)** можно найти, например, в [11]. При каждом $T > 0$ будем рассматривать функционал

$$J[u] = J[u](T) = \int_0^T F(t, x_u(t), u(t)) dt,$$

где функция $F(t, \xi, v) : [0; +\infty) \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет таким же условиям, как каждая компонента вектор-функции f . В частности,

$$F(t, \xi, v) = \Phi_0(t, \xi) + \Phi(t, \xi), v. \quad (1.2)$$

Сделанные предположения позволяют нам записать управляемую задачу Коши (на каждом отрезке $[0; T]$) в виде интегрального уравнения

$$x = \theta + A \int_0^t f(\tau, x, u) d\tau, \quad t \in [0; T], \quad x \in L_{\mathbb{R}}^\ell[0; T],$$

где $A : L_1^\ell[0; T] \rightarrow L_1^\ell[0; T]$ – линейный ограниченный оператор (ЛОО), определяемый формулой $A[z](t) = \int_0^t z(\tau) d\tau$. Поскольку время $T \approx 0$ мы считаем свободным, то управляющими наборами являются пары $(u, T) \in \mathcal{F} \times \mathbb{R}^+$. Выберем произвольно финальное время $T \approx 0$ и возьмем два управления $u, \bar{u} \in \mathcal{F}$, принимающие нулевые

значения вне $[0; T]$. При сделанных предположениях удастся показать, что существует функция $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что справедливо представление

$$\Delta J = J[u](T) - J[u](0) = \int_0^T (f_v^\infty \dot{\psi} + (F_v^\infty)^\top \Delta u) dt + o(r), \quad (1.3)$$

где $r = \sigma(T) \|\Delta u\|_{L_1(\Pi_T)}$; $\psi = \psi[u, T] / L_\mathbb{R}^\ell[0; T]$ – решение сопряженного уравнения

$$\psi = A^\top (f_\xi^\infty \dot{\psi} + (F_\xi^\infty)^\top). \quad (1.4)$$

Здесь предполагается, что $f_\xi^\infty = f_\xi^\infty(\cdot, x_u, u)$ и т.д.; $A^\top : L_\mathbb{R}^\ell[0; T] \rightarrow L_\mathbb{R}^\ell[0; T]$ – оператор, сопряженный к оператору $A : L_1^\ell[0; T] \rightarrow L_1^\ell[0; T]$; $A^\top[z](t) = \int_t^T z(\tau) d\tau$; функция ψ является, фактически, решением сопряженной задачи

$$\psi^\infty = (f_\xi^\infty \dot{\psi} + (F_\xi^\infty)^\top) / \mathbb{A}\mathbb{C}^\ell[0; T]; \quad \psi(T) = 0.$$

Пусть $\nu \in \mathbb{N}$. Для каждого текущего T будем разбивать отрезок $[0; T]$ на ν промежутков $[0; T] = \bigcup_{i=1}^\nu [\tau_{i-1}; \tau_i]$. Соответственно будем рассматривать управляющие переменные двух типов. Управляющие переменные первого типа будем обозначать $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, \nu}$. Управляющие переменные второго типа будем обозначать $\omega_i \in [\alpha; \beta]$, $i = \overline{1, \nu}$. Упорядоченные наборы управляющих переменных первого типа будем обозначать $\vec{h}$. Аналогичный смысл будет иметь обозначение $\vec{\omega}$. Для единообразия всегда будем считать, что $h_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, $\omega_{\nu+1} = 0$. Положим $T = T[\vec{h}]$, $\tau_i = \tau_i[\vec{h}]$, $u(t) = u[\vec{h}; \vec{\omega}](t)$,

$$T[\vec{h}] = \int_{j=1}^\nu h_j^2, \quad \tau_i[\vec{h}] = \int_{j=1}^i h_j^2, \quad u[\vec{h}; \vec{\omega}](t) = \left\{ \omega_i, t \in [\tau_{i-1}[\vec{h}]; \tau_i[\vec{h}]] \right\}; \quad 0 \leq t \leq T[\vec{h}].$$

В итоге функционал $J[u]$ обращается в функцию $J[\vec{h}; \vec{\omega}]$ $\nu \times (1+s)$ переменных. Мы используем квадраты h_i^2 вместо h_i , чтобы избавиться от ограничений $h_i \approx 0$. Чтобы снять ограничения $\omega_i \in [\alpha; \beta]$, можно в указанной выше формуле для $u(t)$ взять вместо ω_i вектор с компонентами $\gamma_j^+ + \gamma_j^- \sin(\omega_{ij})$, $j = \overline{1, s}$, где $\gamma^+ = (\alpha + \beta)/2$, $\gamma^- = (\beta - \alpha)/2$. Этот прием (синус-параметризация) позволяет сократить количество ограничений в аппроксимирующей задаче на $2\nu s$. Мы этого не делаем, чтобы упростить изложение.

Положим $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}[u, T](t) \leq \psi[u, T](t) f_v^\infty(t, x_u(t)) + F_v^\infty(t, x_u(t))$. При сделанных предположениях, пользуясь формулой (1.3), удастся показать, что функция $J[\vec{h}; \vec{\omega}]$ непрерывно дифференцируема по всем переменным и справедливы следующие формулы (используется также то, что функции $x_u(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны):

$$\frac{\partial J}{\partial \omega_i} = \int_{\tau_{i-1}[\vec{h}]}^{\tau_i[\vec{h}]} \mathcal{J}(t) dt, \quad i = \overline{1, \nu}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_i} = \left\{ \Phi_0(T, x_u(T)) + \int_{j=i+1}^\nu \mathcal{J}^\top \tau_j[\omega_j] \mathcal{J}^\top \tau_{j-1}[\omega_j] \right\} 2 h_i. \quad (1.6)$$

$\tau_i = \tau_i[\vec{h}]$, $i = \overline{1, \nu}$. Задачу, которая отличается от исходной задачи оптимизации

$$J_0[u](T) \propto \min, u / \mathcal{F}, \quad J_i[u](T) \geq 0, i = \overline{1, \kappa}; \quad J_i[u](T) = 0, i = \overline{\kappa + 1, \mu},$$

тем, что каждый из функционалов $J_i[u](T) = \int_0^T F_i(t, x_u, u) dt$, $i = \overline{0, \mu}$, заменяется соответствующей функцией многих переменных $J_i\{\vec{h}; \vec{\omega}\}$ по описанной процедуре, мы и называем *аппроксимирующей задачей*. Формулы вида (1.5), (1.6) позволяют (по крайней мере, формально) использовать для ее решения численные методы условной оптимизации функций многих переменных до первого порядка включительно.

2. Формулировка основных результатов

I. *Кусочно постоянная интерполяция искомого управления*. См. §1.

II. *Кусочно линейная интерполяция искомого управления*. Так же, как и раньше, будем рассматривать управляющие переменные двух типов. Управляющие переменные первого типа будем обозначать $h_i / \mathbb{R}$, $i = \overline{1, \nu}$. Управляющие переменные второго типа будем обозначать $\omega_i = \{\omega_i^{(1)}; \omega_i^{(2)}\} / [\alpha; \beta]^2$, $i = \overline{1, \nu}$. Обозначения $\vec{h}$, $T = T[\vec{h}]$, $\tau_i = \tau_i[\vec{h}]$ имеют прежний смысл; $\vec{\omega}$ — набор управляющих переменных второго типа. С каждой парой $\{\vec{h}; \vec{\omega}\}$ будем соотносить кусочно линейное управление

$$u(t) = \left\{ U_i[\vec{\omega}; \tau_{i-1}, \tau_i](t), t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], i = \overline{1, \nu}; 0, t \approx T[\vec{h}] \right\},$$

$$U_i(t) = U_i[\vec{\omega}; \tau_{i-1}, \tau_i](t) \leq \frac{1}{\tau_i - \tau_{i-1}} \left[\omega_i^{(2)} - \omega_i^{(1)} \left[t + \omega_i^{(1)} \tau_i - \omega_i^{(2)} \tau_{i-1} \right] \right].$$

В итоге функционал $J[u]$ обращается в функцию $J\{\vec{h}; \vec{\omega}\}$ $\nu \times (1 + 2s)$ переменных. При сделанных предположениях данная функция имеет частные производные по всем переменным, которые определяются формулами (предполагаем здесь, что $h_i \neq 0$; в случае $h_i = 0$ все поименованные далее производные равны нулю):

$$\frac{\partial J}{\partial \omega_i^{(1)}} = \frac{1}{h_i^2} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{J}(t) (\tau_i - t) dt; \quad \frac{\partial J}{\partial \omega_i^{(2)}} = \frac{1}{h_i^2} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{J}(t) (t - \tau_{i-1}) dt; \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial h_i} = 2h_i \left[\Phi_0(T, x[u, T](T)) + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \mathcal{J}(t) (t - \tau_{i-1}) dt \frac{\omega_i^{(1)}}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} + \right. \\ \left. + \mathcal{J}(\tau_i) \omega_i^{(2)} + \int_{j \neq i+1}^{\nu} \left\{ \mathcal{J}(\tau_j) \omega_j^{(2)} - \mathcal{J}(\tau_{j-1}) \omega_j^{(1)} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \mathcal{J}(t) dt \frac{\omega_j^{(2)}}{\tau_j - \tau_{j-1}} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из формул (2.1), (2.2) видно, что указанные производные непрерывны по совокупности переменных, и таким образом, функция $J\{\vec{h}; \vec{\omega}\}$ непрерывно дифференцируема.

3. Формула приращения функционала

Непосредственно из [10, теорема 3] получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\lambda > 0$ – заданное число, $u \in \mathcal{F}$. Существуют функции $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\Upsilon : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что для любых $u \in \mathcal{F}$ и $T, F \in \mathbb{R}_+$, $\|F\| \geq \lambda$, имеем: $\Upsilon(T, F) \rightarrow 0$ при $F \rightarrow T$, и справедливо представление

$$\Delta J = J[u, F] - J[u, T] = \int_{\Pi_{\hat{T}}} \hat{\Psi}(u) dt - \int_{\Pi_T} \hat{\Psi}(u) dt + \int_{\Pi_{T_\lambda}} \chi_{\Pi_{\hat{T}}} - \chi_{\Pi_T} [\Phi_0(t, x[u, T_\lambda]) dt + \Upsilon(T, F) \aleph + o(\aleph)], \quad (3.1)$$

где $\aleph = \sigma(\|T_\lambda\|) \|\Delta u\|_{L_1^s(\Pi_{T_\lambda})}$; $\Delta u \leq P_{\Pi_{\hat{T}}} u - P_{\Pi_T} u$; $\Psi \leq (f_v^\infty)^* Q_{\Pi_T} \psi + (F_v^\infty)^*$; $\psi = \psi[u, T]$ – решение сопряженного уравнения (1.4), $f_v^\infty = f_v^\infty(\cdot, x[u, T_\lambda], u)$ и т.п.

З а м е ч а н и е 3.1. Как видно из доказательства, при сделанных предположениях функция $Q_{\Pi_T} \psi[u, T]$ непрерывна на множестве Π_{T_λ} . Поэтому, согласно условию F_3), функция Ψ также является непрерывной.

4. Доказательство основных утверждений

Положим $\mathcal{D}_j \leq h_j^2$, $j = \overline{1, \nu}$; $\lambda = T + 1$.

1. Пусть производится кусочно постоянная интерполяция искомого управления. Докажем формулы (1.5), (1.6). Зафиксируем произвольно $i \in \overline{1, \nu}$.

1) Найдем $\partial J / \partial \omega_i$. Обозначим $\vec{w}$ – набор, полученный из $\vec{\omega}$ варьированием i -й компоненты: $w_i = \omega_i + \Delta \omega_i$; $u \in \mathcal{F}$ – управление, порожденное набором $\{\vec{h}; \vec{w}\}$; $T = T$. Приращение управления $\Delta u(t) = \begin{cases} \Delta \omega_i, & t \in [\tau_{i-1}; \tau_i]; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Норма $\|\Delta u\|_{L_1^s} = \|\Delta \omega_i\| \mathcal{D}_i \geq \|\Delta \omega_i\|$, следовательно, $o(\aleph) = o(\Delta \omega_i)$. По теореме 3.1 и в силу (3.1) получаем

$$\Delta J = \int_0^T \hat{\Psi}(t, \Delta u(t)) dt + o(\Delta \omega_i) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Delta \omega_i \cdot \mathcal{J}^-(t) dt + o(\Delta \omega_i),$$

так как $S_{[0;T]} \Psi(t) = \mathcal{J}^-(t)$. Отсюда сразу следует формула (1.5).

2) Найдем $\partial J / \partial \mathcal{D}_i$. Рассмотрим вариацию $\Delta \mathcal{D}_i$ компоненты $\mathcal{D}_i$. Положим

$$T = T + \Delta \mathcal{D}_i, \quad u(t) \leq \begin{cases} \omega_j, & t \in [\tau_{j-1}; \tau_j], & j = \overline{1, i-1}; \\ \omega_i, & t \in [\tau_{i-1}; \tau_i + \Delta \mathcal{D}_i], & j = i; \\ \omega_j, & t \in [\tau_{j-1} + \Delta \mathcal{D}_i; \tau_j + \Delta \mathcal{D}_i], & j = \overline{i+1, \nu}. \end{cases}$$

Без ограничивая общности рассуждений примем $\omega_i \in [\alpha; \beta]$, $i = \overline{1, \nu}$. Для $\Delta u = u - u$ нетрудно получить: $\|\Delta u\|_{L_1^s} \geq \|\beta - \alpha\| 2\nu \|\Delta \mathcal{D}_i\|$ откуда (см. теорему 3.1)

$$\Upsilon(T, F) \aleph + o(\aleph) = o(\|\Delta \mathcal{D}_i\|). \quad (4.1)$$

Используем теорему 3.1 и формулу (3.1). Для упрощения выкладок примем $s = 1$.

а) Рассмотрим

$$\int_0^{\widehat{T}} \Psi(t) u(t) dt = \int_0^{\widehat{\tau}_i} \Psi(t) u(t) dt + \omega_i \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt + \int_{j \neq i+1}^{\nu} \omega_j \int_{\tau_{j-1} + \Delta \mathcal{F}_i}^{\tau_j + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt.$$

Очевидно, что

$$\int_{\tau_{j-1} + \Delta \mathcal{F}_i}^{\tau_j + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt = \int_{\tau_{j-1}}^{\widehat{\tau}_j} \Psi(t) dt + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j - \widehat{1} + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt + \int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt.$$

Отсюда получаем

$$\int_0^{\widehat{T}} \Psi(t) u(t) dt = \int_0^{\widehat{T}} \Psi(t) u(t) dt + \omega_i \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt + \int_{j \neq i+1}^{\nu} \omega_j \left[\int_{\tau_j}^{\tau_j + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt + \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j - \widehat{1} + \Delta \mathcal{F}_i} \Psi(t) dt \right].$$

Таким образом, согласно замечанию 3.1,

$$\lim_{\Delta \mathcal{F}_i' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \mathcal{D}_i} \left[\int_0^{\widehat{T}} \Psi(t) u(t) dt - \int_0^{\widehat{T}} \Psi(t) u(t) dt \right] = \omega_i \Psi(\tau_i) + \int_{j \neq i+1}^{\nu} \omega_j \left[\Psi(\tau_j) - \Psi(\tau_{j-1}) \right] = \omega_i \mathcal{J}(\tau_i) + \int_{j \neq i+1}^{\nu} \omega_j \left[\mathcal{J}(\tau_j) - \mathcal{J}(\tau_{j-1}) \right]. \quad (4.2)$$

б) Рассмотрим

$$\Delta \mathcal{H} \leq \int_{\Pi_{\widehat{T}}}^{\widehat{}} \Phi_0(t, x(t)) [dt] - \int_{\Pi_T}^{\widehat{}} \Phi_0(t, x(t)) [dt].$$

Если $\Delta \mathcal{D}_i > 0$, то $\widehat{T} > T$ и $\Delta \mathcal{H} = \int_T^{T + \Delta \mathcal{F}_i} \Phi_0(t, x(t)) [dt]$, $\lim_{\Delta \mathcal{F}_i' \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \mathcal{F}_i} = \Phi_0(T, x(T))$.

