ВЕСТНИК Тамбовского Университета

Научно-теоретический журнал

Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123, 2018

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (группа научных специальностей: 01.01.00 – математика)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS 328

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

M.S. Alves, M.J. Alves	On stabilization of differential systems with hybrid feedback control	331
V.F. Molchanov	Polynomial quantization and overalgebra for hyperboloid of one sheet	353
А.С. Апарцин, Е.В. Маркова, И.В. Сидлер	Интегральная модель развивающейся системы с отсутствующей предысторией	361
А.П. Жабко, В.В. Провоторов, Е.Н. Провоторова	Об устойчивости параболической системы с распределенными параметрами на графе	368
З.Т. Жуковская, С.Е. Жуковский	Об обобщениях и приложениях вариационных принципов нелинейного анализа	377
Т.В. Жуковская, И.А. Забродский, М.В. Борзова	Об устойчивости разностных уравнений в частично упорядоченных пространствах	386
Д.В. Иванов, А.В. Иванов	Идентификация систем Гаммерштейна дробного порядка с полиномиальной нелинейностью при наличии дробного белого шума	395
А.А. Кандаков, К.М. Чудинов	Эффективные критерии экспоненциальной устойчивости автономных разностных уравнений	402
А.Ф. Клейменов	Принятие решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления	415
О.И. Клещина	Норма и логарифмическая норма бесконечных матриц	424
И.Д. Коструб	Матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле в вопросах устойчивости по Ляпунову	431
А.М. Котюков, М.М. Котюков	Необходимые условия оптимальности в задаче, описываемой уравнением второго порядка	437

В.П. Максимов	Достижимые значения целевых функционалов для функционально-дифференциальной системы с импульсным воздействием	441
Н.В. Малай, Н.Н. Самойлова	Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры	448
В.В. Малыгина	Об устойчивости одной модели динамики популяций с запаздыванием	456
А.Н. Мзедавее, В.И. Родионов	О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной уравнением Лапласа	466
Н.М. Мишачев, А.М. Шмырин	Дискретные системы и окрестностные структуры	473
Н.М. Мишачев, А.М. Шмырин	Окрестностные метасистемы на орграфах	479
М.В. Мулюков	Устойчивость однопараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием	488
А.И. Перов	Колмогоровские матрицы и непрерывные марковские цепи с конечным числом состояний	503
А.И. Перов, В.К. Каверина	Применение идей метода направляющих функций при исследовании неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений	510
А.А. Петрова	О сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием	517
Г.Г. Петросян	О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка	524
В.П. Плаксина	О применении *W*-метода Н.В. Азбелева к системе функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе	531
И.М. Плаксина	О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида	539
Е.А. Плужникова, Т.В. Жуковская, Ю.А. Моисеев	О множествах метрической регулярности отображений в пространствах с векторнозначной метрикой	547
А.Н. Пчелинцев	О численном методе построения неустойчивых решений динамических систем с квадратичными нелинейностями	555
И.Д. Серова, А.А. Репин	О существовании и оценках решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента	566

ИНФОРМАЦИЯ 575

Выпуск содержит статьи участников Международной научной конференции «Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)», посвященной 115-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова и 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина» и участников II Международной школы молодых ученых «Многозначный анализ, выпуклый анализ и оптимальное управление», посвященной 100-летию Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина. Конференция организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-20079г) и ТГУ им. Г.Р. Державина. Школа организована при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-41-681001р_г), администрации Тамбовской области и ТГУ им. Г.Р. Державина.

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html;
http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-70572 от 03 августа 2017 г.
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: А.А. Манаенкова, М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: С.Ю. Можаров, Т.А. Сустина
Технический секретарь М.В. Борзова

Для цитирования:
Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. – Тамбов, 2018. – Т. 23, № 123. – 252 с. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123

Подписано в печать 28.08.2018. Дата выхода в свет
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 31,5. Усл. печ. л. 29,3. Тираж 1000 экз. Заказ № 18245. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33. ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Tambov University REPORTS

Scientific-Theoretical Journal

Series: Natural and Technical Sciences

Volume 23, no. 123, 2018

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

Journal of Tambov State University named after G.R. Derzhavin

The journal is on the official list of scientific reviewed periodicals recommended by High Attestation Commission for publication principal scientific researches of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science (group of scientific specialties: 01.01.00 – Mathematics)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

М.С. Алвес, М.Ж. Алвес	О стабилизации дифференциальных гибридных управляемых систем с обратной связью	331
В.Ф. Молчанов	Полиномиальное квантование и надалгебра для однополостного гиперболоида	353
A.S. Apartsyn, E.V. Markova, I.V. Sidler	Integral model of developing system without prehistory	361
A.P. Zhabko , V.V. Provotorov, E.N. Provotorova	On stability control of a parabolic systems withdistributed parameters on the graph	368
Z.T. Zhukovskaya, S.E. Zhukovskiy	On generalizations and applications of variational principles of nonlinear analysis	377
T.V. Zhukovskaya, I.A. Zabrodskiy, M.V. Borzova	On stability of difference equations in partially ordered spaces	386
D.V. Ivanov, A.V. Ivanov	Identification of Hammerstein systems of fractional order with a polynomial nonlinearity in the presence of a fractional white noise	395
A.A. Kandakov, K.M. Chudinov	Effective criteria of exponential stability of autonomous difference equations	402
A.F. Kleimenov	Decision-making in a hybrid two-step problem of dynamic control	415
O.I. Kleshchina	The norm and the logarithmic norm of infinite matrices	424
I.D. Kostrub	Hurwitz matrix, Lyapunov and Dirichlet on the sustainability of Lyapunov’s	431
A.M. Kotyukov, M.M. Kotyukov	Necessary optimality conditions for optimal control problems with second grade equation	437
V.P. Maksimov	Attainable values of on-target functionals for a functional differential system with impulses	441

N.V. Malai, N.N. Samoilova	Solution of the system of Navier–Stokes equations linearized with respect to the velocity with regard of a power-law dependence of viscosity, thermal conductivity and the gaseous medium density on the temperature	448
V.V. Malygina	On the stability of a population dynamics model with delay	456
A.N. Mzedawee, V.I. Rodionov	On exact solution of optimization task generated by the Laplace equation	466
N.M. Mishachev, A.M. Shmyrin	Discrete systems and neighboring structures	473
N.M. Mishachev, A.M. Shmyrin	Neighborhood metasystems on digraphs	479
M.V. Mulyukov	Stability of one-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay	488
A.I. Perov	Kolmogorov matrix, and a continuous Markov chain with a finite number of States	503
A.I. Perov, V.K. Kaverina	Research of the nonautonomous system of ODE by the ideas of the method of guiding functions	510
A.A. Petrova	On the convergence and rate of the convergence of a projection-difference method for approximate solving a parabolic equation with weight integral condition	517
G.G. Petrosyan	On the formal representation of solutions of differential equations of fractional order	524
V.P. Plaksina	On obtaining effective conditions for the solvability of a system of functional-differential equations determinated on a geometric graph	531
I.M. Plaksina	On solvability of one singular boundary value problem for functional-differential equation with special-type deviation	539
E.A. Pluzhnikova, T.V. Zhukovskaya, Yu.A. Moiseev	On sets of metric regularity of mappings in spaces with vector-valued metric	547
A.N. Pchelintsev	On the numerical method of construction of unstable solutions of dynamical systems with quadratic nonlinearities	555
I.D. Serova, A.A. Repin	About existence and estimates of solutions of the implicit differential equation with autoadjustable deviation argument	566

INFORMATION 575

The issue contains articles of the participants of the International scientific conference "Kolmogorov Readings – VIII. General Control Problems and their Applications (GCP-2018)", dedicated to the 115th anniversary of the birth of A.N. Kolmogorov and to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin, and those of the participants of the II International school of young researches "Multivalued Analysis, Convex Analysis, and Optimal Control", dedicated to the 100th anniversary of Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The conference is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-20079г) and Tambov State University named after G.R. Derzhavin. The school is organized with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-41-681001р_г), the administration of the Tambov region, and Tambov State University named after G.R. Derzhavin.

Founder: Federal State Budget Educational Institution of High Education
"Tambov State University named after G.R. Derzhavin"
(392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St.)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about.html;
http://journals.tsutmb.ru/series-natural-and-technical-about-eng.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate ПИ № ФС77-70572 of August 3, 2017
Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency "Rospechat" is 83372

Editors: A.A. Manaenkova, M.I. Filatova
English texts editors: S.Y. Mozharov, T.A. Sustina
Technical editor M.V. Borzova

For citation:
Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences. – Tambov, 2018. – Vol. 23, no. 123. – 252 p. – ISSN 1810-0198. – DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123

Podpisano v pechat' 28.08.2018. Data vykhoda v svet
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.
Pech. list 31,5. Usl. pech. list 29,3. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 18245. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 392000, Tambov Region, Tambov, 33 Internatsionalnaya St., FSBEI of HE "Tambov State University named after G.R. Derzhavin"
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy" of FSBEI of HE "Tambov State University named after G.R. Derzhavin".
392008, Tambov Region, Tambov, 190g Sovetskaya St. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-331-352

ON STABILIZATION OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH HYBRID FEEDBACK CONTROL

© **M. S. Alves, M. J. Alves**

Eduardo Mondlane University
PO. Box 257, Main Campus, Maputo, Mozambique
E-mail: m4ria.alvess@gmail.com, mjalves.moz@gmail.com

Abstract. In this paper two-dimensional systems of differential equations are considered together with their stabilization by a hybrid feedback control. A stabilizing hybrid control for an arbitrary controlled system that belongs to a certain category within two-dimensional systems is constructed as a result of this study and some stabilization proprieties of the system with the obtained hybrid control are presented.
Keywords: stabilization; hybrid feedback control; linear hybrid control; upper Lyapunov exponent

1. Notations

We will use the following notations: $C(\mathbb{R}^n)$ is the set of all continuous functions $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, $C_s(\mathbb{R}^n)$ is the set of all piecewise continuous functions such that $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, the euclidean norm $|\cdot|$ in the space $\mathbb{R}^n$ will be denoted by $|x|$, the set of all matrices with real entries of dimension $m \times n$ we denote by $M(m,n,\mathbb{R})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ is the set of all linear operators from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ and $\sigma(A)$ is the set of all eigenvalues of a square matrix A, called the spectrum of A.

2. Formulation of the problem

Let us consider a controlled system

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \tag{2.1}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector, $y \in \mathbb{R}^m$ is the output vector, $u \in \mathbb{R}^\ell$ is the control vector. The system (2.1) is completely defined by the triple of matrices (A,B,C), where $A \in M(n,n,\mathbb{R})$, $B \in M(n,\ell,\mathbb{R})$ and $C \in M(m,n,\mathbb{R})$.

The work is partially supported by Linnaeus Palme project and SIDA/SAREC Global Research Programme in Mathematics and Statistics.

In this paper we will consider the system (2.1) together with the so called hybrid feedback control. The notion of hybrid feedback control was given in several papers such as [1–3].

D e f i n i t i o n 2.1. A *hybrid automaton* is a set of six objects $\Delta = (Q, I, M, \mathcal{T}, j, q_0)$, where

1. Q is a finite set of all the automaton's states;
2. I is a finite set called the input alphabet;
3. $M : Q \times I \to Q$ is an function that determines a new state of the automaton based on its previous state q and a element from the alphabet $i \in I$ that corresponds to the switching moment of the state;
4. $\mathcal{T} : Q \to (0, \infty)$ is a function that establishes the time period $\mathcal{T}(q)$ between two switching moments, satisfying $\inf\limits_{q \in Q} \mathcal{T}(q) > 0$;
5. $j : \mathbb{R}^m \to I$ is a function that corresponds to the output vector $y \in \mathbb{R}^m$ and the element $j(y)$ of I;
6. $q_0 = q(0)$ is the automaton's initial state.

Each hybrid automaton $\Delta = (Q, I, M, \mathcal{T}, j, q_0)$ is associated to an operator $F_\Delta : P(\mathbb{R}^m) \to P(Q)$ called the *hybrid operator*. Such that $P(X)$ is a set of functions $v : [0, \infty) \to X$. Let us present the recursive definition of F_Δ.

D e f i n i t i o n 2.2. For any $y(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, the function $q(\cdot) = (F_\Delta y)(\cdot) : [0, \infty) \to Q$ is defined by:

1. $q(0) = q_0$, $t_1 = \mathcal{T}(q_0)$, $q(t) = q_0$ $(\forall t \in [0, t_1))$;
2. $q(t_1) = M(q_0, j(y(t_1)))$, $t_2 = t_1 + \mathcal{T}(q(t_1))$, $q(t) = q(t_1)$, $(\forall t \in [t_1, t_2))$;
3. Let $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Suppose that $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_k$ and that the values of $q(t)$ for $t \in [0, t_k)$ were already defined. Then, t_{k+1} and $q(t)$ for $t \in [t_k, t_{k+1})$ are defined by:
$$q(t_k) = M(q(t_{k-1}),\ j(y(t_k))), \quad t_{k+1} = t_k + \mathcal{T}(q(t_k)), \quad q(t) = q(t_k) \\ (\forall t \in [t_k, t_{k+1})).$$

D e f i n i t i o n 2.3. A pair $u = (\Delta, \Phi)$, where $\Delta = (Q, I, M, \mathcal{T}, j, q_0)$ is a hybrid automaton and $\Phi : \mathbb{R}^m \times Q \to \mathbb{R}^\ell$ is a function, is called *hybrid feedback control* (HFC).

The *hybrid control operator* $W_u : C(\mathbb{R}^m) \to C_s(\mathbb{R}^\ell)$, associated to the control $u = (\Delta, \Phi)$, is defined by
$$(W_u y)(t) = \Phi(y(t), (F_\Delta y)(t)), \qquad t \in [0, \infty),$$
where F_Δ is the operator that was recursively defined above.

R e m a r k 2.1. According to the Definition 2.3, the linear system (2.1) with the hybrid control $u = (\Delta, \Phi)$ is equivalent to a functional differential equation [4]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\Phi(Cx(t), (F_\Delta Cx)(t)), t \in [0, \infty). \tag{2.2}$$

D e f i n i t i o n 2.4. Let $u = (\Delta, \Phi)$ be a hybrid control of the system (2.1), where $\Delta = (Q, I, M, \mathcal{T}, j, q_0)$.

The HFC u is called *linear hybrid control* (LHFC) if it satisfies the following conditions:

(a) the function $j : \mathbb{R}^m \to I$, satisfies the condition $j(\lambda y) = j(y)$ for any $y \in \mathbb{R}^m$ and $\lambda > 0$;

(b) the function $\Phi(y, q)$ is linear in relation to y.

We will denote the LHFC class by $\mathcal{LH} = \mathcal{LH}(\ell, m)$.

It is convenient to represent the LHFC u in the following manner : $u = (\Delta, \{G_q\}_{q \in Q})$, where $G_q \in M(\ell, m)$ $(q \in Q)$.

Therefore the *hybrid control operator* $W_u : C(\mathbb{R}^m) \to C_s(\mathbb{R}^\ell)$ associated with $u = (\Delta, \{G_q\}_{q \in Q})$ has the form of the following linear dependence:

$$(W_u y)(t) = G_{(F_\Delta y)(t)} y(t), t \in [0, \infty).$$

D e f i n i t i o n 2.5. Let (2.1) be a system with the triple $\Omega = (A, B, C)$ and with a control $u \in \mathcal{LH}$. The infimum of $\lambda \in \mathbb{R}$ with which for every solution of the system it holds:

$$|x(t)| \le Me^{\lambda t}|x(0)|, \qquad t \in [0, \infty). \tag{2.3}$$

with M positive and independent from the solution constant is called *upper Lyapunov exponent* of the system (2.1) with the control u and is denoted by $\lambda(\Omega, u)$.

D e f i n i t i o n 2.6. *Upper exponent* of the system (2.1) with linear hybrid feedback control is the value $\lambda(\Omega, \mathcal{LH})$ defined by

$$\lambda(\Omega, \mathcal{LH}) = \inf_{u \in \mathcal{LH}} \lambda(\Omega, u).$$

Surely, the upper exponent is important because it characterizes the asymptotic behaviour of the solutions.

If the upper exponent $\lambda(\Omega, \mathcal{LH}) < 0$, then existis $u \in \mathcal{LH}$ such that the solution of the controllable system (2.1) exponentially stable which means that the system is stabilizable by LHFC.

It is clear, from the point of view of the stabilization of controllable systems, that it is good when $\lambda(\Omega, \mathcal{LH}) = -\infty$.

Consider the linear differential system with control:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_\mu x + B_0 u \\ y = C_0 x \end{cases} \quad \text{with } \Omega_{[\mu]} = (A_\mu, B_0, C_0) = \left(\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ \ 0] \right) \tag{2.4}$$

this is, the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases},$$

called the generalized harmonic oscillator. Note that the triple $\Omega_{[\mu]} = (A_\mu, B_0, C_0)$ of the system (2.4) is the canonical triple of the equivalence classes $H(2,0,\mu)$ where $\mu \in \{-1,0,1\}$. As in [3] and [5] we will not limit the study of the system to these three values of the parameter μ but will consider the system with an arbitrary parameter $\mu \in \mathbb{R}$.

We have categories of systems that can be stabilized by hybrid control and a hybrid control was already constructed for the canonical cases of these categories [3, 5]. Specifically, the category $H(2,0,\mu)$, which contains all the triples (A,B,C) that satisfy $BC = 0$, $CAB \neq 0$ will be examined. This category consists of three equivalence classes corresponding to cases when $\mu \in \{-1,0,1\}$ and the characteristic propriety of each of these classes is $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\operatorname{sign}\operatorname{tr} A = \mu$, $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ is the trace of matrix A. The canonical form of these classes is

$$\Omega_{[\mu]} = \left(\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right).$$

In (2) and (6) a class of hybrid controls was presented. It stabilizes the system

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases},$$

with the canonical triple $\Omega_{[\mu]}$.

Let $\Sigma = M(2,2,\mathbb{R}) \times (M(2,1,\mathbb{R}) \setminus \{O\}) \times (M(1,2,\mathbb{R}) \setminus \{O\})$, this means, Σ is the set of all the triples of matrices (A,B,C) where $A \in M(2,2,\mathbb{R})$, $B \in M(2,1,\mathbb{R})$ and $C \in M(1,2,\mathbb{R})$, so that B and C are non-zero matrices. Let us denote by $GL(2)$ the multiplicative group of the square non-singular real matrices of order 2.

D e f i n i t i o n 2.7. We define the applications $T_1(D)$, $T_2(m_1,m_2,m_3)$ and $T_3(\alpha)$ from Σ to Σ by the formulas:

$$\begin{aligned} &T_1(D)(A,B,C) = (DAD^{-1}, DB, CD^{-1}), \quad D \in GL(2); \\ &T_2(m_1,m_2,m_3)(A,B,C) = (m_1A, m_2B, m_3C), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m_1 > 0,\ m_2, m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ &T_3(\alpha)(A,B,C) = (A + \alpha BC, B, C), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Let us consider the set of all the applications defined above:

$$\begin{aligned} GT_0 = \{&T_1(D)\colon D \in GL(2)\} \cup \\ &\{T_2(m_1,m_2,m_3)\colon m_1 > 0;\ m_2, m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{T_3(\alpha)\colon \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

It is clear that any element in $T \in GT_0$ is a bijective function $T : \Sigma \to \Sigma$, this means, is a transformation of the set Σ. Therefore, $GT_0 \subset B(\Sigma)$ where $B(\Sigma)$ is the group of all transformations on Σ with the binary operation that is the composition of transformations. In that way we defined the transformation's group GT, generated by the set GT_0.

By having an arbitrary triple Ω that satisfies $BC = 0$, $CAB \neq 0$ the goal is to construct a hybrid control with the triple Ω for the corresponding system, using the theorem from the next section. This means, to construct a hybrid control for an arbitrary system that belongs to the category in question. For that it is necessary to determine the parameters of the transformation T from GT so that $T(\Omega) = \Omega_{[\mu]}$ and with the aid on the inverse transformation T^{-1}, find the linear hybrid control that stabilizes the system Ω with any upper Lyapunov exponent.

This paper contains the solution for the problem described above. This is the main problem and the results presented are new.

3. Relation between hybrid trajectories of equivalent systems

P r o p o s i t i o n 3.1. *Let the transformation $T \in GT$ be given and represented in the following form :*

$$T = T_1(D) \circ T_2(m_1, m_2, m_3) \circ T_3(\alpha)$$

for some matrix $D \in GL(2)$ and some constants $m_1 > 0$, $m_2, m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Then, the inverse transformation T^{-1} of T is defined by

$$T^{-1} = T_3(-\alpha) \circ T_2\left(m_1^{-1}, m_2^{-1}, m_3^{-1}\right) \circ T_1(D^{-1}).$$

Theorem 3.1. *Let the triples $\Omega_i = (A_i, B_i, C_i) \in \Sigma$ $(i = 1, 2)$ be given, such that $\Omega_2 = T(\Omega_1)$, $T \in GT$ can be written as:*

$$T = T_3(\alpha) \circ T_2(m_1, m_2, m_3) \circ T_1(D), \tag{3.1}$$

with some matrix $D \in GL(2)$ and some constants $m_1 > 0$, $m_2, m_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$.
Let us consider two controllable systems (S_1) and (S_2) :

$$(S_1): \quad \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ u = C_1 y \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{with hybrid control} \\ u_1 = (\Delta_1, \{\alpha_q^{(1)}\}_{q \in Q}) \in \mathcal{LH}(1,1), \\ \text{where } \Delta_1 = (Q, I, M, \mathcal{T}_1, j_1, q_0), \end{array}$$

$$(S_2): \quad \begin{cases} \dot{x} = A_2 x + B_2 u \\ u = C_2 y \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{with hybrid control} \\ u_2 = (\Delta_2, \{\alpha_q^{(2)}\}_{q \in Q})) \in \mathcal{LH}(1,1), \\ \text{where } \Delta_2 = (Q, I, M, \mathcal{T}_2, j_2, q_0), \end{array}$$

such that the components Q, I, M, q_0 of the hybrid automatons Δ_i are the same and

$$\begin{gathered} \mathcal{T}_2(q) = m_1^{-1} \mathcal{T}_1(q) \quad (\forall q \in Q), \quad j_2(y) = j_1(y \operatorname{sign} m_3) \quad (\forall y \in \mathbb{R}), \\ \alpha_q^{(2)} = \frac{m_1}{m_2 m_3} \alpha_q^{(1)} - \alpha \quad (\forall q \in Q). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Consider the hybrid trajectories $h_i(t) = (x^{(i)}(t), q_i(t), \tau_i(t))$, $(t \in [0, \infty))$ of the systems (S_i) $(i = 1, 2)$, such that the initial conditions of the components $x^{(i)}$ of these trajectories satisfy the relation $x^{(2)}(0) = D x^{(1)}(0)$. Then, the following relations take place: $\forall t \in [0, \infty)$

$$x^{(2)}(t) = D x^{(1)}(m_1 t), \quad q_2(t) = q_1(m_1 t), \quad \tau_2(t) = m_1^{-1} \tau_1(m_1 t).$$

The results of the theorem above follow naturally from the results that are found in [2], however, some changes were necessary because of some inaccuracy found in it.

Corollary 3.1. *Let us consider the same systems with hybrid controls* (S_1) *and* (S_2) *as in Theorem 3.1. For any solution* $x^{(1)}$ *of the system* (S_1) *the exponential estimate is satisfied:*

$$|x^{(1)}(t)| \le M_1\, e^{\lambda t}|x^{(1)}(0)|, \qquad t\in[0,\infty) \tag{3.3}$$

such that the constants $\lambda\in\mathbb{R}$ *and* $M_1>0$ *that do not depend on the solutions if and only if for any solution* $x^{(2)}$ *of system* (S_2) *the exponential estimate is satisfied:*

$$|x^{(2)}(t)| \le M_2\, e^{m_1\lambda t}|x^{(2)}(0)|, \qquad t\in[0,\infty) \tag{3.4}$$

such that $M_2>0$ *do not depend on the solution and the constant* $m_1>0$ *is the same as in the transformation* (3.1)*.*

P r o o f. By the Theorem 3.1, a function $x^{(1)}:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ is a system's solution (S_1) if and only if the function $x^{(2)}:[0,\infty)\to\mathbb{R}^2$ defined by

$$x^{(2)}(t) = Dx^{(1)}(m_1 t), \qquad t\in[0,\infty),$$

which is the solution of the system (S_2). So, from the estimate (3.3) we have:

$$|x^{(2)}(t)| = |Dx^{(1)}(m_1t)| \le \|D\|\,|x^{(1)}(m_1t)| \le \|D\|\,M_1\,e^{m_1\lambda t}|x^{(1)}(0)| =$$
$$\|D\|\,M_1\,e^{m_1\lambda t}|D^{-1}x^{(2)}(0)| \le M_2\,e^{m_1\lambda t}|x^{(2)}(0)|, \qquad t\in[0,\infty)$$

where $M_2 = M_1\,\|D\|\,\|D^{-1}\|$. Reciprocally, from the estimate (3.4) we have:

$$|x^{(1)}(t)| = |D^{-1}x^{(2)}(m_1^{-1}t)| \le \|D^{-1}\|\,|x^{(2)}(m_1^{-1}t)| \le \|D^{-1}\|\,M_2\,e^{m_1m_1^{-1}\lambda t}|x^{(2)}(0)|$$
$$= \|D^{-1}\|\,M_2\,e^{\lambda t}|Dx^{(1)}(0)| \le M_1\,e^{\lambda t}|x^{(1)}(0)|, \qquad t\in[0,\infty)$$

where $M_1 = M_2\,\|D^{-1}\|\,\|D\|$.

Corollary 3.2. *Let us consider the same systems with the hybrid control* (S_1) *and* (S_2) *as in the Theorem 3.1, which means, the systems with the triples* $\Omega_i=(A_i,B_i,C_i)$ *such that* $\Omega_2 = T(\Omega_1)$ *where* T *is defined by* (3.1) *with controls* $u_i\in\mathcal{LH}$ *connected by* (3.2)*. Then the upper Lyapunov exponents of* (S_i) *satisfy the relation:*

$$\lambda(\Omega_2,u_2) = m_1\,\lambda(\Omega_1,u_1).$$

The corollary's 3.2 proof follows from the Corollary 3.1.

4. Transformation of the triple (A,B,C) in case $BC=0$, $CAB\ne 0$ into canonical form

In this section the transformation $T\in GT$ will be determined in the form of a composition of the transformations $T_i(\cdot)$ $(i=1,2,3)$ defined above that transform a triple Ω that satisfies $BC=0$, $CAB\ne0$, in the canonical triple

$$\Omega_{[\mu]} = (A_{[\mu]},B_0,C_0) = \left(\begin{bmatrix}\mu & 1\\ -1 & \mu\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, [1\;\;0]\right), \quad \mu\in\{-1,0,1\}. \tag{4.1}$$

Let the initial triple Ω be given and defined by

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, [c_2 \;\; c_2] \right)$$

such that $CB = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, $CAB \neq 0$. Let $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A)$. According to the classification, there exists only one transformation $T \in GT$ such that $T(\Omega) = \Omega_{[\mu]}$. The goal now is to find the representation of this transformation T in terms of elements of matrices A, B and C. The problem is solved in some steps, described bellow.

1) First, the transformation $T_3(\beta)$ is applied, where

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{2\det A - \operatorname{tr}^2 A}{2CAB} & \text{if } \operatorname{tr} A \neq 0 \\ \dfrac{\det A - 1}{CAB} & \text{if } \operatorname{tr} A = 0 \end{cases} = \frac{\det A - \frac{1}{2}\operatorname{tr}^2 A + |\mu| - 1}{CAB}. \tag{4.2}$$

We get a new triple

$$T_3(\beta)(\Omega) = T_3(\beta)(A, B, C) = (A + \beta BC, B, C) = (A_1, B_1, C_1) = \Omega_1.$$

As it can be noted, the only matrix that suffers some transformations is the matrix A, such that in the triple Ω_1 the matrices B_1 and C_1 are the same to the matrices B and C, respectively, from the initial triple Ω. Now the form of the matrix A_1 will be determined:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \beta b_1 c_1 & a_{12} + \beta b_1 c_2 \\ a_{21} + \beta b_2 c_1 & a_{22} + \beta b_2 c_2 \end{bmatrix}.$$

The goal of applying the transformation $T_3(\beta)$ is to obtain the matrix A_1 with two complex eigenvalues which have the same real and imaginary parts by modulo. More precisely, we have

$$\sigma(A_1) = \begin{cases} \left\{ \dfrac{\operatorname{tr} A}{2} - i \cdot \dfrac{\operatorname{tr} A}{2}, \dfrac{\operatorname{tr} A}{2} + i \cdot \dfrac{\operatorname{tr} A}{2} \right\}, & \text{if } \operatorname{tr} A \neq 0 \\ \{-i, i\}, & \text{if } \operatorname{tr} A = 0 \end{cases}$$

Note that the idea of using the transformation $T_3(\beta)$ with the described propriety of the spectrum of A_1 can be found in [6, p. 33], however, some changes were necessary due to some inaccuracy in the expressions of β and $\sigma(A_1)$.

2) Next, the transformation $T_2(\nu, 1, 1)$ is applied to the triple Ω_1 with

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{2}{|\operatorname{tr} A|}, & \text{if } \mu \in \{-1, 1\} \\ 1, & \text{if } \mu = 0 \end{cases}. \tag{4.3}$$

The triple $\Omega_2 = (A_2, B_2, C_2) = T_2(\nu, 1, 1)(A_1, A_2, A_3)$ is obtained. Being that the two of the last parameters of T_2 are equal to 1, the matrices B and C remain the same. Thus, B_2 and C_2 are the same as B_1 and C_1, that are the matrices B and C from the initial triple Ω. The matrix A_2 has the following form:

$$A_2 = \nu A_1 = \begin{bmatrix} \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1) & \nu(a_{12} + \beta b_1 c_2) \\ \nu(a_{21} + \beta b_2 c_1) & \nu(a_{22} + \beta b_2 c_2) \end{bmatrix}.$$

The goal of applying the given transformation $T_2(\nu, 1, 1)$ is to obtain the spectrum $\sigma(A_2) = \{\mu - i, \mu + i\}$ $(\forall \mu \in \{-1, 0, 1\})$.

3) The goal of this third step is to obtain the canonical matrix $A_{[\mu]}$, defined by (4.1) from the matrix A_2. This transformation was obtained from the theorem 9 in [7, p. 299].

Let us determine an eigenvector v of the matrix A_2 associated to the eigenvalue $\lambda = \mu + i$:

$$(A_2 - (\mu + i)I)v = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrl} \big(\nu(a_{11} + \beta b_1 c_1) - (\mu + i)\big)\, v_1 + & \nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)\, v_2 & = 0 \\ \nu(a_{21} + \beta b_2 c_1)\, v_1 + & \big(\nu(a_{22} + \beta b_2 c_2) - (\mu + i)\big)\, v_2 & = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)} \begin{bmatrix} \nu(a_{12} + \beta b_1 c_2) \\ \mu - \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1) + i \end{bmatrix},$$

and define a real matrix V by

$$V = [\operatorname{Re} v \ \operatorname{Im} v] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\mu - \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1)}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)} & \dfrac{1}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)} \end{bmatrix}.$$

Let us now apply the transformation $T_1(D)$ for the triple Ω_2 where

$$D = V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1) - \mu & \nu(a_{12} + \beta b_1 c_2) \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

We obtain the triple $\Omega_3 = (A_3, B_3, C_3) = T_1(D)(\Omega_2)$, such that, (see [7, p. 299]),

$$A_3 = DA_2D^{-1} = V^{-1}A_2V = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}.$$

Note that the matrices B_3 and C_3 are:

$$B_3 = DB = \begin{bmatrix} b_1 \\ \nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = CD^{-1} = CV = \begin{bmatrix} c_1 + \dfrac{c_2(\mu - \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1))}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)} & \dfrac{c_2}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)} \end{bmatrix}.$$

So, by the steps 1), 2) and 3) the matrix $A_3 = A_{[\mu]}$ is obtained from the canonical triple $\Omega_{[\mu]}$. The goal of the next two steps in to find the transformations from the group GT that transform B_3 and C_3, to $B_0 = [0\ \ 1]^\top$ and $C_0 = [1\ \ 0]$, conserving the matrix $A_3 = A_{[\mu]}$.

4) As it was deducted in [6, p. 32], the matrix A_3 commutes with any matrix of form

$$L(\varphi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \varphi & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varphi \end{bmatrix}$$

such that $L(\varphi, \varepsilon)A_3(L(\varphi, \varepsilon))^{-1} = A_3$. Let us now find the values of φ and ε such that $L(\varphi, \varepsilon)B_3 = B_0 = [0\ \ 1]^\top$. Solving the linear system $L(\varphi, \varepsilon)B_3 = B_0$, this means

$$\left\{ \begin{array}{rrl} b_1\, \varphi + & \big(\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1\big)\, \varepsilon & = 0 \\ \big(\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1\big)\, \varphi - & b_1\, \varepsilon & = 1 \end{array} \right.,$$

in respect of φ and ε, we obtain

$$\varphi = \frac{\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2}, \quad \varepsilon = -\frac{b_1}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2}. \tag{4.5}$$

Let us now apply the transformation $T_1(L)$, where $L = L(\varphi, \varepsilon)$ with φ and ε defined by (4.5), that means

$$L = \frac{1}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2} \begin{bmatrix} \nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1 & -b_1 \\ b_1 & \nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1 \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

The triple $\Omega_4 = (A_4, B_4, C_4) = T_1(L)(\Omega_3)$ is obtained, where

$$A_4 = LA_3L^{-1} = A_3 = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \quad B_4 = LB_3 = B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_4 = C_3L^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \end{bmatrix},$$

where

$$\delta = \Big(\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1\Big) \cdot \left(c_1 + \frac{c_2(\mu - \nu(a_{11} + \beta b_1 c_1))}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)}\right) - \frac{b_1 c_2}{\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)}.$$

Simplifying the expression of δ, according to (4.2), (4.3) and $CB = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, we obtain

$$\delta = \nu \cdot \det [B \;\; AB] \cdot \omega(B, C), \tag{4.7}$$

where

$$\omega(B, C) = \begin{cases} -\dfrac{c_1}{b_2}, & \text{if} \quad b_2 \neq 0 \\ \dfrac{c_2}{b_1}, & \text{if} \quad b_1 \neq 0. \end{cases}$$

Note that $-c_1/b_2 = c_2/b_1$ in case of $b_1b_2 \neq 0$, because $CB = 0$. The constant $\omega(B, C)$ has the following geometric interpretation: if consider B and $C^\top$ as vectors in $\mathbb{R}^2$, then we have $\omega(B, C) = |C^\top|/|B|$ if the angle between the vectors B and $C^\top$ are equal to $\pi/2$, and $\omega(B, C) = -|C^\top|/|B|$ if the angle between the vectors B and $C^\top$ is equal to $-\pi/2$.

5) At last, we apply the transformation $T_2(1, 1, \delta^{-1})$, obtaining the canonical triple $\Omega_{[\mu]}$ defined by (4.1).

6) Thus, a resultant transformation is presented:

$$T = T_2(1, 1, \delta^{-1}) \circ T_1(L) \circ T_1(D) \circ T_2(\nu, 1, 1) \circ T_3(\beta),$$

such that $T(\Omega) = \Omega_{[\mu]}$. By applying the propositions of the lemma 2.6 from the article [1], the transformation T can be presented in a much compact form:

$$T = T_1(LD) \circ T_2(\nu, 1, \delta^{-1}) \circ T_3(\beta),$$

such that the matrices L, D and the real constants ν, δ and β are defined in (4.6), (4.4), (4.3), (4.7) and (4.2), respectively. To conclude the formalization of T, we compute the matrix LD and simplify the expressions of its entries.