Если же $\Delta \mathcal{D}_i < 0$, то $\widehat{T} < T$ и $\Delta \mathcal{H} = \int_T^{\widehat{T}} \Phi_0(t, x(t)) [dt]$, следовательно,

$$\lim_{\Delta \mathcal{F}_i' \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \mathcal{D}_i} = \lim_{\Delta \mathcal{F}_i' \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Delta \mathcal{D}_i\|} \int_T^{\widehat{T}} \Phi_0(t, x(t)) [dt] = \Phi_0(T, x(T)).$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta \mathcal{F}_i' \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \mathcal{D}_i} = \Phi_0(T, x(T)). \quad (4.3)$$

Из (4.1)–(4.3) и теоремы 3.1 получаем (1.6).

II. Пусть производится кусочно линейная интерполяция искомого управления. Докажем формулы (2.1), (2.2). Зафиксируем произвольно $i \in \overline{1, \nu}$.

1) Найдем $\partial J / \partial \omega_i^{(1)}$. Обозначим $\vec{w}$ – набор, полученный из $\vec{\omega}$ варьированием компоненты: $w_i^{(1)} = \omega_i^{(1)} + \Delta \omega_i^{(1)}$; $u \in \mathcal{F}$ – управление, порожденное набором $\{\vec{h}; \vec{w}\}$; $T = T$. Соответственно, приращение управления

$$\Delta u(t) = \begin{cases} \Delta \omega_i^{(1)} \frac{\tau_i - t}{\tau_i - \tau_{i-1}}, & t \in [\tau_{i-1}; \tau_i); \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};$$

$$\Delta u|_{L_1^s} = \frac{\|\Delta \omega_i^{(1)}\|}{\tau_i - \tau_{i-1}} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} (\tau_i - t) dt = \frac{\|\Delta \omega_i^{(1)}\|}{2} (\tau_i - \tau_{i-1}),$$

следовательно, $o(\mathbb{N}) = o(\Delta \omega_i^{(1)})$. По теореме 3.1 и формуле (3.1) получаем

$$\Delta J = \int_0^T \Psi, \Delta u \left\{ dt + o(\Delta \omega_i^{(1)}) \right\} = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \frac{\Delta \omega_i^{(1)}}{\mathcal{D}_i}, \Psi(t) (\tau_i - t) dt \Bigg\} + o(\Delta \omega_i^{(1)}), \text{ или}$$

$$\Delta J = \frac{1}{\mathcal{D}_i} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Delta \omega_i^{(1)}, \mathcal{J}(t) (\tau_i - t) dt \Bigg\} + o(\Delta \omega_i^{(1)}), \text{ так как } S_{[0;T]} \Psi(t) = \mathcal{J}(t),$$

откуда сразу следует первая из формул (2.1). Вторая доказывается аналогично.

2) Найдем $\partial J / \partial \mathcal{D}_i$. Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что $\omega_i \in [\alpha; \beta]$, $i \in \overline{1, \nu}$. Рассмотрим вариацию $\delta = \Delta \mathcal{D}_i$ компоненты $\mathcal{D}_i$. Положим

$$T = T + \delta, \quad u(t) \leq \begin{cases} U_j(t), & t \in [\tau_{j-1}; \tau_j), & j = \overline{1, i-1}; \\ U_i[\tau_{i-1}, \tau_i + \delta](t), & t \in [\tau_{i-1}; \tau_i + \delta), & j = i; \\ U_j(t - \delta), & t \in [\tau_{j-1} + \delta; \tau_j + \delta), & j = \overline{i+1, \nu}. \end{cases}$$

Будем считать, что $\tau_{i-1} < \tau_i$ и $\|\delta\|$ настолько мал, что $\tau_{i-1} < \tau_i - \|\delta\|$. Формулы для случая $\tau_{i-1} = \tau_i$ можно вывести путем предельного перехода $\tau_i \rightarrow \tau_{i-1} + 0$, то есть $h_i \rightarrow 0$. Для приращения $\Delta u = u - u$ нетрудно получить оценку:

$$\Delta u|_{L_1^s} \geq \|\beta - \alpha\| 2\nu \|\delta\| + \left\{ i + \sum_{j=i+1}^{\nu} \left\{ j, \right. \right.$$

$$\left. \left. \begin{aligned} \{ i \leq \int_{[\tau_{i-1}; \tau_i]} \|U_i[\tau_{i-1}, \tau_i + \delta](t) - U_i[\tau_{i-1}, \tau_i](t)\| dt, \\ \{ j \leq \int_{[\tau_{j-1}; \tau_j]} \|U_j(t - \delta) - U_j(t)\| dt \geq \|\omega_j^{(2)} - \omega_j^{(1)}\| \|\delta\|. \end{aligned} \right. \right.$$

Очевидно, что существует производная

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} U_i[\tau_{i-1}, \tau_i](t) = \omega_i^{(1)} - \omega_i^{(2)} \left[\frac{t - \tau_{i-1}}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \right].$$

Исходя из наших соображений и леммы Адамара, нетрудно найти, что

$$\{\omega_i \geq \frac{\|\omega_i^{(1)} - \omega_i^{(2)}\|}{2} \|\delta\|.$$

Таким образом (см. теорему 3.1),

$$\Upsilon(T, T) \mathbb{N} + o(\mathbb{N}) = o(\delta). \quad (4.4)$$

Используем теорему 3.1 и формулу (3.1). Для простоты примем $s = 1$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_i} \Psi(t) u(t) dt - \int_0^{\tau_j} \Psi(t) u(t) dt &= \mathcal{H}_i(\tau_i + \delta) - \mathcal{H}_i(\tau_i) + \int_{\tau_{j-1}+1}^{\tau_j} \mathcal{H}_j(\delta) - \mathcal{H}_j(0) \Big\}, \\ \mathcal{H}_i(y) &\leq \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i+y} \Psi(t) U_i[\tau_{i-1}, y](t) dt, \quad \mathcal{H}_j(y) \leq \int_{\tau_{j-1}+y}^{\tau_j+y} \Psi(t) U_j(t - y) dt. \end{aligned}$$

В силу замечания 3.1, построения функций $U_i[\tau_{i-1}, \tau_i](t)$, $U_j[\tau_{j-1}, \tau_j](t)$ и теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_i(\tau_i + \delta) - \mathcal{H}_i(\tau_i)}{\delta} &= \frac{\partial}{\partial \tau_i} \mathcal{H}_i(\tau_i) = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Psi(t) \frac{\partial}{\partial \tau_i} U_i[\tau_{i-1}, \tau_i](t) dt + \\ &+ \Psi(\tau_i) U_i[\tau_{i-1}, \tau_i](\tau_i) = \frac{\omega_i^{(1)} - \omega_i^{(2)}}{(\tau_i - \tau_{i-1})^2} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \Psi(t) (t - \tau_{i-1}) dt + \Psi(\tau_i) \omega_i^{(2)}; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_j(\delta) - \mathcal{H}_j(0)}{\delta} &= \mathcal{H}_j'(0) = \Psi(\tau_j) U_j(\tau_j) - \Psi(\tau_{j-1}) U_j(\tau_{j-1}) \\ &+ \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Psi(t) U_j(t) dt = \Psi(\tau_j) \omega_j^{(2)} - \Psi(\tau_{j-1}) \omega_j^{(1)} + \frac{\omega_j^{(2)} - \omega_j^{(1)}}{\tau_j - \tau_{j-1}} \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \Psi(t) dt. \end{aligned}$$

При этом $S_{[0;T]} \Psi(t) = \mathcal{J}'(t)$. Отсюда, с учетом соотношения (4.3), которое доказывается точно так же, как это было сделано в п. I, и соотношения (4.4), получаем (2.2).

5. Постановка задачи о посадке на Луну

Рассмотрим управляемую систему из задачи о мягкой посадке на Луну, см., например, [12, глава III, §3, п.3, с.125–128] (здесь h – высота, v – скорость, m – масса, u – расход топлива в единицу времени):

$$h^\infty = v, \quad v^\infty = -g + \frac{k}{m}u, \quad m^\infty = u; \quad h(0) = H, \quad v(0) = V, \quad m(0) = M. \quad (5.1)$$

Ограничение на значения управления: $u(t) \in [0; \sigma]$, $t \in [0; T]$. Будем считать, что

$$k = 3000, \quad \sigma = 7.08, \quad g = 1.62, \quad H = 190000, \quad V = -2650, \quad M = 500.$$

Условие мягкой посадки:

$$h[u](T) = v[u](T) = 0. \quad (5.2)$$

Функционал цели:

$$m[u](T) \propto \max. \quad (5.3)$$

Имеем управляемую двухточечную краевую задачу (5.1), (5.2). Чтобы обеспечить дифференцируемость правой части по фазовым переменным, переобозначим переменные: $x_1 = h$, $x_2 = v$, $x_3 = \frac{1}{m}$. Здесь мы исходим из того, что для искомого оптимального управления масса аппарата $m(t) > 0$, $t \in [0; T]$ (а с физической точки зрения $m(t) \approx M_0$, где M_0 – сухая масса спускаемого аппарата). В результате задача переформулируется следующим образом:

$$x_1^\infty = x_2, x_2^\infty = -g + kx_3u, x_3^\infty = (x_3)^2u; x_1(0) = H, x_2(0) = V, x_3(0) = M^{-1}. \quad (5.4)$$

$$x_3[u](T) \propto \min, \quad x_1[u](T) = x_2[u](T) = 0. \quad (5.5)$$

Из аналитического решения задачи минимизации (5.4)–(5.5) с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина известна структура оптимального управления:

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0; \tau]; \\ \sigma_{\rightarrow}, & \text{если } t \in (\tau; T] \end{cases}.$$

Момент переключения τ и финальное время T нам, вообще говоря, неизвестны. В соответствии с информацией о структуре оптимального управления определим набор параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ и произведем параметризацию искомого управления:

$$\tau = \alpha_1^2, \quad T = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad u[\alpha](t) = \begin{cases} 0, & t \in [0; \tau); \\ \sigma_{\rightarrow}, & t \in [\tau; T] \end{cases}.$$

В результате функционалы задачи преобразуются в функции двух переменных:

$$J_0[\alpha] = x_3[u](T) \propto \min, \quad J_1[\alpha] = x_1^2[u](T) = 0, \quad J_2[\alpha] = x_2^2[u](T) = 0,$$

$u = u[\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Финальные ограничения можно учитывать с помощью штрафа:

$$f(\alpha) = J_0[\alpha] + \sigma_1 J_1[\alpha] + \sigma_2 J_2[\alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

Решение системы (5.4) для каждого конкретного управления будем искать численно методом Эйлера с шагом 0.3 (при уменьшении шага точность решения оптимизационной задачи повышается, но и время вычислений существенно увеличивается). В итоге исходная задача сводится к задаче безусловной минимизации:

$$f(\alpha) \propto \min, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

Попытка решения этой задачи дает $\alpha \rightarrow (6.75, 6.7)$, но оказывается неудачной в связи с сильной неустойчивостью к малейшим отклонениям параметров. Так, например, если взять $\alpha = (6.753702689, 6.7)$, то получаем финальные значения: $h(T) = 0.0651$, $v(T) = 25.1076$, $m(T) = 198.7744$. Если же изменить значение α_1 лишь в последнем знаке: $\alpha = (6.753702688, 6.7)$, то получаем: $h(T) = 274.1060$, $v(T) = 233.6999$, $m(T) = 182.1186$. Примечательно, что в [12, глава III, §3, п. 3, с. 126] тоже есть косвенное замечание на эту же тему. Существенно повысить устойчивость численного решения удастся с помощью увеличения количества параметров.

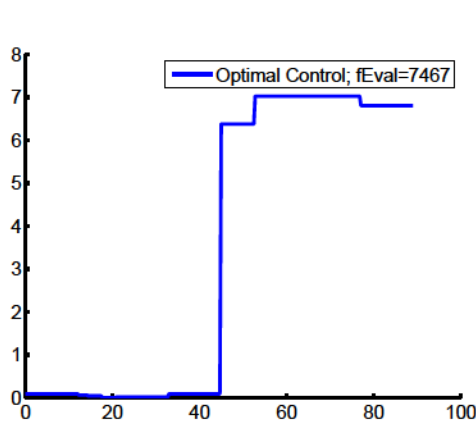


Рис. 1: Метод Хука–Дживса

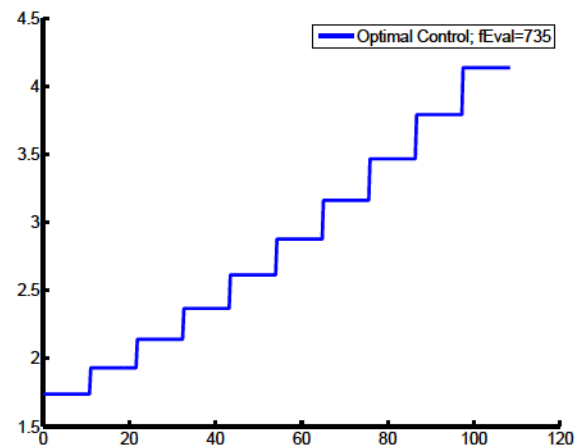


Рис. 2: Метод Полака–Рибьера

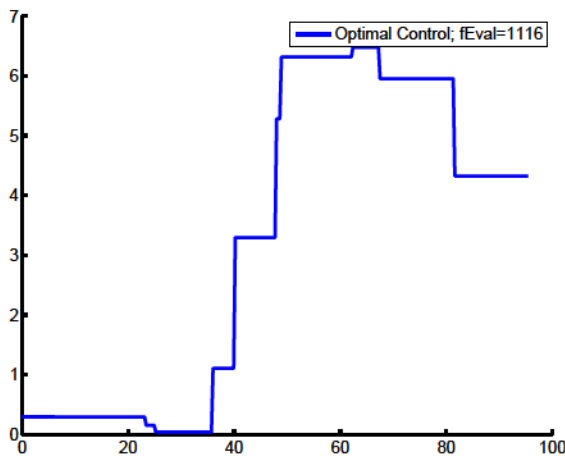


Рис. 3: Метод BFGS

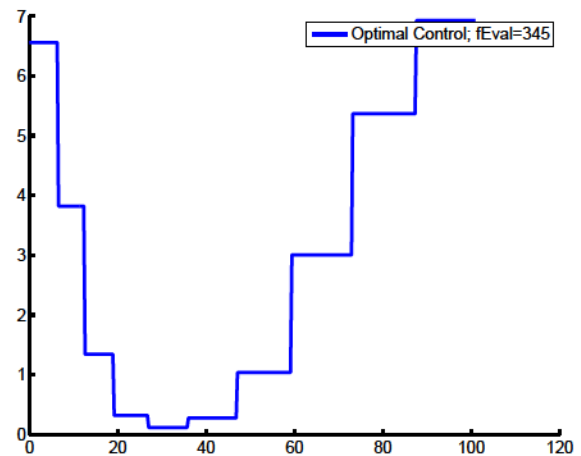


Рис. 4: Метод SQP

6. Результаты численных экспериментов

Используем для численного решения задачи о мягкой посадке на Луну метод подвижных узлов в рамках техники параметризации управления в соответствии со схемой, описанной в разделе 1, см. также [9]. Количество узлов сетки берется существенно больше 3 (как следовало бы брать в соответствии с решением по принципу максимума). Попытка взять меньшее число узлов не дает достаточно хорошего результата – чувствительность численного решения управляемой системы к изменению параметров параметризованного управления остается все еще высокой. При увеличении количества узлов наблюдается снижение чувствительности до приемлемого уровня. Итак, будем использовать набор параметров, состоящий из двух поднаборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) / \mathbb{R}^k$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) / \mathbb{R}^k$. Параметризацию управления производим по правилу:

$$u(t) = \frac{\sigma}{2}(1 + \sin \beta_i), \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad t_0 = 0, \quad t_i = \int_{j=1}^i \alpha_j^2, \quad i = \overline{1, k}, \quad T = t_k.$$

Сравним следующие способы численного решения аппроксимирующей задачи.