Thus, the following theorem has been proved:

Theorem 4.1. *Let be given a triple of matrices*

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, [c_2 \;\; c_2] \right),$$

where $CB = 0$ *and* $CAB \neq 0$ *and the triple*

$$\Omega_{[\mu]} = (A_{[\mu]}, B_0, C_0) = \left(\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right),$$

where $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A)$. *Therefore there exists a unique transformation* $T \in GT$ *such that* $T(\Omega) = \Omega_{[\mu]}$ *and that transformation can be represented as following:*

$$T = T_1(P) \circ T_2(\nu, 1, \delta^{-1}) \circ T_3(\beta),$$

where

$$\nu = \begin{cases} \dfrac{2}{|\operatorname{tr} A|}, & \text{if} \quad \mu \in \{-1, 1\} \\ 1, & \text{if} \quad \mu = 0 \end{cases}, \qquad \beta = \frac{\det A - \frac{1}{2}\operatorname{tr}^2 A + |\mu| - 1}{CAB},$$

$$\delta = \nu \cdot \det [B \;\; AB] \cdot \omega(B, C) \quad \textit{such that} \quad \omega(B, C) = \begin{cases} -\dfrac{c_1}{b_2}, & \text{if} \quad b_2 \neq 0 \\ \dfrac{c_2}{b_1}, & \text{if} \quad b_1 \neq 0 \end{cases}$$

and the elements of the matrix $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix}$ *are defined by*

$$p_1 = \frac{\nu(a_{12}b_2 - \beta b_1^2 c_1)}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2},$$

$$p_2 = \frac{-b_1\nu(a_{12} + \beta b_1 c_2)}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2},$$

$$p_3 = \frac{b_1 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)(\nu(a_{11} + \beta b_1 c_1) - \mu)}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2},$$

$$p_4 = \frac{\nu(\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)(a_{12} + \beta b_1 c_2)}{b_1^2 + (\nu(a_{11}b_1 + a_{12}b_2) - \mu b_1)^2}.$$

Let us now present three examples of the triples $\Omega = (A, B, C) \in \Sigma$ from the category with the invariant $CB = 0$, $CAB \neq 0$ that belong to the three different equivalence classes $H(2, 0, \mu)$ for $\mu = 1$, $\mu = -1$ and $\mu = 0$, and construct for each of the triples, basing ourselves on the Theorem 4.1, the transformation T that maps this triple into the canonical triple $\Omega_{[\mu]}$.

E x a m p l e 4.1. Consider the triple of matrices

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 4] \right).$$

Of course that $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = \operatorname{sign} 4 = 1$. So, $\Omega \in H(2,0,1)$. Also note that $\sigma(A) = \{2-3i, 2+3i\}$. The transformation T that maps Ω to the canonical form

$$\Omega_{[1]} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right),$$

($T \in GT$, such that $T(\Omega) = (\Omega_{[1]})$) is defined by the formula:

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{37} & \frac{4}{37} \\ \frac{19}{74} & \frac{1}{37} \end{bmatrix} \right) \circ T_2\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{37}\right) \circ T_3\left(\frac{5}{74}\right).$$

E x a m p l e 4.2. Let us consider the triple of matrices

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \right),$$

$CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = \operatorname{sign}(-1) = -1$. Therefore $\Omega \in H(2,0,-1)$. Also note that $\sigma(A) = \{-4, 3\}$. The transformation T that maps Ω into a canonical form

$$\Omega_{[-1]} = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right),$$

is defined by:

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} \\ -1 & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \right) \circ T_2\left(2, 1, -\frac{2}{25}\right) \circ T_3(2).$$

E x a m p l e 4.3. Consider the triple

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \right).$$

$CB = 0, CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = \operatorname{sign} 0 = 0$. So, $\Omega \in H(2,0,0)$. Note, $\sigma(A) = \{-5, 5\}$. T that transforms Ω into the canonical form

$$\Omega_{[0]} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right),$$

this means, $T \in GT$ such that $T(\Omega) = (\Omega_{[0]})$, is defined by:

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{3+10\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{3(3+10\sqrt{2})} \\ \frac{5}{3+10\sqrt{2}} & \frac{91+15\sqrt{2}}{573} \end{bmatrix} \right) \circ T_2\left(1, 1, \frac{1}{18+60\sqrt{2}}\right) \circ T_3\left(-\frac{13}{9+30\sqrt{2}}\right).$$

5. Inverse Transformation

Let $\Omega = (A, B, C)$ be an arbitrary triple, such that $CB = 0$, $CAB \neq 0$. Having the transformation

$$T_d = T_1(P) \circ T_2(\nu, 1, \delta^{-1}) \circ T_3(\beta),$$

such that $T(\Omega) = \Omega_{[\mu]}$ where $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A)$ (see the Theorem 4.1), let us now determine the inverse transformation of T_d, this is, the transformation $T = T_d^{-1}$ such that $T(\Omega_{[\mu]}) = \Omega$.

According to the Proposition 3.1 the transformation T can be represented in the following form:

$$T = T_3(\alpha) \circ T_2(a, b, c) \circ T_1(D),$$

where

$$D = P^{-1}, \qquad a = \frac{1}{\nu}, \qquad b = 1, \qquad c = \delta, \qquad \alpha = -\beta.$$

Using the formulas of the Theorem 4.1, by rewriting the parameters of T in function of the matrices of the triple Ω, we get the following theorem:

Theorem 5.1. *Let the triple of matrices*

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, [c_2 \;\; c_2] \right)$$

be given, where $CB = 0$, $CAB \neq 0$ *and the triple*

$$\Omega_{[\mu]} = (A_{[\mu]}, B_0, C_0) = \left(\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 0] \right),$$

where $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A)$. *There exists a unique transformation* $T \in GT$ *such that* $T(\Omega_{[\mu]}) = \Omega$ *and that transformation can be represented in the following form:*

$$T = T_3(\alpha) \circ T_2(a, b, c) \circ T_1(D),$$

where

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}^2 A - \det A + 1 - |\mu|}{CAB}, \quad a = \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + 1 - |\mu|, \quad b = 1, \\ c = \frac{1}{a} \det\,[B \;\; AB]\, \omega(B, C) \;\text{ with }\; \omega(B, C) = \begin{cases} -\dfrac{c_1}{b_2}, & \text{if } \; b_2 \neq 0 \\ \dfrac{c_2}{b_1}, & \text{if } \; b_1 \neq 0 \end{cases}, \\ D = \begin{bmatrix} \dfrac{(a_{11} - a_{22})b_1 + 2a_{12}b_2}{2a} & b_1 \\ \dfrac{2a_{21}b_1 - (a_{11} - a_{22})b_2}{2a} & b_2 \end{bmatrix}. \end{gathered} \tag{5.1}$$

For each triple from the examples 4.1, 4.2 and 4.3 let us present a transformation T that maps the canonical triple to these triples. The transformation T can be obtained from the Theorem 5.1 or by inverting the transformation that was obtained in each of the examples in the Section 4 with the use of the Proposition 3.1.

E x a m p l e 5.1. Consider the triple of matrices

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 4] \right),$$

in which $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = 1$. The transformation $T \in GT$ such that $T(\Omega_{[1]}) = \Omega$ is defined by the formula

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \frac{19}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) \circ T_2\,(2, 1, 37) \circ T_3\left(-\frac{5}{74}\right).$$

E x a m p l e 5.2. Consider the triple

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}\right),$$

such that $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = -1$. The transformation $T \in GT$ such that $T(\Omega_{[-1]}) = \Omega$ is defined by the formula

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}\right) \circ T_2\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{25}{2}\right) \circ T_3\,(-2)\,.$$

E x a m p l e 5.3. Consider the triple

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}\right),$$

such that $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = 0$. The transformation $T \in GT$ such that $T(\Omega_{[0]}) = \Omega$ is defined by the formula

$$T = T_1\left(\begin{bmatrix} -3 - 5\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 15 & 3 \end{bmatrix}\right) \circ T_2\left(1, 1, 18 + 60\sqrt{2}\right) \circ T_3\left(\frac{13}{9 + 30\sqrt{2}}\right).$$

6. Construction of a stabilizing hybrid control for case $CB = 0$, $CAB \neq 0$

Consider the controllable differential linear two-dimensional system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u \\ y = c_1 x_1 + c_2 x_2 \end{cases} \tag{6.1}$$

where $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ depends only from the output $u(\cdot) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ by a linear hybrid control. Suppose that the real parameters a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2 of the system that satisfy the conditions:

$$b_1c_1 + b_2c_2 = 0, \qquad a_{11}b_1c_1 + a_{12}b_2c_1 + a_{21}b_1c_2 + a_{22}b_2c_2 \neq 0. \tag{6.2}$$

This section contains the main results of this paper: the control $u \in \mathcal{LH}$ that stabilizes the system (6.1), satisfying (6.2), such that the solution's norm decreases exponentially with any Lyapunov exponent.

Note that the system (6.1) with the conditions (6.2) in its vectorial form is:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{6.3}$$

in which the triple of matrices

$$\Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, [c_2 \ \ c_2] \right)$$

satisfies $CB = 0$ and $CAB \neq 0$. Thus, we have the triple from the class $H(2, 0, \mu)$ where $\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) \in \{-1, 0, 1\}$. The canonical form of the class $H(2, 0, \mu)$ is

$$\Omega_{[\mu]} = (A_{[\mu]}, B_0, C_0) = \left(\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [1 \ \ 0] \right).$$

According to the Theorem 5.1 the transformation $T \in GT$ exists and is unique and $T(\Omega_{[\mu]}) = \Omega$. This transformation can be presented as following:

$$T = T_3(\alpha) \circ T_2(a, b, c) \circ T_1(D) \tag{6.4}$$

such that the constants α, a, b, c and the matrix D are defined by the formulas (5.1).

Let us generalize the results concerning the stabilization of the system $\Omega_{[\mu]}$ by a control $\mathcal{A}(R, \delta, m) \in \mathcal{LH}$, for the system with an arbitrary triple Ω such that $CB = 0$, $CAB \neq 0$. The generalization is based on the theorems 3.1 and 5.1.

Firstly, let us define the LHFC $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) \in \mathcal{LH}$ such that $R > 0$, $\delta > 0$ and $m \in \{0, 1\}$ in the following way. If (S_1) is the system with the triple $\Omega_{[\mu]}$ and control $u_1 = \mathcal{A}(R, \delta, m)$ and (S_2) is the system with the triple Ω and control $u_2 = \mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$, then the parameters of the control u_2 can be expressed by the parameters of the control u_1 using the formulas (3.2) from the Theorem 3.1 with the use of the expressions (5.1) from the Theorem 5.1 for the transformation parameters T (T has the form (6.4) such that $T(\Omega_{[\mu]}) = \Omega$).

D e f i n i t i o n 6.1. Given $\Omega \in \Sigma$ defined by (6.3) where $CB = 0$ and $CAB \neq 0$ and given $R > 0$, $\delta > 0$ and $m \in \{0, 1\}$ the LHFC $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) \in \mathcal{LH}$ is defined by $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) = (\Delta, \{\alpha_q\}_{q \in Q})$ where the components of the hybrid automaton $\Delta = (Q, I, M, T, j, q_0)$ are given by

$$\begin{aligned}
&Q = \{q_d, q_-\}, \qquad I = \{i_+, i_-\}, \\
&M(q_d, i_+) = M(q_d, i_-) = M(q_-, i_-) = q_-, \quad M(q_-, i_+) = q_d, \\
&\mathcal{T}(q_d) = \mathcal{T}_d(R, a) = \frac{3\pi}{2a\sqrt{1+R}}, \quad \mathcal{T}(q_-) = \delta, \\
&j(y) = \begin{cases} i_+ & \text{if} \ \ \nu y \geq 0 \\ i_- & \text{if} \ \ \nu y < 0 \end{cases}, \qquad q_0 = \begin{cases} q_- & \text{if} \ \ m = 0 \\ q_d & \text{if} \ \ m = 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

such that

$$\begin{gathered}
a = \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + 1 - |\mu|, \quad \text{where} \quad \mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A), \\
c = \frac{1}{a} \det[B \ AB] \, \omega(B, C) \quad \text{where} \quad \omega(B, C) = \begin{cases} -\dfrac{c_1}{b_2}, & \text{if} \ \ b_2 \neq 0 \\ \dfrac{c_2}{b_1}, & \text{if} \ \ b_1 \neq 0 \end{cases}, \\
\alpha = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}^2 A - \det A + 1 - |\mu|}{CAB}, \quad \nu = \operatorname{sign}(c),
\end{gathered} \tag{6.6}$$

and $\{\alpha_q\}_{q\in Q} = \{\alpha_{q_-}, \alpha_{q_d}\}$ where $\alpha_{q_-} = 0$ and $\alpha_{q_d} = -\left(\frac{a}{c}R + \alpha\right)$.

The families of hybrid controls are introduced:

$$\mathcal{H}(\Omega, R) = \left\{\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)\colon 0 < \delta < \frac{\pi}{4a\sqrt{1+R}},\ m \in \{0,1\}\right\} \quad (R > 0),$$
$$\mathcal{H}(\Omega) = \bigcup_{R>0} \mathcal{H}(\Omega, R).$$

It is clear that $\mathcal{H}(\Omega, R) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{LH}$.

We define the function $\Lambda : (0,\infty) \to (0,\infty)$ by

$$\Lambda(R) = \frac{\sqrt{1+R}\ln(1+R)}{\pi\left(3+\sqrt{1+R}\right)}. \tag{6.7}$$

We remember that in this section we always consider the system (6.1) satisfying the conditions (6.2), or, indeed, the system (6.3) with triple $\Omega = (A, B, C)$ satisfying the condition $CB = 0$, $CAB \neq 0$. For convenience we designate this system for (S).

From the Corollary 2, Theorem 3 and the main results about the stabilization of the system with the triple Ω_μ from the papers (2) and (6) we get the main result of this paper which is stated in the following theorem:

Theorem 6.1. *For any* $R > 0$, $\lambda(\Omega, \mathcal{H}(\Omega, R)) = a(\mu - \Lambda(R))$, *where* μ *and* a *are defined in* (6.6).

Theorem 6.2. *We have the following statements:*

1. *If* $\operatorname{tr} A \leq 0$ *(this is, when* $\mu = -1$ *ou* $\mu = 0$ *), then* $\forall R > 0$ *the system* (S) *is stabilizable by a family of hybrid controls* $\mathcal{H}(\Omega, R)$.
2. *If* $\operatorname{tr} A > 0$ *(this is, when* $\mu = 1$ *), then in case* $R > \Lambda^{-1}(1)$, *the system* (S) *is stabilizable by a family of hybrid controls* $\mathcal{H}(\Omega, R)$ *and in case* $R < \Lambda^{-1}(1)$ *the system* (S) *is not stabilizable by a family of hybrid controls* $\mathcal{H}(\Omega, R)$.

Theorem 6.3. *For any* $\Omega \in \Sigma$, $CB = 0$, $CAB \neq 0$ *it is valid that* $\lambda(\Omega, \mathcal{H}(\Omega)) = -\infty$.

R e m a r k 6.1. According to the Theorem 6.3, the system (S) is stabilizable by the hybrid controls from the family $\mathcal{H}(\Omega)$, such that the negative upper Lyapunov exponent in the solution estimate can be as large by modulo as we define it.

Let us complement the theorems 6.1–6.3 with a result which wording is more convenient for the applications. Also note that exists $\Lambda^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ such that $\lim\limits_{s\to 0+} \Lambda^{-1}(s) = 0$ and $\lim\limits_{s\to+\infty} \Lambda^{-1}(s) = +\infty$. For convenience, let us extend the function Λ^{-1} to any set $\mathbb{R}$ by assigning, by definition $\Lambda^{-1}(s) = 0$ when $s \leq 0$.

Theorem 6.4. *Let* $N > 0$ *be an arbitrary constant. Then, for any positive number* R *that satisfies*

$$R > \Lambda^{-1}\left(\operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) + N\left(\frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + 1 - |\mu|\right)^{-1}\right) \tag{6.8}$$

where $\Lambda(R)$ *is defined in* (6.7)*, exists a* $\delta_0 = \delta_0(\mathrm{tr}\, A, N, R) > 0$ *such that* $\forall\delta \in (0, \delta_0)$ *and* $\forall m \in \{0, 1\}$ *any solution of the equation* $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ *of the system* (S) *with LHFC* $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$ *satisfies the exponential estimate*

$$|x(t)| \leq M\, e^{-Nt}|x(0)|, \qquad t \in [0, \infty)$$

where the constant $M = M(\Omega, R, \delta, m) > 0$ *does not depend on the solution* $x(\cdot)$.

7. Examples of the systems that satisfy $CB = 0$, $CAB \neq 0$ and stabilizing hybrid controls

In this section we will consider three specific systems of type (6.1) that correspond to the triples (A, B, C) considered in the examples from the sections 4 and 5. For these systems, based on the results of the Section 6, linear hybrid controls that stabilize it will be presented. Even more, the chosen control parameters are the ones that decrease the solution's norm as in (6.4) with a given upper Lyapunov exponent $-N$. For convenience, consider that the function Λ^{-1} is prolonged to $\mathbb{R}$ where by definition, $\Lambda^{-1}(s) = 0$ when $s \leq 0$.

E x a m p l e 7.1. Consider the system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + 4u \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 3x_2 - u \\ y = x_1 + 4x_2 \end{cases} \tag{7.1}$$

or, in the vectorial form:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{with} \quad \Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, [1 \;\; 4] \right). \tag{7.2}$$

We have $CB = 0$ and $CAB \neq 0$. Let us compute the constants μ, a, c, ν, α by the formulas (6.6):

$$\begin{gathered} \mu = \mathrm{sign}\,(\mathrm{tr}\, A) = 1, \quad a = \frac{|\mathrm{tr}\, A|}{2} + 1 - |\mu| = 2, \quad c = \frac{c_2}{ab_1}\det\,[B \;\; AB] = 37, \\ \nu = \mathrm{sign}\,(c) = 1, \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{tr}^{\,2} A - \det A + 1 - |\mu|}{CAB} = -\frac{5}{74}. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Consider the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) = ((Q, I, M, T, j, q_0), \{\alpha_-, \alpha_d\}) \in \mathcal{LH}$ defined in the Section 6. According to the Definition 6.1 and the expressions (7.3), the control components are given by:

$$Q = \{q_d, q_-\}, \qquad I = \{i_+, i_-\},$$

$$M(q_d, i_+) = M(q_d, i_-) = M(q_-, i_-) = q_-, \quad M(q_-, i_+) = q_d,$$

$$\mathcal{T}(q_d) = \mathcal{T}_d(R, a) = \frac{3\pi}{4\sqrt{1 + R}}, \quad \mathcal{T}(q_-) = \delta,$$

$$j(y) = \begin{cases} i_+ & \text{if} \quad y \geq 0 \\ i_- & \text{if} \quad y < 0 \end{cases}, \qquad q_0 = \begin{cases} q_- & \text{if} \quad m = 0 \\ q_d & \text{if} \quad m = 1 \end{cases},$$

$$\alpha_{q_-} = 0, \qquad \alpha_{q_d} = \frac{1}{74}(5 - 4R).$$

The theorems 6.2 and 6.4 imply the following conclusions about the system (7.1) with linear hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 1. For any $m \in \{0,1\}$, $R > \Lambda^{-1}(1) \approx 69.89$ where Λ is defined in (6.7) and for all sufficiently small $\delta > 0$ the system (7.1) is stabilizable by the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 2. Let $N > 0$. For any $m \in \{0,1\}$, $R > \Lambda^{-1}(1 + N/2)$ and for all sufficiently small $\delta > 0$, any solution $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ of the system (7.1) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$ satisfies the exponential estimate

$$|x(t)| \le M\, e^{-Nt}|x(0)|, \qquad t \in [0,\infty),$$

where the constant $M = M(\Omega, R, \delta, m) > 0$ does not depend on the solution $x(\cdot)$.

For example, if a decrease of the solution with $N = 2$ is needed, then we can conclude that if $R > \Lambda^{-1}(2) \approx 977.35$ and $\delta > 0$ is sufficiently small, then any solution x of the system (7.1) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 0)$ or $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 1)$ satisfies the condition

$$|x(t)| \le M\, e^{-2t}|x(0)|, \qquad t \in [0,\infty)$$

where $M > 0$ does not depend on the solution.

E x a m p l e 7.2. Consider the system:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 - u \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - 2x_2 \\ y = \frac{5}{4}x_2 \end{cases} \tag{7.4}$$

or, in its vectorial form:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{with} \quad \Omega = (A,B,C) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \right). \tag{7.5}$$

We have $CB = 0$ and $CAB \neq 0$. Let us compute the constants μ, a, c, ν, α by the formulas (6.6):

$$\begin{gathered} \mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = -1, \quad a = \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + 1 - |\mu| = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{c_2}{ab_1}\det[B \ \ AB] = -\frac{25}{2}, \\ \nu = \operatorname{sign}(c) = -1, \qquad \alpha = \frac{\frac{1}{2}(\operatorname{tr} A)^2 - \det A + 1 - |\mu|}{CAB} = -2. \end{gathered} \tag{7.6}$$

Consider the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) = ((Q, I, M, T, j, q_0), \{\alpha_-, \alpha_d\}) \in \mathcal{LH}_2$ defined in the Section 6. According to the Definition 6.1 and the expressions (7.6), the components of this control are given by:

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_d, q_-\}, \qquad I = \{i_+, i_-\},\\
&M(q_d, i_+) = M(q_d, i_-) = M(q_-, i_-) = q_-, \quad M(q_-, i_+) = q_d,\\
&\mathcal{T}(q_d) = \mathcal{T}_d(R, a) = \frac{3\pi}{\sqrt{1+R}}, \quad \mathcal{T}(q_-) = \delta,\\
&j(y) = \begin{cases} i_+ & \text{if} \quad y \le 0 \\ i_- & \text{if} \quad y > 0 \end{cases}, \qquad q_0 = \begin{cases} q_- & \text{if} \quad m = 0 \\ q_d & \text{if} \quad m = 1 \end{cases},\\
&\alpha_{q_-} = 0, \qquad \alpha_{q_d} = \frac{R}{25} + 2.
\end{aligned}
$$

Theorems 6.2 and 6.4 imply the following about the system (7.4) with linear hybrid feedback control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 1. For any $m \in \{0, 1\}$, $R > \Lambda^{-1}(1) \approx 69.89$ where Λ is defined in (6.7) and for all sufficiently small $\delta > 0$ the system (7.4) is stabilizable by the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 2. Let $N > 0$. For any $m \in \{0, 1\}$, $R > \Lambda^{-1}(2N-1)$ and for all small $\delta > 0$, any solution $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ of the system (7.4) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$ satisfies the exponential estimate

$$|x(t)| \le M\, e^{-Nt} |x(0)|, \qquad t \in [0, \infty),$$

where the constant $M = M(\Omega, R, \delta, m) > 0$ does not depend on the solution $x(\cdot)$.

For example, if a decrease of the solution with $N = 2$ is needed, then we can conclude that if $R > \Lambda^{-1}(3) \approx 15545$ and $\delta > 0$ is sufficiently small, then any solution x of the system (7.4) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 0)$ or $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 1)$ satisfies the condition

$$|x(t)| \le M\, e^{-2t} |x(0)|, \qquad t \in [0, \infty)$$

where $M > 0$ does not depend on the solution.

E x a m p l e 7.3. Consider the system

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - x_2 + \sqrt{2}\, u \\ \dot{x}_2 = 5x_2 - 2x_2 + 3u \\ y = -6x_1 + 2\sqrt{2}\, x_2 \end{cases} \tag{7.7}$$

and in its vectorial form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \text{with } \Omega = (A, B, C) = \left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \right), \tag{7.8}$$

$CB = 0$ and $CAB \ne 0$. Let us compute the constants μ, a, c, ν, α by the formulas (6.6):

$$
\begin{gathered}
\mu = \operatorname{sign}(\operatorname{tr} A) = 0,\ a = \frac{|\operatorname{tr} A|}{2} + 1 - |\mu| = 1,\ c = \frac{c_2}{ab_1} \det\,[B \ \ AB] = 18 + 60\sqrt{2},\\
\nu = \operatorname{sign}(c) = 1, \qquad \alpha = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tr}^2 A - \det A + 1 - |\mu|}{CAB} = \frac{13}{9 + 30\sqrt{2}}.
\end{gathered} \tag{7.9}
$$

Consider the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m) = ((Q, I, M, T, j, q_0), \{\alpha_-, \alpha_d\}) \in \mathcal{LH}_2$ defined in the Section 6. According to the Definition 6.1 and the expressions (7.9), the components of this control are given by:

$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_d, q_-\}, \qquad I = \{i_+, i_-\},\\
&M(q_d, i_+) = M(q_d, i_-) = M(q_-, i_-) = q_-, \quad M(q_-, i_+) = q_d,\\
&\mathcal{T}(q_d) = \mathcal{T}_d(R, a) = \frac{3\pi}{2\sqrt{1+R}}, \quad \mathcal{T}(q_-) = \delta,\\
&j(y) = \begin{cases} i_+ & \text{if} \quad y \geq 0 \\ i_- & \text{if} \quad y < 0 \end{cases}, \qquad q_0 = \begin{cases} q_- & \text{if} \quad m = 0 \\ q_d & \text{if} \quad m = 1 \end{cases},\\
&\alpha_{q_-} = 0, \qquad \alpha_{q_d} = -\frac{R+26}{6(3+10\sqrt{2})}.
\end{aligned}
$$

Theorems 6.2 and 6.4 imply the following about the system (7.7) with linear hybrid feedback control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 1. For any $m \in \{0, 1\}$, $R > \Lambda^{-1}(1) \approx 69.89$ where Λ is defined in (6.7) and for all sufficiently small $\delta > 0$ the system (7.7) is stabilizable by the hybrid control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$.

Conclusion 2. Let $N > 0$. For any $m \in \{0, 1\}$, $R > \Lambda^{-1}(N)$ for all small $\delta > 0$ any solution $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ of the system (7.7) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, m)$ satisfies the exponential estimate

$$|x(t)| \leq M\, e^{-Nt} |x(0)|, \qquad t \in [0, \infty),$$

where the constant $M = M(\Omega, R, \delta, m) > 0$ does not depend on the solution $x(\cdot)$.

For example, if a decrease of the solution with $N = 2$ is needed, then we can conclude that if $R > \Lambda^{-1}(2) \approx 977.35$ and $\delta > 0$ is sufficiently small, then any solution x of the system (7.7) with control $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 0)$ or $\mathcal{H}(\Omega, R, \delta, 1)$ satisfies the condition

$$|x(t)| \leq M\, e^{-2t} |x(0)|, \qquad t \in [0, \infty)$$

where $M > 0$ does not depend on the solution.

REFERENCES

1. Litsyn E., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A. Classification of linear dynamical systems in the plane admitting a stabilizing hybrid feedback control. *Journal on Dynamical and Control Systems*, 2000, vol. 6, no. 4, pp. 477-501.

2. Litsyn E., Myasnikova M., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A. Efficient criteria for stabilization of planar linear systems by hybrid feedback controls. *Abstract and Applied Analysis*, 2004, no. 6, pp. 487-499.

3. Litsyn E., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A. Control of the Lyapunov exponents of dynamical systems in the plane with incomplete observation. *Nonlinear Analysis. Series A: Theory, Methods & Applications, Special issue: Hybrid Systems and Applications*, 2005, vol. 64, no. 2, pp. 329-351.

4. Alves M.J. *Singulyarnye funktsional'no-differentsial'nye uravneniya vtorogo poryadka* [Singular Second Order Functional Differential Equations]. Perm, Perm State University Publ., 2000, 179 p. (In Russian).

5. Korotaeva I.G. *Ehksponentsial'naya stabilizatsiya dvumernykh gibridnykh system* [Exponential Stabilization of Two-Dimensional Linear Hybrid Systems]. Perm, 2003, 35 p. (In Russian).

6. Myasnikova M.A. *Klassifikatsiya lineynykh dvumernykh gibridnykh system* [Classification of Two-Dimensional Linear Hybrid Systems]. Perm, 2003, 51 p. (In Russian).

7. Lay D.C. *Linear Algebra and Its Applications.* Boston, Pearson Education Inc., 2012, 472 p.

Received 20 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Alves Maria Salomé Manuelevna, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, BSc in Mathematics, Assistant Lecturer, e-mail: m4ria.alvess@gmail.com

Alves Manuel Joaquim, Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique, PhD in Mathematics, Full Professor, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

For citation: Alves M.S., Alves M.J. On stabilization of differential systems with hybrid feedback control. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 331–352. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-331-352 (In Engl., Abstr. in Russian).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-331-352
УДК 517.977.1

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГИБРИДНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© М. С. Алвес, М. Ж. Алвес

Университет Эдуардо Мондлане
П.я. 257, Главный кампус, Мапуту, Мозамбик
E-mail: m4ria.alvess@gmail.com, mjalves.moz@gmail.com

Аннотация. В данной статье рассматриваются двумерные системы дифференциальных уравнений со стабилизирующим гибридным управлением с помощью обратной связи. В результате исследования для произвольной системы управления, принадлежащей определенному классу двумерных систем, построено стабилизирующее гибридное управление и представлены некоторые стабилизирующие свойства системы с полученным гибридным управлением.
Ключевые слова: стабилизация; управление гибридной обратной связью; линейное гибридное управление; верхний показатель Ляпунова

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Litsyn E., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A.* Classification of linear dynamical systems in the plane admitting a stabilizing hybrid feedback control // Journal on Dynamical and Control Systems. 2000. Vol. 6. № 4. P. 477-501.

2. *Litsyn E., Myasnikova M., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A.* Efficient criteria for stabilization of planar linear systems by hybrid feedback controls // Abstract and Applied Analysis. 2004. № 6. P. 487-499.

3. *Litsyn E., Nepomnyashchikh Y., Ponossov A.* Control of the Lyapunov exponents of dynamical systems in the plane with incomplete observation // Nonlinear Analysis. Series A: Theory, Methods & Applications. Special issue: Hybrid Systems and Applications. 2005. Vol. 64. № 2. P. 329–351.

4. *Alves M.J.* Сингулярные функционально-дифференциальные уравнения второго порядка. Пермь: Изд-во Перм. гос. ун-та, 2000. 179 с.

5. *Коротаева И.Г.* Экспоненциальная стабилизация двумерных гибридных систем. Пермь, 2003. 35 с.

6. *Мясникова М.А.* Классификация линейных двумерных гибридных систем. Пермь, 2003. 51 с.

7. *Lay D.C.* Linear Algebra and Its Applications. Boston: Pearson Education Inc., 2012. 472 p.

Работа частично поддерживается проектом Linnaeus Palme и программой по математике и статистике SIDA / SAREC Global Research.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Алвес Мария Саломье Мануэловна, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, ассистент, e-mail: m4ria.alvess@gmail.com

Алвес Мануел Жоаким, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Мозамбик, кандидат физико-математических наук, профессор, e-mail: mjalves.moz@gmail.com

Для цитирования: *Алвес М.С., Алвес М.Ж.* О стабилизации дифференциальных гибридных управляемых систем с обратной связью // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 331–352. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-331-352

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-353-360

POLYNOMIAL QUANTIZTION AND OVERALGEBRA FOR HYPERBOLOID OF ONE SHEET

© **V. F. Molchanov**

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Abstract. We show that the multiplication of symbols in polynomial quantization is exactly an action of an overalgebra on the space of these symbols
Keywords: quantization; representations; hyperboloids; Poisson transforms

In [1] we constructed quantization in the spirit of Berezin on para-Hermitian symmetric spaces G/H, see also [2]. In [3] we showed that this quantization, anyway polynomial quantization – the most algebraic variant of quantization, can be considered as a part of the representation theory. In present paper we continue our activity in this direction, namely, we show that the multiplication of symbols is exactly an action of an overalgebra on the space of symbols, see Theorem 2. Here we restrict ourselves to a hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$. Besides, we write explicit formulae of this action.

The study of actions of overalgebras is a new theme, opened by Yu. A. Neretin and the author [4–6].

In this paper the group G is the group $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, the subgroup H consists of diagonal matrices, the space G/H is a hyperboloid of one sheet in $\mathbb{R}^3$. The overgroup $\widetilde{G} = G \times G$ contains three subgroups G^d, G_1 и G_2 isomorphic to G. Namely, they consist of pairs (g,g), (g,E), (E,g), respectively. Here E is identity matrix, $g \in G$.

Let $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of G. Then the Lie algebras of $\widetilde{G}$ and G^d, G_1, G_2 are $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}$ and $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, respectively. In order to write an action of the overalgebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$, it is sufficient to take some subspace complementary to $\mathfrak{g}^d$. Now we take the subalgebra $\mathfrak{g}_2$. It consists of pairs $(0,X)$, where $X \in \mathfrak{g}$.

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 3.8515.2017/8.9).

The group G consists of real matrices of the second order with unit determinant:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{1}$$

Changing in (1) $\alpha \leftrightarrow \delta$ and $\beta \leftrightarrow \gamma$, we obtain an involution $g \mapsto \widehat{g}$ in G given by

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

The Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group G consists of real matrices of the second order with zero trace. A basis in $\mathfrak{g}$ consists of matrices:

$$L_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad L_+ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

The commutation relations are:

$$[L_+, L_-] = -2L_1\,, \quad [L_+, L_1] = -L_+\,, \quad [L_1, L_-] = -L_-\,. \tag{3}$$

Denote by $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ the universal enveloping algebra of the Lie algebra $\mathfrak{g}$.

Recall some material on representations of G. We shall use the notation

$$t^{\lambda,\nu} = |t|^\lambda \mathrm{sgn}^\nu t\,, \quad t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \nu = 0, 1.$$

For $\sigma \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, let us denote by $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathbb{R})$ the space of functions f in $C^\infty(\mathbb{R})$ such that the function $\widehat{f}(t) = t^{2\sigma,\nu} f(1/t)$ belongs to $C^\infty(\mathbb{R})$ too. The representation $\pi_{\sigma,\nu}$ of the group G acts on $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathbb{R})$ by (we consider that G acts from the right):

$$\left(\pi_{\sigma,\nu}(g) f\right)(t) = f\,(t \cdot g)\ (\beta t + \delta)^{2\sigma,\nu}, \quad t \cdot g = \frac{\alpha t + \gamma}{\beta t + \delta}\,.$$

The *contragredient* representation $\widehat{\pi}_{\sigma,\nu}$ is defined by the involution $g \mapsto \widehat{g}$, so that

$$\left(\widehat{\pi}_{\sigma,\nu}(g) f\right)(t) = f\,(t \cdot \widehat{g})\ (\gamma t + \alpha)^{2\sigma,\nu}.$$

Representations $\pi_{\sigma,\nu}$ and $\widehat{\pi}_{\sigma,\nu}$ are equivalent by means of the operator $f \mapsto \widehat{f}$.

Any irreducible finite-dimensional representation ρ_k of the group G is labelled by the number k (the *highest weight*) such that $2k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. It acts on the space V_k of polynomials $\varphi(t)$ in t of degree $\leqslant 2k$ (so that $\dim V_k = 2k + 1$) by

$$\left(\rho_k(g)\,\varphi\right)(t) = \varphi\,(t \cdot g)\ (\beta t + \delta)^{2k}.$$

Operators corresponding to elements of $\mathfrak{g}$ and $\mathrm{Env}\,(\mathfrak{g})$ in representations $\pi_{\sigma,\nu}$ do not depend on ν, so we do not write ν in indexes.

For basis elements (2) we have

$$\pi_\sigma(L_-) = \frac{d}{dt}, \quad \pi_\sigma(L_1) = t\,\frac{d}{dt} - \sigma\,, \quad \pi_\sigma(L_+) = t^2\,\frac{d}{dt} - 2\sigma t.$$

and $\widehat{\pi}_\sigma(L_\pm) = -\pi_\sigma(L_\mp)$, $\widehat{\pi}_\sigma(L_1) = -\pi_\sigma(L_1)$. Replacing here σ by k, we obtain formulas for ρ_k.

On the product $\varphi\psi$ of functions φ and ψ the differential operators $\pi_\sigma(L)$, $L \in \mathfrak{g}$, (they have the first order) act as follows:

$$\pi_\sigma(L)(\varphi\psi) = (\pi_\sigma(L)\varphi) \cdot \psi + \varphi \cdot (\pi_0(L)\psi), \tag{4}$$

and similarly to $\widehat{\pi}_\sigma$.

An operator $A_{\sigma,\nu}$ defined by

$$(A_{\sigma,\nu} f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - ts)^{-2\sigma-2,\,\nu} f(s)\,ds$$

intertwines $\pi_{\sigma,\nu}$ and $\widehat{\pi}_{-\sigma-1,\nu}$:

$$\widehat{\pi}_{-\sigma-1,\nu}(g) A_{\sigma,\nu} = A_{\sigma,\nu}\pi_{\sigma,\nu}(g),$$

and also $\widehat{\pi}_{\sigma,\nu}$ and $\pi_{-\sigma-1,\nu}$. The composition $A_{\sigma,\nu}$ and $A_{-\sigma-1,\nu}$ is a scalar operator:

$$A_{-\sigma-1,\nu}\, A_{\sigma,\nu} = \frac{1}{c(\sigma,\nu)} \cdot E,$$

where

$$c(\sigma, \varepsilon) = \frac{2\sigma + 1}{2\pi} \cdot \frac{(-1)^\nu + \cos 2\sigma\pi}{\sin 2\sigma\pi}.$$

Let us realize the space $\mathbb{R}^4$ of vectors $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ as the space of real 2×2 matrices:

$$x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}.$$

The overgroup $\widetilde{G}$ acts as follows:

$$x \mapsto g_1^{-1} x g_2, \quad (g_1, g_2) \in \widetilde{G}.$$

Let $\mathcal{C}$ be the cone $\det x = 0$, $x \neq 0$. For $\sigma \in \mathbb{C}$, $\nu = 0, 1$, let $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathcal{C})$ denote the space of C^∞ functions f on the cone $\mathcal{C}$ homogeneous of degree 2σ and parity ν:

$$f(tx) = t^{2\sigma,\nu} f(x), \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Let $\widetilde{R}_{\sigma,\nu}$ be the representation of $\widetilde{G}$ by translations on the space $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathcal{C})$ (in fact, it is a representation of the group $\mathrm{SO}_0(2,2)$ associated with a cone, $\widetilde{G}$ covers $\mathrm{SO}_0(2,2)$ with multiplicity 2):

$$(\widetilde{R}_{\sigma,\nu}(g_1, g_2) f)(x) = f(g_1^{-1} x g_2).$$

The section $\mathcal{X}$ of $\mathcal{C}$ by plane $(\mathrm{tr}\, x) = 1$ can be identified with a hyperboloid of one sheet $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ in $\mathbb{R}^3$. Restrictions of functions in $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathcal{C})$ to $\mathcal{X}$ form a space $\mathcal{D}_{\sigma,\nu}(\mathcal{X})$

of functions on $\mathcal{X}$. It is contained in $C^\infty(\mathcal{X})$ and contains $\mathcal{D}(\mathcal{X})$. In the realization on $\mathcal{X}$ the representation $\widetilde{R}_{\sigma,\nu}$ is:

$$(R_{\sigma,\nu}(g_1,g_2)f)(x) = f\left(\frac{g_1^{-1}xg_2}{\mathrm{tr}(g_1^{-1}xg_2)}\right)\left\{\mathrm{tr}(g_1^{-1}xg_2)\right\}^{2\sigma,\nu}, \quad x\in\mathcal{X}.$$

The section $\mathcal{X}$ is invariant with respect to the action $x\mapsto g^{-1}xg$ of $G^d = G$, it is just the space G/H. The restriction of $\widetilde{R}_{\sigma,\nu}$ to $G^d = G$ is the quasiregular representation U of G on $\mathcal{X}$. It preserves the space $S(\mathcal{X})$ of polynomials on $\mathcal{X}$ and decomposes in the direct sum: $U = \rho_0+\rho_1+\rho_2+\ldots$ with the corresponding decomposition $S(\mathcal{X}) = \mathcal{H}_0+\mathcal{H}_1+\mathcal{H}_2+\ldots$

Introduce on $\mathcal{X}$ horospherical coordinates ξ,η:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\eta\xi & -\eta \\ \xi & 1\end{pmatrix}, \quad N = N(\xi,\eta) = 1-\xi\eta,$$

so that

$$x_1 = \frac{\xi+\eta}{N},\ x_2 = \frac{\xi-\eta}{N},\ x_3 = \frac{1+\xi\eta}{N}.$$

In these coordinates, to basis elements (2) the following operators correspond:

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_\sigma(0,L_-) &= \frac{\partial}{\partial\xi} - 2\sigma\,\frac{\eta}{N}\,,\\
\widetilde{R}_\sigma(0,L_1) &= \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - \sigma\,\frac{\xi\eta+1}{N}\,,\\
\widetilde{R}_\sigma(0,L_+) &= \xi^2\frac{\partial}{\partial\xi} - 2\sigma\,\frac{\xi}{N}\,.
\end{aligned}$$

Recall some material on *polynomial quantization.* As a supercomplete system we take the kernel of the intertwining operator $A_{-\sigma-1,\nu}$, namely,

$$\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{2\sigma,\nu}\,.$$

This function has an invariance property

$$\Big[\pi_\sigma(g)\otimes\widehat{\pi}_\sigma(g)\Big]\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta).$$

This formula can be rewritten as

$$\Big(\pi_\sigma(g^{-1})\otimes 1\Big)\,\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta) = \Big(1\otimes\widehat{\pi}_\sigma(g)\Big)\,\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta). \tag{5}$$

For elements L of the Lie algebra $\mathfrak{g}$, formula (5) gives:

$$-\Big(\pi_\sigma(L)\otimes 1\Big)\,\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta) = \Big(1\otimes\widehat{\pi}_\sigma(L)\Big)\,\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta). \tag{6}$$

Covariant symbols of operators $\pi_\sigma(X)$, $X \in \mathrm{Env}(\mathfrak{g})$, are functions $F(x)$ on $\mathcal{X}$ defined as follows:

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta)} \Big(\pi_\sigma(X)\otimes 1)\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta\Big).$$

In particular, covariant symbols for basis elements (2) are multiplied by $(-\sigma)$ polynomials $x_1 - x_2$, x_3, $x_1 + x_2$, respectively.

The multiplication of operators gives rise to the multiplication of covariant symbols, denote it by $*$. Namely, let F_1 and F_2 be covariant symbols of operators D_1 and D_2 respectively. Then the covariant symbol $F_1 * F_2$ of the product D_1D_2 is

$$(F_1 * F_2)(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta)} (D_1\otimes 1)\Big(\Phi_{\sigma,\nu}(\xi,\eta)\, F_2(\xi,\eta)\Big). \tag{7}$$

Let V be a covariant symbol of the *first order* (corresponding to an element L of the Lie algebra $\mathfrak{g}$). Let F be an *arbitrary* covariant symbol (corresponding to an element X of the universal enveloping algebra $\mathrm{Env}(\mathfrak{g})$)

Theorem 1. *We have (the point means pointwise multiplication)*

$$V * F = V\cdot F + (\pi_0(L)\otimes 1))\, F \tag{8}$$

$$F * V = V\cdot F - (1\otimes \widehat{\pi}_0(L))\, F \tag{9}$$

Proof. To prove (8), we take in formula (7) $D_1 = \pi_\sigma(L)$ and $F_2 = F$, then we differentiate by (4), as a result we get (8).

Now let $D = \pi_\sigma(X)$. Since $(D\pi_\sigma(L))\otimes 1 = (D\otimes 1)(\pi_\sigma(L)\otimes 1)$, we have

$$F * V = \frac{1}{\Phi_{\sigma,\nu}} (D\otimes 1)(\pi_\sigma(L)\otimes 1)\Phi_{\sigma,\nu},$$

then by (6) we can change here the latter operator by the operator $\{-(1\otimes\widehat{\pi}_\sigma(L))\}$ and then transpose it with $D\otimes 1$ since they act on different variables. We obtain

$$F * V = -\frac{1}{\Phi_{\sigma,\nu}} \Big(1\otimes\widehat{\pi}_\sigma(L)\Big)(\Phi_{\sigma,\nu}F), \tag{10}$$

then we differentiate by (4) and use (6) again. It gives (9). $\square$

Theorem 2. *The multiplication of covariant symbols F by first order symbols V is the action of the overalgebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$ on the space of covariant symbols:*

$$V * F = \widetilde{R}_\sigma(0,L)F, \quad F * V = -\widetilde{R}_\sigma(L,0)F. \tag{11}$$

Proof. Formula (7) with $D_1 = \pi_\sigma(L)$ and $F_2 = F$ gives exactly the first formula in (11). The second formula is just (10). $\square$

For $k\in\mathbb{N}$, we define the Poisson kernel $P_k(x;t)$ as follows. Denote

$$B(x;t) = B(\xi,\eta;t) = \frac{(t-\xi)(1-\eta t)}{N}, \tag{12}$$

then

$$P_k(x;t) = B(x;t)^k. \tag{13}$$

This kernel is a fixed vector in the tensor product $U \otimes \rho_k$:

$$\left(U(g) \otimes \rho_k(g) P_k\right)(x;t) = P_k(x;t), \quad g \in G.$$

Therefore, $P_k(x;t)$ is a generating function for polynomials in $\mathcal{H}_k$.

Let us introduce the following differential operators $S_k(X)$, $k \in \mathbb{N}$, and $E(X)$ in variable t , linearly depending on $X \in \mathfrak{g}$, for basic elements (2) they are

$$\begin{aligned}
&E(L_-) = 1\,, \quad S_k(L_-) = \frac{d^2}{dt^2}\,, \\
&E(L_1) = t\,, \quad S_k(L_1) = t\frac{d^2}{dt^2} - (2k+1)\frac{d}{dt}\,, \\
&E(L_+) = t^2\,, \quad S_k(L_+) = t^2\frac{d^2}{dt^2} - 2(2k+1)t\frac{d}{dt} + (2k+1)(2k+2).
\end{aligned}$$

The following commutation relations hold

$$\begin{aligned}
S_k\left([X,Y]\right) &= \rho_k(X)\, S_k(Y) - S_k(Y)\, \rho_{k+1}(X)\,, \\
E([X,Y]) &= \rho_k(X)\, E(Y) - E(Y)\, \rho_{k-1}(X)\,.
\end{aligned}$$

Then, let us introduce the following coefficients α_k , β_k , γ_k :

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{2\sigma - k}{(2k+2)(2k+1)}\,, \\
\beta_k &= -\frac{1}{2}\,, \\
\gamma_k &= -\frac{(2\sigma+k+1)k}{2(2k+1)}\,.
\end{aligned}$$

Theorem 3. *Let $X \in \mathfrak{g}$. The operator $\widetilde{R}_\sigma(0,X)$ acts on the Poisson kernel $P_k(x;t)$ as follows:*

$$\widetilde{R}_\sigma(0,X)\, P_k = \alpha_k \cdot S_k(X)\, P_{k+1} + \beta_k \cdot \rho_k(X)\, P_k + \gamma_k \cdot E(X)\, P_{k-1}\,, \tag{14}$$

in the left hand side the operator acts on a function of ξ, η , and in the left hand side the operators act on functions of t .

Proof. First we take $X = L_-$. Keeping in mind (12), (13), we find:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - 2\sigma\,\frac{\eta}{N}\right) B^k = -kB^{k-1} \cdot \frac{1-\eta t}{N} + (-2\sigma+k)B^k \cdot \frac{\eta}{N}\,. \tag{15}$$

On the other hand, we compute $(\partial/\partial t)B^k$ and $(\partial^2/\partial t^2)B^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}B^k &= kB^{k-1}\cdot\frac{-2\eta t+\xi\eta+1}{N}\\
&= -kB^{k-1}+2kB^{k-1}\cdot\frac{1-\eta t}{N}, && (16)\\
\frac{\partial^2}{\partial t^2}B^{k+1} &= (k+1)\left\{kB^{k-1}\cdot\frac{(-2\eta t+\xi\eta+1)^2}{N^2}-B^k\cdot\frac{2\eta}{N}\right\}\\
&= (k+1)\left\{kB^{k-1}-2(2k+1)B^k\cdot\frac{\eta}{N}\right\}. && (17)
\end{aligned}$$

Expressing from (16) and (17) the second summands in right hand sides, substituting in (15), we obtain (14) for $X=L_-$. Now for $X=L_1$ and $X=L_+$, we use equality (14) with $X=L_-$ already proved and commutation relations – successively the first and the second ones in (3), and corresponding commutation relations for operators $S_k(X)$ and $E(X)$. $\square$

REFERENCES

1. Molchanov V.F. Quantization on para-Hermitian symmetric spaces. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 1996, vol. 175, pp. 81-95.

2. Molchanov V.F., Volotova N.B. Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. *Acta Appl. Math.*, 2004, vol. 81, no. 1-3, pp. 215-232.

3. Molchanov V.F. Berezin quantization as a part of the representation theory. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6, pp. 1235-1246. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1235-1246.

4. Neretin Yu.A. Deystvie nadalgebry v plansherelevskom razlozhenii i operatory sdviga v mnimom napravlenii [The action of an overalgebra in the Plancherel decomposition and shift operators in an imaginary direction]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 2002, vol. 66, no. 5, pp. 171-182. (In Russian).

5. Molchanov V.F. Canonical representations and overgroups. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 2003, vol. 210, pp. 213-224.

6. Molchanov V.F. Canonical representations for hyperboloids: an interaction with an overalgebra. *Geometric Methods in Physics.* Bialowieza, 2016, pp. 129-138.

Received 23 April 2018
Reviewed 25 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: v.molchanov@bk.ru

For citation: Molchanov V.F. Polynomial quantization and overalgebra for hyperboloid of one sheet. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 353–360. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-353-360 (In Engl., Abstr. in Russian).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-353-360
УДК 517.98

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ КВАНТОВАНИЕ И НАДАЛГЕБРА ДЛЯ ОДНОПОЛОСТНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

© В. Ф. Молчанов

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: v.molchanov@bk.ru

Аннотация. Мы показываем, что умножение символов в полиномиальном квантовании есть в точности действие надалгебры на пространстве этих символов.
Ключевые слова: квантование; представления; гиперболоиды; преобразования Пуассона

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Molchanov V.F.* Quantization on para-Hermitian symmetric spaces // Amer. Math. Soc. Transl, Ser. 2. 1996. Vol. 175. P. 81-95.

2. *Molchanov V.F., Volotova N.B.* Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces // Acta Appl. Math. 2004. Vol. 81. № 1-3. P. 215-232.

3. *Molchanov V.F.* Berezin quantization as a part of the representation theory // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6. С. 1235-1246. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1235-1246.

4. *Неретин Ю.А.* Действие надалгебры в планшерелевском разложении и операторы сдвига в мнимом направлении // Известия РАН. Серия математическая. 2002. Т. 66. № 5. С. 171-182.

5. *Molchanov V.F.* Canonical representations and overgroups // Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2. 2003. Vol. 210. P. 213-224.

6. *Molchanov V.F.* Canonical representations for hyperboloids: an interaction with an overalgebra // Geometric Methods in Physics. Bialowieza, 2016. P. 129-138.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 25 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Для цитирования: *Молчанов В.Ф.* Полиномиальное квантование и надалгебра для однополостного гиперболоида // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 353–360. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-353-360

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.8515.2017/8.9).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367
УДК 519.642.5

ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ С ОТСУТСТВУЮЩЕЙ ПРЕДЫСТОРИЕЙ

© **А. С. Апарцин, Е. В. Маркова, И. В. Сидлер**

ФГБУН «Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева»
Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена интегральная модель развивающейся системы, у которой момент ее возникновения совпадает с началом моделирования, так что предыстория отсутствует и при $t = 0$ все возрастные группы элементов пусты.

Ключевые слова: развивающаяся система; возрастные группы; уравнение Вольтерра I рода; задача оптимизации

Введение

Интегральное уравнение Вольтерра I рода

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где $K_i(t,s)$ — непрерывный по t, s и непрерывно дифференцируемый по t в области $\Delta_i = \{t \in [0,T], s \in [a_i(t), a_{i-1}(t)]\}$ коэффициент эффективности функционирования элементов $x(s)$ i-й возрастной группы, играет ключевую роль в интегральных моделях развивающихся систем как уравнение баланса между требуемым уровнем $y(t)$ развития системы, состоящей из элементов n возрастных групп, и возможностью его достижения.

Специфика (1) во многом связана со значениями $a_i(0)$. Случай $a_i(0) < 0$ $i = 1,\ldots,n,$ предполагает задание предыстории $x(t) = x_0(t),$ $t \in [a_n(0), 0)$. В частности, при $a_i(t) = t - T_i,$ $0 < T_1 < \ldots < T_n,$

$$x(t) = x_0(t), \quad t \in [-T_n, 0).$$

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № АААА-А17-117030310446-6).

Этот случай для $n = 3$ рассмотрен в [1, 2] применительно к проблеме построения долгосрочных стратегий развития электроэнергетической системы, а уравнение типа (1) имело вид

$$\int\limits_{t-T_1}^{t} x(s)ds + 0,97 \int\limits_{t-T_2}^{t-T_1} x(s)ds + 0,9 \int\limits_{t-T_3}^{t-T_2} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

Существенно менее изучен случай $a_i(0) = 0$, который соответствует совпадению моментов начала моделирования и возникновения самой системы. При этом предыстория отсутствует и при $t = 0$ $x(0) = 0$, так что все возрастные группы пусты. Именно этот случай будет нас интересовать в данной работе.

1. Случай постоянных ядер Вольтерра

Теория уравнений типа (1) с условием $a_i(0) = 0$ в настоящее время только создается. В частности, если ядра Вольтерра K_i переменны, то, как показали расчеты модельных примеров, с ростом t непрерывное решение (1) может терять устойчивость к погрешностям исходных данных. Механизм этого эффекта изучен на специальных тестовых примерах для $n = 2$ в [3, 4], $n = 3$ в [5] и для произвольного n в [6]. Ниже мы ограничимся случаем постоянных ядер $K_i(t,s) = \beta_i$, $i = 1,\ldots,n$, $\beta_1 = 1$, для которого детальный теоретический анализ проведен в [4]. Кроме того, будем предполагать, что $a_i(t) = \alpha_i t$, $1 = \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_n \geq 0$, так что (1) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \int\limits_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1} t} x(s)ds = y(t), \;\; t \in [0,T]. \tag{3}$$

С использованием классических результатов функционального анализа (см., например, [7, с. 212]), в [4] показано, что при выполнении неравенства

$$\sum_{i=2}^{n} |\beta_{i-1} - \beta_i| \alpha_{i-1} < 1 \tag{4}$$

уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0,T]}, \overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]})$ (под $\overset{\circ}{C}{}^{(1)}_{[0,T]}$ понимается пространство непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций $y(t)$ с $y(0) = 0$). Переход от (3) к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \sum_{i=2}^{n} (\beta_{i-1} - \beta_i)\alpha_{i-1} x(\alpha_{i-1} t) + y'(t), \;\; t \in [0,T], \tag{5}$$

показывает, что неравенство (4) есть условие сжатия оператора в правой части (5), действующего в $C_{[0,T]}$. Существенно, что это условие полностью определяется параметрами α_i, β_i и не зависит от того, на каком временном промежутке рассматривается уравнение (3).

Рассмотрим частный случай уравнения (3)

$$\int_{\alpha_1 t}^{t} x(s)ds + 0,97\int_{\alpha_2 t}^{\alpha_1 t} x(s)ds + 0,9\int_{\alpha_3 t}^{\alpha_2 t} x(s)ds = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{6}$$

которое, как и уравнение (2), применительно к задаче развития электроэнергетической системы можно считать уравнением баланса между желаемым уровнем электропотребления $y(t)$ и введенной в момент $t > 0$ генерацией электроэнергии. Монотонное убывание коэффициентов эффективности β_i, $i = 1,2,3$, отражает естественный процесс старения элементов средней и старшей возрастной группы.

Пусть $y(t) = \frac{t^{k+1}}{k+1}$, $k = 1,2,\ldots$. Тогда эквивалентное (6) функциональное уравнение имеет вид

$$x(t) = 0,03\alpha_1 x(\alpha_1 t) + 0,07\alpha_2 x(\alpha_2 t) + 0,9\alpha_3 x(\alpha_3 t) + t^k. \tag{7}$$

Для (7) неравенство (4) заведомо выполнено, поэтому (7) однозначно разрешимо в $C_{[0,T]}$. Полагая в (7) $x(t) = c_k t^k$, имеем относительно c_k уравнение

$$c_k = 0,03\alpha_1^{k+1}c_k + 0,07\alpha_2^{k+1}c_k + 0,9\alpha_3^{k+1}c_k + 1,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{1 - 0,03\alpha_1^{k+1} - 0,07\alpha_2^{k+1} - 0,9\alpha_3^{k+1}}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Если, например, $\alpha_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1/4$, $\alpha_3 = 1/8$, то

$$c_k = \frac{1}{1 - 0,03\cdot 2^{-(k+1)} - 0,07\cdot 2^{-2(k+1)} - 0,9\cdot 2^{-3(k+1)}}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

в частности $c_1 = 1,02663$, $c_2 = 1,00665$, $c_3 = 1,00237$.

З а м е ч а н и е 1. Случай, когда монотонное убывание $|\beta_i|$, $i = 2,3$, не имеет места и неравенство (4) не выполнено, исследован в [4].

З а м е ч а н и е 2. В силу перестановочности операторов в правой части (5), для поиска непрерывного решения можно применить аппарат комбинаторики [8]. Универсальная формула обращения (5) на его основе приведена в [4].

З а м е ч а н и е 3. Для численного решения (1) в [9, 10] разработаны модифицированные варианты методов левых и средних прямоугольников.

2. Оптимизационная постановка

В [11] на базе модели (2) была поставлена задача оптимизации функционального параметра $T_3(t)$ (момент вывода оборудования из эксплуатации), обеспечивающего заданную потребность в электроэнергии при минимуме суммарных затрат на ввод и эксплуатацию генерирующих мощностей, и приведены результаты ее решения на реальных данных с ограничением на ввод новых мощностей.

По аналогии с [11] можно поставить задачу оптимизации возрастного состава и момента вывода оборудования из эксплуатации для задачи (6). Пусть доля «молодых» мощностей α_1 считается заданной. Примем в качестве целевого функционал затрат вида

$$I\big(x,\alpha_2,\alpha_3\big)=\int\limits_0^T a^t\sum_{i=1}^3\beta_i\int\limits_{\alpha_i t}^{\alpha_{i-1}t}u_1(t-s)u_2(s)x(s)dsdt+\int\limits_0^T a^t k(t)x(t)dt. \qquad (8)$$

Здесь первое слагаемое — суммарные эксплуатационные затраты за прогнозный период, второе — суммарные затраты на ввод новых генерирующих мощностей.

В (8) считаются известными следующие функции:

β_i — коэффициент эффективности использования мощностей i-й возрастной группы;

$u_1(t-s)$ — коэффициент увеличения в момент времени t затрат на эксплуатацию мощностей, введенных в момент s;

$u_2(t)$ — удельные затраты на эксплуатацию мощности, введенной в момент t;

$k(t)$ — затраты на ввод единицы мощности в момент t;

a^t — коэффициент дисконтирования затрат, $0 < a < 1$.

Управляющие параметры α_2 и α_3 принадлежат допустимому множеству

$$U=\left\{\alpha_2,\alpha_3: 0\le\alpha_3<\alpha_2<\alpha_1\right\}. \qquad (9)$$

Требуется найти

$$(\alpha_2^*,\alpha_3^*)=arg\min_{\alpha_2,\alpha_3\in U} I\big(x(\alpha_2,\alpha_3)\big) \qquad (10)$$

при выполнении условий (6), (8)–(9) и ограничении на вводимые мощности

$$x(t)\ge 0,\ t\in[0,T]. \qquad (11)$$

Привязка задачи (6), (8)–(11) к конкретному объекту электроэнергетики — предмет дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Применение неклассических уравнений Вольтерра I рода для моделирования развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 3-16.

2. *Труфанов В.В., Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В.* Интегральные модели для разработки стратегии технического перевооружения генерирующих мощностей // Электричество. 2017. № 3. С. 4-11.

3. *Апарцин А.С.* К исследованию устойчивости решений тестовых неклассических уравнений Вольтерра I рода // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. № S. С. 15-20.

4. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* О тестовых уравнениях Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Автоматика и телемеханика. 2018. № 4. С. 31-45.

5. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. № 2. С. 24-33. DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33.

6. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Тестовое уравнение Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем, содержащих n возрастных групп // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 122. С. 168-179. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179.

7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 759 с.

8. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 323 с.

9. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* Численное решение уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Обобщенные постановки и решения задач управления: сб. тр. 7 Междунар. симп. М.: АНО «Издательство физико-математической литературы», 2014. С. 21-25.

10. *Апарцин А.С., Сидлер И.В.* О численном решении неклассических уравнений Вольтерра I рода // Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем: сб. ст. 9 Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2014. С. 59-64.

11. *Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В., Труфанов В.В.* Об управлении возрастной структурой в интегральной модели ЭЭС России // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1006-1009.

Поступила в редакцию 20 марта 2018 г.

Прошла рецензирование 24 апреля 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Апарцин Анатолий Соломонович, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Маркова Евгения Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: markova@isem.irk.ru

Сидлер Инна Владимировна, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Иркутск, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: inna.sidler@mail.ru

Для цитирования: *Апарцин А.С., Маркова Е.В., Сидлер И.В.* Интегральная модель развивающейся системы с отсутствующей предысторией// Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 361–367. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367

INTEGRAL MODEL OF DEVELOPING SYSTEM WITHOUT PREHISTORY

A. S. Apartsyn, E. V. Markova, I. V. Sidler

Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russian Federation
E-mail: apartsyn@isem.irk.ru, markova@isem.irk.ru, inna.sidler@mail.ru

Abstract. The paper addresses integral model of the developing system, in which the moment of its origin coincides with the beginning of the modeling, so there is no prehistory and for $t = 0$ all the age groups of the elements are empty.
Keywords: developing system; age groups; Volterra equation of the first kind; optimization problem

REFERENCES

1. Apartsin A.S., Sidler I.V. Primeneniye neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda dlya modelirovaniya razvivayushchikhsya sistem [Using the Nonclassical Volterra equations of the first kind to model the developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2013, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).

2. Trufanov V.V., Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'nyye modeli dlya razrabotki strategii tekhnicheskogo perevooruzheniya generiruyushchikh moshchnostey [Integrated Models for the Development of Technical Modernization of Generating Capacities Strategy]. *Elektrichestvo – Electricity*, 2017, no. 3, pp. 4-11. (In Russian).

3. Apartsin A.S. K issledovaniyu ustoychivosti resheniy testovykh neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the study of stability of solutions for test nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2015, vol. 12, no. S, pp. 15-20. (In Russian).

4. Apartsin A.S., Sidler I.V. O testovykh uravneniyakh Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [On the test Volterra equations of the first kind in the integral models of developing systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2018, no. 4, pp. 31-45. (In Russian).

5. Apartsin A.S., Sidler I.V. Issledovaniye testovykh uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 24-33. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33.

6. Apartsin A.S., Sidler I.V. Testovoye uravneniye Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem, soderzhashchikh n vozrastnykh grupp [The test Volterra equation of the

The work was carried out within the framework of the program of fundamental research of the SB RAS, reg. No. AAAA-A17-117030310446-6.

first kind in integral models of developing systems containing n age groups]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 168-179. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-168-179.

7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ, 1977, 759 p.

8. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika* [Combinatorics]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 323 p. (In Russian).

9. Apartsin A.S., Sidler I.V. Chislennoye resheniye uravneniy Vol'terra I roda v integral'nykh modelyakh razvivayushchikhsya sistem [Numerical solution of the Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems]. *Sbornik trudov 7 Mezhdunarodnogo simpoziuma «Obobshchennyye postanovki i resheniya zadach upravleniya»* [Proceedings of 7 International Symposium "Generalized Statements and Solutions of Control Problems"]. Moscow, Autonomous Noncommercial Organization "Publishing House of Physical and Mathematical Literature", 2014, pp. 21-25. (In Russian).

10. Apartsin A.S., Sidler I.V. O chislennom reshenii neklassicheskikh uravneniy Vol'terra I roda [On the numerical solution of the nonclassical Volterra equations of the first kind]. *Sbornik statey 9 Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Analiticheskiye i chislennyye metody modelirovaniya estestvennonauchnykh i sotsial'nykh problem»* [Proceedings of 9 International Conference "Analytical and Numerical Methods of Modeling of Natural Science and Social Problems"]. Penza, 2014, pp. 59-64. (In Russian).

11. Apartsin A.S., Markova E.V., Sidler I.V., Trufanov V.V. Ob upravlenii vozrastnoy strukturoy v integral'noy modeli EES Rossii [On age structure control in integral model of EPS of Russia]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015. vol. 20, no. 5, pp. 1006-1009. (In Russian).

Received 20 March 2018
Reviewed 24 April 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Apartsyn Anatoly Solmonovich, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, e-mail: apartsyn@isem.irk.ru

Markova Evgeniia Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, e-mail: markova@isem.irk.ru

Sidler Inna Vladimirovna, Melentiev Energy Systems Institute of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, the Russian Federation, Candidate of Technics, Senior Researcher, e-mail: inna.sidler@mail.ru

For citation: Apartsyn A.S., Markova E.V., Sidler I.V. Integral'naya model' razvivayushcheysya sistemy s otsutstvuyushchey predystoriyey [Integral model of developing system without prehistory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 361–367. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-361-367 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

УДК 517.929.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

© **А. П. Жабко**[1], **В. В. Провоторов**[2], **Е. Н. Провоторова**[3]

[1] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

[2] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: wwprov@mail.ru

[3] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
324026, Российская Федерация, г. Воронеж, Московский проспект, 14
E-mail: enprov@mail.ru

Аннотация. В работе сделана попытка продемонстрировать понятие устойчивости по Ляпунову невозмущенного состояния дифференциальной системы применительно к уравнениям с частными производными и показать возможность использования известных классических результатов в изучаемом случае.

Ключевые слова: система параболических уравнений; распределенные параметры на графе; начально-краевая задача; аналог устойчивости по Ляпунову

Введение

В многочисленных приложениях при анализе эволюционных процессов из-за сложности математических моделей приходится использовать системы эволюционных уравнений с частными производными и изучать их свойства. Именно этот случай есть предмет исследования в представленной работе: вводится понятие устойчивости параболической системы с распределенными параметрами на графе, аналогичное понятию устойчивости по Ляпунову обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучая соответствующую начально-краевую задачу в слабой постановке, мы выходим за рамки классических решений и обращаемся к слабым решениям, описывающим состояния системы, которые более точно отражают физическую сущность явлений и процессов. При этом выбор класса слабых решений, определяемого тем или иным функциональным пространством, обусловлен, прежде всего, требованием сохранения теорем существования и единственности (последнее, если это соответствует духу изучаемого явления или процесса).

1. Основные понятия и используемые утверждения

На протяжении всей работы используются понятия и обозначения, принятые в [1]: Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ, параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ — множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 — объединение всех ребер γ_0, не содержащих концевых точек; $\Gamma_t = \Gamma_0 \times (0,t)$ ($\gamma_t = \gamma_0 \times (0,t)$), $\partial\Gamma_t = \partial\Gamma \times (0,t)$ ($t \in (0,T]$, $T < \infty$ — произвольная фиксированная постоянная); f_γ — сужение функции f на ребро γ.

Необходимые пространства и множества: $L_p(\Gamma)$ ($p = 1,2$) — банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с p-й степенью (аналогично определяются пространства $L_p(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой, определяемой соотношением $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int\limits_0^T (\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx)^{1/2}dt$; $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка по x, принадлежащую $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично вводится пространство $W^1(\Gamma_T)$; $V_2(\Gamma_T)$ — множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)} \tag{1}$$

и непрерывных по t в норме $L_2(\Gamma)$.

Введем пространство состояний параболической системы и вспомогательные пространства. Рассмотрим билинейную форму $\ell(\mu,\nu) = \int\limits_\Gamma \Big(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx} + b(x)\mu(x)\nu(x)\Big)dx$ с фиксированными измеримыми и ограниченными на Γ_0 функциями $a(x)$, $b(x)$, суммируемыми с квадратом:

$$0 < a_* \le a(x) \le a^*,\ |b(x)| \le \beta,\ x \in \Gamma_0. \tag{2}$$

Лемма 1. [2, с. 92] Пусть функция $u(x) \in W_2^1(\Gamma)$ такова, что

$$\ell(u,\nu) - \int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx = 0$$

для любой $\eta(x) \in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x) \in L_2(\Gamma)$ — фиксированная функция). Тогда для любого ребра $\gamma \subset \Gamma$ сужение $a(x)_\gamma \frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ.

Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям леммы и соотношениям $\sum\limits_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum\limits_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$ во всех узлах $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер γ, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$. Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T

плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0,T]$) как функции класса $W_0^1(a,\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x} \tag{3}$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ по норме (1) обозначим через $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$; ясно, что $V^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

Другим подпространством пространства $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ является $W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ множества гладких функций, удовлетворяющих соотношениям (3) для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$ и для любого $t \in [0,T]$ (аналогично вводится пространство $W^1(a,\Gamma_T)$); $W^{1,0}(a,\Gamma_T) \subset W_2^{1,0}(\Gamma_T)$.

В пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right) + b(x)y(x,t) = f(x,t), \tag{4}$$

представляющее собой систему дифференциальных уравнений с распределенными параметрами на каждом ребре γ графа Γ; $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Состояние $y(x,t)$ $(x,t \in \overline{\Gamma}_T)$ системы (4) в области $\overline{\Gamma}_T$ определяется слабым решением $y(x,t)$ уравнения (4), удовлетворяющим начальному и краевому условиям

$$y\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad y\,|_{x\in\partial\Gamma_T} = 0; \tag{5}$$

$\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$. Предположения относительно функций $a(x)$ и $b(x)$ указаны выше. Из $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ следует, что отображение $y : [0,T] \to W_0^1(a,\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ является непрерывной функцией, так что первое равенство в (5) имеет смысл и понимается почти всюду.

О п р е д е л е н и е 1. Слабым решением начально-краевой задачи (4), (5) класса $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ называется функция $y(x,t) \in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_\Gamma y(x,t)\eta(x,t)dx - \int_{\Gamma_t} y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt + \ell_t(y,\eta) = \int_\Gamma \varphi(x)\eta(x,0)dx + \int_{\Gamma_t} f(x,t)\eta(x,t)dxdt$$

при любом $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x,t) \in W^1(a,\Gamma_T)$; $\ell_t(y,\eta)$ — билинейная форма: $\ell_t(y,\eta) = \int_{\Gamma_t}\left(a(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x} + b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt, \quad t \in (0,T]$.

Приведем используемые ниже утверждения, полные доказательства которых представлены в работах [1, 3].

При доказательстве разрешимости задачи (4), (5) используется специальный базис пространства $W_0^1(a,\Gamma)$ — система обобщенных собственных функций краевой задачи на собственные значения (спектральной задачи)

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + b(x)u(x) = \lambda u(x), \;\; u(x)|_{\partial\Gamma} = 0 \tag{6}$$

в классе $W^1(a,\Gamma)$. Обобщенная собственная функция удовлетворяет интегральному тождеству $\ell(u,\eta) = \lambda(u,\eta)$ для любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a,\Gamma)$ (здесь и всюду ниже через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ или $L_2(\Gamma_T)$).

Лемма 2. [3] Пусть выполнены предположения (2). Тогда спектральная задача (6) имеет счетное множество действительных собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ (занумерованных в порядке возрастания с учетом их кратностей) с предельной точкой на бесконечности (собственные значения λ_i положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых). Система обобщенных собственных функций $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$ образует базис в $W_0^1(a,\Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$, ортонормированный в $L_2(\Gamma)$ и ортогональный в смысле скалярного произведения $[\cdot,\cdot]$.

Следствие 1. *Если $b(x)\geq 0$, как это имеет место в приложениях, то все собственные значения спектральной задачи (6) неотрицательны.*

Теорема 1. [1] При любых $f(x)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ и для любого $0<T<\infty$ начально-краевая задача (4), (5) однозначно слабо разрешима в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$.