1. *Минимизация штрафной функции методом Хука–Дживса.* Для $k = 10$ были получены следующие результаты, см. также рис. 1:

$$h(T) = 2.1136 \times 10^{-5}, v(T) = 0.0001, m(T) = 197.6182, T = 88.9913;$$

$$\alpha = (3.4742, 1.4793, 1.8042, 1.8042, 3.4742, 3.4742, 2.8058, 3.4742, 3.4742, 3.4742),$$

$$\beta = (1.3410, 1.7629, 1.7321, 1.5052, 1.6690, 1.3406, 0.9296, 1.3946, 1.3932, 1.1731).$$

Количество вычислений функции: 3467. Затрачено времени (при расчетах на ноутбуке средней мощности): 140.3917 секунд.

2. *Минимизация штрафной функции методом Полака–Рибьера.* Для $k = 10$ были получены следующие результаты, см. также рис. 2:

$$h(T) = 0.00029705, v(T) = 0.00024252, m(T) = 195.2666, T = 108.3433;$$

$$\alpha = (3.2911, 3.2881, 3.2860, 3.2850, 3.2850, 3.2864, 3.2893, 3.2940, 3.3007, 3.3098),$$

$$\beta = (0.5343, 0.4722, 0.4067, 0.3378, 0.2648, 0.1882, 0.1068, 0.0207, 0.0712, 0.1693).$$

Количество вычислений функции: 735. Затрачено времени: 33.6667 секунд. Как видно из рис. 2, график полученного решения сильно отличается от теоретического оптимального управления. Таким образом, наблюдается сходимость по функционалу. То же самое происходит и при использовании других градиентных методов. Естественно предположить, что это связано с сильной неустойчивостью теоретического решения задачи оптимального управления: в весьма малой его окрестности функционал принимает уже довольно большие значения; поэтому методы, ориентирующиеся на малость градиента, не могут обнаружить искомую точку в силу естественной погрешности вычислений. Тем не менее, они находят другие точки, достаточно от нее удаленные, в которых функционалы задачи принимают близкие значения, причем принимают их достаточно устойчиво. Важно отметить, что при реализации метода использовалась следующая коррекция: при выходе какой-либо компоненты управления на границу отрезка допустимых значений $[0; \sigma]$ производилось смещение от границы внутрь отрезка на величину 10^{-9} . Такая коррекция необходима в связи с использованием метода синус-параметризации: соответствующая частная производная целевой функции по параметру β_i содержит косинус, который зануляется при выходе на границу, никоим образом не означая близости к точке минимума. Более того, при использовании градиентных методов без описанной выше коррекции после выхода компоненты управления на границу ей уже «трудно с нее сойти». Этот эффект мы называем «эффектом залипания на границе». Как показывают численные эксперименты, он может сильно замедлять или препятствовать сходимости (при использовании методов первого порядка и выше без коррекции на границе).

3. *Минимизация штрафной функции методом BFGS.* Для $k = 10$ были получены следующие результаты, см. также рис. 3:

$$h(T) = 1.166 \times 10^{-11}, v(T) = 0.00025904, m(T) = 196.7929, T = 95.4369;$$

$$\alpha = (4.8099, 1.3345, 3.2908, 2.0500, 2.8127, 1.0017, 3.6544, 2.2463, 3.7767, 3.7296),$$

$$\beta = (1.1624, 1.2791, 1.4280, 0.7595, 0.0699, 0.5134, 0.9012, 0.9778, 0.7494, 0.2229).$$

Количество вычислений функции: 1116. Затрачено времени: 48.2373 секунд.

4. *Решение задачи математического программирования SQP-методом.* Для $k = 10$ были получены следующие результаты, см. также рис. 4:

$$h(T) = 0.0038851, v(T) = 0.0071613, m(T) = 196.2581, T = 100.9140;$$

$$\alpha = (2.5155, 2.4809, 2.5732, 2.7714, 3.0282, 3.2947, 3.5399, 3.7121, 3.7756, 3.6796),$$

$$\beta = (1.0201, 0.0785, 0.6710, 1.1446, 1.3148, 1.1746, 0.7867, 0.1525, 0.5413, 1.2714).$$

Количество вычислений функции: 345. Затрачено времени: 103.0311 секунд.

Проверка правильности формул (1.5), (1.6) для функций аппроксимирующей задачи успешно была проведена отдельно с помощью аппроксимации конечными разностями. Проверка правильности формул (2.1), (2.2) проводилась ранее для функций аппроксимирующей задачи при решении задачи о прокладке трассы [9].

Проведенные численные эксперименты (не ограничиваясь только описанными выше) позволяют сделать следующие *выводы*:

1. Подтверждается правильность представленных выше формул частных производных (1.5), (1.6) и (2.1), (2.2).

2. Представленный вариант метода подвижных узлов в сочетании с методом синус-параметризации и указанными выше формулами частных производных позволяет успешно решать достаточно сложные задачи оптимального управления со свободным временем, в том числе такие, где теоретически рассчитанная точка оптимума оказывается сильно неустойчивой.

3. Для решения аппроксимирующей задачи можно использовать различные численные методы как условной, так и безусловной оптимизации (в сочетании с методом штрафа в простейшей форме): нулевого порядка, градиентные и квазиньютоновские. Однако при использовании методов первого порядка в сочетании с методом синус-параметризации следует применять процедуру коррекции выхода на границу множества допустимых значений для противодействия «эффекту залипания на границе».

4. Метод нулевого порядка обнаружил сходимость по аргументу. Методы первого порядка обнаружили сходимость по функционалу.

5. Наиболее затратным по количеству вычислений функции и времени расчетов оказался метод нулевого порядка. Метод Полака–Рибьера оказался наиболее быстрым по количеству затраченного времени. SQP-метод оказался наименее затратным по количеству вычислений функции (при меньшей точности выполнения ограничений – по крайней мере, при численном решении управляемой системы простейшим методом Эйлера с шагом 0.3; при более удачном выборе начального приближения точность повышалась на один–два порядка).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление в режиме реального времени // Вторая Международная конференция по проблемам управления: пленарные доклады. М.: Институт проблем управления, 2003. С. 20-47.

2. *Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H.* A unified computational approach to optimal control problems // Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Harlow; New York: Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991. Vol. 55. 329 p.
3. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029-2043.
4. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* О методе последовательных приближений расчета оптимальных режимов некоторых систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. № 7. С. 1197-1204.
5. *Голубев Ю.Ф., Серегин И.А., Хайруллин Р.З.* Метод плавающих узлов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1991. № 2. С. 48-53.
6. *Лазарев Ю.Н.* Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самарский НЦ РАН, 2007. 274 с.
7. *Teo K.L., Jennings L.S., Lee H.W.J., Rehbock V.* The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1999. Vol. 40. P. 314-335.
8. *Li R., Teo K.L., Wong K.H., Duan G.R.* Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems // Math. Comput. Modelling. 2006. Vol. 43. № 11-12. P. 1393-1403.
9. *Чернов А.В.* О приближенном решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 6 (1). С. 107-114.
10. *Чернов А.В.* О гладкости аппроксимированной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу на варьируемой области // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2014. Т. 20. № 1. С. 305-321.
11. *Чернов А.В.* О мажорантно-минорантном признаке тотального сохранения глобальной разрешимости управляемого функционально-операторного уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 3. С. 62-73.
12. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 614 с.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Чернов Андрей Владимирович, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний Новгород, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, e-mail: chavnn@mail.ru

Для цитирования: Чернов А.В. О дифференцировании функционалов аппроксимирующих задач в рамках метода подвижных узлов при решении задач оптимального управления со свободным временем // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 861–876. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876

ON DIFFERENTIATION OF FUNCTIONALS OF APPROXIMATING PROBLEMS IN THE FRAME OF SOLUTION OF FREE TIME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS BY THE SLIDING NODES METHOD

A. V. Chernov

Nizhni Novgorod State University named after N.I. Lobachevski
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation
Nizhni Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev
24 Minin St., Nizhni Novgorod 603950, Russian Federation
E-mail: chavnn@mail.ru

Abstract. We give strict justification for derivative formulas of functionals in problems approximating free time optimal control problems in the frame of sliding nodes method and control parametrization technique. As example we present results of numerical solution for landing on the Moon problem.

Keywords: free time optimal control problem; control parametrization technique; sliding nodes method

REFERENCES

1. Gabasov R., Kirillova F.M. *Optimal'noe upravlenie v rezhime real'nogo vremeni [Optimal real-time control]*. Vtoraya Mezhdunarodnaya konferentsiya po problemam upravleniya: plenarnye doklady [The Second International Conference on Control Problems: Plenary Reports]. Moscow, Institute of Control Sciences RAS Publ., 2003, pp. 20-47. (In Russian).
2. Teo K.L., Goh C.J., Wong K.H. *A unified computational approach to optimal control problems. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Harlow, New York, Longman Scientific & Technical, John Wiley & Sons, Inc., 1991, vol. 55, 329 p.
3. Chernov A.V. Smooth Finite-Dimensional Approximations of Distributed Optimization Problems via Control Discretization. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1839-1852.
4. Volin Yu.M., Ostrovskii G.M. O metode posledovatel'nykh priblizheniy rascheta optimal'nykh rezhimov nekotorykh sistem s raspredelennymi parametrami [On the of successive approximation of optimum behaviour design of certain distributed parameter systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1965, vol. 26, no. 7, pp. 1197-1204. (In Russian).
5. Golubev Yu.F., Seregin I.A., Khayrullin R.Z. The floating nodes method. *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1992, vol. 30, no. 2. pp. 71-76.
6. Lazarev Yu.N. *Upravlenie traektoriyami aerokosmicheskikh apparatov [Trajectories Control of Aerospace Vehicles]*. Samara, Samara Scientific Center of Russian Academy of Sciences Publ., 2007, 274 p. (In Russian).
7. Teo K.L., Jennings L.S., Lee H.W.J., Rehbock V. The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 1999, vol. 40, pp. 314-335.

8. Li R., Teo K.L., Wong K.H., Duan G.R. Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems. *Math. Comput. Modelling*, 2006, vol. 43, no. 11-12, pp. 1393-1403.
9. Chernov A.V. O priblizhennom reshenii zadach optimal'nogo upravleniya so svobodnym vremenem [On approximate solution of free time optimal control problems]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo – Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2012, no. 6 (1), pp. 107-114. (In Russian).
10. Chernov A.V. O gladkosti approksimirovannoy zadachi optimizatsii sistemy Gursa–Darbu na var'iruemoi oblasti [On the smoothness of an approximated optimization problem for a Goursat–Darboux system on a varied domain]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 305-321. (In Russian).
11. Chernov A.V. A majorant-minorant criterion for the total preservation of global solvability of a functional operator equation. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 3, pp. 55-65.
12. Afanas'ev V.N., Kolmanovskii V.B., Nosov V.R. *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya* [Mathematical Theory of Control Systems Construction]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2003, 614 p. (In Russian).

Received 19 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Chernov Andrei Vladimirovich, Nizhni Novgorod State University named after N.I. Lobachevski, Nizhni Novgorod State Technical University named after R.E. Alekseev, Nizhni Novgorod, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, e-mail: chavnn@mail.ru

For citation: Chernov A.V. O differentsirovani funktsionalov approksimiruyushchikh zadach v ramkakh metoda podviznykh uzlov pri reshenii zadach optimal'nogo upravleniya so svobodnym vremenem [On differentiation of functionals of approximating problems in the frame of solution of free time optimal control problems by the sliding nodes method]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 861–876. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-861-876 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-877-890

УДК 517.977.8

ФУНКЦИЯ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ И ИНТЕГРАЛЬНО-ТЕРМИНАЛЬНОЙ ПЛАТОЙ

✉ Л. Г. Шагалова

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: shag@imm.uran.ru

Аннотация. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц. Динамика системы описывается дифференциальным уравнением с простыми движениями, а функционал платы является интегрально-терминальным. Для случая, когда терминальная функция и гамильтониан кусочно-линейны, а размерность фазового пространства равна двум, предлагается конечный алгоритм точного построения функции цены.

Ключевые слова: дифференциальная игра; простые движения; функция цены; уравнение Гамильтона–Якоби; минимаксное решение; алгоритм

Введение

Дифференциальные игры с простыми движениями представляют собой простые модели конфликтно управляемых систем. Динамика системы в таких играх зависит только от управлений игроков. Решения таких игр, представляющие и самостоятельный интерес, часто используются в численных алгоритмах для решения дифференциальных игр общего вида. Несмотря на простоту динамики, решения таких игр известны лишь в некоторых частных случаях, а в общем случае нахождение решений является нелегкой задачей.

Дифференциальные игры с простыми движениями исследовались многими авторами, в частности [1–3]. В данной работе антагонистическая дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания рассматривается в контексте позиционной формализации, разработанной в [4, 5].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00074) и УрО РАН (Комплексная программа № 18-1-10).

В рассматриваемой игре задан интегрально-терминальный функционал платы. Из заданной начальной позиции первый игрок стремится минимизировать плату, второй игрок – максимизировать. Управления обоих игроков формируются по принципу обратной связи. Для заданной начальной позиции цена определяет оптимальный гарантированный результат обоих игроков. Функция цены определяет оптимальный результат для всех начальных позиций игры.

Знание функции цены дает возможность построить оптимальные позиционные стратегии игроков, поэтому разработка методов нахождения функции цены является важным направлением в теории дифференциальных игр.

Известно [6, 7], что функция цены является минимаксным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана–Айзекса, соответствующего рассматриваемой дифференциальной игре. При этом понятие минимаксного решения эквивалентно понятию вязкостного решения, введенного в [8].

В настоящей работе представлен конечный алгоритм построения точного минимаксного решения уравнения Гамильтона–Якоби, соответствующего дифференциальной игре с простыми движениями и интегрально-терминальной платой, в случае двумерного фазового пространства и кусочно-линейных входных данных. Представленные результаты обобщают результаты, полученные в [9–11].

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая антагонистическая позиционная дифференциальная игра на конечном отрезке времени. Движение управляемой системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in P, \quad v(t) \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь t – время, ϑ – заданный момент окончания игры, x – фазовый вектор, u и v – формируемые по принципу обратной связи управления первого и второго игроков соответственно. Предполагается, что множества P и Q – компакты, а функция $f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Пусть $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ – начальная позиция. На движениях управляемой системы (1.1), соответствующих начальной позиции, задан интегрально-терминальный функционал платы

$$J(t_0, x_0, u, v) = \int_{t_0}^{\vartheta} g(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau + f(x(\vartheta)), \quad (1.2)$$

где функция $g: [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ предполагается липшицевой, а функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывна. Первый игрок выбором своего управления стремится минимизировать плату, второй игрок – максимизировать.

Предположим, что для рассматриваемой дифференциальной игры выполнено следующее условие

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \{ \langle H(s), u - v \rangle \mid s \in [0, \vartheta] \} > 0, \quad (1.3)$$

где $\langle s, f \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов s и f . Функцию $H(x)$ определенную равенством (1.3), будем называть гамильтонианом дифференциальной игры (1.1), (1.2).

В [1, 2] доказано, что при выполнении условия (1.3) для любой начальной позиции $(t_0, x_0) \in [1, \vartheta] \times R^n$ существует цена игры $\omega(t_0, x_0)$. Таким образом, существует функция цены $\omega : [1, \vartheta] \times R^n \rightarrow R$. Однако, нахождение функции цены – весьма нелегкая задача, для решения которой не существует универсального метода. Отметим, что в случае, когда подынтегральная функция $g(x)$ тождественно равна нулю, то есть функция платы является терминальной, задача существенно упрощается. В частности, если одна из функций $H(x)$ или $\sigma(x)$ является выпуклой или вогнутой, для функции цены можно, используя известные формулы Хопфа–Лакса [12–14], выписать явные формулы. Также в случае не обязательно выпуклых кусочно линейных $H(x)$ и $\sigma(x)$, когда размерность n фазового пространства равна двум, а терминальная плата положительно однородна, то есть функция $\sigma(x)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\lambda x) \leq \lambda \sigma(x) \quad x \in R^n, \quad \lambda \in R, \quad \lambda > 1, \quad (1.4)$$

для построения функции цены можно использовать конечный алгоритм [9–11]. Целью настоящей работы является обобщение этого алгоритма на случай ненулевой подынтегральной функции $g(x)$.

2. Функция цены как минимаксное решение уравнения Гамильтона–Якоби

В этом разделе приведены сведения из [6, 7] и факты, которые несложно получить из этих сведений, используемые далее для разработки алгоритма построения функции цены дифференциальной игры (1.1)–(1.3).

Функция цены $\omega : [1, \vartheta] \times R^n \rightarrow R$ совпадает с минимаксным решением следующей задачи Коши.

$$\left(\frac{\partial \omega(t, x)}{\partial t} - H(x) \right) = 0 \quad \left[\begin{array}{l} 1, \quad t \geq \vartheta, \quad x \in R^n \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\omega(\vartheta, x) = \sigma(x) \quad x \in R^n. \quad (2.6)$$

Минимаксное решение задачи (2.5), (2.6) существует и единственно. Далее будем предполагать, что терминальная функция $\sigma(x)$ является положительно однородной, то есть удовлетворяет условию (1.4). Гамильтониан $H(x)$ определен равенством (1.3) и, как нетрудно заметить, не является положительно однородным.

Определим функции

$$H^{\downarrow}(s, r) = \begin{cases} \inf_{r \in \Theta} \langle s, H(r) \rangle & \text{при } r \notin [1, \vartheta], \\ \langle s, H(r) \rangle & \text{при } r \in [1, \vartheta], \end{cases} \quad s, r \in R^n \times R, \quad (2.7)$$

$$\sigma^{\#}(x, y) = \sigma(x) + y, \quad x \in R^n, \quad y \in R. \quad (2.8)$$

Предполагаем, что предел в (2.7) существует.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с положительно однородным относительно переменной $\bar{s}$ гамильтонианом $H^\downarrow$)

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} \Big|_{t=0} \in H^\downarrow \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial y} \right) \in [1, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (2.9)$$

$$u(t, x, y) \in [\sigma^\sharp(x, y), \infty) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Функция $u(t, x, y)$ является минимаксным решением задачи (2.5), (2.6) тогда и только тогда, когда функция $u(t, x, y) \in [\omega(t, x, y), \infty)$ является минимаксным решением задачи (2.9), (2.10).*

Итак, задача нахождения функции цены с интегрально-терминальным функционалом платы сводится к решению уравнения Гамильтона–Якоби с положительно однородным гамильтонианом. При этом размерность фазового пространства увеличивается на единицу.

Если гамильтониан $H^\downarrow$) удовлетворяет условию Липшица, для минимаксного решения $u(t, x, y)$ справедливо соотношение

$$u(t, x, y) \in [\vartheta(t, x, y), \infty) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Используя соотношение (2.11), можно заменить задачу (2.9), (2.10) редуцированной задачей нахождения функции

$$\varphi(x, y) \in [u(1, x, y), \infty) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Функция φ) является минимаксным решением следующего уравнения в частных производных первого порядка

$$H^\downarrow \left(\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \right) \in [0, \infty) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \in [0, \infty) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \in [0, \infty) \quad \varphi(x, y) \in [1, \infty) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

которое рассматривается наряду с предельным соотношением

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \varphi \left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha} \right) \in [\sigma^\sharp(x, y), \infty) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Минимаксное решение уравнения (2.13) – непрерывная функция, удовлетворяющая паре дифференциальных неравенств. Эти неравенства можно записать различными по форме, но эквивалентными по существу способами. Здесь удобно выписать эти неравенства в следующем виде.

$$H^\downarrow(l, m) \in [l, x] \times [0, m] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \varphi(x, y) \in [D^-(\varphi)(x, y), \infty) \quad (2.15)$$

$$H^\downarrow(l, m) \in [l, x] \times [0, m] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \varphi(x, y) \in [D^+(\varphi)(x, y), \infty) \quad (2.16)$$

где множества $D^-(\varphi)(x, y)$ и $D^+(\varphi)(x, y)$ соответственно субдифференциал и супердифференциал функции φ) в точке (x, y)

3. Алгоритм построения функции цены

В случае, когда размерность фазового пространства равна двум, а терминальная функция σ и подынтегральная функция g кусочно-линейны, функция ω — цены дифференциальной игры (1.1)–(1.3) является кусочно-линейной и может быть построена точно. Опишем здесь алгоритм построения функции φ , зная которую, с помощью соотношения (2.11) и теоремы 2.1 можно получить функцию ω .

3.1. Представление предельной функции

Пусть

$$\begin{aligned} & y_+ \in [n_i]_{i=1}^n, y_- \in [n_l]_{l=1}^n, y \in R \\ & \sigma_+(x) \in [n_i]_{i=1}^n, \sigma_-(x) \in [n_l]_{l=1}^n, x \in R^n \\ & \sigma_+^\#(x, y) \in [n_i]_{i=1}^n, \sigma_-^\#(x, y) \in [n_l]_{l=1}^n, x \in R^n, y \in R. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что предельная функция $\sigma^\#$ (2.8) может быть представлена в виде

$$\sigma^\#(x, y) \in [\sigma_+^\#(x, y), \sigma_-^\#(x, y)], \quad x \in R^n, y \in R. \quad (3.1)$$

При этом для решения φ задачи (2.13), (2.14) справедливо представление

$$\varphi(x, y) \in [\varphi_+(x, y), \varphi_-(x, y)], \quad x \in R^n, y \in R, \quad (3.2)$$

где φ_+ и φ_- — решения задачи (2.13), (2.14), соответствующие предельным функциям $\sigma_+^\#$ и $\sigma_-^\#$ соответственно. При описанных ниже предположениях построения функций φ_+ и φ_- не отличаются по существу.

3.2. Предположения

Алгоритм разработан при следующих предположениях.

A1. Подынтегральная функция g имеет вид

$$g(u, v) \in [g_1(u), g_2(v)], \quad u \in R^2, v \in R^2, \quad (3.1)$$

где $g_1; R^2 \rightarrow R$ и $g_2; R^2 \rightarrow R$ — непрерывные кусочно-линейные функции, склеенные из конечного числа линейных функций. Таким образом, их сумма g тоже является непрерывной кусочно-линейной функцией.

A2. Множества P и Q — многогранники.

Из (1.3) следует, что гамильтониан H дифференциальной игры (1.1)–(1.3) также кусочно-линеен и склеивается из конечного числа линейных функций

$$H^i(s) \in [h^i, s] < p^i, \quad i \in \overline{1, n_H}, \quad h^i \in R^2, p^i \in R, s \in R^2. \quad (3.2)$$

A3. Функция σ положительно однородна (удовлетворяет условию (1.4)) и кусочно-линейна, то есть сформирована с помощью склейки конечной совокупности линейных функций

$$\sigma^i(x) \in [s^i, x], \quad i \in \overline{1, n_\sigma}, \quad s^i \in R^2, x \in R^2.$$

Обозначим

$$Z[\psi] = \{s^i \psi / \sqrt{2}, n_\sigma\}. \quad (3.3)$$

Кроме того, в силу представлений (3.1), (3.2), без ограничения общности можно считать, что функция σ неотрицательна

$$\sigma(x) \geq 1, \quad x \in R^2, \quad (3.4)$$

и рассмотреть алгоритм построения функции φ , соответствующей предельной функции

$$\sigma^\#(x, y) = [\sigma(x) + 0] y_+, \quad x \in R^2, y \in R. \quad (3.5)$$

3.3. Простые кусочно-линейные функции

Для разработки алгоритма полезным является использованное в [9, 10] понятие простой кусочно-линейной функции (ПКЛФ). Основное свойство ПКЛФ заключается в следующем. Если функция $\psi : R^2 \rightarrow D \subset R$ является ПКЛФ, тогда для любой точки $x \in D$ существует окрестность $O_\varepsilon(x)$, в которой ψ имеет одно из трех возможных представлений:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= [s_i, x] \cdot 0 \cdot h_i, \\ \psi(x) &= [\min\{s_i, x\} \cdot 0 \cdot h_i, s_j, x] \cdot 0 \cdot h_j, \\ \psi(x) &= [\min\{s_i, x\} \cdot 0 \cdot h_i, s_j, x] \cdot 0 \cdot h_j. \end{aligned}$$

Здесь s_i и s_j – векторы из R^2 , а h_i и h_j – числа. Таким образом, область определения ПКЛФ не содержит точек, в малой окрестности которых склеиваются три или более линейных функций.

Для формального определения ПКЛФ используются структурные матрицы. В данной работе не будем приводить строгое определение, отметим лишь, что структурная матрица содержит информацию обо всех линейных функциях, формирующих соответствующую ПКЛФ. Зная структурную матрицу, можно вычислить значение ПКЛФ в каждой точке ее области определения.

З а м е ч а н и е 3.1. Если выполнено условие **A3**, неотрицательная функция $\sigma : R^2 \rightarrow R$ является ПКЛФ в области $R^2 \setminus 1$, где символом 1 обозначен нулевой вектор.

3.4. Элементарные задачи

Алгоритм построения функции φ заключается, по существу, в последовательном решении элементарных задач, которые возникают в определенном порядке.

Пусть

$$\sigma^\#(x, y) = [\min\{a, x\} \cdot 0 \cdot y, b, x] \cdot 0 \cdot y, \quad \sigma^\#(x, y) = [\min\{a, x\} \cdot 0 \cdot y, b, x] \cdot 0 \cdot y,$$

где a, b, x – векторы из R^2 , $y \in R$.

З а д а ч и 1 и 2. Пусть заданы некоторые линейно независимые векторы a и b . В задаче 1 (задаче 2) требуется построить минимаксное решение задачи (2.13), (2.14), (3.2) при $\sigma^\# [\zeta^{\#+}$ (при $\sigma^\# [\zeta^\#$).

Поскольку функция $\zeta^{\#+}$ выпукла, а функция $\zeta^\#$ вогнута, можно получить явные формулы для решений задач 1 и 2. Можно показать, что решениями этих задач являются функции

$$\phi^+(x, y) = \inf_{l \in [a, b]} \phi_l(x, y), \quad \phi^-(x, y) = \sup_{l \in [a, b]} \phi_l(x, y)$$

где

$$[a, b] = \{ \lambda a + (1-\lambda)b \mid \lambda \in [0, 1] \},$$

$$\phi_l(x, y) = \max_{|x| \leq H} \min_{|y| \leq H} \langle l, x - y \rangle$$

Первый этап алгоритма построения решения φ задачи (2.13), (2.14), (3.5) заключается в последовательном решении задач 1 и 2 и склейке из этих решений простой кусочно-линейной функции. Конкретные задачи, которые необходимо решить, определяются функцией σ .

Дальнейшее построение решения заключается в решении элементарных задач другого типа.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^3$. Обозначим

$$\varphi_\xi(x, y) = \max_{|x| \leq H} \min_{|y| \leq H} \langle \xi, x - y \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R},$$

где вектор $s \in \mathbb{R}^2$ образован из первых двух компонент вектора ξ , $s = (s_1, s_2)$. Отметим, что если $s_3 \leq 2$, тогда $H \varphi_\xi = H \varphi_s$ and $\varphi_\xi(x, y) = \phi_s(x, y)$.

Для заданного множества M обозначим его замыкание символом clM , а границу – символом ∂M .

З а д а ч и 3 и 4. Пусть заданы линейно независимые векторы $a \in \mathbb{R}^3$ и $b \in \mathbb{R}^3$ и число $r > 1$. Пусть

$$\varphi^+(x, y) = \inf_{a \in [a, b]} \varphi_a(x, y), \quad \varphi^-(x, y) = \sup_{a \in [a, b]} \varphi_a(x, y),$$

$$G^\downarrow = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi^-(x, y) < r \},$$

$$G_\downarrow = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi_\downarrow(x, y) < r \}.$$

В задаче 3 требуется построить непрерывную функцию φ^0 ; $clG^\downarrow \subset \mathbb{R}$, являющуюся в области $G^\downarrow$ минимаксным решением уравнения в частных производных (УЧП) первого порядка (2.13) и удовлетворяющую соотношениям

$$\varphi^0(x, y) < r, \quad (x, y) \in G^\downarrow, \quad \varphi^0(x, y) = r, \quad (x, y) \in \partial G^\downarrow.$$

В задаче 4 требуется построить непрерывную функцию φ_0 ; $clG_\downarrow \subset \mathbb{R}$, являющуюся в области $G_\downarrow$ минимаксным решением уравнения (2.13) и удовлетворяющую соотношениям

$$\varphi_0(x, y) < r, \quad (x, y) \in G_\downarrow, \quad \varphi_0(x, y) = r, \quad (x, y) \in \partial G_\downarrow.$$

Решением задачи 3 является функция

$$\varphi^0)x, y + [\text{ n } \frac{1}{s} \sim \varphi_s)x, y + \text{ при } \xi / S_r) \mathfrak{a}, \mathfrak{b} +$$

где

$$S_r) \mathfrak{a}, \mathfrak{b} + [\} \xi / \text{con}) \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \setminus \setminus < s, w_0 > 0 H^\downarrow) \xi + [\text{ r } \langle , \\ \text{con}) \mathfrak{a}, \mathfrak{b} + [\} \lambda \mathfrak{a} 0 \text{ } \mu \mathfrak{b} \setminus \setminus \subset 1, \mu \subset 1 \langle ,$$

а точка w_0 / R^2 – решение системы двух линейных уравнений

$$\rangle a, w_0 | 0 H^\downarrow) \mathfrak{a} + [\text{ r } , \quad \rangle b, w_0 | 0 H^\downarrow) \mathfrak{b} + [\text{ r } .$$

Компоненты векторов a / R^2 и b / R^2 совпадают с первыми двумя компонентами векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ соответственно.

Решением задачи 4 в случаях, возникающих при построении решения $\varphi) \nLeftarrow$ задачи (2.13), (2.14), (3.5), является функция

$$\varphi_0)x, y + [\text{ n } \frac{1}{s} \varphi_s)x, y + \text{ при } \xi / S_r) \mathfrak{a}, \mathfrak{b} +$$

4. Основной результат

Обозначим символом $\sim$ множество точек из R^3 , в которых гамильтониан $H^\downarrow$; $R^3 \propto R$ недифференцируем. Пусть 1 – нулевой вектор в R^3 . По множеству $Z \supset R^2$ (3.3) векторов, формирующих функцию σ , определим множество $Z^\natural \supset R^3$.

$$Z^\natural [\text{ } \} \xi [\text{ }) s_1, s_2, s_3 + / R^3 \setminus s [\text{ }) s_1, s_2 + / Z, s_3 [\text{ } 2 \langle .$$

Следующее утверждение содержит основной результат работы.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия **A2-A3**. Тогда

A) Решение $\varphi) \nLeftarrow$ задачи (2.13), (2.14), (3.5) – неотрицательная кусочно-линейная функция, образованная с помощью склейки линейных функций

$$\varphi_s)x, y + [\text{ } \rangle s, x | 0 \text{ } s_3 \times y 0 H^\downarrow) \xi + , \quad \xi / L, \quad (4.1)$$

где множество L состоит из конечного числа элементов, и

$$Z^\natural \supset L, \quad) L \text{ } Z^\natural + \supset)^- \{ 1 +$$

B) Для любого $y_\downarrow / R$ функция $\varphi)x, y_\downarrow +$ в области $\} x / R^2 \setminus \varphi)x, y_\downarrow + > 1 \langle$ образована с помощью склейки конечного числа простых кусочно линейных функций.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы следует из описанного выше алгоритма. Неотрицательность функции $\varphi) \nLeftarrow$ обусловлена неотрицательностью функции $\sigma) \nLeftarrow$ вид (4.1) линейных функций, формирующих решение, обусловлен конкретными элементарными задачами, возникающими в ходе его построения.

Для доказательства того, что построенная в результате алгоритма функция $\varphi) \nLeftarrow$ является минимаксным решением уравнения (2.13), необходимо проверить выполнение

неравенств (2.15), (2.16). В точках, где φ не совпадает с решением какой-то из рассмотренных выше элементарных задач, эти неравенства выполнены. Таким образом, следует проверить выполнение неравенств (2.15), (2.16) на поверхностях склейки решений различных элементарных задач, формирующих функцию φ . При этом если поверхность

склейки не принадлежит никакой из областей определения решений элементарных задач, существует число $r < 1$ такое, что $\exists x, y \in R^2 \cap R \setminus \varphi(x, y) \cap [r, 1]$.