При доказательстве теоремы строятся приближения Фаэдо-Галеркина $y^N(x,t)$ по базису $\{u_n(x)\}_{n\geq 1}$: $y^N(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{N}c_n^N(t)u_n(x)$, где $c_n^N(t)$ — абсолютно непрерывные на $[0,T]$ функции ($c_n'(t)\in L_2(0,T)$, натуральное N фиксировано). Дальнейшие рассуждения основаны на априорных оценках норм слабых решений задачи (4), (5) и построении слабо сходящейся по норме $W^{1,0}(\Gamma_T)$ подпоследовательности $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geq 1}$ последовательности $\left\{y^N\right\}_{N\geq 1}$ к решению $y(x,t)\in W^{1,0}(a,\Gamma_T)$ (слабая компактность $\left\{y^{N_k}\right\}_{k\geq 1}$).

Следствие 2. *Слабое решение начально-краевой задачи (4), (5) непрерывно зависит от исходных данных $f(x,t)$ и $\varphi(x)$. Тем самым установлена корректность по Адамару начально-краевой задачи (4), (5) в пространстве $V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ для любого $0<T<\infty$.*

З а м е ч а н и е 1. Утверждения теоремы 1 сохраняются при замене $[0,T]$ на $[t_0,T]$ ($t_0>0$), начальное условие в соотношениях (5) заменяется на $y\mid_{t=t_0}=\varphi(x)$. Краевое условие в (5) может быть неоднородным: $y(x,t)\mid_{x\in\partial\Gamma}=\phi(x,t)$.

В многочисленных приложениях, где необходимо исследовать свойства решений $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ задачи (4), (5) для произвольного конечного T, важно знать поведение $y(x,t)$ при $t\to+\infty$, то есть при $t\in[0,\infty)$.

В условиях теоремы 1 отображение $t\to y(x,t)$ ($t\geq 0$) непрерывно. Пусть, как и выше, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, причем

$$\int\limits_t^{t+1}\|f(\cdot,\varsigma)\|^2_{L_2(\Gamma)}d\varsigma\leq A \tag{7}$$

для любого $t\geq 0$ (A – фиксированная постоянная); последнее означает, что функция $f(x,t)$ определена в области $\Gamma\times[0,\infty)$.

Теорема 2. *Пусть $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_T)$ — слабое решение задачи (4), (5) для произвольного конечного $T>0$. Тогда существует такая положительная постоянная C, что*

1) $\int\limits_t^{t+1}\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\leq C$ *для любых* $t\geq 0$ *; 2)* $\|y(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)}\leq C$ *при* $t\to+\infty$.

Доказательство строится по следующей схеме. Полуось $[0,\infty)$ разбивается на отрезки $[j-1,j]$, $j=1,2,...$ и через t_j обозначается такое принадлежащее $[j-1,j]$ число, для которого

$$\|y(\cdot,t_j)\|^2_{L_2(\Gamma_T)}=\max_{t\in[j-1,j]}\|y(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma_T)},\quad j=1,2,\ldots. \tag{8}$$

Для произвольных положительных s и t ($s<t$) из интегрального тождества определения 1 следует неравенство

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\|y(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}-\tfrac{1}{2}\|y(\cdot,s)\|^2_{L_2(\Gamma)}+\alpha\int\limits_s^t\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\le\\ \le\left(\int\limits_s^t\|f(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Gamma)}dt\right)^{1/2}\left(\int\limits_s^t\|y(\cdot,\varsigma)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}d\varsigma\right)^{1/2},\end{gathered} \tag{9}$$

постоянная α зависит только от фиксированных a_* и β в условиях (2).

Дальнейшие рассуждения опираются на идею, представленную в монографии Ж.Л. Лионса [4, с. 519]. При этом используется неравенство (9) для произвольного отрезка $[t_j,t_{j+2}]$, $j=1,2,...$ поскольку в силу (8) возможно равенство $t_j=t_{j+1}$ и далее в силу произвольности $j=1,2,...$ имеет место оценка

$$\|y(\cdot,t))\|_{L_2(\Gamma)}\le\max\{\max_{t\in[0,2]}\|y(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)},M\}=C,$$

где $M=\left(\frac{3A}{\alpha^2}\chi^2+\frac{6A}{\alpha}\right)^{1/2}$, χ — константа вложения пространства $W_2^1(\Gamma)$ в $L_2(\Gamma)$. Таким образом, решение $y(x,t)$ определено в области $\Gamma\times[0,\infty)$ и из полученной оценки вытекают утверждения теоремы.

2. Основной результат

Предположим, что $b(x)\ge 0$ для $x\in\Gamma$, что гарантирует неотрицательность собственных значений λ_i, $i\ge 1$ (следствие 1) и пусть $\lambda_1>0$. Рассмотрим систему (4) на множестве $\Gamma_\infty=\Gamma_0\times(0,\infty)$. Обозначим через $\Gamma_{t_0,t}=\Gamma_0\times(t_0,t)$, $\partial\Gamma_{t_0,t}=\partial\Gamma\times(t_0,t)$ ($0<t_0<t<\infty$), $\Gamma_{t_0,\infty}=\Gamma_0\times(t_0,\infty)$, $\partial\Gamma_{t_0,\infty}=\partial\Gamma\times(t_0,\infty)$; ясно, что $\Gamma_{t_0,t}\subset\Gamma_t$. Как и выше, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, причем выполнены условия (7).

Пусть состояние системы (4) описывается функцией $\overline{y}(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$, являющейся слабым решением уравнения (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями

$$y\mid_{t=t_0}=\overline{\varphi}(x),\quad x\in\Gamma,\quad y\mid_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}}=0, \tag{10}$$

а функция $y(x,t)\in V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ является слабым решением уравнения (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$ с начальным и краевым условиями

$$y\mid_{t=t_0}=\varphi(x),\quad x\in\Gamma,\quad y\mid_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}}=0, \tag{11}$$

(начально-краевая задача (4), (10) отличается от задачи (4), (11) тем, что функция $\overline{\varphi}(x)$ в первом соотношении (10) заменена на отличную от нее функцию $\varphi(x)$). Состояние $\overline{y}(x,t)$ системы (4) назовем невозмущенным, а $y(x,t)$ – возмущенным. Из теоремы 2 вытекает, что состояния $\overline{y}(x,t)$, $y(x,t)$ определены в области $\Gamma_{t_0,\infty}$, удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиями (10), (11) и принадлежат пространству $V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ при $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_\infty)$.

О п р е д е л е н и е 2. Невозмущенное состояние $\overline{y}(x,t)$ системы (4) называется слабо устойчивым (устойчивым по Ляпунову [5]), если для любых $t_0 > 0$ и $\epsilon > 0$ существует $\delta(t_0,\epsilon) > 0$ такое, что при $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_{L_2(\Gamma)} < \delta(t_0,\epsilon)$ выполняется $\|y(\cdot,t) - \overline{y}(\cdot,t)\|_{W^1(a,\Gamma)} < \epsilon$ при $t \geq t_0$, где $y(x,t)$ — возмущенное состояние системы (4).

З а м е ч а н и е 2. Аналогично определению устойчивости невозмущенного состояния системы (4) можно ввести определение равномерной устойчивости, асимптотической и экспоненциальной устойчивости невозмущенного состояния системы (4) в области $\Gamma_{t_0,\infty}$.

З а м е ч а н и е 3. В силу линейности системы (4) можно все определения переформулировать для нулевого (тривиального) состояния системы (4).

Теорема 3. *Пусть в (4) $b(x) \geq 0$, $x \in \Gamma$ и пусть первое собственное значение λ_1 положительно, тогда невозмущенное состояние системы (4) в области Γ_T слабо устойчиво.*

Действительно, в силу линейности уравнения (4) функция $\theta(x,t) = y(x,t) - \overline{y}(x,t)$ — элемент пространства $V^{1,0}(a,\Gamma_{t_0,\infty})$ и является слабым решением начально-краевой задачи для однородного уравнения (4) ($f = 0$), удовлетворяющее начальному и краевому условиям

$$\theta\,|_{t=t_0} = \phi(x), \quad x \in \Gamma, \quad \theta\,|_{x\in\partial\Gamma_{t_0,\infty}} = 0, \tag{12}$$

где $\phi(x) = \varphi(x) - \overline{\varphi}(x)$. Следуя рассуждениям доказательства теоремы 1 (см. [1]), начально-краевая задача (4), (12) однозначно слабо разрешима, ее решение имеет представление $\theta(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \phi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x)$, $\phi_n = (\phi, u_n)$ и является пределом слабо сходящейся последовательности $\left\{\theta^N\right\}_{N\geq 1}$ приближений $\theta^N(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n e^{-\lambda_n t} u_n(x)$, причем $\|\theta^N\|_{2,\Gamma_t} \leq \sum\limits_{n=1}^{N} \phi_n^2 e^{-2\lambda_n t}$, $N = 1,2,...$ Переходя к пределу в последнем неравенстве при $N \to \infty$, приходим к оценке $\|\theta(\cdot,t)\|_{L_2(\Gamma)} \leq C^*\left(\|\phi\|_{L_2(\Gamma)}\right)$ для любых $t \in [t_0,\infty)$ (C^* — постоянная), из которой следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 4. Полученные результаты применимы для задач оптимального управления [6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Провоторов В.В., Провоторова Е.Н.* Синтез оптимального граничного управления параболической системы с запаздыванием и распределенными параметрами на графе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 89-104.

2. *Провоторов В.В., Волкова А.С.* Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2014. 188 с.

3. *Волкова А.С., Провоторов В.В.* Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 3. С. 3-18.

4. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 581 с.

5. *Жабко А.П., Котина Е.Д., Чижова О.Н.* Дифференциальные уравнения и устойчивость. СПб.: Лань, 2015. 320 с.

6. *Подвальный С.Л., Провоторов В.В.* Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014. Т. 10. № 6. С. 29-35.

7. *Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A.* Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. № 3. С. 264-277.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жабко Алексей Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой управления факультета прикладной математики – процессов управления, Заслуженный работник высшей школы, e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Провоторов Вячеслав Васильевич, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: wwprov@mail.ru

Провоторова Елена Николаевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: enprov@mail.ru

Для цитирования: *Жабко А.П., Провоторов В.В., Провоторова Е.Н.* Об устойчивости параболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 368–376. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376

ON STABILITY CONTROL OF A PARABOLIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS ON THE GRAPH

A. P. Zhabko[1), **V. V. Provotorov**[2), **E. N. Provotorova**[3)

[1) St. Petersburg State University
7 Universitetskaya Quay, St. Petersburg 199034, Russian Federation
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
[2) Voronezh State University
1 University Area, Voronezh 394006, Russian Federation
E-mail: wwprov@mail.ru
[3) Voronezh State Technical University
14 Moscovsky Avenue, Voronezh 394026, Russian Federation
E-mail: enprov@mail.ru

Abstract. The work is an attempt to demonstrate the concept of sustainability in the undisturbed state Lyapunov differential system for equations with partial derivatives, and show the ability to use a famous classical results in the studied case.
Keywords: system of parabolic equations; distributed parameters on the graph; initial-boundary value problem; equivalent of Lyapunov stability

REFERENCES

1. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Sintez optimal'nogo granichnogo upravleniya parabolicheskoy sistemy s zapazdyvaniyem i raspredelennymi parametrami na grafe [Synthesis of optimal boundary control of parabolic system with time-delay and distributed parameters on the graph]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, no. 2, pp. 89-104. (In Russian).

2. Provotorov V.V., Volkova A.S. *Nachal'no-krayevyye zadachi s raspredelennymi parametrami na grafe* [Initial-Boundary Value Problems with Distributed Parameters on the Graph]. Voronezh, The Scientific Book Publishing House, 2014, 188 p. (In Russian).

3. Volkova A.S., Provotorov V.V. Obobshchennyye resheniya i obobshchennyye sobstvennyye funktsii krayevykh zadach na geometricheskom grafe [Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2014, no. 3, pp. 3-18. (In Russian).

4. Lions J.-L. *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh krayevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1972, 581 p. (In Russian).

5. Zhabko A.P., Kotina E.D., Chizhova O.N. *Differentsial'nyye uravneniya i ustoychivost'* [Differential Equation and Stability]. St. Petersburg, Lan' Publ., 2015, 320 p. (In Russian).

6. Podvalnyy S.L., Provotorov V.V. Opredeleniye startovoy funktsii v zadache nablyudeniya parabolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [Determining the starting function in the problem of observation of parabolic system with distributed parameters on the graph]. *Vestnik*

Voronezhskogo gosudarstvennogo technicheskogo universiteta – Proceedings of Voronezh State Technical University, 2014, vol. 10, no. 6, pp. 29-35. (In Russian).

7. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitskaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya – Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, no. 3, pp. 264-277.

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhabko Alexei Petrovich, St. Petersburg State University, St.-Petersburg, Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Management, e-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru

Provotorov Vyacheslav Vasil'evich , Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Partial Differential Equations and Probability Theory, e-mail: enprov@mail.ru

Provotorova Elena Nikolaevna, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematics and Physics and Mathematical Modeling, e-mail: enprov@mail.ru

For citation: Zhabko A.P., Provotorov V.V., Provotorova E.N. Ob ustoychivosti parabolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [On stability control of a parabolic systems with distributed parameters on the graph]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 368–376. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-368-376 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385

УДК 517

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ И ПРИЛОЖЕНИЯХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ НЕЛИНЕЙНОГО АНАЛИЗА

© З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский

Российский университет дружбы народов

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. М.-Маклая, 6

E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Аннотация. Исследованы классы функций, к которым применимы вариационные принципы нелинейного анализа. Показано, что вариационный принцип Бишопа–Фелпса применим к некоторым неограниченным снизу функциям. Исследованы свойства локально липшицевых многозначных отображений. Получены условия, при которых из псевдолипшицевости многозначного отображения в каждой точке графика вытекает глобальная липшицевость отображения.

Ключевые слова: вариационный принцип Бишопа–Фелпса; псевдолипшицево многозначное отображение

Введение

Прежде чем изложить постановку задачи и основные результаты, напомним некоторые определения. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Положим $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$. Будем полагать, что $-\infty < a < +\infty$ для любого $a \in \mathbb{R}$, и $a\cdot(+\infty) = +\infty$ для любого $a > 0$. Отметим, что в отличие от вещественной прямой $\mathbb{R}$ расширенная вещественная прямая $\overline{\mathbb{R}}$ упорядоченно полна, то есть для любого непустого множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ существуют $\inf A$ и $\sup A$. Для функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathrm{dom}U$ ее эффективное множество, то есть $\mathrm{dom}U = \{x \in X : U(x) < +\infty\}$. Функция U называется собственной, если $U(x) > -\infty$ для каждого $x \in X$, и $U(x) < +\infty$ для хотя бы одного $x \in X$. Функция U называется полунепрерывной снизу, если

$$\forall\, x_0 \in X, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \rho(x,x_0) < \delta \;\Rightarrow\; U(x) > U(x_0) - \varepsilon.$$

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2085.2017.1) и гранта РФФИ (проект № 16-01-00677). Результаты §1 получены вторым автором при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01168).

Пусть далее (X,ρ) – полное метрическое пространство, $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ – собственная, полунепрерывная снизу, ограниченная снизу заданным числом $\gamma \in \mathbb{R}$ функция. Если пространство (X,ρ) компактно, то функция U имеет точку минимума. В общем случае функция U минимума может не достигать. Следующее утверждение, называемое вариационным принципом Бишопа–Фелпса, гарантирует что существуют сколь угодно малые (в определенном смысле) возмущения функции U такие, что возмущенная функция имеет единственную точку минимума.

Теорема 1. (см., например, теорему 2.1 в [1]) Для произвольного $x_0 \in X$ такого, что $U(x_0) < +\infty$, для произвольного $c > 0$ существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0,\bar{x}) \le U(x_0), \quad U(x) + c\rho(\bar{x},x) > U(\bar{x}) \ \forall\, x \in X \setminus \{\bar{x}\}. \tag{1}$$

Сформулируем еще одно утверждение о минимумах полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций. Пусть наряду с функцией U задано число γ такое, что $U(x) \ge \gamma$ при любом x и число $k > 0$.

Говорят, что функция U удовлетворяет условию типа Каристи с константами k и γ, если

$$\forall\, x \in X : \quad U(x) > \gamma \quad \exists\, x' \in X : \quad U(x') + k\rho(x,x') \le U(x).$$

Теорема 2. (теорема 3 в [2]) Если U удовлетворяет условию типа Каристи с константами k и γ, то для любой точки $x_0 \in X$ такой, что $U(x_0) < +\infty$, существует точка $\bar{x} \in \mathcal{D}$ такая, что

$$\min_{x\in X} U(x) = U(\bar{x}), \quad U(\bar{x}) = \gamma, \quad \rho(\bar{x},x_0) \le \frac{U(x_0)-\gamma}{k}.$$

Условие типа Каристи было введено в [2]. В [3] было доказано, что теорема 2 эквивалентна вариационному принципу Бишопа–Фелпса и вариационному принципу Экланда (см., например, теорему 7.5.1 в [4]). Теорема 2 является удобным инструментом исследования различных уравнений, порожденных отображениями метрических пространств. Так, в [2] с ее помощью были получены утверждения о существовании неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств. Кроме того, теорема 2 может использоваться для доказательства утверждений о том, что если отображение удовлетворяет некоторым свойствам локально, то оно удовлетворяет этим же свойствам глобально. Пример такого утверждения и соответствующего применения теоремы 2 приведен в §2 настоящей работы. В §1 приведено одно обобщение теоремы 1. Простые примеры показывают, что утверждение вариационного принципа Бишопа–Фелпса справедливо и для некоторых неограниченных снизу функций. В §1 мы укажем класс функций, включающий в себя некоторые неограниченные снизу функции, для которых справедлив вариационный принцип Бишопа–Фелпса.

1. Обобщение вариационного принципа Бишопа–Фелпса

Прежде чем сформулировать основной результат параграфа, введем необходимые обозначения и опишем элементарные свойства рассматриваемых объектов.

Обозначим через $B(x,r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r \geq 0$ в пространстве (X,ρ), то есть

$$B(x,r) := \{u \in X : \rho(x,u) \leq r\}.$$

Для произвольной функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ и точки $x_0 \in X$ зададим функцию

$$\theta(U,x_0,\cdot) : (0,+\infty) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \theta(U,x_0,r) := \frac{\inf\limits_{x \in B(x_0,r)} U(x)}{r}, \quad r > 0.$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Если для некоторого* $x_0 \in X$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$ *существует предел* $\theta(U,x_0,r)$ *при* $r \to +\infty$, *то для любого* $z_0 \in X$ *в* $\overline{\mathbb{R}}$ *существует предел* $\theta(U,z_0,r)$ *при* $r \to +\infty$ *и имеет место равенство*

$$\lim_{r \to +\infty} \theta(U,x_0,r) = \lim_{r \to +\infty} \theta(U,z_0,r).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $x_0, z_0 \in X$, $r > \rho(x_0,z_0)$. Имеем $B(x_0, r - \rho(x_0,u_0)) \subset B(z_0,r)$. Следовательно,

$$\inf_{x \in B(x_0, r-\rho(x_0,u_0))} U(x) \geq \inf_{x \in B(z_0,r)} U(x),$$

и, значит, $\theta(U,x_0,r-\rho(x_0,u_0)) \geq \theta(U,z_0,r)$. Аналогично доказывается, что $\theta(U,z_0,r) \geq \theta(U,x_0,r+\rho(x_0,u_0))$. Таким образом

$$\theta(U,x_0,r-\rho(x_0,u_0)) \geq \theta(U,z_0,r) \geq \theta(U,x_0,r+\rho(x_0,u_0)).$$

Отсюда, поскольку существует предел $\theta(U,x_0,r)$ при $r \to +\infty$, то существует предел $\theta(U,z_0,r)$ при $r \to +\infty$ и искомое равенство выполняется. □

Для произвольной собственной функции $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, для произвольного $x_0 \in X$, для которых в $\overline{\mathbb{R}}$ существует предел $\theta(U,x_0,r)$ при $r \to +\infty$, положим

$$\mu(U) := \lim_{r \to +\infty} \left(\inf_{x \in B(x_0,r)} \frac{U(x)}{r} \right).$$

Это определение корректно, поскольку в силу предложения 1 предел в правой части последнего равенства не зависит от x_0.

Обозначим через $\mathcal{F}(X)$ множество всех собственных полунепрерывных снизу функций $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$ таких, что $\mu(U) = 0$. Очевидно, что любая ограниченная снизу функция U лежит в $\mathcal{F}(X)$, поскольку для нее $\mu(U) = 0$. Примером неограниченной снизу функции U, лежащей в классе $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, является функция $U(x) = -\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Для функции $U(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, имеет место равенство $\mu(U) = -1$ и, значит, $U \notin \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathcal{BP}(X)$ множество всех функций $U : X \to \overline{\mathbb{R}}$, для которых выполнено утверждение теоремы 1 (то есть множество функций U таких, что для произвольного $x_0 \in X$, для которого $U(x_0) < +\infty$, для произвольного $c > 0$ существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что имеют место соотношения (1)).

Теорема 3. *Имеет место равенство* $\mathcal{F}(X) = \mathcal{BP}(X)$.

Доказательство. Докажем сначала включение $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{BP}(X)$. Возьмем произвольную функцию $U \in \mathcal{F}(X)$, точку $x_0 \in X$ такую, что $U(x_0) < +\infty$, и число $c > 0$. Положим

$$\widehat{X} := \{x \in X : U(x) + c\rho(x_0, x) \le U(x_0)\}.$$

Покажем, что для сужения U на $\widehat{X}$ выполнены предположения теоремы 1.

Из полунепрерывности снизу функции U следует, что множество $\widehat{X}$ является замкнутым подмножеством пространства X, и, значит, полно. Кроме того, очевидно, сужение U на $\widehat{X}$ полунепрерывно снизу. Докажем, что сужение U на $\widehat{X}$ ограничено снизу.

Сначала докажем, что $\widehat{X}$ ограничено. Предположим противное, то есть существует последовательность $\{x_n\} \subset \widehat{X}$ такая, что $\rho(x_n, x_0) \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим $r_n := \rho(x_0, x_n)$. Тогда по определению $\widehat{X}$ имеем

$$\frac{U(x_n)}{r_n} \le \frac{U(x_0) - cr_n}{r_n} \le -\frac{c}{2}$$

для достаточно больших n. Это противоречит предположению $\mu(U) = 0$. Следовательно, множество $\widehat{X}$ ограничено. Отсюда следует, что U ограничена снизу, иначе при $r > 0$, при которых $\widehat{X} \subset B(x, r)$, имеет место равенство $\theta(U, x_0, r) = -\infty$, и, значит, $\mu(U) = -\infty \ne 0$.

Итак, для сужения U на $\widehat{X}$ выполнены предположения теоремы 1. Следовательно, существует точка $\bar{x} \in \widehat{X}$ такая, что

$$U(\bar{x}) + c\rho(x_0, \bar{x}) \le U(x_0), \quad U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x}) \;\; \forall\, x \in \widehat{X} \setminus \{\bar{x}\}.$$

Осталось доказать, что $U(x) + c\rho(\bar{x}, x) > U(\bar{x})$ для всех $x \in X \setminus \widehat{X}$. Для $x \in X \setminus \widehat{X}$ имеем

$$U(x) + c\rho(\bar{x}, x) \ge U(x) + c\rho(x_0, x) - c\rho(\bar{x}, x_0) > U(x_0) - c\rho(\bar{x}, x_0) \ge U(\bar{x}).$$

Следовательно, $U \in \mathcal{BP}(X)$.

Докажем теперь включение $\mathcal{F}(X) \supset \mathcal{BP}(X)$. Возьмем произвольную функцию $U \in \mathcal{BP}(X)$, точку $x_0 \in X$ такую, что $U(x_0) < +\infty$, и число $c > 0$. Поскольку $U \in \mathcal{BP}(X)$, то существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что имеет место соотношение (1). Следовательно, для произвольных $r > 0$, $x \in B(\bar{x}, r)$, $x \ne \bar{x}$ имеем

$$\frac{U(x)}{r} > \frac{U(\bar{x}) - c\rho(x, \bar{x})}{r} \ge \frac{U(\bar{x}) - cr}{r} = \frac{U(\bar{x})}{r} - c.$$

Следовательно,

$$\theta(U, \bar{x}, r) \ge \frac{U(\bar{x})}{r} - c \quad \forall\, r > 0,$$

и, значит, $\mu(U) \ge -c$. В силу произвольности выбора $c > 0$ имеем $\mu(U) \ge 0$, а так как $\mu(U)$ неположительно, то $\mu(U) = 0$. Следовательно, $U \in \mathcal{F}(X)$. $\square$

2. Локальная липшицевость и условие типа Каристи

Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – метрические пространства. Обозначим через $B_X(x,r)$ замкнутый шар в X с центром в точке $x\in X$ радиуса $r\geq 0$. Для непустого множества $M\subset X$ положим $B_X(M,r):=\bigcup\limits_{x\in M}B_X(x,r)$.

Пусть задано многозначное отображение $\Phi: X\rightrightarrows Y$, которое каждой точке $x\in X$ ставит в соответствие непустое замкнутое множество $\Phi(x)$. Обозначим график этого отображения через $\mathrm{gph}(\Phi)$, то есть

$$\mathrm{gph}(\Phi):=\{(x,y)\in X\times Y:\, y\in\Phi(x)\}.$$

Будем говорить, что отображение Φ является псевдолипшицевым с константой $\beta\geq 0$ в точке $(x_0,y_0)\in\mathrm{gph}(\Phi)$, если существует окрестность $U\subset X$ точки x_0 такая, что

$$B_Y(y_0,\beta\rho_X(x_0,x))\cap\Phi(x)\neq\emptyset\quad\forall\, x\in U.$$

Отображение Φ называется липшицевым с константой β (β-липшицевым), если

$$B_Y(y_0,\beta\rho_X(x_0,x))\cap\Phi(x)\neq\emptyset\quad\forall\,(x_0,y_0)\in\mathrm{gph}(\Phi),\quad\forall\, x\in X.$$

Многие свойства псевдолипшицевых отображений подробно исследованы (см., например, §1.2.2 в [5] и библиографию там же). В этом параграфе рассматривается следующий вопрос. Пусть дано $\beta\geq 0$. Предположим, что

(A) отображение Φ является псевдолипшицевым с константой β в каждой точке $(x,y)\in\mathrm{gph}(\Phi)$.

При каких условиях отображение Φ является β-липшицевым?

Отметим, что если условие (A) выполняется, то отображение Φ может не быть γ-липшицевым ни при каком $\gamma\geq 0$, даже если Φ однозначно. Приведем соответствующий пример.

П р и м е р 1. Пусть $X=Y=\mathbb{R}$, на X задана метрика $\rho_X(x,u)\equiv\frac{|x-u|}{1+|x-u|}$, на Y – метрика $\rho_Y(y,v)\equiv|y-v|$. Зададим отображение $\Phi: X\to Y$ по формуле $\Phi(x)=x$.

Отображение Φ не является γ-липшицевым ни при каком $\gamma\geq 0$, поскольку его область определения является ограниченным метрическим пространством, а его множество значений $\Phi(X)=Y$ – неограниченным. Однако для каждого $x\in X$ отображение Φ является псевдолипшицевым с константой 2^{-1} относительно множеств $U:=(x-2^{-1},x+2^{-1})$ и $V:=(\Phi(x)-2^{-1},\Phi(x)+2^{-1})$. Действительно, для произвольных $u,w\in U$ имеем $|u-w|<1$, и, значит,

$$\rho_X(u,w)=\frac{|u-w|}{1+|u-w|}\geq\frac{|u-w|}{2}=\frac{1}{2}\rho_Y(\Phi(u),\Phi(w)).$$

Сформулируем основной результат настоящего параграфа. Пусть $(L,\|\cdot\|)$ – нормированное пространство, $X\subset L$ – непустое множество, $\Phi: X\rightrightarrows Y$ – заданное многозначное отображение, $\beta \geq 0$ – заданное число. Пусть ρ_X – метрика на X, индуцированная нормой пространства L, то есть $\rho_X(x,x') \equiv \|x-x'\|$. Определим на $\mathrm{gph}(\Phi)$ метрику по формуле

$$\rho((x,y),(x',y')) = \max\{\rho_X(x,x'), \rho_Y(y,y')\} \quad \forall\,(x,y),\ (x',y') \in \mathrm{gph}(\Phi).$$

Теорема 4. *Предположим, что множество X выпукло, пространство $(\mathrm{gph}(\Phi),\rho)$ полно, и выполняется предположение* **(A)**. *Тогда многозначное отображение Φ является β-липшицевым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что $\beta \neq 0$.

Возьмем произвольные точки $(x_0,y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, $\bar{x} \in X$. Положим

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathrm{gph}(\Phi) :\ \rho_Y(y_0,y) \leq \beta\rho_X(x_0,x)\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{D} \neq \emptyset$, поскольку $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$, и $\mathcal{D}$ является замкнутым подмножеством метрического пространства $(\mathrm{gph}(\Phi),\rho)$. Следовательно, метрическое пространство $(\mathcal{D},\rho)$ полно.

Зададим на $\mathcal{D}$ метрику d по формуле

$$d((x,y),(x',y')) = \max\left\{\rho_X(x,x'), \frac{\rho_Y(y,y')}{\beta}\right\} \quad \forall\,(x,y),\ (x',y') \in \mathrm{gph}(\Phi).$$

Очевидно, что метрики d и ρ эквивалентны (то есть существуют $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 d \leq \rho \leq c_2 d$). Поэтому из полноты пространства $(\mathcal{D},\rho)$ следует, что полно и метрическое пространство $(\mathcal{D},d)$.

Рассмотрим функционал

$$U : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad U(x,y) := \rho_X(x,\bar{x}) \quad \forall\,(x,y) \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, что U непрерывен и $U(x,y) \geq 0$ для всех $(x,y) \in \mathcal{D}$.

Покажем, что для U выполнено условие типа Каристи при $k=1$ и $\gamma = 0$. Возьмем произвольную точку $(x,y) \in \mathcal{D}$ такую, что $U(x,y) > \gamma$. Для $t \in [0,1]$ положим $x(t) := x + t(\bar{x} - x)$. Поскольку X выпукло, то $x(t) \in X$ при каждом $t \in [0,1]$. Из предположения **(A)** следует, что существует $t > 0$ такое, что

$$B_Y(y, \beta\rho_X(x(t),x)) \cap \Phi(x(t)) \neq \emptyset.$$

Положим $x' := x(t)$ и возьмем произвольную точку $y' \in B_Y(y,\beta\rho_X(x',x)) \cap \Phi(x')$. По построению имеем

$$(x',y') \in \mathcal{D}, \quad (x',y') \neq (x,y),$$
$$\rho_X(x,x') = t\|x - x'\|, \quad \rho_Y(y,y') \leq \beta t\|x - x'\|$$
$$U(x',y') = (1-t)\|x - \bar{x}\|.$$

Следовательно,

$$U(x',y') + d((x',y'),(x,y)) = (1-t)\|x - x'\| + t\|x - x'\| = \|x - x'\| = U(x,y).$$

Таким образом, доказано, что для функции U выполнено условие типа Каристи при $k = 1$ и $\gamma = 0$.

Из теоремы 2 следует, что существует точка $(x, \bar{y}) \in \mathcal{D}$, в которой $U(x, \bar{y}) = 0$. Поскольку $U(x, y) = \rho_X(x, \bar{x})$, то $x = \bar{x}$, и, значит, $\bar{x} \in \mathcal{D}$. Из определения множества $\mathcal{D}$ следует, что $\bar{y} \in B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0, \bar{x})) \cap \Phi(\bar{x})$. Значит,

$$B_Y(y_0, \beta\rho_X(x_0, \bar{x})) \cap \Phi(\bar{x}) \neq \emptyset.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора точек $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}(\Phi)$, $\bar{x} \in X$ получаем, что Φ является β-липшицевым.

Рассмотрим теперь второй случай: предположение **(A)** выполняется при $\beta = 0$. Тогда предположение **(A)** выполняется при любом $\beta > 0$. Следовательно, Φ является β-липшицевым при любом $\beta > 0$. Значит, Φ является 0-липшицевым. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Granas A., Dugundji J.* Fixed Point Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 2003. 690 p.
2. *Арутюнов А.В.* Условие Каристи и существование минимума ограниченной снизу функции в метрическом пространстве. Приложения к теории точек совпадения // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 2015. Т. 291. С. 30-44.
3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Вариационные принципы в нелинейном анализе и их обобщение // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 6. С. 948-954.
4. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
5. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generallized Differentiation. Vol. I. Basic Theory. N. Y.: Springer, 2006. 579 p.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жуковская Зухра Тагировна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Жуковский Сергей Евгеньевич, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Для цитирования: *Жуковская З.Т., Жуковский С.Е.* Об обобщениях и приложениях вариационных принципов нелинейного анализа // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 377–385. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385

ON GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS OF VARIATIONAL PRINCIPLES OF NONLINEAR ANALYSIS

Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy

RUDN University
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation,
E-mail: zyxra2@yandex.ru, s-e-zhuk@yandex.ru

Abstract. There are considered some classes of functions to which variational principles of nonlinear are applicable. In particular, it is shown that the Bishop-Phelps variational principle is applicable to some unbounded below functions. The properties of locally Lipschitzian mappings are investigated. Conditions for a mapping that is pseudo-Lipschitzian at every point of its graph to be Lipschitzian are derived.
Keywords: Bishop–Phelps variational principle; pseudo-Lipshitzian mapping

REFERENCES

1. Granas A., Dugundji J. *Fixed Point Theory.* New York, Springer-Verlag, 2003, 690 p.

2. Arutyunov A.V. Usloviye Karisti i sushchestvovaniye minimuma ogranichennoy snizu funktsii v metricheskom prostranstve. Prilozheniya k teorii tochek sovpadeniya [Caristi's condition and existence of a minimum of a lower bounded function in a metric space. Applications to the theory of coincidence points]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2015, vol. 291, pp. 30-44. (In Russian).

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Variatsionnyye printsipy v nelineynom analize i ikh obobshcheniye [Variational Principles in Nonlinear Analysis and Their Generalization]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 6, pp. 948-954. (In Russian).

4. Clarke F.H. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* New York, J. Wiley & Sons, 1983, 280 p.

5. Mordukhovich B.S. *Variational Analysis and Generallized Differentiation. Vol. I. Basic Theory.* New York, Springer, 2006, 579 p.

Received 10 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

The work was supported by the grant of the President of Russian Federation (Project No. MK-2085.2017.1). The results of Section 1 are due to the first author who was supported by the Russian Science Foundation (Project No. 17-11-01168).

Zhukovskaya Zukhra Tagirovna, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Assistant of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: zyxra2@yandex.ru

Zhukovskiy Sergey Evgenyevich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Nonlinear Analysis and Optimization Department, e-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. Ob obobscheniyah i prilozheniyah variatsionnih printsipov nelineynogo analiza [On Generalizations and Applications of Variational Principles of Nonlinear Analysis]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 377–385. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-377-385 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-386-394
УДК 517.962.24

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© **Т.В. Жуковская**[1], **И. А. Забродский**[2], **М. В. Борзова**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: ilyatmb@yandex.ru, bmv_ 1603@mail.ru

Аннотация. Рассмотрено разностное уравнение неявного вида в произвольном частично упорядоченном пространстве. Определено понятие устойчивости положения равновесия. Получены достаточные условия устойчивости. Исследование основано на результатах об упорядоченно накрывающих отображениях.
Ключевые слова: разностное уравнение неявного вида; устойчивость положения равновесия; частично упорядоченное пространство; упорядоченно накрывающее отображение

1. Введение

Разностные уравнения являются естественным описанием эволюции наблюдаемых явлений, поскольку большая часть измерений времени дискретна. Разностные уравнения также возникают при аппроксимации дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Одной из основных задач теории разностных уравнений является определение условий устойчивости положения равновесия. Эта проблема подробно исследована для автономных разностных уравнений явного вида

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ n-мерных вещественных векторов (см., например книгу [1], статью [2] и приведенную в них библиографию). В настоящей работе изучается разностное

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-01-00553, 17-41-680975), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 3.8563.2017/7.8.

уравнение неявного вида

$$\Psi(x_{n-1}, x_n) = \tilde{y}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

причем отображение Ψ действует в произвольных частично упорядоченных пространствах. Исследования используют результаты об упорядоченно накрывающих отображениях, полученные в работах [3–6]. Отметим, что разностное уравнение вида (1.1) в метрических пространствах исследованы в работах [7–10]. Применялись методы, основанные на теории накрывающих отображений метрических пространств (см. [11–14]).