Пусть $x_0, y_0 \in R^2$. Если существует окрестность $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ в которой функция φ линейна, неравенства (2.15), (2.16) выполняются. Действительно, в этом случае существует вектор $\xi \in [s_1^\perp, s_3^\perp] \setminus \{0\}$, $s_1^\perp \in R^2$, $s_3^\perp \in R$ такой, что

$$\varphi(x, y) \in [\varphi_{s^*}([s_1^\perp, x] \cap [s_3^\perp, y] \cap H^+) \setminus \xi^\perp] \cap O_\varepsilon(x_0, y_0)$$

Функция φ дифференцируема в $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ и $D\varphi(x_0, y_0) \subset D^+\varphi(x_0, y_0) \setminus \xi^\perp$, и в точке x_0, y_0 выполняются неравенства (2.15), (2.16).

Рассмотрим случай, когда в точке $x_0, y_0 \in R^2$ происходит склейка двух линейных функций. Из алгоритма следует, что в этом случае возможны две ситуации. В первой для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ можно указать точку $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in R^2$ в которой функция φ склеивается из тех же линейных функций и является решением какой-то элементарной задачи, причем $\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon) > r$. Очевидно, что в этой ситуации $D\varphi(x_0, y_0) \subset D\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ и $D^+\varphi(x_0, y_0) \subset D^+\varphi(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. Поскольку в точке $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ неравенства (2.15), (2.16) выполняются, в силу непрерывности получим, что они выполнены и в точке x_0, y_0 .

Во второй ситуации в некоторой окрестности $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ точки $x_0, y_0 \in R^2$ функция φ имеет вид

$$\varphi(x, y) \in \text{conv}\{\varphi_a(x, y), \varphi_b(x, y)\},$$

где векторы $a, b \in R^3$ связаны равенством $b = \mu a$, $\mu > 1$, причем вектор a — ненулевой. Имеем $D^+\varphi(x_0, y_0) \subset$

$$D\varphi(x_0, y_0) \cup \{l \in R^3 \setminus \{0\} \mid \exists \lambda \in [1, 2] \setminus \{1\} : l \in R^3 \setminus \{0\} \mid \lambda b, \lambda \in [1, 2] \setminus \{1\}\}.$$

Так как функции φ_a и φ_b положительно однородны, и

$$\varphi(x_0, y_0) \subset [\varphi_a(x_0, y_0) \cup \varphi_b(x_0, y_0)] \cap [r, 1],$$

получаем, что и в этой ситуации неравенства (2.15), (2.16) выполняются.

Рассмотрим, наконец, случай, когда точка $x_0, y_0 \in R^2$ является узловой, то есть в ней происходит склейка n ($n \geq 2$) линейных функций

$$\varphi_{a^p}(x, y) \in [a^p, x] \cap [a_3^p, y] \cap H^+ \setminus \xi^p \setminus p \in \{2, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Функция φ недифференцируема в точке $x_0, y_0 \in R^2$ поэтому одно из множеств $D\varphi(x_0, y_0)$ и $D^+\varphi(x_0, y_0)$ пусто. Примем для определенности, что $D^+\varphi(x_0, y_0) = \emptyset$. Если при этом $D\varphi(x_0, y_0) = \emptyset$, неравенства (2.15), (2.16), очевидно, выполняются.

Предположим, что $D\varphi(x_0, y_0) \neq \emptyset$. Символом φ_ε обозначим сужение функции φ на некоторую достаточно малую выпуклую окрестность $O_\varepsilon(x_0, y_0)$ такую, что в этой окрестности функция φ склеивается только из функций (4.2). Можно показать, что

$$D\varphi(x_0, y_0) \subset D\varphi_\varepsilon(x_0, y_0)$$

где φ_ε — выпуклая оболочка функции φ_ε . Таким образом, $D^+\varphi(x_\downarrow, y_\downarrow)$ является ограниченным замкнутым выпуклым множеством. При этом если $(x_\downarrow, y_\downarrow) \in D^+\varphi(x_\downarrow, y_\downarrow)$ существуют векторы $q \in R^3$, $b \in R^3$, такие, что

$$(q, b) \in \{ (q, b) \mid \lambda \neq 0, \lambda b \in [1, 2] \},$$

и для любого $n \in \{2, 3, \dots\}$ существует точка $(x_n, y_n) \in O_{\varepsilon_n}(x_\downarrow, y_\downarrow)$ такая, что $D^+\varphi(x_n, y_n) = [a, b]$. Здесь $\varepsilon_n \leq \varepsilon/n$. Точки (x_n, y_n) не являются узловыми, поэтому в них выполнено неравенство (2.15). В частности,

$$H^+(x_\downarrow, y_\downarrow)(l, x_n) \leq l_3 y_n \leq \varphi(x_n, y_n) \quad (4.3)$$

Переходя в (4.3) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$H^+(x_\downarrow, y_\downarrow)(l, x_\downarrow) \leq l_3 y_\downarrow \leq \varphi(x_\downarrow, y_\downarrow)$$

что доказывает выполнение неравенства (2.15). Неравенство (2.16) выполнено в силу пустоты супердифференциала.

Случай, когда $D^+\varphi(x_\downarrow, y_\downarrow) \neq \emptyset$, $D^+\varphi(x_\downarrow, y_\downarrow) \cap \emptyset$, рассматривается аналогично. Таким образом, построенная в результате алгоритма функция φ является минимаксным решением уравнения (2.13).

Покажем, что построенная в результате реализации алгоритма функция φ удовлетворяет соотношению (2.14). Рассмотрим произвольную точку $(x_\downarrow, y_\downarrow) \in R^2$, $y_\downarrow \in R$, $y_\downarrow \leq 1$.

Если $x_\downarrow$ — нулевой вектор, тогда для любого $\alpha > 1$ вектор $\frac{x_\downarrow}{\alpha}$ также является нулевым. В случае $y_\downarrow \leq 1$ имеем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \varphi \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right) \leq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \varphi(1, 1) \leq 1 \leq \sigma^\#(1, 1)$$

В случае $y_\downarrow \leq 1$ из алгоритма следует, что существуют число $\alpha_\downarrow > 1$ и вектор $s \in R^2$ такие, что для всех $1 < \alpha < \alpha_\downarrow$ справедливо соотношение

$$\varphi(1, \frac{y_\downarrow}{\alpha}) \leq \left(\frac{y_\downarrow}{\alpha} \mid 0 \mid H \right) s$$

из которого получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \varphi \left(\frac{1}{\alpha}, \frac{y_\downarrow}{\alpha} \right) \leq \left(y_\downarrow \mid \sigma^\# \right) 1, y_\downarrow$$

Пусть теперь $x_\downarrow$ — ненулевой вектор. Если при этом существует окрестность $O(x_\downarrow)$ точки $x_\downarrow$ на плоскости R^2 , в которой функция σ линейна

$$\sigma(x) = \langle a, x \rangle, \quad x \in O(x_\downarrow)$$

тогда из алгоритма построения функции φ следует, что существует число $\alpha_\downarrow > 1$ такое, что для всех $1 < \alpha < \alpha_\downarrow$ справедливо

$$\varphi(x, \frac{y_\downarrow}{\alpha}) \leq \left(\langle a, \frac{x}{\alpha} \mid 0 \mid H \right) a$$

Таким образом,

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha \varphi \left(\frac{x_{\downarrow}}{\alpha}, \frac{y_{\downarrow}}{\alpha} \right) \left([\rangle a, x_{\downarrow} | 0 \ y_{\downarrow} [\sigma^{\#}) x_{\downarrow}, y_{\downarrow} + \right.$$

Осталось рассмотреть случай, когда в окрестности $O) x_{\downarrow} +$ точки $x_{\downarrow}$ на плоскости R^2 функция $\sigma) \nlessgtr$ склеивается из двух линейных функций. Пусть, для определенности, линейные функции склеиваются с помощью операции максимума

$$\sigma) x + [\ n \ i \ \sim \} \rangle a, x | , \rangle b, x | \langle , \ x / O) x_{\downarrow} +$$

Тогда существует число $\alpha_{\downarrow} > 1$ такое, что для всех $1 < \alpha < \alpha_{\downarrow}$ точка $\frac{x_{\downarrow}}{\alpha}, \frac{y_{\downarrow}}{\alpha}$ (находится в области, в которой функция φ совпадает с решением первой элементарной задачи, определяемой векторами a и b , и

$$\varphi \left(\frac{x_{\downarrow}}{\alpha}, \frac{y_{\downarrow}}{\alpha} \right) \left([\ n \ i \ \sim \} \right) \lambda a 0 \) 2 \ \lambda \nlessgtr, \frac{x_{\downarrow}}{\alpha} \int_0^{\frac{y_{\downarrow}}{\alpha}} \frac{y_{\downarrow}}{\alpha} 0 \ H \) \lambda a 0 \) 2 \ \lambda \nlessgtr + .$$

Получаем

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha \varphi \left(\frac{x_{\downarrow}}{\alpha}, \frac{y_{\downarrow}}{\alpha} \right) \left([\ n \ i \ \sim \} \rangle a, x | , \rangle b, x | \langle 0 \ y [\sigma^{\#}) x_{\downarrow}, y_{\downarrow} + \right.$$

что завершает проверку выполнения предельного соотношения (2.14).

Доказательство части В) опускаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pachter M., Yavin Y. Simple-motion pursuit-evasion differential games, part 1: Stroboscopic strategies in collision-course guidance and proportional navigation // Journal of Optimization Theory and Applications. 1986. Vol. 51. № 1. P. 95-127.
2. Petrosjan L.A. Differential games of pursuit (Series on Optimization, Vol. 2). Singapore: World Scientific Publ., 1993.
3. Камнева Л.В., Пацко В.С. Построение максимального стабильного моста в играх с простыми движениями на плоскости // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2014. Т. 20. № 4. С. 128-142.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. N. Y.: Springer-Verlag, Inc., 1988. 517 p.
6. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
7. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
8. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations // Transactions of the American Mathematical Society. 1983. Vol. 377. № 1. P. 1-42.
9. Субботин А.И., Шагалова Л.Г. Кусочно-линейное решение задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби // Доклады Академии наук. 1992. Т. 325. Вып. 5. С. 144-148.
10. Shagalova L.G. A piecewise linear minimax solution of the Hamilton-Jacobi equation // IFAC Proceedings Volumes. 1998. Vol. 31. № 13. P. 193-197.

11. *Шагалова Л.Г.* Кусочно-линейная функция цены дифференциальной игры с простыми движениями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 4. С. 564-565.
12. *Hopf E.* Generalized Solutions of non-linear Equations of First Order // Journal of Mathematics and Mechanics. 1965. Vol. 14. № 6. P. 951-973.
13. *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54-63.
14. *Bardi M., Evans L.* On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 1984. Vol. 8. № 11. P. 1373-1381.

Поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Шагалова Любовь Геннадьевна, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела динамических систем, e-mail: shag@imm.uran.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-877-890

THE VALUE FUNCTION OF A DIFFERENTIAL GAME WITH SIMPLE MOTIONS AND AN INTEGRO-TERMINAL COST

L. G. Shagalova

Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: shag@imm.uran.ru

Abstract. An antagonistic positional differential game of two persons is considered. The dynamics of the system is described by a differential equation with simple motions, and the payoff functional is integro-terminal. For the case when the terminal function and the Hamiltonian are piecewise linear, and the dimension of the state space is two, a finite algorithm for the exact construction of the value function is proposed.

Keywords: differential game; simple motions; value function; Hamilton–Jacobi equation; algorithm

REFERENCES

1. Pachter M., Yavin Y. Simple-motion pursuit-evasion differential games, part 1: Stroboscopic strategies in collision-course guidance and proportional navigation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1986, vol. 51, no. 1, pp. 95-127.
2. Petrosjan L.A. *Differential Games of Pursuit (Series on Optimization, Vol. 2)*. Singapore, World Scientific Publ., 1993.
3. Kamneva L.V., Patsko V.S. Construction of a maximal stable bridge in games with simple motions on the plane. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 125-139.
4. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems*. New York, Springer-Verlag, Inc., 1988, 517 p.
6. Subbotin A.I. *Minimaksnyye neravenstva i uravneniya Gamil'tona–Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 216 p. (In Russian).
7. Subbotin A.I. *Generalized Solutions of First Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective*. Boston, Birkhäuser, 1995, 312 p.
8. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1983, vol. 377, no. 1, pp. 1-42.
9. Subbotin A.I., Shagalova L.G. A piecewise linear solution of the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics*, 1993, vol. 46, pp. 144-148.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-01-00074) and by the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (comprehensive program № 18-1-10).

10. Shagalova L.G. A piecewise linear minimax solution of the Hamilton–Jacobi equation. *IFAC Proceedings Volumes*, 1998, vol. 31, no. 13, pp. 193-197.
11. Shagalova L.G. Kusochno-lineynaya funktsiya tseny differentsial'noy igry s prostymi dvizheniyami [A piecewise linear value function of a differential game with simple motions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 564-565. (In Russian).
12. Hopf E. Generalized Solutions of non-linear Equations of First Order. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1965, vol. 14, no. 6, pp. 951-973.
13. Pshenichnyi B.N., Sagaidak M.I. Differential games of prescribed duration. *Cybernetics*, 1970, no. 6, pp. 72-83.
14. Bardi M., Evans L. On Hopf's formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 1984, vol. 8, no. 11, pp. 1373-1381.

Received 17 April 2018

Reviewed 21 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

Shagalova Lyubov Gennad'evna, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.N. Krasovskii, Yekaterinburg, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Dynamical Systems Department, e-mail: shag@imm.uran.ru

For citation: Shagalova L.G. Funktsiya tseny differentsialnoi igry s prostymi dvizheniyami i integralno-terminalnoi platoi [The value function of a differential game with simple motions and an integro-terminal cost]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 877-890. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-877-890 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906

УДК 517.927

ДИСКРЕТНАЯ ПРОЦЕДУРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

✉ Р. И. Шевченко¹⁾, Ю. Ф. Долгий²⁾

¹⁾ АО «Опытное конструкторское бюро «Новатор»
620017, Российская Федерация, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 18
E-mail: oma170@hotmail.com

²⁾ ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Аннотация. Предлагается процедура оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений. Стабилизирующие управления, формируемые по принципу обратной связи, определяются состояниями системы в фиксированные моменты времени, предшествующие текущему моменту. Рассматривается эквивалентная линейная периодическая дискретная задача оптимальной стабилизации. Предложена процедура решения дискретного периодического уравнения Риккати. Исследуется связь непрерывной и дискретной периодических задач оптимальной стабилизации. Предложенный метод используется при стабилизации движений механических систем.

Ключевые слова: линейная периодическая система; дискретная задача оптимальной стабилизации; дискретное периодическое уравнение Риккати

Введение

Задача стабилизации, состоящая в обеспечении устойчивости заданных движений механических систем, исследовалась как для моделей конкретных механических систем, так и для целых классов моделей механических систем. В рамках теории стабилизации главные результаты получены для моделей, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению эти результаты могут быть применены и к нелинейным моделям при условии, что возмущения стабилизируемого движения малы.

Существуют разные подходы к выбору управления, обеспечивающего устойчивую работу модели на бесконечном интервале времени. Для периодических линейных систем задача стабилизации решается при помощи управлений, формируемых по принципу обратной связи по наблюдаемым состояниям объекта управления в текущие моменты времени. Стабилизирующие управления также зависят явно от времени. Последняя зависимость выбирается периодической, и ее период совпадает с периодом коэффициентов. В рамках методов модального управления стабилизирующие управления выбираются исходя из требований асимптотической устойчивости заданных движений замкнутых систем. Среди методов модального управления часто применяют метод назначения множества мультипликаторов периодической задачи на комплексной плоскости и метод уравнений Ляпунова [1–3]. В инженерных приложениях эти методы позволяют обеспечить заданные запасы устойчивости управляемых систем. Другой подход к выбору стабилизирующей обратной связи основан на введении в постановку задачи стабилизации квадратичного критерия качества регулирования и переходе к задаче оптимальной стабилизации, что позволяет для нахождения управления использовать принцип динамического программирования Беллмана. Доказано, что при выполнении условий стабилизируемости задача оптимальной линейно-квадратичной стабилизации имеет единственное решение в классе линейных периодических обратных связей по текущим состояниям системы [4]. Коэффициенты усиления обратной связи в этом случае определяются периодическим положительно определенным решением дифференциального неавтономного матричного уравнения Риккати. Методы модального управления и методы решения задачи оптимальной стабилизации в применении к общим эволюционным периодическим системам изложены в монографии [1].