2. Отображения частично упорядоченных пространств

Приведем вначале некоторые известные сведения об отображениях, действующих в частично упорядоченных пространствах. Пусть $X \doteq (X, \leq)$, $Y \doteq (Y, \leq)-$ частично упорядоченные пространства.

Элемент $m \in X$ называется *нижней границей множества* $U \subset X$, если $m \leq x$ при всех $x \in U$. Нижняя граница m_0 множества $V \subset X$ называется *точной* и обозначается $m_0 = \inf U$, если для любой нижней границы m этого множества выполнено $m_0 \geq m$. Частично упорядоченное пространство X называют *секвенциально полным*, если любая невозрастающая последовательность из этого пространства имеет точную нижнюю границу.

Пусть задано отображение $F : X \to Y$. Это отображение называют *антитонным на множестве* $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ из неравенства $x \leq u$ следует неравенство $F(x) \geq F(u)$.

Будем обозначать: $O_X(u) \doteq \{x \in X : \ x \leq u\}$, $[u, v]_X \doteq \{x \in X : \ u \leq x \leq v\}$.

Следующее определение предложено в [3, 4].

Определение 2.1. Отображение $F : X \to Y$ называется упорядоченно накрывающим множество $V \subset Y$, если для любого $u \in X$ выполнено включение

$$O_Y(F(u)) \cap V \subset F(O_X(u)). \tag{2.1}$$

Вложение (2.1) означает, что для любого $u \in X$ и любого $y \in V$ из неравенства $y \leq F(u)$ следует, что найдется $x \in X$ такой, что $F(x) = y$ и $x \leq u$.

Теперь сформулируем утверждение из [6] об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающего отображения. Полагаем заданными отображение $\Psi : X^2 \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$.

Теорема 2.1. *Пусть частично упорядоченное пространство X является секвенциально полным и выполнены следующие условия:*
(**a**) *для любого $u \in X$ отображение $\Psi(u, \cdot) : X \to Y$ упорядоченно накрывает множество $V \doteq \{\tilde{y}\}$;*
(**b**) *для любого $v \in X$ отображение $\Psi(\cdot, v) : X \to Y$ является антитонным на множестве $O_X(v)$;*
(**c**) *отображение Ψ является замкнутым, то есть для любых невозрастающих последовательностей $\{u_n\} \subset X$ и $\{v_n\} \subset X$, если при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $\Psi(u_n, v_n) = \tilde{y}$, то $\Psi\big(\inf\{u_i\}, \inf\{v_i\}\big) = \tilde{y}$.*

Тогда, если для некоторого элемента $x_0 \in X$ *выполнено* $\Psi(x_0, x_0) \geq \tilde{y}$, *то существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$ *такая, что*

$$\Psi(x_n, x_n) \geq \tilde{y}, \quad \Psi(x_{n-1}, x_n) = \tilde{y}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

и точная нижняя граница этой последовательности $\xi = \inf\{x_n\} \in O_X(x_0)$ *является решением уравнения*

$$\Psi(x, x) = \tilde{y}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку отображение $\Psi(x_0, \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, из заданного неравенства $\Psi(x_0, x_0) \geq \tilde{y}$ следует существование элемента $x_1 \in X$ такого, что

$$x_1 \leq x_0, \quad \Psi(x_0, x_1) = \tilde{y}.$$

Так как отображение $\Psi(\cdot, x_1)$ является антитонным, из неравенства $x_1 \leq x_0$ получаем $\Psi(x_1, x_1) \geq \tilde{y}$. Далее, так как отображение $\Psi(x_1, \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, существует элемент x_2 такой, что

$$x_2 \leq x_1, \quad \Psi(x_1, x_2) = \tilde{y}.$$

А в силу антитонности отображения $\Psi(\cdot, x_2)$ имеем

$$\Psi(x_2, x_2) \geq \tilde{y}.$$

Рассуждая аналогично, по индукции будет получена невозрастающая последовательность $\{x_n\} \subset X$, для которой выполнены соотношения (2.2) Из секвенциальной полноты пространства X следует существование точной нижней границы этой последовательности $\xi = \inf\{x_n\}$. Тогда, в силу предположения замкнутости отображения Ψ, получаем равенство $\Psi(\xi, \xi) = \tilde{y}$. □

3. Неявное разностное уравнение первого порядка

Применим теорему 2.1 к исследованию разностного уравнения (1.1). *Решением уравнения* (1.1) назовем всякую последовательность $\{x_n\} \subset X$, члены которой удовлетворяют ему при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$. Решение уравнения (1.1), являющееся постоянной последовательностью, называется *положением равновесия*. Отождествим постоянную последовательность $x_n = \xi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, с ее элементом ξ. Таким образом, положение равновесия удовлетворяет уравнению (2.3), и для его нахождения применима теорема 2.1. Этим не исчерпываются возможности доказанного утверждения в исследовании разностного уравнения (1.1). Построенная при доказательстве теоремы 2.1 итерационная последовательность есть решение разностного уравнения (1.1). Таким образом, получаем следующий результат.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда, если начальное условие* $x_0 \in X$ *таково, что* $\Psi(x_0, x_0) \geq \tilde{y}$, *то существует решение разностного уравнения* (1.1), *которое, кроме того, является невозрастающей в пространстве* X *последовательностью, а точная нижняя граница этой последовательности есть положение равновесия уравнения* (1.1).

О п р е д е л е н и е 3.1. Положение равновесия ξ разностного уравнения (1.1) назовем *устойчивым*, если для любого начального значения $u_0 \in X$, обеспечивающего неравенство $\Psi(u_0, u_0) \geq \tilde{y}$, существует решение $\{x_n\}$ разностного уравнения (1.1), удовлетворяющее условию $x_0 = u_0$, являющееся невозрастающей последовательностью, точная нижняя граница которой совпадает с положением равновесия, то есть $\inf x_n = \xi$.

Следствие 3.2. *Пусть для отображения* $\Psi : X^2 \to Y$ *выполнены условия* (**a**), (**b**) *и* (**c**) *теоремы 2.1. Тогда, если положение равновесия* ξ *разностного уравнения* (1.1) *единственно, то оно является устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, для любого элемента $u_0 \in X$, обеспечивающего неравенство $\Psi(u_0, u_0) \geq \tilde{y}$, согласно теореме 2.1 найдется решение $\{x_n\}$, $x_0 = u_0$, разностного уравнения (1.1), являющееся невозрастающей последовательностью, точная нижняя граница которой совпадает с положением равновесия. Так как положение равновесия ξ единственно, то $\inf x_n = \xi$.

4. Неявное разностное уравнение m-го порядка

Теперь рассмотрим разностные уравнения второго и более высоких порядков.

Пусть задано натуральное $m \geq 2$ — порядок разностного уравнения. По-прежнему, обозначаем X, Y — заданные частично упорядоченные пространства, причем предполагаем, что пространство X секвенциально полное. На пространстве X^m определим стандартный порядок: для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X^m$, $u = (u_1, \ldots, u_m) \in X^m$ полагаем, что выполнено неравенство $x \leq u$, если $x_i \leq u_i$ при всех $i = \overline{1, m}$. Также полагаем, что заданы отображение $\Psi : X^{m+1} \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$.

Здесь рассматривается разностное уравнение

$$\Psi(x_{n-m}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \tilde{y}, \quad n = m, m+1, \ldots . \tag{4.1}$$

Определения решения уравнения (1.1) без каких-либо изменений переносятся на уравнение (4.1). А именно, *решением уравнения* (4.1) назовем всякую последовательность $\{x_n\} \subset X$, члены которой удовлетворяют ему при любом n. Решение уравнения (4.1), являющееся постоянной последовательностью, назовем *положением равновесия* и отождествим постоянную последовательность с ее элементом. Таким образом, положение равновесия удовлетворяет уравнению

$$\Psi(x, x, \ldots, x) = \tilde{y}. \tag{4.2}$$

Для исследования проблемы существования решений неявного разностного уравнения m-го порядка докажем следующее утверждение, являющееся распространением теоремы 2.1 на случай m антитонных возмущений упорядоченно накрывающего отображения.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

($\mathbf{a^m}$) *для любого* $u = (u_1, \ldots, u_m) \in X^m$ *такого, что* $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_m$, *отображение* $\Psi(u, \cdot) : X \to Y$ *упорядоченно накрывает множество* $V \doteq \{\tilde{y}\}$;

($\mathbf{b^m}$) *для любого* $v \in X$ *отображение* $\Psi(\cdot, v) : X^m \to Y$ *является антитонным на множестве* $O_X(v)$ *;*

($\mathbf{c^m}$) *отображение* Ψ *является замкнутым, то есть для любых невозрастающих последовательностей* $\{u_n^1\} \subset X$, $\ldots$, $\{u_n^{m+1}\} \subset X$, *если при любом* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *имеет место* $\Psi(u_n^1, \ldots, u_n^{m+1}) = \tilde{y}$, *то* $\Psi\big(\inf\{u_n^1\}, \ldots, \inf\{u_n^{m+1}\}\big) = \tilde{y}$.

Тогда, если для некоторого вектора $(x_0, \ldots, x_{m-1}) \in X^m$ *выполнены неравенства*

$$x_0 \geq x_1 \ldots \geq x_{m-1}, \quad \Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_{m-1}) \geq \tilde{y}, \tag{4.3}$$

то существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ *такая, что*

$$\Psi(x_{n-m+1}, \ldots, x_n, x_n) \geq \tilde{y}, \quad \Psi(x_{n-m}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \tilde{y}, \quad n = m, m+1, \ldots, \tag{4.4}$$

и точная нижняя граница этой последовательности $\xi = \inf\{x_n\} \in O_X(x_0)$ *является решением уравнения* (4.2).

Доказательство. Поскольку отображение $\Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, из неравенств (4.3) следует существование элемента $x_m \in X$ такого, что

$$x_m \leq x_{m-1}, \quad \Psi(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) = \tilde{y}.$$

Вследствие антитонности отображения $\Psi(\cdot, x_m)$ получаем $\Psi(x_1, x_2 \ldots, x_m, x_m) \geq \tilde{y}$. Далее, так как отображение $\Psi((x_1, x_2 \ldots, x_m, \cdot)$ упорядоченно накрывает множество $\{\tilde{y}\}$, существует элемент x_{m+1} такой, что

$$x_{m+1} \leq x_m, \quad \Psi(x_2, x_1) = \tilde{y}.$$

А в силу антитонности отображения $\Psi(\cdot, x_{m+1})$ имеем

$$\Psi(x_2, x_3 \ldots, x_{m+1}, x_{m+1}) \geq \tilde{y}.$$

Рассуждая аналогично, по индукции будет получена невозрастающая последовательность $\{x_n\} \subset X$, для которой выполнены соотношения (4.4) Из секвенциальной полноты пространства X следует существование точной нижней границы этой последовательности $\xi = \inf\{x_n\}$. Тогда, в силу предположения замкнутости отображения Ψ, получаем равенство $\Psi(\xi, \ldots, \xi) = \tilde{y}$. □

Следствие 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда, если начальное условие* $(x_0, \ldots, x_m) \in X^m$ *таково, что выполнены неравенства* (4.3), *то существует решение разностного уравнения* (4.1), *которое, кроме того, является невозрастающей в пространстве* X *последовательностью, а точная нижняя граница этой последовательности есть положение равновесия уравнения* (4.1).

О п р е д е л е н и е 4.1. Положение равновесия ξ разностного уравнения (4.1) назовем *устойчивым*, если для любого начального значения $(x_0, \ldots, x_{m-1}) \in X^m$, такого, что выполнены неравенства (4.3), найдется решение $\{x_n\} \subset X$ разностного уравнения (4.1), являющееся невозрастающей последовательностью, точная нижняя граница которой совпадает с положением равновесия, то есть $\inf x_n = \xi$.

Следствие 4.2. *Пусть для отображения* $\Psi : X^{m+1} \to Y$ *выполнены условия* $(\mathbf{a^m})$, $(\mathbf{b^m})$ *и* $(\mathbf{c^m})$ *теоремы 4.1. Тогда, если положение равновесия* ξ *разностного уравнения* (4.1) *единственно, то оно является устойчивым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения аналогично доказательству соответствующего результата для уравнения первого порядка — следствия 3.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Elaydi S.* An untroduction to difference equations. N. Y.: Springer-Verlag, 2005. 540 p.

2. *Braverman E., Zhukovskiy S.E.* On stability and oscillation of equations with a distributed delay which can be reduced to difference equations // Electronic Journal of Differential Equations. 2008. № 112. P. 1-16.

3. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. Vol. 179. № 1. P. 13-33.

4. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. Вып. 5. С. 475-478.

5. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. Вып. 1. С. 96-127.

6. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. Вып. 12. С. 1610-1627.

7. *Arutyunov A., Zhukovskiy S., Pereira F.* Solvability of implicit difference equations // Lecture Notes in Electrical Engineering. 2015. Vol. 321. P. 23-28.

8. *Жуковский С.Е.* Приложение накрывающих отображений к разностным уравнениям // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16. Вып. 4. С. 1085-1086.

9. *Жуковский Е.С., Забродский И.А., Шиндяпин А.И.* О периодических решениях неявных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1142-1146.

10. *Забродский И.А., Кузякина А.С.* Об экспоненциальной устойчивости неявных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1156-1160.

11. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. Вып. 2. С. 151-155.

12. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. Вып. 5. С. 613-634.

13. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. Vol. 75. № 3. P. 1026-1044.

14. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. Вып. 11. С. 1523-1537.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Забродский Илья Алексеевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Борзова Марина Васильевна, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, инженер научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», e-mail: bmv_ 1603@mail.ru

Для цитирования: *Жуковская Т.В., Забродский И.А., Борзова М.В.* Об устойчивости разностных уравнений в частично упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 386–394. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-386-394

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-386-394

ON STABILITY OF DIFFERENCE EQUATIONS IN PARTIALLY ORDERED SPACES

T. V. Zhukovskaya[1)], **I. A. Zabrodskiy**[2)], **M. V. Borzova**[2)]

[1)] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
[2)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: ilyatmb@yandex.ru, bmv_ 1603@mail.ru

Abstract. We consider implicit difference equations in partially ordered spaces. We define the notion of a stable equilibrium point. The conditions of the stability is obtained. The study is based on the theory of partially ordered mappings.
Keywords: implicit difference equation; stable equilibrium point; partially ordered space; partially ordered mapping

REFERENCES

1. Elaydi S. *An Untroduction to Difference Equations.* New York, Springer-Verlag, 2005, 540 p.

2. Braverman E., Zhukovskiy S.E. On stability and oscillation of equations with a distributed delay which can be reduced to difference equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008, no. 112, pp. 1-16.

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2015, vol. 179, no. 1, pp. 13-33.

4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On coincidence points in partially ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 5, pp. 475-478. (In Russian).

5. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96-127. (In Russian).

6. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610-1627. (In Russian).

7. Arutyunov A., Zhukovskiy S., Pereira F. Solvability of implicit difference equations. *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2015, vol. 321, pp. 23-28.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-01-00553, 17-41-680975), by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 3.8563.2017/7.8.

8. Zhukovskiy S.E. Prilozheniye nakryvayushchikh otobrazheniy k raznostnym uravneniyam [Application of covering mappings to difference equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2011, vol. 16, no. 4, pp. 1085-1086. (In Russian).

9. Zhukovskiy E.S., Zabrodskiy I.A., Shindyapin A.I. O periodicheskikh resheniyakh neyavnykh raznostnykh uravneniy [Periodic solutions of implicit differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1142-1146. (In Russian).

10. Zabrodskiy I.A., Kuzyakina A.S. Ob eksponentsial'noy ustoychivosti neyavnykh raznostnykh uravneniy [Exponential stability of implicit difference equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1156-1160. (In Russian).

11. Arutyunov A.V. Nakryvayushchiye otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnyye tochki [Covering mappings in metric spaces and fixed points]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2007, vol. 416, no. 2, pp. 151-155. (In Russian).

12. Avakov E.R., Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S. Nakryvayushchiye otobrazheniya i ikh prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam, ne razreshennym otnositel'no proizvodnoy [Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 5, pp. 613-634. (In Russian).

13. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2012, vol. 75, no. 3, pp. 1026-1044.

14. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nykh uravneniy, ne razreshennykh otnositel'no proizvodnoy [On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2011, vol. 47, no. 11, pp. 1523-1537. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Zhukovskaya Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Further Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zabrodskiy Ilya Alekseevich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: ilyatmb@yandex.ru

Borzova Marina Vasilevna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Engineer of the scientific and educational center «Fundamental mathematical research», e-mail: bmv_1603@mail.ru

For citation: Zhukovskaya T.V., Zabrodskiy I.A., Borzova M.V. Ob ustoychivosti raznostnykh uravneniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On stability of difference equations in partially ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 386–394. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-386-394 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

УДК 519.254.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ ГАММЕРШТЕЙНА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ ДРОБНОГО БЕЛОГО ШУМА

© **Д. В. Иванов**[1], **А. В. Иванов**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Самарский государственный экономический университет»
443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Советской Армии, 141
E-mail: dvi85@list.ru

[2] ФГБОУ ВО «Самарский государственный университет путей сообщения»
443066, Российская Федерация, г. Самара, ул. Свободы, 2 В
E-mail: ivanov2016@list.ru

Аннотация. Предложен алгоритм идентификации нелинейных динамических систем дробного порядка класса Гаммерштейна. Разработанный алгоритм позволяет получать сильно состоятельные оценки параметров при наличии помехи наблюдения в виде дробного белого шума. Результаты численных экспериментов показали высокую эффективность предложенного алгоритма идентификации по сравнению с методом наименьших квадратов (МНК).

Ключевые слова: разность дробного порядка; дробный белый шум; метод наименьших квадратов (МНК); система класса Гаммерштейна; выходная ошибка

Введение

Дифференциальные и разностные уравнения с производными и разностями дробного порядка находят широкое применение в самых различных физических и технических приложениях: моделирование свойств полимеров [1, 2], диэлектрических материалов [3], электрохимических процессов [4]. Раздел теории управления, связанный с синтезом регуляторов дробного порядка, активно развивается. В связи с этим развитие методов построения математических моделей на основе уравнений с производными и разностями дробного порядка по экспериментальным данным является актуальной задачей.

В настоящее время активно развиваются методы идентификации динамических систем, описываемых уравнениями с производными и разностями дробного порядка [5, 6], а также их рекуррентные модификации [7]. В статье [8] рассмотрена идентификация динамических систем класса Гаммерштейна дробного порядка с известной нелинейной частью общего вида.

В данной статье рассматривается идентификация динамической системы класса Гаммерштейна дробного порядка с неизвестными коэффициентами полиномиальной нелинейности при наличии дробной белошумной помехи.

1. Постановка задачи

Нелинейная динамическая система класса Гаммерштейна описывается стохастическими уравнениями с разностями дробного порядка:

$$\sum_{m=1}^{r_1} b^{(m)} \Delta^{\alpha^{(m)}} z_{i-f_1^{(m)}} = \sum_{m=1}^{r} a^{(m)} \sum_{j=1}^{k} c^{(j)} \Delta^{\beta^{(j)}} x^j_{i-f^{(m)}} + \varsigma_i, y_i = z_i + \Delta^{\gamma}\xi_i, \qquad (1)$$

где $0 < \alpha^{(1)} \ldots < \alpha^{(r_1)}$, $0 < \beta^{(1)} \ldots < \beta^{(r)}$,

$\Delta^{\alpha^{(m)}} z_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha^{(m)} \\ j \end{pmatrix} z_{i-j}, \Delta^{\beta^{(m)}} x_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta^{(m)} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}$,

$\begin{pmatrix} \alpha^{(m)} \\ j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha^{(m)}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha^{(m)}-j+1)}, \begin{pmatrix} \beta^{(m)} \\ j \end{pmatrix} = \frac{(-1)^j \Gamma(\beta^{(m)}+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta^{(m)}-j+1)}$,

z_i, y_i – ненаблюдаемая и наблюдаемая выходные переменные; x_i – наблюдаемая переменная; $\Delta^{\gamma}\xi_i$ – помеха наблюдения в выходном сигнале; ς_i – ошибка в уравнении; $f^{(m)}, f_1^{(m)}$ – неотрицательные значения запаздываний;

Пусть выполнены следующие предположения:

1. Параметры $b^{(m)}$, $a^{(m)}$, $c^{(j)}$ асимптотически устойчивой системы (1) принадлежат компактному множеству.

2. Вектор входных переменных удовлетворяет условию постоянного возбуждения.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависят от $\{\xi_i\}$, $\{\varsigma_i\}$;

Требуется определять оценки неизвестных коэффициентов $b^{(m)}$, $a^{(m)}$, $c^{(j)}$ динамической системы описываемой уравнением (1) по наблюдаемым последовательностям y_i, x_i при известных порядках k, r, r_1, $\alpha_m, \beta_m, \gamma, f_1^{(m)}, f^{(m)}$.

2. Алгоритм идентификации

В работе предложено обобщение двухэтапного алгоритма [9] на случай динамических систем класса Гаммерштейна с дробными разностями при наличии дробной белошумной помехи в выходном сигнале:

1. На первом этапе определяются оценки параметров расширенной модели $\hat{\theta}$ (здесь и далее символ ˆ обозначает оценку соответствующей величины),

где $\theta = \left(\theta_b \mid \theta_{ac} \right)^T =$

$= \left(b^{(1)} \ldots b^{(r_1)} \mid a^{(1)}c^{(1)} \ldots a^{(r)}c^{(1)}, a^{(1)}c^{(2)} \ldots a^{(r)}c^{(2)}, \ldots, a^{(1)}c^{(k)} \ldots a^{(r)}c^{(k)} \right)^T$,

2. На втором этапе с помощью сингулярного разложения (SVD – singular value decomposition) осуществляется разделение параметров $a^{(m)}$, $c^{(j)}$.

Введем обозначения:

$$\varphi_i = \left(\varphi_b^{(i)} \mid \varphi_{ac}^{(i)} \right)^T =$$

$$= \left(\Delta^{\alpha^{(1)}} y_{i-f_1^{(1)}} \dots \Delta^{\alpha^{(r)}} y_{i-f_1^{(r)}} \mid \Delta^{\beta^{(1)}} x_{i-f^{(1)}} \dots \Delta^{\beta^{(r_1)}} x_{i-f^{(r_1)}}, \dots, \Delta^{\beta^{(1)}} x^k_{i-f^{(1)}} \dots \Delta^{\beta^{(r_1)}} x^k_{i-f^{(r_1)}} \right)^T.$$

При неограничительных условиях на сигнал и независимых помехах можно показать, что оценки, полученные по приведенному ниже критерию, являются сильно состоятельными [8]:

$$\min_{\theta \in \tilde{\mathrm{B}}} \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\varphi_b^{(i)} \theta_b^T - \varphi_{ac}^{(i)} \theta_{ac}^T \right)^2}{\sigma_\varsigma^2 + \theta_b^T H_{\alpha+\gamma} \theta_b^T} \tag{2}$$

где $\sigma_\varsigma^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \varsigma_i^2$, $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_\xi^{(i)} \left(\varphi_\xi^{(i)} \right)^T \right] = H_{\alpha+\gamma}$,

$\varphi_\xi^{(i)} = \left(\Delta^{\alpha^{(1)}+\gamma} \xi_{i-f_1^{(1)}}, \dots, \Delta^{\alpha^{(r_1)}+\gamma} \xi_{i-f_1^{(r_1)}} \right)^T.$

Теорема 1. *Пусть некоторый случайный процесс* $\{y_i, i = ...-1, 0, 1, ...\}$ *описывается уравнением* (1) *с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-3. Тогда оценки* $\hat{\theta}$, *определяемые выражением (2) с вероятностью 1 при* $N \to \infty$, *существуют, единственные и являются сильно состоятельными оценками.*

Полученные оценки параметров $\hat{\theta}_{ac}$ запишем в виде матрицы. Для однозначного определения коэффициентов будем полагать, что $a^{(1)} = 1$:

$$\hat{\Theta}_{ac} = \begin{pmatrix} \hat{c}^{(1)} & \dots & c^{(\hat{k})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}^{(1)} \hat{a}^{(r)} & \dots & \hat{c}^{(k)} \hat{a}^{(r)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Сингулярное разложение матрицы $\hat{\Theta}_{ac}$ имеет вид [10]:

$$\hat{\Theta}_{ac} = U \Sigma V^T, \tag{4}$$

где U, V – ортогональные матрицы порядков r и k, соответственно;

Σ – матрица размера $r \times k$ с неотрицательными элементами, у которой элементы, лежащие на главной диагонали, — это сингулярные числа λ_i (а все элементы, не лежащие на главной диагонали, являются нулевыми).

Оценки параметров могут быть найдены по формулам:

$$\hat{a} = U_{:,1} / U_{1,1}, \hat{c} = \lambda_1 V_{1,:}^T / U_{1,1}, \tag{5}$$

где λ_1 – наибольшее сингулярное число матрицы Σ;

$U_{1,1}$ обозначает первый ненулевой элемент $U_{:,1}$, где $U_{:,1}$ и $V_{1,:}$ обозначают первую строку и столбец соответствующих матриц.

Заключение

В статье предложено обобщение алгоритма идентификации нелинейной динамической системы класса Гаммерштейна [8] на случай дробной белошумной помехи. Тестовые примеры показали, что предложенный алгоритм позволяет получать более точные оценки по сравнению с методом МНК. Дальнейшим направлением исследований является разработка структурно-параметрического метода идентификации [11], позволяющего определять порядки дробных разностей α_m, β_m, γ и обобщение результатов на случай систем, описываемых уравнениями с разностями Гэгенбауэра [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stiassnie M.* On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // Applied Mathematical Modelling. 1979. Vol. 3. № 4. P. 300-302.

2. *Bagley R.L.* Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. 1983. Vol. 21. № 5. P. 741-748.

3. *Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U.* Application of fractional calculus to modeling of relaxation phenomena of organic dielectric materials // Proceedings International Conference Solid Dielectrics (ICSD'04). Toulouse, 2004. Vol. 2. P. 530-533.

4. *Vinagre B.M., Feliu V.* Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures // Proceeding 41-st IEEE Conference Decision Control. Las Vegas, 2002. P. 214-239.

5. *Иванов Д.В.* Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2014. Вып. 2 (27). С. 30-38.

6. *Иванов Д.В., Ширинов И.Р.* Идентификация многомерных по входу линейных динамических систем с разностями дробного порядка при наличии помех наблюдений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1169-1173.

7. *Иванов Д.В., Салугин И.Е.* Рекуррентная идентификация линейных динамических систем с разностями дробного порядка с помехой в выходном сигнале // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1167-1169.

8. *Ivanov D.V.* Identification discrete fractional order Hammerstein systems // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015. Omsk, 2015. P. 7147074. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147074.

9. *Baia E.W.* An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein–Wiener nonlinear systems // Automatica. 1998. Vol. 34. № 3. P. 333-338.

10. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.

11. *Engelgardt V.V., Ivanov D.V., Katsyuba O.A.* Structural and parametric identification of linear dynamic systems of fractional order with noise on input and output // 2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017. Astana, 2017. P. 7998556. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998556.

12. *Ivanov D.V., Engelgardt V.V., Sandler I.L.* Genetic Algorithm of Structural and Parametric Identification of Gegenbauer Autoregressive with Noise on Output // Procedia Computer Science. 2018. Vol. 131. P. 619-625.

Поступила в редакцию 22 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 20 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Иванов Дмитрий Владимирович, Самарский государственный экономический университет, г. Самара, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, e-mail: dvi85@list.ru

Иванов Александр Владимирович, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, Российская Федерация, аспирант, кафедра мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, e-mail: aivanov2016@list.ru

Для цитирования: *Иванов Д.В., Иванов А.В.* Идентификацикация систем Гаммерштейна дробного порядка с полиномиальной нелинейностью при наличии дробного белого шума // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 395–401. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401

IDENTIFICATION OF HAMMERSTEIN SYSTEMS OF FRACTIONAL ORDER WITH A POLYNOMIAL NONLINEARITY IN THE PRESENCE OF A FRACTIONAL WHITE NOISE

D. V. Ivanov[1), A. V. Ivanov[2)

[1) Samara State University of Economics
141 Sovetskoi Armii St., Samara 443090, Russian Federation
E-mail: dvi85@list.ru
[2) Samara State University of Transport
2B Svobody St., Samara 443066, Russian Federation
E-mail: aivanov2016@list.ru

Abstract. An identification algorithm is proposed nonlinear dynamical systems of fractional order of the Hammerstein class. Designed algorithm allows you to get strongly consistent parameter estimates in the presence of observation noise in the form of fractional white noise. The results of numerical experiments showed high efficiency of the proposed identification algorithm in comparison with the least squares method (LS).

Keywords: fractional order difference; fractional white noise; least squares method (LS); the system of a class of Hammerstein; output error

REFERENCES

1. Stiassnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Mathematical Modelling*, 1979, vol. 3, no. 4, pp. 300-302.

2. Bagley R.L. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, 1983, vol. 21, no. 5, pp. 741-748.

3. Reyes-Melo M.E., Martinez-Vega J.J., Guerrero-Salazar C.A., Ortiz-Mendez U. Application of fractional calculus to modeling of relaxation phenomena of organic dielectric materials. *Proceedings International Conference Solid Dielectrics (ICSD'04)*. Toulouse, 2004, vol. 2, pp. 530-533.

4. Vinagre B.M., Feliu V. Modeling and control of dynamic system using fractional calculus: Application to electrochemical processes and flexible structures. *Proceeding 41-st IEEE Conference Decision Control*. Las Vegas, 2002, pp. 214-239.

5. Ivanov D.V. Otsenivanie parametrov lineynykh ARX-sistem drobnogo poryadka s pomekhoy nablyudeniya vo vkhodnom signale [Estimation of parameters of linear fractional order ARX systems with noise in the input signal]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*, 2014, no. 2 (27), pp. 30-38. (In Russian).

6. Ivanov D.V., Shirinov I.R. Identifikatsiya mnogomernykh po vkhodu lineynykh dinamicheskikh sistem s raznostyami drobnogo poryadka pri nalichii pomekh nablyudeniy [Identification of miso linear dynamical systems with differences of fractional order in the presence of noise observations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1169-1173. (In Russian).

7. Ivanov D.V., Salugin I.E. Rekurrentnaya identifikatsiya lineynykh dinamicheskikh sistem s raznostyami drobnogo poryadka s pomekhoy v vykhodnom signale [Recursive identification of linear dynamical systems of fractional order with noise output signal]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1167-1169. (In Russian).

8. Ivanov D.V. Identification discrete fractional order Hammerstein systems. *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2015.* Omsk, 2015, p. 7147074. DOI: 10.1109/SIBCON.2015.7147074.

9. Baia E.W. An optimal two-stage identification algorithm for Hammerstein–Wiener nonlinear systems. *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 3, pp. 333-338.

10. Golub G., Van Loun Ch. *Matrichnye vychisleniya* [Matrix Computations]. Moscow, Mir Publ., 1999, 548 p. (In Russian).

11. Engelgardt V.V., Ivanov D.V., Katsyuba O.A. Structural and parametric identification of linear dynamic systems of fractional order with noise on input and output. *2015 International Siberian Conference on Control and Communications, SIBCON 2017.* Astana, 2017, p. 7998556. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998556.

12. Ivanov D.V., Engelgardt V.V., Sandler I.L. Genetic Algorithm of Structural and Parametric Identification of Gegenbauer Autoregressive with Noise on Output. *Procedia Computer Science*, 2018, vol. 131, pp. 619-625.

Received 22 April 2018
Reviewed 20 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Ivanov Dmitriy Vladimirovich, Samara State University of Economics, Samara, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods Department, e-mail: dvi85@list.ru

Ivanov Alexandr Vladimirovich, Samara State University of Transport, Samara, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Mechatronics Department, e-mail: aivanov2016@list.ru

For citation: Ivanov D.V., Ivanov A.V. Identifikacikaciya sistem Gammershtejna drobnogo poryadka s polinomialnoj nelinejnostyu pri nalichii drobnogo belogo shuma [Identification of Hammerstein systems of fractional order with a polynomial nonlinearity in the presence of a fractional white noise]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 395–401. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-395-401 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

УДК 517.929.2

ЭФФЕКТИВНЫЕ КРИТЕРИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© А. А. Кандаков, К. М. Чудинов

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: kandakov.sasha@gmail.com, cyril@list.ru

Аннотация. Получены критерии устойчивости нескольких классов линейных автономных разностных уравнений, выраженные в явном аналитическом виде и в виде принадлежности значения вектор-функции от параметров уравнения области трехмерного пространства.

Ключевые слова: разностное уравнение; устойчивость; область устойчивости; многочлен Шура–Кона

Введение

В исследовании асимптотических свойств решений динамических систем особое значение имеют условия наличия тех или иных свойств, в частности, устойчивости, выраженные через заданные параметры системы. Для *автономных* систем, то есть систем, описываемых набором параметров, не зависящих от времени, естественно стремление получить необходимые и достаточные условия устойчивости. Наиболее эффективными являются условия, не только выраженные через параметры системы аналитически, но и имеющие наглядное геометрическое описание. Такое описание дается, как правило, построением областей геометрического пространства, попадание в которые значений явно заданных функций от параметров системы является условием устойчивости.

Систему автономных разностных уравнений

$$x(n) = \sum_{j=1}^{k} A_j x(n-j), \tag{0.1}$$

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

где $A_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $j = \overline{0,k}$, в случае $k > 1$ принято рассматривать как дискретный аналог линейной дифференциальной динамической системы с последействием и называть каждое слагаемое в правой части *запаздыванием* системы (0.1), а ее саму — системой *с несколькими запаздываниями*. Асимптотические свойства решений системы (0.1) определяются расположением на комплексной плоскости корней ее характеристического многочлена $\det\bigl(E - \sum_{j=0}^{k} A_j\lambda^{k-j}\bigr)$. В частности, устойчивость определяется расположением корней относительно единичной окружности $|\lambda| = 1$. Таким образом, исследование асимптотического поведения решений уравнения (0.1) формально сводится к решению задачи о расположении корней многочленов. Поиск эффективных методов определения попадания корней многочлена в конкретную область имеет богатую историю, и ей посвящена обширная литература (см. монографии [1, 2] и библиографию к ним).

В связи с расширением области применения разностных уравнений актуальность исследования асимптотики решений уравнения (0.1) растет, и в последние годы были найдены эффективные условия устойчивости для нескольких его подклассов. Целью настоящей работы является получение эффективных критериев устойчивости нескольких новых подклассов уравнения (0.1). В первом разделе статьи вводятся основные понятия, приводится обзор известных результатов в исследуемой области, описывается подход к решению задачи и конкретизируется ее постановка. Во втором разделе представлены основные результаты работы: теорема о необходимых и достаточных условиях устойчивости уравнения (0.1) и полученные с ее помощью условия устойчивости нескольких классов уравнений. В третьем разделе приведено несколько примеров, иллюстрирующих основные результаты статьи.

1. Обзор известных результатов и постановка задачи

Уравнение (0.1) будем рассматривать на дискретной полуоси $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Решением уравнения (0.1) назовем функцию $x\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}^m$, удовлетворяющую равенству (0.1) для всех $n \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, для что любой *начальной функции* $\varphi\colon \{-k,\dots,-1\} \to \mathbb{C}^m$ существует единственное решение уравнения (0.1), такое что $x(n) = \varphi(n)$, $n = \overline{-k,-1}$.

Через $|\cdot|$ обозначим норму в пространстве $\mathbb{C}^m$.

Понятие *устойчивость решения* отражает непрерывность зависимости решения от начальной функции. Для уравнения (0.1) в силу его линейности и однородности устойчивость определяется оценкой нормы значений решения. В данной работе мы рассматриваем только асимптотическую устойчивость уравнения (0.1), которая для него совпадает с экспоненциальной, что следует из формулы представления решения [3, с. 77].

Определение 1.1. Уравнение (0.1) называется *экспоненциально устойчивым*, если существует константа $\gamma > 0$, такая что для любого решения x найдется такое $N > 0$, что $|x(n)| \leqslant N\exp(-\gamma n)$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Всюду ниже для краткости вместо термина *экспоненциальная устойчивость* используется термин *устойчивость*.