Большое количество работ посвящено решению задач стабилизации для конкретных механических систем, в частности – стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия математического маятника. Так, А. Стефенсон [5] и П.Л. Капица заметили, что при малых отклонениях маятника от верхнего положения равновесия вертикальные колебания точки подвеса достаточно большой частоты обеспечивают сравнительно медленные устойчивые незатухающие колебания маятника относительно вертикали. Подобного рода стабилизация получила название динамической стабилизации. Впоследствии П.Л. Капица показал, что динамическая стабилизация перевернутого маятника возможна и при горизонтальных колебаниях его опоры. Отдельного внимания заслуживает задача стабилизации верхнего положения равновесия перевернутого маятника на тележке, когда устойчивость достигается горизонтальными перемещениями тележки. Процедура управления таким маятником исследовалась, например, в работе [6]. Подобная механическая система теряет управляемость, когда маятник занимает горизонтальное положение. В рамках других исследований обеспечивается глобальная устойчивость верхнего положения равновесия маятника. Например, работы [7, 8] посвящены стабилизации маятника на неподвижном основании при помощи маховичного управления. Управление маятником осуществляется вращением маховика, закрепленного на нем. Алгоритм, изложенный в статье [8], основан на линеаризации обратной связью и пассивации. Он позволяет привести маятник в окрестность верхнего положения равновесия из произвольного начального состояния посредством алгоритма

раскачки, после чего происходит переключение на алгоритм стабилизации, обеспечивающий устойчивые автоколебания маятника около верхнего положения равновесия. В работе [9] предложен алгоритм глобальной оптимальной стабилизации обратного маятника с гистерезисными нелинейностями.

В настоящей статье предлагается процедура оптимальной линейно-квадратичной асимптотической стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений. Для стабилизации используются управления по принципу обратной связи, определяемые состояниями системы в фиксированные предыдущие моменты времени. Задержки в управлении позволяют перейти к дискретной задаче оптимальной стабилизации. Дискретные коэффициенты усиления обратной связи определяются при помощи специального алгоритма. Рассмотрены примеры стабилизации механических моделей.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1.1)$$

где x – n -мерный вектор состояния системы, u – m -мерный вектор управления, $A(t), B(t)$ – ω -периодические матричные функции подходящих размерностей. Для уравнения (1.1) требуется сформировать управление по принципу обратной связи такое, что всякое решение $x(t)$ с произвольным начальным условием $x(0) = x_0$ асимптотически устойчиво. При этом необходимо минимизировать показатель качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt, \quad (1.2)$$

где $R(t)$ – симметричная положительно определенная ω -периодическая матричная функция размерности $m \times m$, $Q(t)$ – симметричная положительно полуопределенная ω -периодическая матричная функция размерности $n \times n$.

В классической теории оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений предполагается, что допустимые управления зависят от текущего момента времени t и текущего состояния системы $x = x(t)$. Для периодических систем можно ограничиться периодической зависимостью от текущего момента, а для линейных систем – линейной зависимостью от текущего состояния системы. При таком выборе множества допустимых управлений U матричный коэффициент усиления оптимального стабилизирующего управления определяется с помощью периодического решения неавтономного дифференциального уравнения Риккати. Задача нахождения периодического решения дифференциального матричного нелинейного уравнения Риккати достаточно сложна. Отсутствие задержек при формировании управления по принципу обратной связи значительно усложняет процедуру его технической реализации.

При определении множества допустимых управлений U_d в настоящей работе задержки в управлении определяются специальным образом. Рассматривается периодическое разбиение числовой оси точками $t_j = t_{j+k} - \omega, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \omega$. Допустимые управления зависят от текущего момента времени

t и состояния системы x_j в фиксированный момент времени t_{j_d} , $x_{j_d} = x(t_{j_d})$, где t_{j_d} – ближайшая к текущему моменту t точка выбранного выше разбиения числовой оси. Индекс последней точки зависит от t , то есть $j_d = j_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Функция $j_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является кусочно-постоянной, имеющей разрывы первого рода в точках выбранного разбиения числовой оси, непрерывна справа в точках разрыва. Следовательно, допустимые управления в данной работе моделируются функциями $u(t, x(t_{j_d(t)}))$, $t \in \mathbb{R}$. Мы ограничимся изучением ситуации, когда множество допустимых управлений U_d содержит только управления, зависимость которых от первого аргумента является кусочно-постоянной с разрывами первого рода в точках выбранного разбиения числовой оси, непрерывной справа по первому аргументу в точках разрыва. Тогда имеем $u(t, x(t_{j_d(t)})) = u(t_{j_d(t)}, x(t_{j_d(t)}))$, $t \in \mathbb{R}$.

Будем также полагать, что зависимость допустимых управлений от второго аргумента является непрерывной. Справедливо представление $t_{j_d(t)} = t - \tau_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где τ_d – кусочно-непрерывная функция, имеющая разрывы первого рода в точках выбранного разбиения, $\tau_d(t) = t - t_{j_d(t)}$ при $t \in \mathbb{R}$, $\tau_d(t + \omega) = \tau_d(t)$, $0 \leq \tau_d(t) < \max_{i \in \mathbb{Z}} (t_{i+1} - t_j) = r_d \geq \omega$, $t \in \mathbb{R}$. Мы рассматриваем множество допустимых управлений U_d с переменными периодическими задержками. Для его моделирования достаточно использовать периодические последовательности непрерывных функций $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u_{i+k} = u_i$, $i \in \mathbb{Z}$, полагая $u(t_i, x(t_i)) = u_i(x(t_i))$, $i \in \mathbb{Z}$.

В настоящей работе изучается задача оптимальной стабилизации системы (1.1) с показателем качества (1.2) для специального множества допустимых управлений U_d , полное описание которого приведено выше.

2. Дискретная задача стабилизации

Специальные свойства рассматриваемого множества допустимых управлений U_d позволяют перейти от непрерывной задачи оптимальной стабилизации к дискретной задаче оптимальной стабилизации.

Теорема 2.1. *Непрерывная периодическая задача оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с допустимым множеством управлений U_d эквивалентна дискретной задаче оптимальной стабилизации*

$$\widehat{x}_{j+1} = \widehat{A}_j \widehat{x}_j + \widehat{B}_j \widehat{u}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0 = 0 \dots \infty, \quad (2.3)$$

$$J_d = \int_0^{+\infty} \left[\widehat{x}_j^T \widehat{Q}_j \widehat{x}_j + 2 \widehat{x}_j^T \widehat{N}_j \widehat{u}_j + \widehat{u}_j^T \widehat{R}_j \widehat{u}_j \right] ds, \quad (2.4)$$

где k -периодические матрицы $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j$ определяются формулами

$$\widehat{A}_j = X(t_{j+1}) X^{-1}(t_j), \quad \widehat{B}_j = X(t_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} X^{-1}(s) B(s) ds,$$

$$\widehat{Q}_j = X^T(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} X^T(s) Q(s) X(s) ds X^{-1}(t_j),$$

$$\begin{aligned} \widehat{N}_j &= X^T(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} X^T(s_1) Q(s_1) X(s_1) \widehat{s_1} X^{-1}(s_2) B(s_2) ds_2 \left(ds_1, \right. \\ \widehat{R}_j &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} B^T(s_2) X^T(s_2) ds_2 X^T(s_1) Q(s_1) X(s_1) \widehat{s_1} X^{-1}(s_2) B(s_2) ds_2 + R(s_1) \left(ds_1. \right. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $X(\cdot), X(0) = I_n$, – фундаментальная нормированная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \in \mathbb{R}$; $X^T = (X(t))^{-1T}$, $t \in \mathbb{R}$; $\widehat{Q}_j$ – симметричные положительно полуопределенные матрицы, $\widehat{R}_j$ – симметричные положительно определенные матрицы, $j \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Для введенного выше множества допустимых управлений U_d управляемая система описывается системой дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_j(x(t_j)), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

При заданном начальном условии $x(0) = x_0$ и заданных непрерывных функциях $u_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, задача Коши для системы (2.6) имеет единственное решение $x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$ при $t \rightarrow 0$, определяемое формулами

$$\begin{aligned} x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) &= X(t) X^{-1}(t_j) x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) \\ &+ \int_{t_j}^t X^{-1}(s) B(s) ds u_j(x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))) \left(t_j \leq t < t_{j+1}, j \in \mathbb{N}_0, \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$x(0, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = x_0.$$

Ему соответствует программное управление $u(t, x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))) = u_j(x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $t_j \leq t < t_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, для системы (1.1).

Для функций $u_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, система разностных уравнений

$$\widehat{x}_{j+1} = \widehat{A}_j \widehat{x}_j + \widehat{B}_j u_j(\widehat{x}_j), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

при начальном условии $\widehat{x}_0 = x_0$ имеет единственное решение задачи Коши $\widehat{\widehat{x}}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{\widehat{x}}_0(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = x_0$. Ему отвечает программное управление $\widehat{u}_j = u_j(\widehat{\widehat{x}}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $j \in \mathbb{N}_0$.

При управлениях $\widehat{u}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, и начальном условии $\widehat{x}_0 = x_0$ система (2.3) имеет единственное решение задачи Коши $\widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{x}_0(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots) = x_0$, и справедливы равенства $\widehat{\widehat{x}}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = \widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$.

В силу формулы (2.7) $x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = \widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и величина показателя качества (1.2) при подстановке $x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$, $u(t, x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $t \rightarrow 0$, совпадает с величиной показателя качества (2.4)

при подстановке $\widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $\widehat{u}_j, j \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, непрерывная задача оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с выбранным множеством допустимых управлений U_d эквивалентна дискретной задаче оптимальной стабилизации (2.3), (2.4). $\square$

Дискретные задачи оптимальной стабилизации хорошо изучены [4].

Теорема 2.2. [10] Если дискретная задача (2.3), (2.4) стабилизируема, то ее оптимальное стабилизирующее управление определяется формулами

$$\widehat{u}_j^* = - \left(\widehat{R}_j + \widehat{B}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j \right)^{-1} \widehat{B}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{A}_j + \widehat{N}_j^T \left(\widehat{x}_j, j \in \mathbb{N}_0, \right. \quad (2.8)$$

где $\widehat{P}_j, j \in \mathbb{N}_0$, – симметричное положительно определенное k -периодическое решение дискретного периодического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j = & \widehat{Q}_j + \widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{A}_j - \left(\widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j^T \right) \left(\right. \\ & \left. \right) \widehat{R}_j + \widehat{B}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j \left(\right)^{-1} \widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j^T \left(\right)^T, j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В настоящей работе дискретная задача оптимальной стабилизации (2.3), (2.4) является вспомогательной. Ее коэффициенты определяются специальными формулами (2.5).

Теорема 2.3. Если дискретная задача (2.3), (2.4) стабилизируема, то для непрерывной задачи стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d оптимальное стабилизирующее управление существует и определяется формулой

$$\begin{aligned} u_d^0[t, x_t(\gamma)] = & - \left(\widehat{R}_{j_d(t)} + \widehat{B}_{j_d(t)}^T \widehat{P}_{j_d(t)+1} \widehat{B}_{j_d(t)} \right)^{-1} \\ & \left(\widehat{B}_{j_d(t)}^T \widehat{P}_{j_d(t)+1} \widehat{A}_{j_d(t)} + \widehat{N}_{j_d(t)}^T \right) \left(x_t(\gamma - \tau_d(t)), t \in \mathbb{R}, \right. \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $x_t(\gamma) = x(t + \gamma)$, $\gamma \in [-\tau_d, 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений следует из теорем 2.1, 2.2. $\square$

Используемый в работе алгоритм численного решения дискретного периодического уравнения Риккати является модификацией алгоритма, приведенного в статье [11] для случая $\widehat{N}_j = 0, j \in \mathbb{N}_0$. Для решения дискретного периодического уравнения Риккати используется взаимосвязь между уравнением Риккати и двухточечной краевой задачей, соответствующей задаче оптимального управления (2.3), (2.4). Если дискретная система (2.3) стабилизируема, то оптимальная пара $(\widehat{x}_j, \widehat{u}_j), j \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет k -периодической системе разностных уравнений [10]

$$\begin{aligned} \widehat{x}_{j+1} &= \widehat{A}_j \widehat{x}_j + \widehat{B}_j \widehat{u}_j, \quad \widehat{\lambda}_j = \widehat{Q}_j \widehat{x}_j + \widehat{N}_j \widehat{u}_j + \widehat{A}_j^T \widehat{\lambda}_{j+1}, \\ \widehat{N}_j^T \widehat{x}_j + \widehat{R}_j \widehat{u}_j + \widehat{B}_j^T \widehat{\lambda}_{j+1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\widehat{\lambda}_j, j \in \mathbb{N}_0$, – вектор сопряженных переменных.

Упростим систему разностных уравнений (2.11). Исключая $\widehat{u}_j$ из уравнений (2.11), получим систему разностных уравнений

$$\widehat{x}_{j+1} + \widehat{F}_{j+1}\widehat{\lambda}_{j+1} = \widetilde{\widehat{A}}_j\widehat{x}_j, \quad \widetilde{\widehat{A}}_j^T\widehat{\lambda}_{j+1} = \widetilde{\widehat{Q}}_j\widehat{x}_j - \widehat{\lambda}_j, \quad (2.12)$$

где $\widehat{F}_j = \widehat{B}_j\widehat{R}_j^{-1}\widehat{B}_j^T$, $\widehat{A}_j = \widehat{A}_j - \widehat{B}_j\widehat{R}_j^{-1}\widehat{N}_j^T$, $\widetilde{\widehat{Q}}_j = \widehat{Q}_j - \widehat{N}_j\widehat{R}_j^{-1}\widehat{N}_j^T$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Вводя обозначения $\widehat{z}_j^T = \begin{pmatrix} \widehat{x}_j^T & \widehat{\lambda}_j^T \end{pmatrix}$, $j \in \mathbb{N}_0$, запишем систему уравнений (2.12) в виде

$$\widetilde{\widehat{M}}_j\widehat{z}_{j+1} = \widetilde{\widehat{L}}_j\widehat{z}_j, \quad (2.13)$$

где

$$\widetilde{\widehat{M}}_j = \begin{bmatrix} I_n & \widehat{F}_j \\ 0 & \widetilde{\widehat{A}}_j^T \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\widehat{L}}_j = \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{A}}_j & 0 \\ \widetilde{\widehat{Q}}_j & I_n \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\widetilde{\widehat{A}}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, обратимы. Следовательно, обратимы матрицы $\widetilde{\widehat{M}}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, и от разностного уравнения (2.13) можно перейти к уравнению

$$\widehat{z}_{j+1} = \widehat{S}_j\widehat{z}_j, \quad (2.14)$$

в котором

$$\widehat{S}_j = \widetilde{\widehat{M}}_j^{-1}\widetilde{\widehat{L}}_j = \begin{bmatrix} \widetilde{\widehat{A}}_j + \widehat{F}_j\widetilde{\widehat{A}}_j^T\widetilde{\widehat{Q}}_j^{-1} & \widehat{F}_j\widetilde{\widehat{A}}_j^T \\ \widetilde{\widehat{A}}_j^{-T}\widetilde{\widehat{Q}}_j^{-1} & \widetilde{\widehat{A}}_j^{-T} \end{bmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Матричное разностное уравнение (2.14) является однородным k -периодическим уравнением. Для него вводится k -периодическая матрица монодромии в соответствии с формулой

$$\widehat{U}_j = \widehat{S}_{j+k-1}\widehat{S}_{j+k-2} \times \dots \times \widehat{S}_{j+1}\widehat{S}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Требуемое решение дискретного периодического уравнения Риккати определяется устойчивым инвариантным подпространством k -периодической матрицы $\widehat{U}_j$ [11]. Предполагаем, что матрицы $\widehat{U}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, не имеют собственных значений, лежащих на единичной окружности. Тогда базисная матрица $\widehat{V}_j$ устойчивого инвариантного подпространства матрицы $\widehat{U}_j$ определяется ее собственными векторами, соответствующими собственным значениям, по модулю меньшим единицы. Для стабилизируемой дискретной периодической системы (2.3) $\widehat{V}_j$ допускает представление $\widehat{V}_j^T = \begin{pmatrix} \widehat{V}_{1j}^T & \widehat{V}_{2j}^T \end{pmatrix}$, $j \in \mathbb{N}_0$, и формула $\widehat{P}_j = \widehat{V}_{2j}\widehat{V}_{1j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, дает требуемое k -периодическое решение дискретного периодического уравнения Риккати.