Как известно [3, с. 246], уравнение (0.1) устойчиво, если и только если все корни его характеристического многочлена лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга $\{z : |z| < 1\}$.

Рассмотрим ряд известных результатов, используемых для получения результатов данной работы.

Задача устойчивости системы с одним запаздыванием $x(n) = Ax(n-k)$ сводится к задаче устойчивости скалярного уравнения $x(n) = ax(n-k)$ с комплексным коэффициентом a. Критерием устойчивости является попадание всех собственных чисел матрицы A внутрь единичного круга.

Если в правой части уравнения (0.1) находятся более одной матрицы, то задача получения условий устойчивости, вообще говоря, не сводится к задаче устойчивости скалярного уравнения такого же вида и является принципиально более трудной.

В тех случаях, когда исследование уравнения с двумя запаздываниями

$$x(n) = A_p x(n-p) + A_q x(n-q), \tag{1.1}$$

где $0 < q \leqslant p$, может быть сведено к исследованию скалярного уравнения с двумя запаздываниями

$$x(n) = a_q x(n-q) + a_p x(n-p), \tag{1.2}$$

где $a_p, a_q \in \mathbb{C}$, в изучении условий устойчивости были достигнуты определенные успехи. В частности, такое сведение имеет место в случае существования линейного преобразования, приводящего обе матрицы A_p и A_q к верхнетреугольной форме.

Критерий устойчивости скалярного уравнения $x(n) = x(n+1) + ax(n-k)$ с вещественным коэффициентом a получен в работе [4], уравнения с комплексным a и, как следствие, уравнения (1.1) в случае $q = 1$, $A_1 = E$ — в работе [5].

Теорема 1.1. [5] Уравнение $x(n) - x(n-1) = Ax(n-k)$ экспоненциально устойчиво, если и только если все собственные числа матрицы A находятся внутри области, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin \frac{\varphi}{2k} e^{i\varphi},\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Рассмотрим уравнение (1.2). Случай $a_p, a_q \in \mathbb{R}$ подробно изучен в работах [6–8], а в наиболее простом виде критерий устойчивости получен в недавней работе [9]. Если $a_p, a_q \in \mathbb{C}$, то уравнение (1.2) определяется четырьмя вещественными параметрами. В работах [10] и [11] методом D-разбиения получена в явном виде область устойчивости уравнения (1.2) как однопараметрическое семейство областей в трехмерном вещественном пространстве. Приведем некоторые результаты этих работ.

Пусть $u, v \in \mathbb{R}$ и $w \in \mathbb{C}$. Рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^p - w\lambda^{p-q} - (u + iv). \tag{1.3}$$

Для фиксированного w семейство решений $(u, v) = (u(\varphi), v(\varphi))$ уравнения $P(e^{i\varphi}) = 0$ при всевозможных $\varphi \in \mathbb{R}$ представляет собой кривую на координатной плоскости Ouv, определяемую параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \cos p\varphi - |w| \cos(\arg w + (p-q)\varphi), \\ v(\varphi) &= \sin p\varphi - |w| \sin(\arg w + (p-q)\varphi). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Кривая разбивает плоскость Ouv на области, характеризующиеся тем, что для любых двух точек (u_j, v_j), $j = 1, 2$, одной области количество корней многочленов (1.3) с коэффициентами $a_p = u_j + iv_j$ и $a_q = w$, $j = 1, 2$, попадающих в единичный круг, одинаково.

Определим семейство плоских открытых областей $G(p, q, l, \psi)$, где $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$, $l \in [0, \frac{p}{p-1})$, $\psi \in (-\pi, \pi]$.

Области $G(p, 1, l, \psi)$ определим как ограниченные кривыми (1.4) при $q = 1$, $w = le^{i\psi}$ и изменении φ на отрезке $[-\varphi_1, \varphi_1]$, где φ_1 — корень уравнения $l = \frac{\sin p\varphi}{\sin(p-1)\varphi}$, расположенный на отрезке $[0, \pi/p]$. Отметим, что область $G(p, 1, l, \psi)$ непуста для всех $l \in [0, \frac{p}{p-1})$, содержит начало координат при $l \in [0, 1)$ и не содержит при $l \in [1, \frac{p}{p-1}]$.

В случае взаимно-простых p, q для $l \in [0, 1)$ обозначим через $G(p, q, l, \psi)$ открытую область, полученную разбиением (1.4) и содержащую начало координат; для $l \in [1, \frac{p}{p-1})$ положим $G(p, q, l, \psi) = \varnothing$. Отметим, что область $G(p, q, l, \psi)$ стягивается в точку $(0, 0)$ при $l \to 1 - 0$.

В случае $d = \text{НОД}\,(p, q) > 1$ положим $G(p, q, l, \psi) = G(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}, l, \psi)$.

Обозначим

$$D_\psi(p, q) = \bigcup_{l \in [0, \frac{p}{p-1})} G(p, q, l, \psi).$$

Области $G(p, q, l, \psi)$ являются выпуклыми, их объединение $D_\psi(p, q)$ представляет собой конусообразную выпуклую область (см. работы [10] и [11]).

Теорема 1.2. [11] Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$. Уравнение (1.2) устойчиво, если и только если

$$(\operatorname{Re} a_p, \operatorname{Im} a_p, |a_q|) \in D_{\arg a_q}(p, q). \tag{1.5}$$

Теорема 1.3. [11] Пусть $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geqslant q$ и матрицы A_p и A_q приводятся единым линейным преобразованием M к треугольной форме: $MA_pM^{-1} = P$, $MA_qM^{-1} = Q$. Уравнение (1.1) устойчиво, если и только если для каждой пары диагональных элементов p_{jj}, q_{jj}, $j = \overline{1, m}$, матриц P и Q соответственно справедливо условие

$$(\operatorname{Re} p_{jj}, \operatorname{Im} p_{jj}, |q_{jj}|) \in D_{\arg q_{jj}}(p, q). \tag{1.6}$$

В настоящей работе мы получаем новые условия устойчивости некоторых уравнений вида уравнения (0.1), используя приведенные выше результаты и предложенный в нашей недавней статье [12] подход к изучению условий устойчивости скалярного уравнения

$$\sum_{j=0}^{k} a_j x(n - j) = 0, \tag{1.7}$$

где $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, k}$. Подход состоит в сопоставлении метода D-разбиения с классическими результатами И. Шура [13] и А. Кона [14] о расположении корней многочлена относительно заданного круга на комплексной плоскости.

Далее полагаем, что $a_0, a_k \neq 0$. Число k будем называть *порядком* уравнения (1.7).

Определение 1.2. Будем называть уравнение

$$\sum_{j=0}^{k-1} b_j x(n-j) = 0, \tag{1.8}$$

где $b_0 \neq 0$, *редуцированным уравнением* (относительно уравнения (1.7)), если его коэффициенты определяются через коэффициенты уравнения (1.7) равенствами

$$b_j = b_0 \frac{a_0 a_j - a_k a_{k-j}}{a_0^2 - a_k^2}, \quad j = \overline{1, k-1}.$$

Теорема 1.4. [14] Уравнение (1.7) устойчиво, если и только если $|a_k/a_0| < 1$ и устойчиво редуцированное уравнение (1.8).

Теорема 1.4 сводит условия экспоненциальной устойчивости уравнения (1.7) к условиям устойчивости уравнений более низких порядков. Для некоторых классов уравнений таким путем удается не только получить критерий устойчивости исходного уравнения в аналитическом виде, но и наглядное геометрическое описание области устойчивости (см. [12]).

В следующем разделе работы мы выделяем классы уравнений вида (0.1), для которых задача устойчивости явно сводится к задаче устойчивости уравнений с одним и двумя запаздываниями, и получаем новые критерии устойчивости в терминах попадания значения явной функции от коэффициентов уравнения в заданную область пространства параметров.

2. Основные результаты

Далее термин *пара* понимается в смысле *упорядоченная пара*.

Определение 2.1. Назовем пару коэффициентов (a_j, a_{k-j}) уравнения (1.7) *балансной*, если

$$a_0 a_j = a_k a_{k-j}. \tag{2.1}$$

Пару коэффициентов (a_j, a_{k-j}), не являющуюся балансной, назовем *небалансной*.

По определениям 1.2 и 2.1 балансная пара (a_j, a_{k-j}) коэффициентов уравнения (1.7) определяет коэффициент $b_j = 0$ редуцированного уравнения (1.8), небалансная пара — коэффициент $b_j \neq 0$. Таким образом, из этих определений следует, что *количество ненулевых слагаемых в уравнении* (1.8), *редуцированном относительно уравнения* (1.7), *на один больше количества небалансных пар* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *коэффициентов уравнения* (1.7).

Для заданного уравнения (1.7) будем обозначать $\beta(x, y) = \dfrac{a_0 x - a_k y}{a_0^2 - a_k^2}$.

Теорема 2.1. *Пусть из пар коэффициентов* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *уравнения* (1.7) *небалансна ровно одна пара* (a_p, a_{k-p}). *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|\beta(a_p, a_{k-p})| < 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к уравнению (1.7) теорему 1.4. Все коэффициенты уравнения, редуцированного относительно уравнения (1.7), кроме b_0 и $b_p = b_0\beta(a_p, a_{k-p})$, оказываются равными нулю. Остается применить критерий устойчивости уравнения с одним запаздыванием. □

Теорема 2.2. *Пусть из пар коэффициентов* (a_j, a_{k-j}), $j = \overline{1, k-1}$, *уравнения* (1.7) *небалансны ровно две:* (a_p, a_{k-p}) *и* (a_q, a_{k-q}), $p > q$. *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_p, \operatorname{Im} b_p, |b_q|) \in D_{\arg b_q}(p, q),$$

где $b_p = -\beta(a_p, a_{k-p})$, $b_q = -\beta(a_q, a_{k-q})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим к уравнению (1.7) теорему 1.4. Редуцированное уравнение имеет вид

$$b_0 x(n) + b_0\beta(a_q, a_{k-q})x(n-q) + b_0\beta(a_p, a_{k-p})x(n-p) = 0.$$

Остается применить теорему 1.2, учитывая условие $p > q$. □

Выделим все случаи, когда устойчивость уравнения (1.7) однократным применением теоремы 1.4 сводится к устойчивости уравнения (1.8) с не более чем двумя запаздываниями. Для этого отметим, что для любого $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, кроме $k/2$ в случае четного k, имеет место следующая зависимость.

Количество ненулевых коэффициентов из a_j и a_{k-j}	Количество балансных пар из (a_j, a_{k-j}) и (a_{k-j}, a_j)	Количество ненулевых коэффициентов из b_j и b_{k-j}
0	2	0
1	0	2
2	1 или 0	1 или 2

В случае, когда k четно и $|a_0| > |a_k|$, имеем $b_{k/2} = \frac{b_0 a_{k/2}}{a_0 + a_k}$, то есть $b_{k/2} \neq 0$, если и только если $a_{k/2} \neq 0$.

Из изложенных наблюдений нетрудно получить следующие выводы: однократным применением теоремы 1.4 сводиться к уравнению с двумя запаздываниями могут уравнения не более чем с пятью запаздываниями, к уравнению с одним запаздыванием — уравнения не более чем с тремя запаздываниями.

В приводимых ниже следствиях теорем 2.1 и 2.2 рассмотрим все случаи, когда число запаздываний редуцированного уравнения меньше числа запаздываний исходного.

Следствие 2.1. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно четыре ненулевых коэффициента* a_0, a_{k-p}, a_p *и* a_k, *и обе пары* (a_p, a_{k-p}) *и* (a_{k-p}, a_p) *небалансны. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{p, k-p\}$, $m = \min\{p, k-p\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1.4 уравнение

$$a_0x(n) + a_px(n-p) + a_px(n-p) + a_px(n-p) = 0$$

устойчиво, если и только если устойчиво уравнение

$$y(n) - b_my(n-m) - b_My(n-M) = 0.$$

Остается применить теорему 1.2. □

Доказательства следующих четырех утверждений столь же просты.

Следствие 2.2. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно шесть ненулевых коэффициентов* a_0, a_p, a_{k-p}, a_q, a_{k-q} *и* a_k, *и обе пары* (a_{k-p}, a_p) *и* (a_{k-q}, a_q) *балансны. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{p, q\}$, $m = \min\{p, q\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Следствие 2.3. *Пусть* k *чётно, уравнение* (1.7) *содержит ровно пять ненулевых коэффициентов* a_0, a_p, $a_{k/2}$, a_{k-p} *и* a_k, *и пара* (a_{k-p}, a_p) *балансна. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и*

$$(\operatorname{Re} b_M, \operatorname{Im} b_M, |b_m|) \in D_{\arg b_m}(M, m),$$

где $M = \max\{k/2, p\}$, $m = \min\{k/2, p\}$, $b_M = -\beta(M, m)$, $b_m = -\beta(m, M)$.

Следствие 2.4. *Пусть уравнение* (1.7) *содержит ровно четыре ненулевых коэффициента* a_0, a_{k-p}, a_p *и* a_k, *и пара* (a_{k-p}, a_p) *балансна. Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|\beta(a_p, a_{k-p})| < 1$.

Следствие 2.5. *Пусть* k *чётно и уравнение* (1.7) *содержит ровно три ненулевых коэффициента* a_0, $a_{k/2}$ *и* a_k. *Уравнение* (1.7) *устойчиво, если и только если* $|a_0| > |a_k|$ *и* $|a_{k/2}| < |a_0 + a_k|$.

Полученные результаты применимы к уравнению (0.1) в случае, когда все матрицы A_j приводятся единым линейным преобразованием к треугольному виду. Действительно, после такого преобразования все собственные значения матриц оказываются на главной диагонали, поэтому устойчивость системы равносильна устойчивости m скалярных уравнений

$$x(n) = \sum_{j=1}^{m} a_{ll}^{(j)} x(n-j), \quad l = \overline{1, m}.$$

В частности, такой подход применим в случае попарной коммутируемости матриц: $A_jA_l = A_lA_j$, $j, l = \overline{1, m}$. Выделим важный в приложениях случай, когда все матрицы A_j являются *циркулянтами*, то есть имеют вид

$$A_j = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl} S^l, \text{ где } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Собственными значениями матрицы $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ являются корни степени m из единицы. Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть матрицы A_j, $j = \overline{1,k}$, имеют вид* (2.2). *Система* (0.1) *устойчива, если и только если устойчивы m скалярных уравнений*

$$x(n) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{m} \alpha_{jl}\lambda^l x(n-j),$$

где λ пробегает множество всех комплексных корней степени m из единицы.

3. Примеры

Сформулированные в предыдущем разделе утверждения позволяют получать эффективные признаки для различных классов уравнений вида (0.1) любых порядков.

Будем называть уравнение (1.7) или (1.8) *s-членным*, если среди его коэффициентов ровно s ненулевых. Иначе говоря, уравнение (0.1) с d запаздываниями является $(d+1)$-членным.

П р и м е р 3.1. Устойчивость четырехчленного скалярного уравнения произвольного порядка с симметричными коэффициентами

$$x(n) + ax(n-p) + acx(n-k+p) + cx(n-k) = 0 \tag{3.1}$$

равносильна устойчивости двучленного уравнения

$$y(n) + ay(n-p) = 0.$$

Таким, образом, уравнение (3.1) устойчиво, если и только если $|c| < 1$ и $|a| < 1$.

П р и м е р 3.2. Устойчивость шестичленного уравнения с пропорциональными парами коэффициентов

$$x(n) - ax(n-1) - bx(n-2) - bcx(n-k+2) - acx(n-k+1) + cx(n-k) = 0 \tag{3.2}$$

равносильна устойчивости уравнения второго порядка

$$y(n) = ay(n-1) + by(n-2).$$

При помощи замены $y(n) = e^{in\arg a}z(n)$ перейдем к уравнению с вещественным коэффициентом в слагаемом с меньшим запаздыванием

$$z(n) = |a|z(n-1) + be^{-2i\arg a}z(n-2),$$

и по теоремам 1.2 и 1.4 получим критерий: уравнение (3.2) устойчиво, если и только если $|b| < 1$ и точка $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, где $u+iv = be^{-2i\arg a}$, попадает внутрь области, ограниченной кривой

$$\left\{(\cos 2\omega - |a|\cos\omega, \sin 2\omega - |a|\sin\omega) : -\arccos\frac{|a|}{2} \leqslant \omega \leqslant \arccos\frac{|a|}{2}\right\}.$$

В уравнении четного порядка $k = 2r$ ненулевой центральный коэффициент образует пару с собой, и эта пара небалансна (за исключением заведомо неустойчивого случая $a_0 = a_k$), при этом он образует только один коэффициент редуцированного уравнения $b_r = \frac{a_0 a_r - a_k a_r}{a_0^2 - a_k^2} = \frac{a_r}{a_0 + a_k}$. Пятичленное уравнение может однократным применением теоремы 1.4 быть сведено к трехчленному, только если центральный коэффициент не равен нулю.

П р и м е р 3.3. Пусть $k = 2r$, $p \neq r$. Уравнение

$$x(n) - x(n-p) - ax(n-r) - cx(n-k+p) + cx(n-k) = 0 \tag{3.3}$$

устойчиво, если и только если устойчиво уравнение

$$y(n) = y(n-p) + \frac{a}{1+c} y(n-r).$$

Таким образом, в случае $p < r$ уравнение (3.3) устойчиво, если и только если $|c| < 1$ и

$$\left(\operatorname{Re}\frac{a}{1+c}, \operatorname{Im}\frac{a}{1+c}, 1\right) \in D_0(r,p);$$

в случае $p > r$ — если и только если $|c| < 1$ и

$$\left(1, 0, \left|\frac{a}{1+c}\right|\right) \in D_{arg\frac{a}{1+c}}(p,r).$$

Отметим, что применение понижения порядка не всегда упрощает вид уравнения и исследование его устойчивости.

П р и м е р 3.4. Рассмотрим уравнение с несимметричными коэффициентами

$$x(n) + x(n-1) + x(n-2) + ax(n-k) = 0, \quad k > 3.$$

После применения понижения порядка количество запаздываний увеличивается:

$$y(n) + \frac{1}{1-a^2} y(n-1) + \frac{1}{1-a^2} y(n-2) - \frac{a}{1-a^2} y(n-k+2) - \frac{a}{1-a^2} y(n-k+1) = 0.$$

Этот эффект не отрицает того, что порядок уравнения всегда можно понизить достаточное число раз, чтобы количество запаздываний уменьшилось. Но понижение порядка уравнения имеет свою цену — усложнение вида коэффициентов (подробнее см. [12]).

В последних двух примерах рассмотрим векторные уравнения.

П р и м е р 3.5. Уравнение

$$x(n) - x(n-1) - Ax(n-p) - cAx(n-k+p) - cx(n-k+1) + cx(n-k) = 0, \tag{3.4}$$

где $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $c \in \mathbb{C}$, однократным понижением порядка приводится к уравнению

$$y(n) = y(n-1) + Ay(n-p).$$

По теореме 1.1 уравнение (3.4) устойчиво, если и только если все собственные числа матрицы A находятся внутри области, ограниченной кривой

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin\frac{\varphi}{2p} e^{i\varphi}, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

П р и м е р 3.6. Рассмотрим уравнение (0.1) с матричными коэффициентами в виде циркулянтов:

$$x(n) + aS^2x(n-1) + abS^3x(n-k+1) + bSx(n-k) = 0, \tag{3.5}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$, матрица $S \in \mathbb{C}^{m\times m}$ имеет вид (2.2). Уравнение (3.5) устойчиво, если и только если устойчивы скалярные уравнения

$$x(n) + a\lambda_j^2 x(n-1) + ab\lambda_j^3 x(n-k+1) + b\lambda_j x(n-k) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

где λ_j — все корни степени m из 1. Понижением порядка задача сводится к устойчивости уравнений

$$y(n) + a\lambda_j^2 y(n-1) = 0.$$

Таким образом, уравнение (3.5) устойчиво, если и только если $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marden M.* Geometry of Polynomials. 2nd ed. Providence: American Math. Soc., 1966. 243 p.

2. *McNamee J.M., Pan V.* Numerical Methods for Roots of Polynomials. Studies in Computational Mathematics. Cambridge: Elsevier Science, 2013. Vol. 16. 718 p.

3. *Elaydi S.* An Introduction to Difference Equations. N. Y.: Springer, 2005. 539 p.

4. *Levin S., May R.* A note on difference-delay equations // Theoret. Popul. Biol. 1976. Vol. 9. P. 178-187.

5. *Levitskaya I.S.* A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$ // J. Difference Equ. Appl. 2004. Vol. 11. № 8. P. 701-705.

6. *Dannan F.M.* The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$ // J. Difference Equ. Appl. 2004. Vol. 7, № 6. P. 589-599.

7. *Кипнис М.М., Нигматулин Р.М.* Устойчивость трехчленных линейных разностных уравнений с двумя запаздываниями // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С. 25-39.

8. *Николаев Ю.П.* Анализ геометрии D-разбиения двумерной плоскости произвольных коэффициентов характеристического полинома дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 49-61.

9. *Čermák J., Jánský J.* Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation // Appl. Math. Letters. 2015. Vol. 43. P. 56-60.

10. *Kipnis M.M., Malygina V.V.* The stability cone for a matrix delay difference equation // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2011. Article ID 860326. 15 p.

11. *Ivanov S.A., Kipnis M.M., V.V. Malygina V.V.* The stability cone for a difference matrix equation with two delays // ISRN Applied Math. 2011. № 2011. P. 1-19.

12. *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Эффективный критерий устойчивости дискретной динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 4. С. 88-103.

13. *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math. 1918. Bd. 148. S. 122-145.

14. *Cohn A.* Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise // Math. Zeit. 1922. Bd. 14. S. 111-148.

Поступила в редакцию 12 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Кандаков Александр Андреевич, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, студент, факультет прикладной математики и механики, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com

Чудинов Кирилл Михайлович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: cyril@list.ru

Для цитирования: *Кандаков А.А., Чудинов К.М.* Эффективные критерии экспоненциальной устойчивости автономных разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 402–414. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414

EEFFECTIVE CRITERIA OF EXPONENTIAL STABILITY OF AUTONOMOUS DIFFERENCE EQUATIONS

A. A. Kandakov, K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolskiy Av., Perm 614990 Russian Federation
E-mail: kandakov.sasha@gmail.com, cyril@list.ru

Abstract. We obtain stability criteria for several classes of linear autonomous difference equations. The criteria are expressed in explisit analytic form, as well as in the form of belonging values of a vector function of the equation parameters to a domain in three-dimensional space.
Keywords: difference equation; stability; stability domain; Schur–Cohn polynomial

REFERENCES

1. Marden M. *Geometry of Polynomials.* Providence, American Math. Soc., 1966, 243 p.

2. McNamee J.M., Pan V. *Numerical Methods for Roots of Polynomials. Studies in Computational Mathematics.* Cambridge, Elsevier Science, 2013, vol. 16, 718 p.

3. Elaydi S. *An Introduction to Difference Equations.* New York, Springer, 2005, 539 p.

4. Levin S., May R. A note on difference-delay equations. *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, vol. 9, pp. 178-187.

5. Levitskaya I.S. A note on the stability oval for $x_{n+1} = x_n + Ax_{n-k}$. *J. Difference Equ. Appl.*, 2004, vol. 11, no. 8, pp. 701-705.

6. Dannan F.M. The asymptotic stability of $x(n+k)+ax(n)+bx(n-l) = 0$. *J. Difference Equ. Appl.*, 2004, vol. 7, no. 6, pp. 589-599.

7. Kipnis M.M., Nigmatulin R.M. Ustoychivost' trekhchlennykh lineynykh raznostnykh uravneniy s dvumya zapazdyvaniyami [Stability of the trinomial linear difference equations with two delays]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2004, no. 11, pp. 25-39. (In Russian).

8. Nikolaev Yu.P. Analiz geometrii D-razbieniya dvumernoy ploskosti proizvol'nykh koehffitsientov kharakteristicheskogo polinoma diskretnoy sistemy [The geometry of D-decomposition of a two-dimensional plane of arbitrary coefficients of the characteristic polynomial of a discrete system]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2004, no. 12, pp. 49-61. (In Russian).

9. Čermák J., Jánský J. Explicit stability conditions for a linear trinomial delay difference equation. *Appl. Math. Letters*, 2015, vol. 43, pp. 56-60.

10. Kipnis M.M., Malygina V.V. The stability cone for a matrix delay difference equation. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2011. Article ID 860326, 15 p.

The work is performed within the basic part of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project № 1.5336.2017/8.9), and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

11. Ivanov S.A., Kipnis M.M., V.V. Malygina V.V. The stability cone for a difference matrix equation with two delays. *ISRN Applied Math.*, 2011, no. 2011, pp. 1-19.

12. Kandakov A.A., Chudinov K.M. Ehffektivnyy kriteriy ustoychivosti diskretnoy dinamicheskoy sistemy [Effective stability criterion for a discrete dynamical system]. *Prikladnaya matematika i voprosy upravleniya – Applied Mathematics and Control Sciences*, 2017, no. 4, pp. 88-103. (In Russian).

13. Schur I. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind. *J. Reine Angew. Math.*, 1918, vol. 148, pp. 122-145. (In German).

14. Cohn A. Über die Anzahl der Wurzein einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. *Math. Zeit.*, 1922, vol. 14, pp. 111-148. (In German).

Received 12 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June Month 2018
There is no conflict of interests.

Kandakov Aleksandr Andreyevich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Student, Faculty of Applied Mathematics and Mechanics, e-mail: kandakov.sasha@gmail.com

Chudinov Kirill Mikhaylovich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of the Research Centre on Functional Differential Equations, e-mail: cyril@list.ru

For citation: Kandakov A.A., Chudinov K.M. Effektivnye kriterii eksponentsial'noy ustoychivosti avtonomhykh raznostnykh uravneniy [Effective criteria of exponential stability of autonomous difference equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 402–414. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-402-414 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-415-423

УДК 517.977

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ ГИБРИДНОЙ ДВУХШАГОВОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

© А. Ф. Клейменов

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Аннотация. Уравнения движения управляемой системы в рассматриваемой двухшаговой задаче на фиксированном промежутке времени содержат управления либо одного игрока, либо двух игроков одновременно. На первом шаге (этапе) управляемого процесса (от начального момента до некоторого заданного момента) на систему действует управление только первого игрока, который решает задачу оптимального управления с заданным терминальным функционалом. В начале второго шага (этапа) процесса первый игрок решает, будет второй игрок участвовать в процессе управления на оставшемся промежутке времени, или нет. При этом предполагается, что за участие второй игрок должен выплатить первому платеж в некотором размере. Если «да», то оба игрока разыгрывают неантагонистическую дифференциальную игру, в которой в качестве решения принимается равновесие по Нэшу. Кроме того, возможно использование игроками «ненормальных» типов поведения, что может позволить игрокам увеличить выигрыши. Если «нет», то первый игрок по-прежнему решает задачу оптимального управления до окончания процесса.

Ключевые слова: задача оптимального управления; неантагонистическая позиционная дифференциальная игра; нэшевское равновесие; типы поведения

1. Постановка задачи

Рассматривается двухшаговая задача принятия решений в управляемой системе, динамика которой на заданном промежутке $[t_0, \vartheta]$ описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., например, [1, 2]). Максимальное число участников управляемого процесса (игроков) равно двум (игрок $P1$ и игрок $P2$). Позиционные

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы УрО РАН (проект № 18-1-1-10).

стратегии $U = \{u(t,x,\varepsilon),\beta_1(\varepsilon)\}$ и $V = \{v(t,x,\varepsilon),\beta_2(\varepsilon)\}$, игроков $P1$ и $P2$ соответственно, а также движения, порожденные этими стратегиями, определяются аналогично [3–5].

Предполагается, что на первом шаге процесса (от начального момента t_0 до заданного момента T, $t_0 < T < \vartheta$) правая часть уравнений движения содержит управляющее воздействие u, $u(t) \in P^0$ только игрока $P1$, который решает задачу оптимального управления на отрезке $[t_0, T]$ с заданным терминальным функционалом выигрыша I_1.

Игрок $P2$ располагает ресурсом управления v, $v(t) \in Q$ и имеет заданный терминальный функционал выигрыша I_2. В момент T игрок $P1$ должен решить, будет участвовать игрок $P2$ в управляемом процессе на оставшемся промежутке времени $[T,\vartheta]$, или нет. Если игрок $P1$ решил, что игрок $P2$ участвовать не будет, то на отрезке $[T,\vartheta]$ он продолжает решать задачу оптимального управления; при этом его выигрыш, получаемый в конечной точке $x^0(\vartheta)$ оптимальной траектории $x^0(\cdot)$, обозначим через I_1^0. Предполагается, что за участие в управляемом процессе на отрезке $[T,\vartheta]$ игрок $P2$ выплачивает игроку $P1$ платеж в размере L единиц. И если участие состоится, то игроки на отрезке $[T,\vartheta]$ разыгрывают неантагонистическую позиционную дифференциальную игру (НПДИ) двух лиц, в которой игрок $P1$ распоряжается выбором управления уже из другого множества u, $u(t) \in P$, а игрок $P2$ распоряжается выбором управления v, $v(t) \in Q$. При этом множество $P \subset P^0$ выбирается так, что два множества – вектограмма уравнений динамики дифференциальной игры (где $u \in P$, $v \in Q$) и вектограмма уравнений динамики задачи оптимального управления (где $u \in P^0$) – совпадают. Полагаем, что в игре НПДИ игроки выбирают одно из $P(NE)$-решений [5] игры; выигрыши игроков, получаемые в конечной точке $x^*(\vartheta)$ траектории $x^*(\cdot)$, порожденной выбранным $P(NE)$-решением, обозначим через I_1^* для игрока $P1$, и через I_2^* для игрока $P2$. (Заметим, здесь выигрыши игроков считаются трансферабельными [1]).

У с л о в и е 1. Игрок $P1$ принимает решение, что игрок $P2$ участвует в управляемом процессе на промежутке времени $[T,\vartheta]$, если имеют место следующие два неравенства

$$I_1^* + L > I_1^0, \tag{1}$$

$$I_2^* - L > I_2^0, \tag{2}$$

где I_2^0 – значение функционала I_2 в точке $x^0(\vartheta)$.

Неравенство (1) означает, что при участии игрока $P2$ в процессе игрок $P1$ получает выигрыш (с учетом платежа в размере L) больший, чем если это участие не состоится. Неравенство (2) означает, что игроку $P2$ также выгодно участвовать в процессе, даже заплатив за это игроку $P1$ платеж L.

Задача 1. Найти траекторию $x^*(\cdot)$, порожденную $P(NE)$-решением, и $L > 0$ такие, что выполняются неравенства (1) и (2).

В общем случае Задача 1 решений не имеет. Однако может случиться, что использование игроками так называемых «ненормальных» типов поведения (см. [6–10]) приведет к тому, что множество решений Задачи 1 станет непустым.

В [6, 7] предполагалось, что помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша, игроки могут использовать другие типы поведения, а именно: *альтруистический* (alt), *агрессивный* (agg) и *парадоксальный* (par). В работе парадоксальный тип не будет использоваться.

О п р е д е л е н и е 1. Игрок $P1$ придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ альтруистического (агрессивного) типа поведения по отношению к игроку $P2$, если на этом отрезке действия игрока $P1$ направлены на максимизацию (минимизацию) функционала I_2 игрока $P2$.

Аналогично определяются альтруистический и агрессивный типы поведения игрока $P2$ по отношению к игроку $P1$.

Согласно [9, 10], в разыгрываемой игре полагаем, что одновременно с выбором позиционной стратегии каждый игрок выбирает также свою индикаторную функцию, определенную на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и принимающую значение в множестве $\{\, nor,\ \ alt,\ \ agg\,\}$. Индикаторную функцию игрока Pi обозначим символом $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \to \{nor, alt, agg\}$, $i = 1, 2$. Если индикаторная функция игрока принимает значение, скажем, alt на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к своему партнеру.

Таким образом, в каждый момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ может реализоваться одна из 9 различных пар типов поведения игроков $(\alpha_1(t)), \alpha_2(t))$, начиная с (nor, nor) и заканчивая (agg, agg). При этом в двух парах (nor, alt) и (alt, nor) интересы игроков совпадают и игроки решают командные задачи управления (team problems). В других двух парах (nor, agg) и (agg, nor) игроки имеют противоположные интересы и разыгрывают антагонистические дифференциальные игры. В остальных пяти парах имеем неантагонистические дифференциальные игры.

Примем, что формирование управлений игроков на фиксированном промежутке времени при фиксированной паре типов поведения игроков происходит согласно условиям.

У с л о в и е 2. Если пара типов поведения игроков порождает на данном промежутке времени командную задачу управления, то управления игроков доставляют решение этой задачи. Если пара типов поведения игроков порождает антагонистическую дифференциальную игру, то управления игроков доставляют седловую точку этой игры. Если пара типов поведения игроков порождает неантагонистическую дифференциальную игру, то управления игроков доставляют одно из $P(NE)$-решений этой игры.

У с л о в и е 3. Если две различных пары типов поведения игроков порождают одну и ту же траекторию, то выбирается та из них, для которой суммарное время использования игроками ненормальных типов поведения меньше.

Итак, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок $P1$ управляет выбором пары *действий* {позиционная стратегия, индикаторная функция}: $(U,\ \alpha_1(\cdot))$, а игрок $P2$ управляет выбором пары действий $(V,\ \alpha_2(\cdot))$. Далее НПДИ с типами поведения обозначаем через НПДИсТП.

О п р е д е л е н и е 2. Пара $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot))\}$ образует BT-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная парой траектория $x^{BT}(\cdot)$ и найдется $P(NE)$-решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию $x^P(\cdot)$, такие, что

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) > \sigma_i(x^P(\vartheta)), \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Если в игре НПДИ, возникающей на втором шаге исходной задачи, допустить возможность использования игроками различных типов поведения, то в получающейся игре НПДИсТП аналог Задачи 1 можно сформулировать так:

Задача 2. Найти траекторию $x^*(\cdot)$, порожденную BT-решением, и $L > 0$ такие, что выполняются неравенства (1) и (2).

2. Пример

Рассмотрим следующий пример гибридной управляемой системы на плоскости с динамикой простых движений и при наличии фазовых ограничений.

На первом шаге (этапе) решается следующая задача оптимального управления для игрока $P1$:

$$\dot{x} = u, \quad x, u \in R^2, \;\; \|u\| \le 2\alpha, \;\; 0 \le t \le T, \;\; x(0) = x_0, \;\; I_1 = \sigma_1(x(T)). \tag{4}$$

На втором шаге (этапе) решается неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух игроков $P1$ и $P2$:

$$\begin{gathered} \dot{x} = u + v, \quad x, u, v \in R^2, \;\; \|u\| \le \alpha, \;\; \|v\| \le \alpha, \;\; T \le t \le \vartheta, \;\; x(T) = x_T, \\ I_1 = \sigma_1(x(\vartheta)), \quad I_2 = \sigma_2(x(\vartheta)). \end{gathered} \tag{5}$$

Пусть функционалы выигрыша игроков имеют вид:

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)) = 15 - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

То есть, цель игрока Pi – привести вектор $x(\vartheta)$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$.

Зададим следующие начальные условия и значения параметров: $\vartheta = 5.0$, $\alpha = 1$, $x_0 = (0, 0)$, $a^{(1)} = (-9.5, 7.6)$, $a^{(2)} = (6.5, 7.6)$, $T = 0.96047$ (рис. 1).

Опишем фазовые ограничения. Траекториям систем (4), (5) запрещается заходить во внутренность множества S, которое получается удалением из четырехугольника $abcd$ отрезка de. Множество S состоит из двух частей S_1 и S_2, то есть, $S = S_1 \cup S_2$.

Координаты точек, задающих фазовые ограничения, следующие: $a = (-5, 4)$, $b = (-1.5, 7.6)$, $c = (3.5, 5.2)$, $d = (-1.5, 1.2)$, $e = (1.25, 6.28)$. Можно проверить, что точки a и d лежат на отрезке $a^{(1)}O$, точка c – на отрезке $da^{(2)}$ и точка e – на отрезке bc.

На первом шаге решение задачи оптимального управления для игрока $P1$ на отрезке $[0, T]$ порождает траекторию – отрезок Od.

На втором шаге имеем систему (5), где $t \in [0.96047, 5]$, $x(0.96047) = d$.

PSfrag replacements 5 -5 10 -10 0 x_1 x_2 $a^{(1)}$ $a^{(2)}$ D_1 D_2 S_1 S_2 p h q_1 q_2 O d a b c d m k e m g n

Множество достижимости системы (5), построенное для момента $\vartheta = 5.0$, содержит точки, ограниченные двухзвенником adc и дугой окружности радиуса 8.07906, а также дугой, соединяющей эту окружность со стороной ab четырехугольника (рис. 1). Кроме того, в множество достижимости входят точки отрезка de, а также точки двух полукругов с центрами в точках e и c.

Если на втором шаге игрок $P1$ до момента ϑ решает задачу оптимального управления, то система (5) приходит в состояние p, в котором $I_1^0 = 12.83407$, $I_2^0 = 0.54785$.

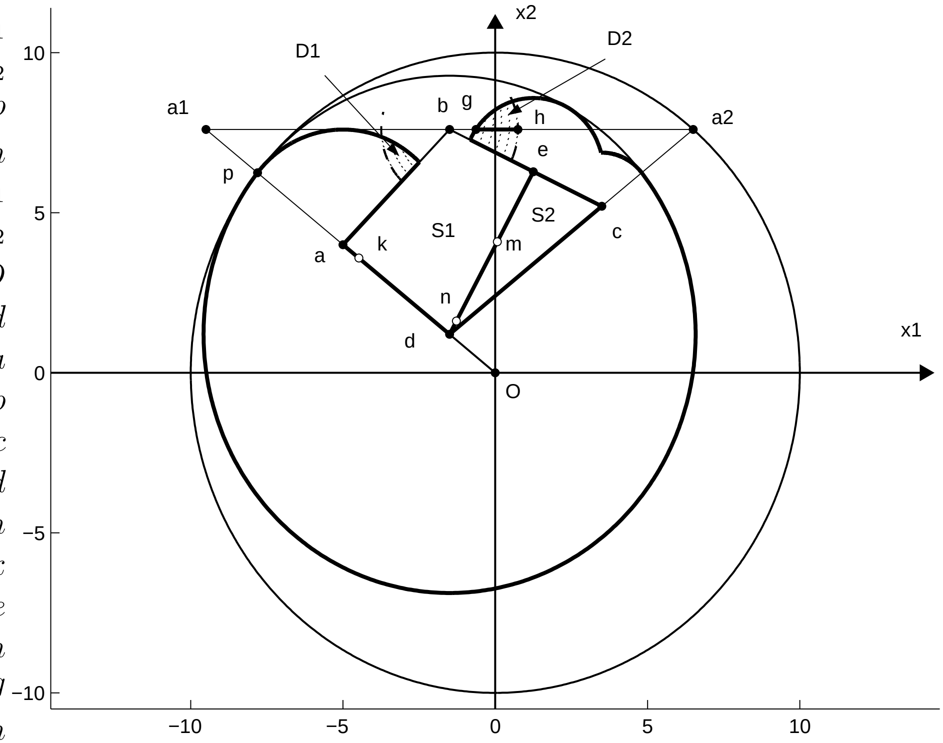

Рис. 1. Множество достижимости

Если же на втором шаге игроки $P1$ и $P2$ разыгрывают игру НПДИ, то необходимо найти $P(NE)$-решения игры. Прежде всего отметим, что функции цены $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$, $0 \le t \le \vartheta, x \in R^2 \backslash S$ вспомогательных антагонистических игр Γ_1 и Γ_2 (см. [5], с. 21) в данном примере будут

$$\gamma_i\left(t,x\right) = \begin{cases} 15 - \|x - a^{(i)}\|, & \text{если } xa^{(i)} \bigcap intS = \emptyset \\ 15 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right), & \text{в противном случае} \end{cases}, \tag{7}$$

где $i = 1, 2$, а через $\rho_S\left(x, a^{(i)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(i)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое – при обходе S против часовой стрелки.

Величина $\gamma_i(t,x)$ (7) представляет собою гарантированный выигрыш игрока Pi в позиции (t,x) игры. Известно (см. [5], с. 25), что для каждой NE- и $P(NE)$- траектории $x(t)$ точка $t = \vartheta$ является точкой максимума функции $\gamma_i(t, x(t))$.

Нетрудно проверить, что в игре НПДИ с нормальным типом поведения игроков траектория $x(t) \equiv 0,\ t \in [0.96047, 5]$ (точка d) будет единственной NE- траекторией, а, следовательно, и единственной $P(NE)$- траекторией; выигрыши игроков на ней равны $I_1^* = I_2^* = 4.75500.$ Очевидно, что Задача 1 решений не имеет.

Перейдем теперь к игре НПДИсТП, полагая, что игроки $P1$ и $P2$ могут проявлять альтруизм или агрессию по отношению к другому игроку в течение некоторых промежутков времени, причем допускается случай взаимной агрессии.

Сразу, опуская полное доказательство, отметим, что концы траекторий, порожденных BT-решениями игры, составляют множества D_1 и D_2 (Рис.1). В частности, в множестве D_2 полуинтервал $[gh)$ образован концами траекторий, порожденных неулучшаемыми по Парето BT-решениями ($P(BT)$-решениями в терминологии работы [10]).

Опишем процедуру построения BT-решения, приводящего в точку g.

Рассмотрим траекторию deg; выигрыши игроков на ней составляют $I_1 = 6.13653$, $I_2 = 7.86347$, то есть каждый игрок выигрывает больше, чем на единственной $P(NE)$-траектории. Если удастся построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по этой траектории, то тем самым будет построено BT-решение.

На стороне de найдем точку m, равноудаленную от точки $a^{(1)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Найдем также точку n, равноудаленную от точки $a^{(2)}$ как при обходе множества S_2 по часовой стрелке, так и при обходе S_2 против часовой стрелки. Получим $m = (0.06671, 4.09414)$, $n = (-1.29507, 1.61551)$.

Если двигаться по траектории deg с максимальной скоростью при $t \in [0.96047, 5]$, то время попадания в точку n будет $t = 1.19672$, в точку m будет $t = 2.60597$, а в точку e будет $t = 3.84876$. Далее, при $t \in [0.96047, 1.19672]$ обе функции цены $\gamma_1(t, x)$ и $\gamma_2(t, x)$ (7) убывают; при $t \in [1.19672, 2.60597]$ функция $\gamma_2(t, x)$ возрастает, а функция $\gamma_1(t, x)$ убывает; при $t \in [2.60597, 3.84876]$ обе функции возрастают; наконец, при $t \in [3.84876, 5]$ $\gamma_2(t, x)$ убывает, а $\gamma_1(t, x)$ возрастает.

Проверяем, что на участке dn траектории deg пара (agg, agg) является единственной парой типов поведения, осуществляющей движение на участке в соответствии с Условием 2; это будет движение, порожденное $P(NE)$-решением игры. На участке nm две пары осуществляют движение в соответствии с Условием 2, а именно (alt, nor) и (alt, agg), однако согласно Условию 3 остается только пара (alt, nor); она определяет командную задачу управления. На следующем участке me будут уже четыре пары «кандидатов» (nor, nor), (alt, nor), (nor, alt) и (alt, alt), однако согласно Условию 3 три последних пары отбрасываются; оставшаяся пара определяет неантагонистическую игру и движение порождено $P(NE)$-решением. Наконец, на участке eg единственной парой будет (nor, alt), определяющая командную задачу управления; движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки g.

Таким образом, построены индикаторные функции-программы игроков

$$\alpha_{1*}(t) = \{agg, t \in [0.96047, 1.19672);\ alt, t \in [1.19672, 2.60597);\ nor, t \in [2.60597, 5]\}, \quad (8)$$

$$\alpha_{2*}(t) = \{agg, t \in [0.96047, 1.19672);\ nor, t \in [1.19672, 3.84876));\ alt, t \in [3.84876, 5]\}. \quad (9)$$

Обозначим через (U_*, V_*) пару стратегий игроков, порождающую траекторию deg при $t \in [0.96047, 5]$ и согласованную с построенными индикаторными функциями. Тогда пара действий $\{(U_*, \alpha_{1*}(\cdot)), (V_*, \alpha_{2*}(\cdot))\}$ (8),(9) доставляет BT-решение.

На этом BT-решении выигрыши игроков составляют $I_1^* = 6.13653, I_2^* = 7.86347$. Нетрудно видеть, траектория deg и число $L = 7$ доставляют решение Задачи 2.

Описание других решений Задачи 2 опускаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012.
2. *Kort P.M., Wrzaczek S.* Optimal firm growth under the threat of entry // Eur. J. Oper. Res. 2015. Vol. 246 (1). P. 281-292.
3. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
5. *Клейменов А.Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993.
6. *Клейменов А.Ф.* О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Прикладная математика и механика. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 739-746.
7. *Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V.* Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics. Interim Report IR-98-076. Laxenburg: IIASA, 1998. 47 p.
8. *Kleimenov A.F.* An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix 2×2 Games Involving Various Behavior Types // Leitman G. (ed.) Dynamic and Control. London: Gordon and Breach, 1998. P. 195-204.
9. *Клейменов А.Ф.* Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7. Вып. 4. С. 40-55.
10. *Клейменов А.Ф.* Применение альтруистического и агрессивного типов поведения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц на плоскости // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2017. Т. 23. № 4. С. 181-191.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Клейменов Анатолий Федорович, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Для цитирования: *Клейменов А.Ф.* Принятие решений в одной гибридной двухшаговой задаче динамического управления // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 415–423. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-415-423

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-415-423

DECISION-MAKING IN A HYBRID TWO-STEP PROBLEM OF DYNAMIC CONTROL

A. F. Kleimenov

N.N. Krasovskii Instituite of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskoy St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Abstract. The equations of motion of the controlled system in the two-step problem under consideration at a fixed time interval contain the controls of either one player or two players. In the first step (stage) of the controlled process (from the initial moment to a certain predetermined moment), only the first player controls the system, which solves the problem of optimal control with a given terminal functional. In the second step (stage) of the process, the first player decides whether the second player will participate in the control process for the remainder of the time, or not. It is assumed that for participation the second player must pay the first side payment in a fixed amount. If «yes», then a non-antagonistic positional differential game is played out, in which the Nash equilibrium is taken as the solution. In addition, players can use «abnormal» behaviors, which can allow players to increase their winnings. If « no », then until the end of the process continues to solve the problem optimal control.
Keywords: optimal control problem; non-antagonistic positional differential game; Nash equilibrium; players' behavior types

REFERENCES

1. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game Theory]. St. Petersburg, BKHV-Peterburg Publ., 2012. (In Russian).

2. Kort P.M., Wrzaczek S. Optimal firm growth under the threat of entry. *Eur. J. Oper. Res.*, 2015, vol. 246 (1), pp. 281-292.

3. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional Differentional Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian).

4. Krasovskiy N.N. *Upravlenie dinamicheskoy sistemoy* [Control of a Dynamic System]. Moscow, Nauka Publ., 1985. (In Russian).

5. Kleymenov A.F. *Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry* [Nonantagonistic Positional Differential Games]. Yekaterinburg, Nauka Publ., 1993. (In Russian).

6. Kleymenov A.F. O resheniyakh v neantagonisticheskoy pozitsionnoy differentsial'noy igre [On solutions in a nonantagonistic positional differential game]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 739-746. (In Russian).

7. Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics. Interim Report IR-98-076.* Laxenburg, IIASA, 1998, 47 p.

The work is supported by the UrB RAS Program (project № 18-1-1-10).

8. Kleimenov A.F. An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix 2×2 Games Involving Various Behavior Types. In: Leitman G. (ed.) *Dynamic and Control.* London, Gordon and Breach, 1998, pp. 195-204.

9. Kleymenov A.F. Al'truisticheskoe povedenie v neantagonisticheskoy pozitsionnoy differentsial'noy igre [Altruistic behavior in a non-antagonistic positional differential game]. *Matematicheskaya teoriya igr i ee prilozheniya – Mathematical Theory of Games and Its Applications*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 40-55. (In Russian).

10. Kleymenov A.F. Primenenie al'truisticheskogo i agressivnogo tipov povedeniya v neantagonisticheskoy pozitsionnoy differentsial'noy igre dvukh lits na ploskosti [Application of the altruistic and aggressive types of behavior in a two-person non-zero-sum positional differential game on the plane]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 181-191. (In Russian).

Received 19 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Kleimenov Anatolii Fedorovich, N.N. Krasovskii Institiute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

For citation: Kleimenov A.F. Prinyatie resheniy v odnoy gibridnoy dvuhshagovoy zadache dinamicheskogo upravleniya [Decision-making in a hybrid two-step problem of dynamic control]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 415–423. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-415-423 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430

УДК 517.983.23

НОРМА И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ НОРМА БЕСКОНЕЧНЫХ МАТРИЦ

© **О. И. Клещина**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: office@main.vsu.ru

Аннотация. Получены оценки нормы и логарифмической нормы бесконечных матриц в пространствах l_σ.

Ключевые слова: бесконечные матрицы; норма матрицы; логарифмическая норма; неравенство Юнга; неравенство Гёльдера

Приведём необходимые сведения из [1]. Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство и $End\,\mathbb{B}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в $\mathbb{B}$. Оператор A из $End\,\mathbb{B}$ называется *обратимым*, если существует такой оператор B из $End\,\mathbb{B}$, что $\mathrm{AB} = \mathrm{I}$ и $\mathrm{BA} = \mathrm{I}$, где I – единичный оператор. Оператор B определяется единственным образом и называется *обратным* к оператору A (обозначим A^{-1}). Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{A} \in End\,\mathbb{B}$. Если оператор $\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A}$ обратим, то λ называется *регулярным значением* оператора A; совокупность G всех регулярных значений оператора A образует открытое множество в $\mathbb{C}$, называемое *резольвентным множеством* оператора A, а операторная функция $\lambda \in G \mapsto (\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} \in End\,\mathbb{B}$ называется *резольвентой* оператора A. Множество $F = \mathbb{C}\backslash G$ называется *спектром* и обозначается $sp\,\mathrm{A}$. Спектр оператора A есть непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{C}$.

Спектральный радиус и спектральная абсцисса оператора A определяются формулами (сравни с [2])

$$spr\,\mathrm{A} = \max_{\lambda \in sp\,\mathrm{A}} |\lambda_j|, \qquad spa\,\mathrm{A} = \max_{\lambda \in sp\,\mathrm{A}} Re\lambda_j.$$

Отметим, что

$$spr\,\mathrm{A} \le \|\mathrm{A}\|, \qquad spa\,\mathrm{A} \le \|\mathrm{A}\|_{log},$$

где норма оператора A и его логарифмическая норма определяются равенствами

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|\mathrm{A}x\|, \qquad \|\mathrm{A}\|_{log} = \sup_{\|x\| \le 1} [x, \mathrm{A}x], \tag{1}$$

где квадратные скобки расшифровываются следующим образом: $[x,h]:\mathbb{B}\times\mathbb{B}\to\mathbb{R}$,

$$[x,h]=\lim_{0<t\to 0}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}.$$

Дадим прямое определение логарифмической нормы [3]

$$\|\mathrm{A}\|_{log}=\lim_{0<t\to 0}\frac{\|\mathrm{I}+t\mathrm{A}\|-\|\mathrm{I}\|}{t}.$$

Логарифмическая норма может быть определена также как наименьшее значение для константы a, для которой справедлива оценка

$$\|e^{t\mathrm{A}}\|\leq e^{ta} \text{ при } t\geq 0,$$

где

$$e^{t\mathrm{A}}=\mathrm{I}+t\mathrm{A}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\mathrm{A}^k}{k!}.$$

Пусть $0\leq\sigma\leq 1$. Обозначим через l_σ комплексное банахово пространство (двусторонних) последовательностей комплексных чисел $x=x_j$, $-\infty<j<+\infty$, в которой норма определяется следующим образом

$$\|x\|_0=\sup_j|x_j| \text{ при } \sigma=0,$$
$$\|x\|_\sigma=\left(\sum_j|x_j|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma} \text{ при } 0<\sigma\leq 1.$$

Отметим, что $l_1\subset l_\sigma\subset l_0$ при $0<\sigma<1$ (обычно l_0 обозначают m – пространство ограниченных последовательностей, l_σ обозначают l_p, где $p=1/\sigma$, а $l_{1/2}$ через l_2 – гильбертово пространство) [4, с. 28–33].

В дальнейшем нам потребуются неравенство Юнга

$$a^{1-\sigma}b^\sigma\leq(1-\sigma)a+\sigma b, \tag{2}$$

где $a\geq 0$, $b\geq 0$ и $0\leq\sigma\leq 1$, и неравенство Гёльдера

$$|(x,y)|=\left|\sum_j x_j\overline{y}_j\right|\leq\|x\|_{1-\sigma}\|y\|_\sigma, \tag{3}$$

где $x\in l_{1-\sigma}$, $y\in l_\sigma$ и $0\leq\sigma\leq 1$.

Пусть $\mathrm{A}\in End\ l_\sigma$. Тогда A можно сопоставить некоторую матрицу (a_{jk}): если $y=\mathrm{A}x$, то

$$y_j=\sum_k a_{jk}x_k,\ \ -\infty<j<+\infty.$$

Бесконечным матрицам посвящена монография Р. Кука [5]. Соответствующую норму матрицы определим как операторную

$$\|\mathrm{A}\|_\sigma=\sup_{\|x\|_\sigma\leq 1}\|\mathrm{A}x\|_\sigma.$$

Норма матрицы в явном виде может быть найдена в исключительных случаях. Отметим известные формулы [6, с. 93–94, задача 19]

$$\|\mathrm{A}\|_0 = \sup_j \sum_k |a_{jk}|, \quad \|\mathrm{A}\|_1 = \sup_k \sum_j |a_{jk}|, \quad \|\mathrm{A}\|_{1/2} = spa\ \sqrt{\mathrm{A}^*\mathrm{A}},$$

где A^* – комплексно сопряженная матрица. Нас интересуют выражения для нормы матрицы при других значениях параметра σ.

Мы закончим этот раздел двумя оценками нормы матрицы сверху. Пусть $\mathrm{A} = (a_{jk})$ и $y = \mathrm{A}x$, где $x \in l_\sigma$, $0 < \sigma < 1$. Так как $y_j = \sum_k a_{jk}x_k$, то по неравенству Гёльдера (3) получаем

$$|y_j| \le \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma} \|x\|_\sigma,$$

отсюда вытекает, что

$$\|y\|_\sigma \le \left(\sum_j \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^{\sigma} \|x\|_\sigma,$$

поэтому

$$\|\mathrm{A}\|_\sigma \le \left(\sum_j \left(\sum_k |a_{jk}|^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^{\sigma}. \tag{4}$$

Рассуждая несколько иначе, напишем

$$y = \sum_k x_k \mathrm{A} e_k,$$

где $e_k \in l_\sigma$ – стандартные единичные орты. Так как

$$\|y\|_\sigma \le \sum_k |x_k| \|\mathrm{A} e_k\|_\sigma,$$

то по неравенству Гёльдера (3) находим

$$\|y\|_\sigma \le \left(\sum_k |x_k|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\sigma} \left(\sum_k \|\mathrm{A} e_k\|_\sigma^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma},$$

отсюда следует, что

$$\|\mathrm{A}\|_\sigma \le \left(\sum_k \left(\sum_j |a_{jk}|^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right)^{1-\sigma}. \tag{5}$$

Отметим, что при $\sigma = 1/2$ обе оценки (4) и (5) приводят к одному и тому же результату

$$\|\mathrm{A}\|_{1/2} \le \left(\sum_{j,k} |a_{jk}|^2\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Оценка (4) приведена в [7, с. 390]. Оценка (5) является новой. Здесь мы напрямую сталкиваемся с особенностями бесконечных матриц. При выводе формул (4) и (5) мы молчаливо предполагали, что внешнее суммирование всегда приводит к конечному результату. Однако это не так: уже подстановка единичной матрицы $\mathrm{I} = (\sigma_{jk})$ в формулы (4) и (5) приводят к бесконечному результату. Поэтому формулы (4) и (5) приводят к правильному результату в случае конечности правых величин.

Отметим, что конечные суммы в (6) приводят к оператору Гильберта–Шмидта, и этот оператор, как и операторы, удовлетворяющие оценкам (4) и (5), является компактным. Так, например, для матрицы Гильберта $\mathrm{H} = (h_{jk})$, где $h_{jk} = 1/(1 + j + k)$ для $0 \leq j, k \leq +\infty$. Известно, что $\|\mathrm{H}\|_{1/2} = \pi$, в то время как формула (6) дает бесконечный результат [8, с. 31].

Мы переходим к изучению логарифмической нормы. Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$ и $\mathrm{A} = (a_{jk}) \in End\ l_\sigma$. Выпишем известные формулы [9, с. 462–465] – в конечномерном случае в [6, с. 93–94, задача 19] – для счетномерных пространств

$$\begin{aligned} \|\mathrm{A}\|_{0_{log}} &= \sup_j \Big\{ Re\ a_{jj} + \sum_{k\neq j} |a_{jk}| \Big\}, \\ \|\mathrm{A}\|_{1_{log}} &= \sup_k \Big\{ Re\ a_{kk} + \sum_{j\neq k} |a_{jk}| \Big\}, \\ \|\mathrm{A}\|_{1/2_{log}} &= spa\ \ \tfrac{\mathrm{A}^*+\mathrm{A}}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Получим оценки $\|\mathrm{A}\|_{\sigma_{log}}$ в остальных случаях $0 < \sigma < 1$.

Непосредственным вычислением получаем, что

$$[x, h]_\sigma = \|x\|_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} \frac{Re\ (x_j \bar{h}_j)}{|x_j|}, \tag{8}$$

где в случае $x_j = 0$ выражение $\frac{Re\ (x_j \bar{h}_j)}{|x_j|}$ заменится на $|h_j|$. Так как $|Re(x_j\bar{h}_j)|/|x_j| \leq |h_j|$, то по неравенству Гёльдера (3) написанный ряд абсолютно сходится. При вычислении производной справа в (8) на конечном этапе мы воспользовались тем, что

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{|x_j + t h_j| - |x_j|}{t} = \begin{cases} Re\ (x_j \bar{h}_j) & \text{при } x_j \neq 0, \\ |h_j| & \text{при } x_j = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\|\mathrm{A}\|_{\sigma_{log}} \leq \sup_j \left\{ Re\ a_{jj} + (1-\sigma) \sum_{k\neq j} |a_{jk}| + \sigma \sum_{k\neq j} |a_{kj}| \right\}. \tag{9}$$

В случае $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ оценка (9) переходит в равенство в полном соответствии с формулами (7). Поэтому будем считать, что $0 < \sigma < 1$. Согласно (1) необходимо оценить величину $[x, \mathrm{A}x]_\sigma$. По формуле (8) имеем

$$[x, \mathrm{A}x]_\sigma = \|x\|_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} Re \frac{(x_j \overline{\sum_k a_{jk} x_k})}{|x_j|}. \tag{10}$$

При фиксированном j получаем

$$|x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} Re\frac{(x_j\overline{\sum a_{jk}x_k})}{|x_j|} \leq |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} Rea_{jj} + \sum_{k\neq j} |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} |\overline{a_{jk}}||x_k| =$$

$$= Rea_{jj}|x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{k\neq j} |x_j|^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} |a_{jk}|^{1-\sigma}|a_{jk}|^{\sigma}|x_k|^{\frac{\sigma}{\sigma}} \leq$$

$$\leq Rea_{jj}|x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sum_{k\neq j} \left\{(1-\sigma)|a_{jk}||x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma|a_{jk}||x_k|^{\frac{1}{\sigma}}\right\}$$

(мы воспользовались неравенством Юнга (2)). Поэтому согласно (10)

$$\sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}-1} Re\frac{(x_j\overline{\sum_k a_{jk}x_k})}{|x_j|} \leq Rea_{jj}|x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + (1-\sigma)\sum_j\sum_{k\neq j} |a_{jk}||x_j|^{\frac{1}{\sigma}} + \sigma\sum_j\sum_{k\neq j} |a_{jk}||x_k|^{\frac{1}{\sigma}} =$$

$$= \sum_j \left\{Re\ a_{jj} + (1-\sigma)\sum_{k\neq j}|a_{jk}| + \sigma\sum_{k\neq j}|a_{kj}|\right\}|x_j|^{\frac{1}{\sigma}} \leq a\sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Здесь через a обозначена правая часть в неравенстве (9). Итак,

$$[x, \mathrm{A}x]_\sigma \leq \|x\|_\sigma^{1-\frac{1}{\sigma}} a \sum_j |x_j|^{\frac{1}{\sigma}} = a\|x\|_\sigma,$$

и оценка (9) установлена.

Автор благодарен А.И. Перову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
2. *Перов А.И., Коструб И.Д.* О спектральной абсциссе и логарифмической норме // Математические заметки. 2017. Т. 101. № 4. С. 562-575.
3. *Лозинский С.М.* Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 5. С. 52-90.
4. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.
5. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Мир, 1975. 449 с.
6. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 536 с.
7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. Москва; Ленинград: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1959. 399 с.
8. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 252 с.
9. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

Поступила в редакцию 24 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 28 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Клещина Ольга Игоревна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра системного анализа и управления, e-mail: avdeeva.olga.official@gmail.com

Для цитирования: *Клещина О.И.* Норма и логарифмическая норма бесконечных матриц // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 424–430. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430

THE NORM AND THE LOGARITHMIC NORM OF INFINITE MATRICES

O. I. Kleshchina

Voronezh State University
1 University square, Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: office@main.vsu.ru

Abstract. In this paper the norm and the logarithmic norm of infinite matrices in the l_σ space are studied. Various estimates of these quantities are obtained.
Keywords: infinite matrices; the norm of a matrix; the logarithmic norm of a matrix; Young's inequality; Holder's inequality

REFERENCES

1. Rudin U. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Mir Publ., 1975, 449 p. (In Russian).

2. Perov A.I., Kostrub I.D. O spektral'noy abstsisse i logarifmicheskoy norme [On the Spectral Abscissa and the Logarithmic Norm]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2017, vol. 101, no. 4, pp. 562-575. (In Russian).

3. Lozinskiy S.M. Otsenka pogreshnosti chislennogo integrirovaniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1958, no. 5, pp. 52-90. (In Russian).

4. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza* [Short Course of Functional Analysis]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1982, 271 p. (In Russian).

5. Kuk R. *Beskonechnye matritsy i prostranstva posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces]. Moscow, Mir Publ., 1975, 449 p. (In Russian).

6. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Solutions Stability of Differential Equations in Banach Space]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 536 p. (In Russian).

7. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1959, 399 p. (In Russian).

8. Khalmosh P. *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book]. Moscow, Mir Publ., 1970, 252 p. (In Russian).

9. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskiy V.V. *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [Theory of Lyapunov Exponents and Its Applications to the Stability Issues]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 576 p. (In Russian).

Received 24 April 2018
Reviewed 28 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Kleshchina Olga Igorevna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, System Analysis and Control Department, e-mail: avdeeva.olga.official@gmail.com

For citation: Kleshchina O.I. Norma i logarifmicheskaya norma beskonechnyh matric [The norm and the logarithmic norm of infinite matrices]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 424–430. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-424-430 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436

УДК 517.925

МАТРИЦЫ ГУРВИЦА, ЛЯПУНОВА И ДИРИХЛЕ В ВОПРОСАХ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

© **И. Д. Коструб**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Аннотация. Для удобства рассмотрения вопросов устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами вводятся понятия матриц Гурвица, Ляпунова и Дирихле. Они позволяют описать все представляющие интерес случаи в теории устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Аналогичная классификация предложена для систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Матрицы монодромии таких систем могут быть в устойчивом случае либо матрицами Гурвица, либо матрицами Ляпунова, либо матрицами Дирихле (в дискретном смысле). Новый материал относится к системам с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: устойчивость линейных систем с постоянными, с периодическими коэффициентами; матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле; классификация матриц монодромии

1. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Классификация матриц

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – комплексная квадратная $n \times n$-матрица. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1.1}$$

Как известно, полное представление о поведении всех решений этой системы дает матрицант $\exp(t\mathbf{A})$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Система (1.1) называется: *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \to \mathbf{0} \text{ при } t \to +\infty; \tag{1.2}$$

устойчивой по Ляпунову, если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \leq \mathbf{C} \text{ при } 0 \leq t < +\infty; \tag{1.3}$$

устойчивой по Дирихле, если

$$|e^{t\mathbf{A}}| \leq \mathbf{C} \text{ при } -\infty < t < +\infty. \tag{1.4}$$

Появившаяся здесь матрица $\mathbf{C}$ – это некоторая постоянная вещественная $n \times n$-матрица. По поводу устойчивости по Ляпунову см., например, [1, § 8, с. 85–90], а относительно устойчивости по Дирихле см. [2, с. 3].

Отметим, что в случае устойчивости по Дирихле

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k e^{i\omega_k t},$$

где $i\omega_1, i\omega_2, ..., i\omega_m$ – полная совокупность всех попарно различных чисто мнимых собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_m$ – полная система проекционных матриц $\mathbf{I} = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k$, обладающих свойством идемпотентности и ортогональности: $\mathbf{P}_k^2 = \mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k = \mathbf{0}$ при $j \neq k$. Иными словами, в случае устойчивости по Дирихле $\mathbf{A} = \sum\limits_{k=1}^{m} i\omega_k \mathbf{P}_k$ и $\exp(t\mathbf{A})$ есть матричная почти периодическая функция (матричный тригонометрический полином).

Аналогично в случае устойчивости по Ляпунову, не сводящейся к асимптотической устойчивости, матрицант оказывается асимптотически почти периодическим в том смысле, что

$$\left| e^{t\mathbf{A}} - \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}_k e^{i\omega_k t} \right| \to 0 \text{ при } t \to +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Матрица $\mathbf{A}$ называется: *гурвицевой* или *матрицей Гурвица*, если все ее собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\mathbf{A}) < 0, \quad k = 1, 2, ..., m; \tag{1.5}$$

ляпуновской, или *матрицей Ляпунова*, если все ее собственные значения лежат в открытой левой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, либо на мнимой оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\mathbf{A}) < 0 \text{ либо } \operatorname{Re}, \ \lambda_k(\mathbf{A}) = 0 \ \ k = 1, 2, ..., m, \tag{1.6}$$

причем нулевым и чисто мнимым собственным значениям – если они есть! – отвечают только простые элементарные делители; *матрицей Дирихле,* если все ее собственные значения лежат на мнимой прямой $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то есть

$$\operatorname{Re} \lambda_k(\mathbf{A}) = 0, \quad k = 1, 2, ..., m, \tag{1.7}$$

и все они имеют лишь простые элементарные делители.

Отметим, что любая ляпуновская матрица есть либо матрица Гурвица, либо матрица Дирихле, либо подобна прямой сумме таких матриц.

Как мы видим, данная нами классификация матриц никак не связана с системой линейных дифференциальных уравнений (1.1), а основана только на их спектральных свойствах; удобство же ее состоит в том, что:

Теорема 1.1. *Система (1.1) асимптотически устойчива по Ляпунову (1.2) тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{A}$ *гурвицева (1.5); для того чтобы система (1.1) была устойчива по Ляпунову (1.3), необходимо и достаточно, чтобы матрица* $\mathbf{A}$ *была ляпуновской (1.6); наконец, система (1.1) устойчива по Дирихле (1.4) в том и только в том случае, если матрица* $\mathbf{A}$ *есть матрица Дирихле (1.7).*

2. Системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Классификация матриц монодромии

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, 2, ..., n; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \tag{2.1}$$

где $a_{ij}(t)$ – вещественные измеримые ω-периодические функции

$$a_{ij}(t+\omega) = a_{ij}(t), \quad \mathbf{A}(t+\omega) = \mathbf{A}(t), \tag{2.2}$$

суммируемые на отрезке $[0, \omega]$. Здесь ω – фиксированное положительное число, называемое периодом системы. Сделанное предположение относительно коэффициентов (измеримость) позволяет без ограничений рассматривать системы с кусочно постоянными или кусочно непрерывными коэффициентами. Под решением $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ системы (2.1) понимается совокупность абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнениям системы (2.1) почти всюду (решение в смысле Каратеодори) [2, гл. 8, § 8]. Впрочем, если коэффициенты $a_{ij}(t)$ – непрерывные функции, то функции $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ будут непрерывно дифференцируемыми в самом обычном смысле.

Перейдем к матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{2.3}$$

с начальным условием

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}. \tag{2.4}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Решение уравнения (2.3) с единичным начальным условием (2.4) называется *матрицантом* и обозначается $\mathbf{U}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Понятие матриканта можно найти, например, в [1, с. 74].

О п р е д е л е н и е 2.2. Если $\mathbf{U}(t)$ – матрицант ω-периодической системы (2.1), то матрица $\mathbf{U}(\omega)$ называется *матрицей монодромии,* а ее собственные значения именуются *мультипликаторами.*

Матрица $\mathbf{U}(t)$ при каждом t является невырожденной $\det \mathbf{U}(t) \neq 0$; более того, при любых t_0 и t справедлива формула *Лиувилля–Остроградского–Якоби*

$$\det \mathbf{U}(t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{tr}\, \mathbf{A}(t)dt} \det \mathbf{U}(t_0).$$

Матрицант ω-периодической системы (2.1)–(2.2) обладает следующим важным свойством

$$\mathbf{U}(t + r\omega) = \mathbf{U}(t)[\mathbf{U}(\omega)]^k, \quad (k - \text{целое}).$$

Доказательство этого свойства можно найти, например, в учебниках [3] или [4, 5].

О п р е д е л е н и е 2.3. Если μ – мультипликатор системы (2.1)–(2.2), то она всегда имеет такое нетривиальное решение $\mathbf{x}(t)$ – *решение Флоке,* для которого

$$\mathbf{x}(t + \omega) = \mu\mathbf{x}(t), \quad -\infty < t < +\infty.$$

Пусть $\mathbf{U}(\omega)$ – матрица монодромии и $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ – полный набор ее собственных значений (мультипликаторов).

О п р е д е л е н и е 2.4. Назовем матрицу $\mathbf{U}(\omega)$: *гурвицевой в дискретном смысле,* если все ее мультипликаторы лежат внутри единичного круга $|\mu| < 1$

$$|\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2, ..., n; \tag{2.5}$$

ляпуновской в дискретном смысле, если все ее мультипликаторы лежат либо внутри единичного круга $|\mu| < 1$, либо на единичной окружности $|\mu| = 1$,

$$|\mu_i| < 1 \;\text{ или }\; |\mu_i| = 1, i = 1, 2, ..., n, \tag{2.6}$$

причем в последнем случае все они имеют только простые элементарные делители; матрицей *Дирихле в дискретном смысле,* если все ее мультипликаторы лежат на единичной окружности $|\mu| = 1$

$$|\mu_i| = 1, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.7}$$

причем в последнем случае все они имеют только простые элементарные делители.

Данная выше классификация матриц монодромии основана только на алгебраических свойствах мультипликаторов без каких-либо конкретных связей ее с поведением решений системы (2.1)–(2.2) (см. [6]). Достоинства же ее неоспоримы, ибо:

Теорема 2.1. *Периодическая система (2.1)–(2.2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда ее матрица монодромии гурвицева в дискретном смысле (2.5); для того чтобы периодическая система (2.1)–(2.2) была устойчива по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица монодромии была ляпуновской в дискретном смысле (2.6); периодическая система (2.1)–(2.2) устойчива по Дирихле в том и только в том случае, если ее матрица монодромии есть матрица Дирихле в дискретном смысле (2.7).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: в 2 т. М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. Т. 2. 414 с.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: Физматлит, 1974. 331 с.

4. *Боровских А.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2016. Ч. 1. 326 с.

5. *Боровских А.В.* Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2016. Ч. 2. 276 с.

6. *Перов А.И., Коструб И.Д.* Признаки устойчивости периодических решений систем дифференциальных уравнений, основанные на теории внедиагонально неотрицательных матриц. Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2015. 124 с.