3. Связь периодических задач оптимальной стабилизации

Пусть решение непрерывной задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) существует как для множества непрерывных управлений U , так и для множества кусочно-постоянных управлений U_d . Тогда справедливо утверждение

Теорема 3.4. *Оптимальное стабилизирующее управление периодической задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d стремится к оптимальному стабилизирующему управлению периодической задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U , когда диаметр периодического разбиения числовой оси точками $t_j = t_{j+k} \quad \omega, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \omega$, стремится к нулю.*

Доказательство. В множестве допустимых управлений U оптимальное управление задачи стабилизации (1.1), (1.2) определяется формулой

$$u^0[t, x] = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $P(t)$ – ω -периодическое положительно определенное симметричное решение дифференциального матричного уравнения Риккати [12]

$$\frac{dP}{dt} + Q(t) + PA(t) + A^T(t)P - PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В множестве допустимых управлений U_d оптимальное управление задачи стабилизации (1.1), (1.2) определяется формулой (2.10). Введем диаметр $d = \max_{0 \leq j-k \leq 1} (t_{j+1} - t_j)$ периодического разбиения числовой оси. Исследуем поведение оптимального управления (2.10) при d , стремящемся к нулю. Найдем асимптотические разложения матриц $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j \in \mathbb{N}_0$, по диаметру разбиения d .

Фундаментальная матрица $X(t)$ при $t_j \leq t < t_{j+1}, j \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода вида

$$X(t) = X(t_j) + \int_{t_j}^t A(s)X(s)ds, \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) имеет единственное решение, которое может быть найдено при помощи метода последовательных приближений. Метод последовательных приближений дает асимптотическое разложение

$$X(t) = X(t_j) + \int_{t_j}^t A(s)X(t_j)ds + O(d^2), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Соответствующее асимптотическое разложение $X^{-1}(t)$ имеет вид

$$X^{-1}(t) = X^{-1}(t_j) - \int_{t_j}^t A(s)ds + O(d^2), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.16), (3.17) в формулы, определяющие матрицы $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j \in \mathbb{N}_0$, находим асимптотические разложения

$$\widehat{A}_j = I_n + \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(s)ds + O(d^2), \quad \widehat{B}_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(s)ds + O(d^2),$$

$$\widehat{Q}_j = \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} Q(s)ds + O(d^2), \quad \widehat{N}_j = O(d^2), \quad \widehat{R}_j = \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} R(s)ds + O(d^2), \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.18)$$

Переходим к нахождению асимптотики для дискретного периодического уравнения Риккати (2.9). Используя асимптотические разложения матриц $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j \right) \left(\widehat{R}_j + \widehat{B}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j \right)^{-1} \widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j^T \\ &= \left(\widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} B(s)ds + O(d^2) \right) \left(\int_{t_{j+1}}^{\tau_{j+1}} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} R(s)ds + O(d) \right)^{-1} \\ & \quad \circ \left(\int_{t_{j+1}}^{\tau_{j+1}} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d) \right), \\ & \widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{A}_j = \widehat{P}_{j+1} + \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + \widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A(s)ds + O(d^2), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая асимптотические разложения (3.18), (3.19), преобразуем дискретное периодическое уравнение Риккати (2.9) к асимптотической форме

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j &= \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} Q(s)ds + \widehat{P}_{j+1} + \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + \widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A(s)ds \\ &+ \widehat{P}_{j+1} \left(\int_{t_j}^{\tau_{j+1}} B(s)ds \right) \left(\int_{t_{j+1}}^{\tau_{j+1}} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} R(s)ds \right)^{-1} \left(\int_{t_{j+1}}^{\tau_{j+1}} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d^2) \right), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего уравнения на $t_{j+1} - t_j$, получим следующую асимптотическую форму дискретного периодического уравнения Риккати (2.9)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \left(\int_{t_j}^{\tau_{j+1}} Q(s)ds + \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \right) \widehat{P}_{j+1} - \widehat{P}_j \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} \right. \\ &+ \left. \widehat{P}_{j+1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} A(s)ds + \widehat{P}_{j+1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} B(s)ds \right) \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} R(s)ds \right)^{-1} \\ & \quad \circ \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{\tau_{j+1}} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Фиксируем $t \in [0, \omega)$, полагаем в (3.20) $j = j_d(t)$ и устремляем d к нулю. Справедливы следующие формулы

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} Q(s) ds \right) &= Q(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} A(s) ds \right) = A(t), \\ \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} B(s) ds \right) &= B(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} R(s) ds \right) = R(t), \\ \lim_{d \rightarrow 0} \widehat{P}_{j_d(t)} &= P(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \right) \widehat{P}_{j_d(t)+1} - \widehat{P}_{j_d(t)} \left(\left[= \frac{dP(t)}{dt} \right. \right. \end{aligned}$$

При этом уравнение (3.20) переходит в дифференциальное матричное уравнение Риккати, соответствующее задаче оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с допустимым множеством управлений U . Для оптимального стабилизирующего управления (2.10) справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} u_d^0[t, x_t(\cdot)] &= \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} R(s) ds + O(d) \right) \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} \\ &\circ \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} B^T(s) ds \widehat{P}_{j_d(t)+1} + O(d) \right) \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} x_t(\tau_d(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Устремляя в последней формуле d к нулю и учитывая равенства $\lim_{d \rightarrow 0} r_d = 0$, $\lim_{d \rightarrow 0} \tau_d(t) = 0$, имеем

$$\lim_{d \rightarrow 0} u_d^0[t, x_t(\cdot)] = R^{-1}(t) B^T(t) P(t) x(t) = u^0[t, x(t)], \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

4. Примеры дискретной стабилизации механических систем

Рассматриваются задачи локальной стабилизации движений конкретных механических систем. Исходные нелинейные математические модели механических систем заменяются линейными в малых окрестностях стабилизируемых движений. Ищутся оптимальные стабилизирующие управления, минимизирующие заданные критерии качества переходных процессов.

4.1. Стабилизация маятника Капицы

Требуется стабилизировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = (9.81 + 3.44\pi^2 \cos 2\pi t)x_1 + u,$$

описывающую движение маятника Капицы около верхнего положения равновесия, с критерием качества

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt.$$

При определении множества допустимых управлений U_d принимается $k = 4$ и

$$t_0 = 0, t_1 = 0.25, t_2 = 0.5, t_3 = 0.75, t_4 = 1.$$

Используя формулы (2.5), вычисляем матрицы $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j = \overline{0, 3}$, эквивалентной дискретной периодической задачи оптимальной стабилизации (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned} \widehat{A}_0 = & \begin{pmatrix} 0.820 & 0.218 \\ 2.785 & 0.480 \end{pmatrix}, \widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.218 \\ 2.785 & 0.820 \end{pmatrix}, \widehat{A}_2 = \begin{pmatrix} 1.925 & 0.343 \\ 10.406 & 2.374 \end{pmatrix}, \\ \widehat{A}_3 = & \begin{pmatrix} 2.374 & 0.343 \\ 10.406 & 1.925 \end{pmatrix}, \widehat{B}_0 = \begin{pmatrix} 0.029 \\ 0.200 \end{pmatrix}, \widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.244 \end{pmatrix}, \widehat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0.038 \\ 0.365 \end{pmatrix}, \widehat{B}_3 = \begin{pmatrix} 0.036 \\ 0.313 \end{pmatrix}, \\ \widehat{Q}_0 = & \begin{pmatrix} 0.593 & 0.092 \\ 0.092 & 0.201 \end{pmatrix}, \widehat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1.445 & 0.416 \\ 0.416 & 0.196 \end{pmatrix}, \widehat{Q}_2 = \begin{pmatrix} 6.077 & 1.612 \\ 1.612 & 0.517 \end{pmatrix}, \\ \widehat{Q}_3 = & \begin{pmatrix} 10.562 & 2.179 \\ 2.179 & 0.501 \end{pmatrix}, \widehat{N}_0 = \begin{pmatrix} 0.032 \\ 0.024 \end{pmatrix}, \widehat{N}_1 = \begin{pmatrix} 0.075 \\ 0.025 \end{pmatrix}, \widehat{N}_2 = \begin{pmatrix} 0.224 \\ 0.063 \end{pmatrix}, \widehat{N}_3 = \begin{pmatrix} 0.280 \\ 0.058 \end{pmatrix}, \\ \widehat{R}_0 = & 0.256, \widehat{R}_1 = 0.256, \widehat{R}_2 = 0.260, \widehat{R}_3 = 0.259. \end{aligned}$$

Используя изложенный выше алгоритм решения дискретного периодического уравнения Риккати, находим решение уравнения (2.9)

$$\begin{aligned} \widehat{P}_0 = & \begin{pmatrix} 28.133 & 3.286 \\ 3.286 & 0.789 \end{pmatrix}, \widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 2.387 & 1.073 \\ 1.073 & 5.223 \end{pmatrix}, \widehat{P}_2 = \begin{pmatrix} 264.901 & 53.020 \\ 53.020 & 10.742 \end{pmatrix}, \\ \widehat{P}_3 = & \begin{pmatrix} 83.716 & 12.539 \\ 12.539 & 2.090 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя формулы (2.8), находим оптимальное стабилизирующее управление задачи (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned} \widehat{u}_0^{\oplus} = & 0.315\widehat{x}_1 - 0.318\widehat{x}_2, \widehat{u}_1^{\oplus} = 6.553\widehat{x}_1 - 1.811\widehat{x}_2, \widehat{u}_2^{\oplus} = 33.563\widehat{x}_1 - 6.860\widehat{x}_2, \\ \widehat{u}_3^{\oplus} = & 33.031\widehat{x}_1 - 5.337\widehat{x}_2. \end{aligned}$$

Используя теорему 2.3, находим оптимальное стабилизирующее управление для непрерывной задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d . Применяя методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, находим стабилизированные решения управляемой системы (1.1), отвечающие оптимальному стабилизирующему управлению. Подставляя в обратную связь стабилизирующего управления найденные стабилизированные решения, получим соответствующие программные оптимальные управления.

На рисунке 1 приведены графики компонент стабилизированного решения и программного оптимального управления. Начальные значения стабилизированного решения равны $x_1(0) = 0.1745, x_2(0) = 0.0873$. По оси абсцисс откладывается время, по левой оси ординат откладываются значения x_1, x_2 , а по правой оси ординат откладываются значения u .

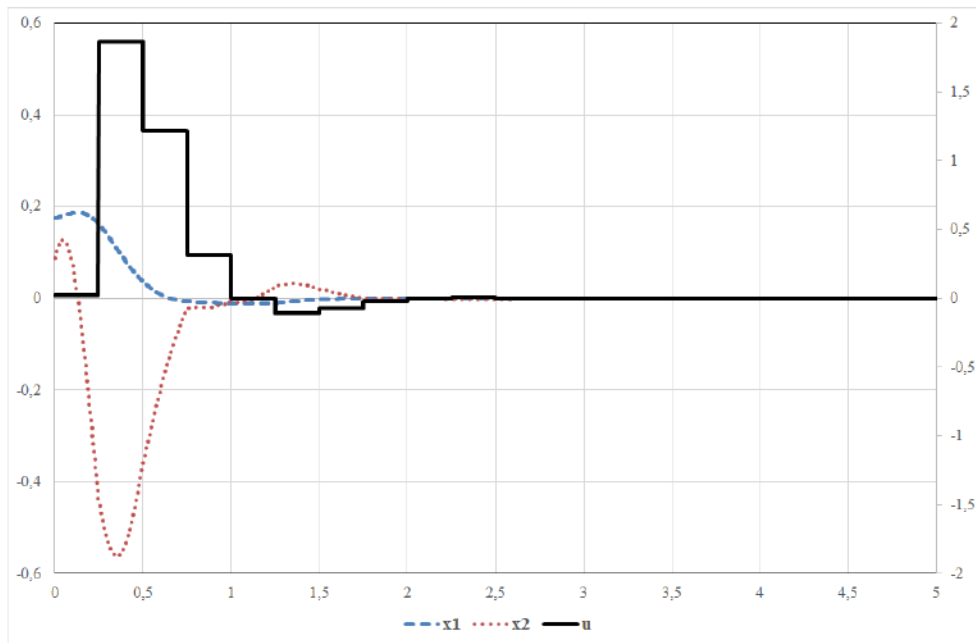


Рис. 1: Стабилизация маятника Капицы

4.2. Стабилизация двухзвенной колебательной цепи

Стабилизируются вертикальные колебания двухзвенной колебательной цепи, которые в линейном приближении описываются системой дифференциальных уравнений [13]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = & \left(1.3 + 0.1 \cos t + \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} \left[x_1 + \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} x_3 + u_1, \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} (x_1 - x_3) + u_2. \right. \right. \end{aligned}$$

Показатель качества переходных процессов имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt.$$

При определении множества допустимых управлений U_d принимается $k = 2$ и

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \pi, \quad t_2 = 2\pi.$$

Используя формулы (2.5), вычисляем матрицы $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j = 0, 1$, эквивалентной дискретной периодической задачи оптимальной стабилизации

$$\widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} 0.472 & 0.476 & 0.091 & 0.649 \\ 1.052 & 0.429 & 0.445 & 0.091 \\ 0.101 & 0.658 & 0.167 & 1.686 \\ 0.436 & 0.104 & 0.408 & 0.090 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.429 & 0.476 & 0.104 & 0.658 \\ 1.052 & 0.472 & 0.436 & 0.101 \\ 0.091 & 0.649 & 0.090 & 1.686 \\ 0.44 & 0.091 & 0.408 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_0 &= \begin{pmatrix} 1.101 & 0.777 \\ 0.358 & 0.624 \\ 0.782 & 3.693 \\ 0.634 & 1.762 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.978 & 0.811 \\ 0.584 & 0.676 \\ 0.806 & 3.636 \\ 0.671 & 1.615 \end{pmatrix} \\
\widehat{Q}_0 &= \begin{pmatrix} 4.308 & 0.073 & 0.671 & 0.342 \\ 0.073 & 2.752 & 0.336 & 1.274 \\ 0.671 & 0.336 & 2.117 & 1.013 \\ 0.342 & 1.274 & 1.013 & 6.896 \end{pmatrix}, \quad \widehat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 3.900 & 0.049 & 0.531 & 0.379 \\ 0.049 & 2.991 & 0.392 & 1.222 \\ 0.531 & 0.392 & 2.122 & 1.296 \\ 0.379 & 1.222 & 1.296 & 7.113 \end{pmatrix} \\
\widehat{N}_0 &= \begin{pmatrix} 2.607 & 0.621 \\ 1.022 & 2.325 \\ 0.600 & 0.659 \\ 2.305 & 8.610 \end{pmatrix}, \quad \widehat{N}_1 = \begin{pmatrix} 2.496 & 0.631 \\ 1.352 & 2.199 \\ 0.665 & 0.248 \\ 2.219 & 8.721 \end{pmatrix} \\
\widehat{R}_0 &= \begin{pmatrix} 6.789 & 3.711 \\ 3.711 & 19.053 \end{pmatrix}, \quad \widehat{R}_1 = \begin{pmatrix} 6.924 & 3.609 \\ 3.609 & 18.853 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Находим симметричное положительно определенное решение дискретного периодического уравнения Риккати (2.9)

$$\widehat{P}_0 = \begin{pmatrix} 6.475 & 1.678 & 1.181 & 1.044 \\ 1.678 & 5.089 & 1.088 & 0.119 \\ 1.181 & 1.088 & 2.661 & 1.836 \\ 1.044 & 0.119 & 1.836 & 4.603 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 4.793 & 0.550 & 0.636 & 0.813 \\ 0.550 & 5.466 & 0.784 & 0.198 \\ 0.636 & 0.784 & 2.654 & 2.161 \\ 0.813 & 0.198 & 2.161 & 4.913 \end{pmatrix}$$

Используя формулы (2.8), находим оптимальное стабилизирующее управление задачи (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_0^\Phi &= \begin{pmatrix} 0.753\widehat{x}_1 + 0.122\widehat{x}_2 & 0.181\widehat{x}_3 & 0.123\widehat{x}_4 \\ 0.181\widehat{x}_1 & 0.123\widehat{x}_2 + 0.160\widehat{x}_3 & 0.278\widehat{x}_4 \end{pmatrix}, \\
\widehat{u}_1^\Phi &= \begin{pmatrix} 0.751\widehat{x}_1 & 0.045\widehat{x}_2 & 0.180\widehat{x}_3 & 0.073\widehat{x}_4 \\ 0.179\widehat{x}_1 & 0.073\widehat{x}_2 + 0.148\widehat{x}_3 & 0.289\widehat{x}_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Проведенное компьютерное моделирование показало, что оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d , найденное в соответствии с теоремой 2.3, обеспечивает асимптотическую устойчивость модели. При этом минимизируется показатель качества переходных процессов (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang G., Xu Y. Periodic Feedback Stabilization for Linear Periodic Evolution equations. N. Y.: Springer, 2016. 127 p.
2. Aeyels D., Willems J.L. Pole assignment for linear periodic systems by memoryless output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. Vol. 40. № 4. P. 735-739.
3. Varga A. Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45. № 5. P. 1017-1022.

4. Квасернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 с.
5. *Stephenson A.* On induced stability // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1908. Vol. 15. № 86. P. 233-236.
6. *Furuta K., Iwase M.* Swing-up time analysis of pendulum // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*. 2004. Vol. 52. № 3. P. 153-163.
7. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М. Управление при помощи маятника с неподвижной точкой подвеса // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2004. Вып. 1. С. 27-38.
8. *Spong M.W., Corke P., Lozano R.* Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica*. 2001. Vol. 37. № 11. P. 1845-1851.
9. Грачиков Д.В., Лебедев Г.Н., Семенов М.Е., Канищева О.И. Стабилизация, рассинхронизация и оптимальное управление обратным маятником с гистерезисными свойствами // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2013. Вып. 1. С. 29-37.
10. *Varga A.* On solving discrete-time periodic Riccati equations // *IFAC Proceedings Volumes*. 2005. Vol. 38. № 1. P. 254-359.
11. *Bojanczyk A., Golub G.H., Van Dooren P.* The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications // *Proc. SPIE Conference*. 1992. Vol. 1770. P. 31-42.
12. Егоров А.И. Уравнения Риккати. М.: Солон-Пресс, 2017. 447 с.
13. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1977. 256 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Шевченко Роман Иванович, АО «Опытное конструкторское бюро «Новатор», г. Екатеринбург, Российская Федерация, инженер-конструктор 3 категории, e-mail: oma170@hotmail.com

Долгий Юрий Филиппович, Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906

DISCRETE PROCEDURE OF OPTIMAL STABILIZATION FOR PERIODIC LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

R. I. Shevchenko¹⁾, Yu. F. Dolgii²⁾

¹⁾ Experimental Machine Design Bureau «Novator»
18 Kosmonavtov Ave., Yekaterinburg 620017, Russian Federation
E-mail: oma170@hotmail.com

²⁾ N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 Sofia Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Abstract. We propose procedure to solve the optimal stabilization problem for linear periodic systems of differential equations. Stabilizing controls, formed as a feedback, are defined by the system states at the fixed instants of time. Equivalent discrete-time linear periodic problem of optimal stabilization is considered. We propose a special procedure for the solution of discrete periodic Riccati equation. We investigate the relation between continuous-time and discrete-time periodic optimal stabilization problems. The proposed method is used for stabilization of mechanical systems.

Keywords: linear periodic system; discrete-time periodic optimal stabilization problem; discrete periodic Riccati equation

REFERENCES

1. Wang G., Xu Y. *Periodic Feedback Stabilization for Linear Periodic Evolution Equations*. New York, Springer, 2016, 127 p.
2. Aeyels D., Willems J.L. Pole assignment for linear periodic systems by memoryless output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, vol. 40, no. 4, pp. 735-739.
3. Varga A. Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no. 5, pp. 1017-1022.
4. Kwakernaak H., Sivan R. *Lineynyye optimal'nyye sistemy upravleniya* [Linear Optimal Control Systems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 656 p. (In Russian).
5. Stephenson A. On induced stability. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1908, vol. 15, no. 86, pp. 233-236.
6. Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2004, vol. 52, no. 3, pp. 153-163.
7. Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V., Okhotsimskiy D.E., Formal'skiy A.M. Upravleniye pri pomoshchi makhovika mayatnikom s nepodvizhnoy tochkoy podvesa [A flywheel use-based control for a pendulum with a fixed suspension point]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, no. 1, pp. 27-38. (In Russian).
8. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1845-1851.

9. Grachikov D.V., Lebedev G.N., Semenov M.E., Kanishcheva O.I. Stabilizatsiya, rassinkhronizatsiya i optimal'noye upravleniye obratnym mayatnikom s gisterezisnymi svoystvami [Stabilization, mistiming and optimal control of the inverted pendulum with hysteresis properties]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii – Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2013, no. 1, pp. 29-37. (In Russian).
10. Varga A. On solving discrete-time periodic Riccati equations. *IFAC Proceedings Volumes*, 2005, vol. 38, no. 1, pp. 254-359.
11. Bojanczyk A., Golub G.H., Van Dooren P. The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications. *Proc. SPIE Conference*, 1992, vol. 1770, pp. 31-42.
12. Egorov A.I. *Uravneniya Rikcati* [Riccati Equations]. Moscow, Solon-Press, 2017, 447 p.
13. Starzhinskiy V.M. *Prikladnyye metody nelineynykh kolebaniy* [Applied Methods of Nonlinear Oscillations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977, 256 p. (In Russian).

Received 16 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Shevchenko Roman Ivanovich, Experimental machine design bureau «Novator», Yekaterinburg, the Russian Federation, Design Engineer of 3 Category, e-mail: oma170@hotmail.com

Dolgii Yuri Filippovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Associate, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

For citation: Shevchenko R.I., Dolgii Yu.F. Diskretnaya procedura optimal'noj stabilizatsii periodicheskikh linejnykh sistem differentsial'nykh uravnenij [Discrete procedure of optimal stabilization for periodic linear systems of differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 891–906. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906 (In Russian, Abstr. in Engl.).

Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки» (Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences) является научно-теоретическим журналом, в котором публикуются оригинальные научные статьи по математике и ее приложениям, содержащие новые математические результаты, и обзорные научные статьи, освещающие современное состояние актуальных проблем математики. Основными задачами журнала являются: оперативная публикация новых математических результатов, имеющих теоретическое и прикладное значение; информирование о направлениях исследований в различных разделах математики, о современных математических проблемах; содействие развитию приложений математических методов и результатов.

В журнале также публикуются материалы математических конференций, организуемых университетом, рецензии, персоналии и информационные материалы о событиях математической жизни университета.

Индексируется Ulrich's Periodicals Directory, РИНЦ, ВИНТИ, ERIH PLUS, SciLit.

Порядок направления статей

1. Рукопись посылается электронной почтой в редакционную коллегия Жуковскому Евгению Семеновичу zukovskys@mail.ru или на адрес редакции vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru.

2. Поступившая в редакцию рукопись фиксируется датой поступления, о чем редакция информирует автора по электронной почте.

3. Если формальные требования «Правил для авторов» не выполнены, то статья к публикации не принимается «по формальным признакам» и об этом сообщается автору. Редакция оставляет за собой право отклонения статей в случае неспособности или нежелания автора учесть пожелания редакции.

Правила оформления рукописей

1. Редакция принимает рукописи на русском языке. По решению редколлегия возможна публикация статьи на английском языке. Статья должна быть тщательно выверена. Страницы рукописи, а также таблицы, рисунки и подписи к рисункам следует пронумеровать.

2. Рекомендуемый объем краткого сообщения составляет 3–5 журнальных страниц, статьи – 6–15, обзорной статьи – 16–40 журнальных страниц.

3. На отдельном листе и отдельным файлом прилагаются сведения обо всех авторах статьи (фамилия, имя и отчество полностью) с указанием его (их) звания, ученой степени, должности, места работы (полное название организаций, к которым приписан автор, а не аббревиатура, почтовый адрес организации с указанием города, страны, адрес электронной почты всех или одного автора, ORCID), для аспирантов и докторантов – наименование специальности, почтового адреса (с индексом для доставки номеров журналов согласно подписке); Необходимо также указать автора, ответственного за переписку с редакцией, адрес его электронной почты, номер контактного телефона. По электронному адресу авторам высылаются pdf-файл опубликованной статьи бесплатно.

Структура статьи

1. Рукопись должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе TEX с использованием

шаблона статьи (шаблон для статей, для кратких сообщений на русском языке; шаблон для статей, для кратких сообщений на английском языке).

2. Текст статьи начинается с индекса УДК (слева), затем следуют **НАЗВАНИЕ** статьи, **инициалы и фамилии авторов**, строкой ниже – **полное название организации с ее юридическим адресом** на русском языке (данные об аффилировании авторов). Ниже приводится краткая аннотация (150–200 слов) и ключевые слова (до 15 слов). Использование формул в аннотации нежелательно. Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения о финансовой поддержке работы (благодарности) рекомендуется указывать в ссылке на первой странице текста статьи.

3. Во введении нужно отразить актуальность исследования, дать ссылки на соответствующую литературу. Библиографические ссылки в статьях нумеруются в порядке их расположения в тексте, в обзорных работах – в алфавитном порядке.

4. Файл рукописи, написанной на русском языке, должен содержать также перевод на английский язык **НАЗВАНИЯ** статьи, **инициалов и фамилий авторов**, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, информации об авторах и списка литературы. Перечисленные сведения на английском языке приводятся после списка литературы.

Рукопись, подготовленная на английском языке, должна заканчиваться переводом на русский язык **НАЗВАНИЯ** статьи, **инициалов и фамилий авторов**, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, информации об авторах и списка литературы.

5. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте статьи. Оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления» и даются в порядке очередности цитированных источников в квадратных скобках [1, с. 25] или [3-10].

Политика свободного доступа

1. Журнал сразу предоставляет открытый доступ к своему контенту, исходя из следующего принципа: свободный открытый доступ к результатам исследований способствует увеличению глобального обмена знаниями.

2. Все публикации журнала в электронном виде распространяются бесплатно и без ограничений.

3. Весь контент журнала распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY). Журнал предоставляет право читать, сохранять, копировать, распространять, распечатывать, искать и делать ссылки на полные тексты материалов с обязательным указанием их автора(ов) и названия «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». Правильная ссылка на конкретную публикацию помещена в конце каждой статьи журнала на русском и английском языках.

4. Автор имеет право архивировать (выгружать) размещенный на сайте журнала вариант статьи (PDF-файл) и загружать его на любые репозитории открытого доступа.

5. По решению редакционной коллегии и издателя весь контент журнала, принятый к публикации и/или опубликованный до 1 января 2017 г., также распространяется по лицензии CC BY 4.0.

Авторские права и политика архивирования

Авторы, публикующиеся в данном журнале, соглашаются со следующим:

1. Весь контент журнала распространяется по лицензии CC BY 4.0. Согласно CC BY 4.0 авторы сохраняют права на свои статьи, но при этом разрешают всем беспрепятственно скачивать, повторно использовать, перепечатывать, изменять, распространять и/или копировать их при условии упоминания их авторства. На все вышеперечисленные разрешения от авторов или издателя не требуется.

2. Авторы сохраняют право заключать отдельные контрактные договоренности, касающиеся неэксклюзивного распространения версии работы в опубликованном здесь виде (например, размещение ее в институтском хранилище, публикацию в книге, перевод на другой язык), со ссылкой на ее оригинальную публикацию в этом журнале.

3. Согласно классификации SHERPA/RoMEO журнал относится к так называемым «зеленым» журналам. Авторам разрешено архивировать препринты и постпринты своих работ. Авторы имеют право размещать свою работу в сети Интернет (например, в институтском хранилище или персональном сайте) до и во время процесса рассмотрения ее в редакционной коллегии журнала.

4. Публикация статьи будет означать назначение Copyright © ее автору (авторам), однако они не могут претендовать на выплату гонора. Авторы передают Издательству журнала – ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г.Р. Державина», авторские права на использование передаваемых материалов в составе журнала следующими способами: обнародование, воспроизведение, распространение, доведение произведения до всеобщего сведения путем размещения в сети Интернет, публичный показ, а также перевод на иностранные языки. При этом авторы имеют право использовать все материалы в их последующих публикациях при условии, что будет сделана ссылка на публикацию в журнале «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Стоимость публикации

1. Журнал следует политике Open Access Journals, доступ к опубликованным в журнале статьям – свободный для всех (без необходимости регистрации).

2. Журнал издается на средства издателя.

3. Все публикации в журнале бесплатны.

4. Журнал является подписным периодическим научным изданием ТГУ им. Г.Р. Державина.

5. Гонорар за публикуемые в журнале статьи авторам не выплачивается.

6. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.

7. Редакция не взимает плату с авторов за подготовку, размещение и печать материалов. Редакция не вступает с авторами в переписку по методике написания и оформления научных статей и не занимается доводкой статей до необходимого научно-методического уровня. Журнал не предоставляет платных услуг.

Политика раскрытия и конфликты интересов

1. Неопубликованные данные, полученные из представленных к рассмотрению рукописей, не могут быть использованы в личных исследованиях без письменного согласия автора. Информация или идеи, полу-

ченные в ходе рецензирования и связанные с возможными преимуществами, должны сохраняться конфиденциальными и не использоваться с целью получения личной выгоды.

2. Все авторы обязаны раскрыть финансовые или другие конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе.

3. Рецензенты не должны участвовать в рассмотрении рукописей в случае наличия конфликтов интересов вследствие конкурентных, совместных и других взаимодействий и отношений с любым из авторов, организациями, связанными с представленной работой.

Положение о конфиденциальности

1. Информация об авторах, включая их имена, аффилиацию, контактные сведения, сведения о занимаемой должности, ученой степени, ученом звании, ссылки на авторские профили, размещается в статье в разделе «Сведения об авторе» на русском и английском языках.

2. Паспортные данные и место жительства авторов, предоставленные в редакционную коллегию журнала, используются исключительно для заключения авторских договоров, оформления подписки, пересылки корреспонденции и не передаются третьим лицам.

3. Имена рецензентов не сообщаются авторам и третьим лицам.

Положения о плагиате, дублировании и избыточности публикации

1. Каждая статья проверяется на наличие неправомерных заимствований из других работ (плагиат), дублирование и избыточность публикации (включая перевод публикации с других языков). Для выявления плагиата редакционная коллегия использует Антиплагиат.

2. Статья, содержащая неправомерные заимствования из других работ (плагиат), содержащая признаки дублирования и избыточности (в том числе признаки автоплагиата), является неприемлемой и отклоняется без рецензирования.

3. Авторам разрешается подавать в журнал статьи, опубликованные на серверах препринтов, кроме опубликованных ранее в других изданиях. Такая статья не считается дублированной и избыточной.

4. Если статья опубликована, но позднее было обнаружено, что она содержит неправомерные заимствования из других работ (плагиат) или является дублированной, то редактор обращается к блок-схемам Комитета по издательской этике (COPE) для удаления такой статьи.

5. Доля повторно использованного текста (текста из других авторских произведений) в представляемой в журнал работе не должна превышать 15 % от общего объема статьи. Повторное использование текста допустимо лишь для включения необходимых определений, формулировки основных принципов и т.п., чтобы читатель мог ознакомиться со статьей без привлечения дополнительных источников. В этом случае повторное использование текста не считается автоплагиатом.

6. Если авторы считают необходимым ознакомить читателя с материалами, близкими к тематике статьи или оставшимися за рамками статьи, то они могут приводить достаточно полный список литературы, в которой интересующий читатель может найти эти материалы.