Поступила в редакцию 22 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Коструб Ирина Дмитриевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, e-mail: ikostrub@yandex.ru

Для цитирования: *Коструб И.Д.* Матрицы Гурвица, Ляпунова и Дирихле в вопросах устойчивости по Ляпунову // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 431–436. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436

HURWITZ MATRIX, LYAPUNOV AND DIRICHLET ON THE SUSTAINABILITY OF LYAPUNOV'S

I. D. Kostrub

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: ikostrub@yandex.ru

Abstract. The concepts of Hurwitz, Lyapunov and Dirichlet matrices are introduced for the convenience of the stability of linear systems with constant coefficients. They allow us to describe all the cases of interest in the stability theory of linear systems with constant coefficients. A similar classification is proposed for systems of linear differential equations with periodic coefficients. Monodromy matrices of such systems can be either Hurwitz matrices or Lyapunov matrices or Dirichlet matrices (in the discrete sense) in a stable case. The new material relates to systems with variable coefficients.

Keywords: stability of linear systems with constant, periodic coefficients; Hurwitz, Lyapunov and Dirichlet matrices; classification of monodromy matrices

REFERENCES

1. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian).

2. Sansone Dzh. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya: v 2 t.* [Ordinary Differential Equations: in 2 vols.]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1954, vol. 2, 414 p. (In Russian).

3. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1974, 331 p. (In Russian).

4. Borovskikh A.V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Urait Publ., 2016, pt. 1, 326 p. (In Russian).

5. Borovskikh A.V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. Moscow, Urait Publ., 2016, pt. 2, 276 p. (In Russian).

6. Perov A.I., Kostrub I.D. *Priznaki ustoychivosti periodicheskikh resheniy sistem differentsial'nykh uravneniy, osnovannye na teorii vnediagonal'no neotritsatel'nykh matrits* [Signs of Stability of Periodic Solutions of Differential Equations Systems Based on the Off-Diagonal Non-Negative Matrices Theory]. Voronezh, Publishing and Printing Center Nauchnaya kniga Ltd., 2015, 124 p. (In Russian).

Received 22 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Kostrub Irina Dmitrievna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the System Analysis and Management Department, e-mail: ikostrub@yandex.ru

For citation: Kostrub I.D. Matricy Gurvica, Lyapunova i Dirihle v voprosah ustojchivosti po Lyapunovu [Hurwitz matrix, Lyapunov and Dirichlet on the sustainability of Lyapunov's]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 431–436. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-431-436 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© **А. М. Котюков, М. М. Котюков**

Российский университет дружбы народов
117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: amkotyukov@mail.ru, mmkotyukov@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой второго порядка. Для этой задачи получен принцип максимума Понтрягина и условия его нетривиальности.

Ключевые слова: оптимальное управление; принцип максимума; уравнение второго порядка; условия нетривиальности

1. Введение

В настоящей работе исследуется задача оптимального управления, в которой управляемая система является системой второго порядка. Для этой задачи получен принцип максимума Понтрягина.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, \dot{x}, u, t)dt \to \min, \tag{1}$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, u, t), t \in [t_0, t_1], t_0 < t_1, \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, u \in U(t) = \{u \in L_\infty^m[t_0, t_1] : R(u(t), t) = 0 \ \dot{\forall} t\}, \tag{3}$$

$$x(t_0) = x_{01}, \dot{x}(t_1) = x_{02}, x(t_1) = x_{11}, \dot{x}(t_1) = x_{12}. \tag{4}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-11-01168).

Здесь t – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовая переменная, $\dot{x}(t)$ обозначает производную функции x по времени, u – управление, через $L^m_\infty[t_0,t_1]$ обозначается множество всех измеримых существенно ограниченных функций $u:[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$, f^0 – заданная скалярная функция, f – заданная n-мерная вектор-функция.

Функции f^0 и f предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по (x,u) для п.в. $t \in [t_0,t_1]$. Кроме того, эти функции и их частные производные по (x,u) до второго порядка включительно измеримы по t при любых фиксированных (x,u), а также ограничены и равномерно непрерывны по x,u,t на любом ограниченном множестве.

Ограничение R называется смешанным. Относительно него мы предполагаем, что отображение R непрерывно, а также для него выполнено следующее предположение регулярности:

$$rang\frac{\partial R}{\partial u}(u,t) = d(R)\ \forall u \in U(t),\ \forall t \in [t_0,t_1].$$

Здесь $d(R)$ – размерность пространства, в которое действует отображение R.

Допустимым процессом мы будем называть пару $(x(t),u(t)), t \in [t_0,t_1]$, которая удовлетворяет всем вышеперечисленным ограничениям. Задача состоит в том, чтобы среди всех допустимых процессов найти тот, при котором функционал J принимает наименьшее значение. Такой процесс мы назовем оптимальным в задаче оптимального управления (1)–(4).

3. Основной результат

Сформулируем необходимые условия оптимальности для задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть (x^*,u^*) является оптимальным процессом в задаче (1), а смешанное ограничение $R(u,t)$ регулярно. Тогда существуют не равные одновременно нулю $\lambda^0 \in \mathbb{R}$, $\lambda^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi = (\psi^1,\psi^2) : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$; $\psi^1,\psi^2 \in \mathbb{R}^n$; измеримая ограниченная функция $r:[t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$, $r \in L^m_\infty[t_0,t_1]$, такие, что:*

$$\begin{cases} \dot{\psi}^1 = \lambda_0 \frac{\partial f_0(x^*,\dot{x}^*,u_0,t)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*,\dot{x}^*,u_0,t)}{\partial x}\psi^2, \\ \dot{\psi}^2 = \lambda_0 \frac{\partial f_0(x^*,\dot{x}^*,u_0,t)}{\partial \dot{x}} - \psi^1 - \frac{\partial f(x^*,\dot{x}^*,u_0,t)}{\partial \dot{x}}\psi^2, \end{cases} \quad \dot{\forall} t \in [t_0,t_1]; \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \psi^1(t_0) + \psi^1(t_1) = 0, \\ \psi^2(t_0) + \psi^2(t_1) = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} h(t) = \max_{u \in U(t)} (\langle f(x^*,\dot{x}^*,u,t),\psi^2\rangle - \lambda^0 f_0(x^*,\dot{x}^*,u,t)) = \\ = \langle f(x^*,\dot{x}^*,u^*,t),\psi^2\rangle - \lambda^0 f_0(x^*,\dot{x}^*,u^*,t)\ \dot{\forall} t \in [t_0,t_1], \end{aligned} \tag{7}$$

причем функция $h(t)$ непрерывна на $[t_0,t_1]$;

$$h(t_0) = 0,\ h(t_1) = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial f(x^*,\dot{x}^*,u^*,t)^T}{\partial u}\psi^2 - \lambda^0 \frac{\partial f^0(x^*,\dot{x}^*,u^*,t)}{\partial u} = r(t)\frac{\partial R}{\partial u}(u^*,t)\ \dot{\forall} t \in t_0,t_1; \tag{9}$$

$$\langle r(t), R(u^*,t)\rangle = 0, r(t) \geq 0\ \dot{\forall} t \in [t_0,t_1]. \tag{10}$$

Вывод теоремы осуществляется в три этапа: на первом этапе производится замена переменной, понижающая порядок уравнения до первого, после нее для задачи в новом виде применяется уже доказанный в $[1, 2]$ принцип максимума, и затем производится обратная замена переменной, дающая формулировку теоремы в окончательном виде.

Заметим, что условие (7) теоремы может вырождаться, несмотря на то, что множители Лагранжа λ^0, ψ^1, ψ^2, r одновременно в нуль не обращаются. В этом случае приведенный принцип максимума становится неинформативен и бесполезен для нахождения оптимальных траекторий. Покажем, что, тем не менее, в приведенных предположениях принцип максимума из Теоремы 1 не вырождается.

Теорема 2. *Пусть* (x^*, u^*) *– оптимальный процесс, а смешанное ограничение* $R(u,t)$ *регулярно. Тогда для любых множителей* λ^0, ψ^1, ψ^2, r, *соответствующих оптимальному процессу* (x^*, u^*) *в силу Теоремы 1, выполнено следующее условие нетривиальности:*

$$\lambda^0 + meas\{t \in [t_0, t_1] : |\psi^2(t)| > 0\} > 0, \qquad (11)$$

где meas обозначает меру Лебега.

Доказательство теоремы проводится от противного. Предполагая, что (11) не выполнено, мы получаем, что $\lambda^0 = 0$ и $\psi^2 = 0$. Подставляя это в выражения (5)–(10), мы получаем, что все множители Лагранжа обращаются в нуль, что противоречит условиям теоремы.

Представленные в данной статье результаты уточняют результаты работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005. 384 с.

2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.

3. *Котюков А.М.* Принцип максимума Понтрягина для системы второго порядка // Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы: материалы Междунар. молодежной науч. шк. Воронеж, 2017. Вып. 7. Часть 1. 244 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Котюков Александр Михайлович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, студент, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: amkotyukov@mail.ru

Котюков Михаил Михайлович, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, младший научный сотрудник Центра нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: mmkotyukov@gmail.com

Для цитирования: *Котюков А.М., Котюков М.М.* Необходимые условия оптимальности в задаче, описываемой уравнением второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 437–440. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS FOR OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH SECOND ORDER EQUATION

A. M. Kotyukov, M. M. Kotyukov

RUDN University
6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation
E-mail: amkotyukov@mail.ru, mmkotyukov@gmail.com

Abstract. An optimal control problem with second order equation is considered. For this problem Pontryagin maximum principle is obtained. Also non-triviality condition is proved.
Keywords: optimal control; maximum principle; second order equation; non-triviality conditions

REFERENCES

1. Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie* [Optimal Control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 384 p. (In Russian).

2. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nyh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 392 p. (In Russian).

3. Kotyukov A.M. Printsip maksimuma Pontryagina dlya sistemy vtorogo poryadka [Pontryagin's maximum principle for second order system]. *Materialy Mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchnoy shkoly «Aktual'nye napravleniya matematicheskogo analiza i smezhnye voprosy»* [Proceedings of the International Youth Scientific School "Current Directions of Mathematical Analysis and Allied Issues"]. Voronezh, 2017, no. 7, pt. 1, 244 p. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Kotyukov Alexandr Mikhailovich, RUDN University, Moscow, the Russian Federation, Student, Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: amkotyukov@mail.ru

Kotyukov Mikhail Mikhailovich, RUDN University, Moscow, Russian Federation, Junior Researcher of the Center for Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: mmkotyukov@gmail.com

For citation: Kotyukov A.M., Kotyukov M.M. Neobhodimye ysloviya optimalnosti dlya zadachi, opisivayemoi yravneniyem vtorogo poryadka [Necessary optimality conditions for optimal control problems with second grade equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 437–440. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-437-440 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-11-01168).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447

УДК 517.929

ДОСТИЖИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© В. П. Максимов

ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, ул. Букирева, 15
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Аннотация. Для линейной функционально-дифференциальной системы управления с последействием и импульсными воздействиями исследуется задача описания множества достижимости в терминах системы целевых функционалов при наличии полиэдральных ограничений на управления и импульсные воздействия.
Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; задачи управления; множество достижимости

Введение

Продолжая исследования [1–3], мы рассматриваем линейную функционально-дифференциальную систему управления с последействием и импульсными воздействиями в заданные моменты времени, следуя при этом точке зрения на импульсные системы, предложенной в [4] и развитой в последующих работах в рамках теории абстрактного функционально-дифференциального уравнения [5, 6], см. также обзор [7]. Общность рассматриваемой системы касается как операторов, действующих на фазовую переменную, так и оператора, реализующего управляющие воздействия классического типа. Импульсные воздействия тоже рассматриваются как элементы управления рассматриваемой системой. Что касается цели управления, то она формулируется с помощью заданной конечной системы линейных функционалов общего вида, – целевых функционалов, определенных на траекториях системы, порождаемых обоими видами управляющих воздействий. При отсутствии ограничений на управление общие условия разрешимости задачи управления при заданном начальном состоянии установлены в работах

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00332) и фонда В. Потанина.

[8, 9], специальные эффекты использования импульсной составляющей описаны в [3]. Разрешимость задачи управления относительно заданной системы целевых функционалов при некотором наборе их целевых значений означает, что достижимыми являются любые целевые значения. Очевидно, что наличие ограничений на управляющие воздействия существенно меняет картину и актуальной становится задача описания множества достижимых значений целевых функционалов (в классической постановке – множеств достижимости, см., например [10–12]). В настоящем сообщении мы даем решение такой задачи для случая полиэдральных ограничений на управляющие воздействия.

1. Постановка задачи

Обозначим через $L^n[0,T] = L^n$ пространство измеримых по Лебегу суммируемых на конечном отрезке $[0,T]$ функций со значениями в пространстве R^n n-мерных вектор-столбцов $\alpha = col(\alpha^1, ..., \alpha^n)$ и нормой $||z||_{L^n} = \int_0^T |z(s)|\, ds$, где $|\cdot|$– норма в R^n. $L_2^r[0,T] = L_2^r$ – пространство функций $u : [0,T] \to R^r$ суммируемых с квадратом, оснащенное скалярным произведением $(u,v) = \int_0^T u^\top(s)v(s)\, ds$, где $\cdot^\top$ – символ транспонирования.

Зафиксируем систему точек $t_1, ..., t_m$, $0 < t_1 < ... < t_m < T$, и, следуя [4], введем пространство $DS^n[t_1, ..., t_m] = DS^n(m)$ кусочно абсолютно непрерывных вектор-функций $x : [0,T] \to R^n$, представимых в виде

$$x(t) = x(0) + \sum_{k=1}^{m} \chi_{[t_k, T]}(t)\Delta_k + \int_0^t z(s)\, ds.$$

Здесь $\chi_{[t_k,T]}(t)$ – характеристическая функция отрезка $[t_k, T]$, $\Delta_k = \Delta_k x = x(t_k) - x(t_k - 0)$, $z \in L^n$. Норма в пространстве $DS^n(m)$ определяется равенством

$$||x||_{DS^n(m)} = |x(0)| + \sum_{k=1}^{m} |\Delta_k x| + ||\dot{x}||_{L^n}.$$

Определим линейный ограниченный оператор $\mathcal{L} : DS^n(m) \to L^n$ равенством

$$(\mathcal{L}x)(t) = \dot{x}(t) - \int_0^T K(t,s)\dot{x}(s)\, ds - A(t)x(0) - \sum_{k=1}^{m} A_k(t)\chi_{[t_k,T]}(t)\Delta_k x.$$

Здесь ядро $K(t,s)$ удовлетворяет *условию* $\mathcal{K}$: его элементы $k_{ij}(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T\}$ и имеют общую, суммируемую на $[0,\, T]$, мажоранту:

$$|k_{ij}(t,s)| \leqslant \kappa(t) \quad i,j = 1, \ldots, n,\ t \in [0,T],$$

а $(n \times n)$-матрицы $A, A_1, \ldots, A_m$ имеют суммируемые на $[0,\, T]$ элементы.

Рассматривается система управления

$$(\mathcal{L}x)(t) = (\mathcal{F}u)(t) + f(t),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

где $\mathcal{F} : L_2^r \to L^n$ – линейный ограниченный вольтерров [6] оператор. Начальное состояние системы задано: $x(0) = \alpha$.

Для задания цели управления введем линейный ограниченный вектор-функционал $\ell : DS^n(m) \to R^N$. Общий вид такого вектор-функционала определяется равенством

$$\ell x = \Psi x(0) + \sum_{k=1}^{m} \Psi_k \Delta_k x + \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds,$$

где $\Psi, \Psi_1, ..., \Psi_m$ – постоянные $(N \times n)$-матрицы, элементы $(N \times n)$-матрицы $\Phi(s)$ измеримы и ограничены в существенном.

Целью управления с использованием управления $u \in L_2^r$ и «импульсов» $\Delta_1, ..., \Delta_m \in R^n$ является достижение заданного вектора целевых значений $\beta \in R^N$ на траекториях системы (1):

$$\ell x = \beta. \tag{2}$$

При этом управления стеснены следующими ограничениями:

$$G_1 u(t) \leq \gamma_1,\ t \in [0\, T];\ \ G_2 \Delta \leq \gamma_2, \tag{3}$$

где $\Delta = col(\Delta_1, ..., \Delta_m)$; постоянные матрицы G_1 и G_2 размерности $N_1 \times r$ и $N_2 \times (mn)$ соответственно и векторы $\gamma_1 \in R^{N_1}$ и $\gamma_2 \in R^{N_2}$ заданы. Предполагается, что множество $\mathcal{V}_1$ решений системы линейных неравенств $G_1 v \leq \gamma_1$ и множество $\mathcal{V}_2$ решений системы линейных неравенств $G_2 \Delta \leq \gamma_2$ – непустые и ограниченные.

2. Основной результат

Введем следующие обозначения: $X(t), X_1(t), ..., X_m(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, составляющие фундаментальную матрицу $\mathcal{X}(t)$ однородной импульсной системы $(\mathcal{L}x)(t) = 0$:

$$\mathcal{X}(t) = (X(t),\ X_1(t),\ ... X_m(t));$$

$C(t,s)$ – матрица Коши, соответствующая ядру $K(t,s)$ [13, 14];

$$\theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(t)\, C_t'(t,s)\,dt;$$

$M(t) = (\mathcal{F}^*\theta)(t)$ ($\mathcal{F}^*$ - оператор сопряженный к оператору $\mathcal{F}$); $\Lambda_k = \ell X_k,\ k = 1, ..., m$; $\Lambda = (\Lambda_1, ..., \Lambda_m)$; $\mu = \ell X \cdot \alpha + \int_0^T \theta(t) f(t)\,dt$.

Обозначим через $\mathcal{A}_i,\ i = 1, 2$ множество всех угловых точек множества $\mathcal{V}_i$. Пусть, далее, для $\lambda \in R^N$

$$z(t,\lambda) = \max(\lambda^\top \cdot M(t) \cdot v : v \in \mathcal{V}_1).$$

Определим $v(t,\lambda)$ как центр масс системы точек единичной массы, принадлежащих множеству $\mathcal{A}_1$ и доставляющих функционалу $z = \lambda^\top \cdot M(t) \cdot v$ значение $z(t,\lambda)$. Будем предполагать, что $v(\cdot,\lambda) \in L^r$ для каждого $\lambda \in R^N$.

Определим множество S_1 как множество векторов $\rho \in R^N$, удовлетворяющих при каждом $\lambda \in R^N$ неравенству

$$\lambda^\top \rho \ \le \ \int_0^T \lambda^\top M(t) v(t, \lambda)\, dt.$$

Множество S_2 определим как выпуклую оболочку Λ-образа множества $\mathcal{A}_2 : S_2 = conv(\Lambda \mathcal{A}_2)$.

Теорема 1. *Пусть элементы матрицы* $M(t)$ *кусочно непрерывны на* $[0, T]$. *Значение* $\beta \in R^N$ *является достижимым значением целевого вектор-функционала* ℓ *в задаче* (1)–(3) *если и только если оно представимо в виде* $\beta = \delta_1 + \delta_2$, *где* $\delta_1 \in S_1$, $\delta_2 \in S_2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Максимов В.П.* Об одном классе задач оптимального управления для функционально-дифференциальных систем // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 131-142.

2. *Максимов В.П.* Управление функционально-дифференциальной системой в условиях импульсных возмущений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. № 9. С. 70-74.

3. *Максимов В.П.* Импульсная коррекция управления для динамических моделей с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2009. Вып. 1 (1). С. 96-100.

4. *Анохин А.В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1037-1040.

5. *Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications // Memoirs on Diff. Equat. and Math. Phys. 1996. Vol. 8. P. 1-102.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

7. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M.* Theory of functional differential equations and applications // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2011. Vol. 69. № 2. P. 203-235.

8. *Maksimov V.P.* Theory of functional Differential equations and some problems in economic dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. New York; Cairo: Hindawi Publishing Corporation, 2006. P. 74-82.

9. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functional // Functional Differential Equations. 2009. Vol. 16. № 3. P. 517-527.

10. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

11. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

12. *Костоусова Е.К.* О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2012. Т. 18. № 4. С. 195-210.

13. *Максимов В.П.* О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 4. С. 601-606.

14. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Пермь: ПГУ, ПСИ, ПССГК, 2003. 306 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Максимов Владимир Петрович, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, e-mail: maksimov@econ.psu.ru

Для цитирования: *Максимов В.П.* Достижимые значения целевых функционалов для функционально-дифференциальной системы с импульсным воздействием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 441–447. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447

ATTAINABLE VALUES OF ON-TARGET FUNCTIONALS FOR A FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEM WITH IMPULSES

V. P. Maksimov

Perm State University
15 Bukirev St., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: maksimov@econ.psu.ru

Abstract. For a linear functional differential system with aftereffect and impulses, a description of the attainability set is given. The attainability is considered in the term of a given system of on-target functionals in the case of polyhedral constraints with respect to control and impulses.
Keywords: functional differential equations; control problems; attainability set

REFERENCES

1. Maksimov V.P. Ob odnom klasse zadach optimal'nogo upravleniya dlya funktsional'no-differentsial'nykh sistem [On a class of optimal control problems for functional differential systems]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 131-142. (In Russian).

2. Maksimov V.P. Upravlenie funktsional'no-differentsial'noy sistemoy v usloviyakh impul'snykh vozmushcheniy [Control of functional differential system in conditions of impulse disturbances]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2013, no. 9, pp. 70-74. (In Russian).

3. Maksimov V.P. Impul'snaya korrektsiya upravleniya dlya dinamicheskikh modeley s posledeystviem [Impulse correction of control for dynamic models with aftereffect]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Ekonomika – Perm University Herald. Economy*, 2009, no. 1 (1), pp. 96-100. (In Russian).

4. Anokhin A.V. O lineynykh impul'snykh sistemakh dlya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On linear impulse systems for functional-differential equations]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1986, vol. 286, no. 5, pp. 1037-1040. (In Russian).

5. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. Theory of linear abstract functional differential equations and applications. *Memoirs on Diff. Equat. and Math. Phys.*, 1996, vol. 8, pp. 1-102.

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Elements of Functional-Differentional Equations Modern Theory]. Moscow, Institute of Computer Science Publ., 2002, 384 p. (In Russian).

7. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Theory of functional differential equations and applications. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2011, vol. 69, no. 2, pp. 203-235.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00332) and the Vladimir Potanin Fund.

8. Maksimov V.P. Theory of functional Differential equations and some problems in economic dynamics. *Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications*. New York, Cairo, Hindawi Publishing Corporation, 2006, pp. 74-82.

9. Maksimov V.P. On the property of controllability with respect to a family of linear functional. *Functional Differential Equations*, 2009, vol. 16, no. 3, pp. 517-527.

10. Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [The Theory of Motion Control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p. (In Russian).

11. Kurzhanskiy A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [The Control and Observation Under Conditions of Indefiniteness]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 392 p. (In Russian).

12. Kostousova E.K. O poliedral'nykh otsenkakh mnozhestv dostizhimosti differentsial'nykh sistem s bilineynoy neopredlennost'yu [On polyhedral estimates for reachable sets of differential systems with bilinear uncertainty]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 195-210. (In Russian).

13. Maksimov V.P. O formule Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya [The Cauchy formula for a functional-differential equation]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 4, pp. 601-606. (In Russian).

14. Maksimov V.P. *Voprosy obshchey teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Questions of the General Theory of Functional Differential Equations]. Perm, Perm State University Publ., 2003, 306 p. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Maksimov Vladimir Petrovich, Perm State University, Perm, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems and Mathematical Methods in Economics Department, e-mail: maksimov@econ.psu.ru

For citation: Maksimov V.P. Dostizhimye znacheniya tselevykh functsionalov dlya functsionalno-differentsialnoi sistemy s impulsnym vozdeistviem [Attainable values of on-target functionals for a functional differential system with impulses]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 441–447. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-441-447 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-448-455

УДК 517.958

РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ПО СКОРОСТИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА С УЧЕТОМ СТЕПЕННОГО ВИДА ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПЛОТНОСТИ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЫ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

© Н. В. Малай, Н. Н. Самойлова

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Аннотация. Получено решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса в сфероидальной системе координат с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры с помощью обобщенных степенных рядов.

Ключевые слова: система уравнений Навье–Стокса; сфероид

Введение

Уравнения Навье–Стокса являются одними из важнейших в гидродинамике и применяются при математическом моделировании многих природных явлений и технических приложений [1, 2]. С чисто математических позиций уравнения Навье–Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективного члена ускорения $\left(\mathbf{U}\cdot\nabla\right)\mathbf{U}$. До сих пор решения этих уравнений найдены лишь для некоторых частных случаев [3, 4].

Существует обширный класс гидродинамических течений, в которых можно пренебречь нелинейным членом [1]. В результате получается система уравнений, называемая в научной литературе **линеаризованной по скорости системой уравнений Навье–Стокса**. Изучение решений линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса представляет большой научный, практический, а также методологический интерес и, позволяет развить математический аппарат, необходимый для исследования уже полной системы уравнений Навье–Стокса.

Использовании современных мощных лазеров в промышленности, медицине, сельском хозяйстве; при описании движения частиц в разнотемпературных каналах; при оценке скорости осаждения нагретых частиц, разработке методов тонкой очистки газов от аэрозольных примесей и т. д. мы сталкиваемся с ситуацией, когда средняя температура поверхности частиц, находящихся во взвешенном состоянии в газообразной среде, существенно отличается от температуры окружающего их газа. В этом случае система уравнений Навье–Стокса решается уже совместно с уравнениями тепло- и массопереноса, газообразная среда называется неизотермической и необходимо уже учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) и плотности газообразной среды от температуры. В результате мы получаем довольно сложную краевую задачу.

В ходе исследования авторам удалось при определенном виде поиска решений компонент массовой скорости и допустимых с точки зрения физики упрощениях, линеаризованную по скорости систему уравнений Навье–Стокса свести к однородному обыкновенному дифференциальному уравнению третьего порядка с изолированной особой точкой. Решение полученного дифференциального уравнения находилось в виде обобщенных степенных рядов [5].

Основные результаты.

Для нахождения решения линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса в качестве примера рассмотрим классическую задачу стационарного обтекания аэрозольной частицы сфероидальной формы плоскопараллельным потоком газа со скоростью $\mathbf{U}_\infty$ $(\mathbf{U}_\infty \| Oz)$ в случае неизотермической газообразной среды. Описание обтекания будем проводить в сплюснутой сфероидальной системе координат (τ, η, ϕ) [1], которая связана с декартовой соотношениями

$$x = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \cos\phi,\ y = c\ \operatorname{ch}\tau\ \sin\eta\ \sin\phi,\ z = c\ \operatorname{sh}\tau\cos\eta, \tag{1}$$

где $0 \le \tau < \infty$, $0 \le \eta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$, a и b– полуоси сфероида. При этом положение декартовой системы координат фиксировано относительно частицы таким образом, что ось z совпадает с осью симметрии сфероида. Все неизвестные функции зависят только от координат τ и η. Фиксированное значение τ соответствует сфероидальной поверхности с общим центром, совпадающим с началом координат. Поэтому границе области Ω_p с заданными длинами полуосей a и b соответствует строго определенное значение координаты $\tau = \tau_0$, которое связано с полуосями a и b соотношением: $\tau_0 = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{a+b}{a-b}\right|$ [1]. Здесь и далее индексы « g » относится к газообразной среде, а « p »– частице.

Общая система газодинамических уравнений нелинейна, и при ее решении рассмотрим следующие дополнительные условия, оправданные, например, с физической точки зрения, которые реализуются в большинстве прикладных задач.

У с л о в и е 1. Все процессы, происходящие в системе частица–газ, рассматриваются в квазистационарном приближении, что возможно в силу малости времени тепловой релаксации частиц. Считается, что характерные значения времен установления распределения полей температуры и скорости течения малы по сравнению с характерным временем нагрева поверхности частицы до максимальной температуры.

Условие 2. Определяющими параметрами задачи являются коэффициенты ρ_∞, μ_∞, λ_∞ и сохраняющиеся в процессе движения частицы величины – a, T_∞, U_∞. Здесь $a-$ экваториальный радиус сфероида. Из этих параметров можно составить две безразмерные комбинации: число Рейнольдса $Re_\infty = \left(\rho_\infty a U_\infty\right)/\mu_\infty \ll 1$ и тепловое число Пекле – $Pe_\infty = \left(\rho_\infty c_{pg} U_\infty a\right)/\lambda_\infty \ll 1$, где $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|-$ характерная скорость (величина скорости набегающего потока).

Условие 3. При описании свойств газообразной среды и частицы рассматривается степенной вид зависимости динамической вязкости, плотности и теплопроводности от температуры: $\mu_g = \mu_\infty\left(\dfrac{T_g}{T_\infty}\right)^\beta$, $\rho_g = \rho_\infty\dfrac{T_\infty}{T_g}$, $\lambda_g = \lambda_\infty\left(\dfrac{T_g}{T_\infty}\right)^\alpha$ и $\lambda_p = \lambda_*\left(\dfrac{T_p}{T_\infty}\right)^\omega$, $\mu_\infty = \mu_g(T_\infty)$, $\rho_\infty = \rho_g(T_\infty)$, $\lambda_\infty = \lambda_g(T_\infty)$, $\lambda_* = \lambda_p(T_\infty)$, $0,5 \le \alpha,\ \beta \le 1$, $-1 \le \omega \le +1$.

Условие 4. Коэффициент теплопроводности частицы (λ_p) по величине много больше коэффициента теплопроводности газа (λ_g), то есть $\lambda_g \ll \lambda_p$. Это условие приводит к тому, что в коэффициенте вязкости можно пренебречь зависимостью по углу η в системе «частица — газ» (предполагается слабая угловая асимметрия распределения температуры) и считается, что вязкость связана только с температурой $T_g^{(0)}(\tau)$, то есть $\mu_g(T_g(\tau,\eta)) \approx \mu_g(T_g^{(0)}(\tau))$. При этом $T_g(\tau,\eta) = T_g^{(0)}(\tau) + \delta T_g(\tau,\eta)$, где $\delta T_g(\tau,\eta) \ll T_g^{(0)}(\tau)$; $T_g^{(0)}(\tau)$, $\delta T_g(\tau,\eta)$ определяются из решения тепловой задачи. Это условие позволяет рассматривать гидродинамическую часть отдельно от тепловой части, а связь между ними осуществляется через граничные условия.

Вязкая неизотермическая газообразная среда занимает неограниченную область $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$ ($x \in \Omega_g$), где Ω_p– сфероидальная область с центром в нуле евклидова пространства R^3. Требуется найти векторное поле скорости $\mathbf{U_g}\,(\,x\,)$ и скалярное поле давления $P_g\,(\,x\,)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial P_g}{\partial x^i} = \frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1H_2H_3H_k}{H_k}\sigma_{ik}\right) - \frac{\sigma_{kk}}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right], \tag{2}$$

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}\rho_g U^g_{x^i}\right) = 0, \tag{3}$$

$$\rho_g c_{pg}\left(\frac{U^g_{x^i}}{H_i}\frac{\partial T_g}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\lambda_g\frac{\partial T_g}{\partial x^i}\right),\ P_g = n_g k T_g, \tag{4}$$

где через $U^g_{x^i}, \sigma_{ik}$– обозначены физические компоненты массовой скорости $\mathbf{U_g}$ и тензора полных напряжений σ_{ik},

$$\sigma_{ik} = \mu_g\Bigg(\frac{1}{H_k}\frac{\partial U^g_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial U^g_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_iH_k}\left[U^g_{x^i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} + U^g_{x^k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right] +$$
$$+2\delta_i^k\sum_{n=1}^{3}\frac{U^g_{x^n}}{H_iH_n}\frac{\partial H_i}{\partial x^n} - \frac{2}{3}\delta_i^k\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_n}U_{x^n}\right)\Bigg),$$

где H_i– коэффициенты Ламэ, k– постоянная Больцмана, P_g, T_g– давление и температура газообразной среды, ρ_g, c_{pg}, μ_g и λ_g– плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении, коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности газообразной среды, соответственно, $\rho_g = n_g m_g$, n_g – концентрация и m_g – масса молекул вязкой среды.

Система (2)–(4) решается со следующими краевыми условиями в системе координат сплюснутого сфероида (условия обтекания)

$$\lim_{\tau\to\infty} \mathbf{U_g} = U_\infty \frac{c\,\mathrm{ch}\,\tau}{H_1}\cos\eta\,\mathbf{e}_\tau - U_\infty \frac{c\,\mathrm{sh}\,\tau}{H_1}\sin\eta\,\mathbf{e}_\eta,\ \lim_{\tau\to\infty} P_g = P_\infty\,. \tag{5}$$

Исходя из вида краевых условий (5), искать выражения для компонент массовой скорости в сфероидальной системе координат будем в виде

$$U_\tau(\tau,\eta) = \frac{U_\infty}{c\ \mathrm{ch}\ \tau\, H_1} G(\tau)\ \cos\eta, \quad U_\eta(\tau,\eta) = -\frac{U_\infty}{c\,H_1} g(\tau)\ \sin\eta, \tag{6}$$

где $G(\tau)$ и $g(\tau)$ – подлежащие определению функции. Поиск решения в виде (6) позволяет, во-первых, систему уравнений в частных производных свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; во-вторых, освободиться от угловой зависимости искомых функций и свести в итоге задачу к обыкновенному однородному дифференциальному уравнению третьего порядка для функции $G(\tau)$.

Связь между функциями $G(\tau)$ и $g(\tau)$ найдем из уравнения непрерывности (3), учитывая условия 3 и 4

$$g(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{dG(\lambda)}{d\lambda} - \frac{1}{2} f(\lambda) G(\lambda), \quad f(\lambda) = \frac{1}{t_g^{(0)}(\lambda)} \frac{dt_g^{(0)}(\lambda)}{d\lambda}. \tag{7}$$

Функция $t_g^{(0)}(\lambda)$, входящая в (7), определяется из решения стационарного уравнения теплопроводности (4) методом сращиваемых асимптотических разложений и имеет вид

$$t_g^{(0)}(\lambda) = \left(1 + \gamma_0 \operatorname{arcctg}\lambda\right)^{\dfrac{1}{1+\alpha}}, \tag{8}$$

где γ_0 – постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий на поверхности нагретой частицы.

С учетом (8), допущений 3 и 4 зависимость вязкости газообразной среды от температуры принимает вид

$$\mu_g(\lambda) = \mu_\infty \left(1 + \gamma_0 \operatorname{arcctg}(\lambda)\right)^{\dfrac{\beta}{1+\alpha}}. \tag{9}$$

Записав линеаризованные по скорости уравнения Навье–Стокса в сфероидальной системе координат, подставив в них выражения для компонент тензора напряжений и выражения для компонент массовой скорости (11), освобождаясь от давления в конечном итоге, с учетом (8)–(9), получаем следующее однородное дифференциальное уравнение третьего порядка для функции $\widetilde{G}(\nu) = G(1/\nu) = G(\mathrm{sh}\ \tau)$

$$\psi_3(\nu)\frac{d^3\widetilde{G}}{d\nu^3} + \psi_2(\nu)\frac{d^2\widetilde{G}}{d\nu^2} + \psi_1(\nu)\frac{d\widetilde{G}}{d\nu} + \psi_0(\nu)\widetilde{G} = 0, \tag{10}$$

где

$$\psi_3(\nu) = \nu^3 \left(1 + \nu^2\right),$$

$$\psi_2(\nu) = \nu^2 \left(5 + 7\nu^2 - \gamma_1 \nu L\right),$$

$$\psi_1(\nu) = \nu \left(2 + 8\nu^2 - \left(2\gamma_1 - \frac{5\gamma_3 + \gamma_2\nu^2}{1+\nu^2}\right)\nu L + \gamma_4 \frac{\nu^2 L^2}{1+\nu^2}\right),$$

$$\psi_0(\nu) = -2 - \left(\gamma_5 + \gamma_6\nu^2\right)\frac{\nu L}{(1+\nu^2)^2} + \left(5\gamma_3 - \gamma_8 + (\gamma_3 - \gamma_7)\,\nu^2\right)\frac{\nu^2 L^2}{(1+\nu^2)^2} - (2\gamma_3 - \gamma_9)\,\frac{\nu^3 L^3}{(1+\nu^2)^2},$$

$$\gamma_1 = \frac{2-3\beta}{2(1+\alpha)},\ \ \gamma_2 = \frac{1-\beta}{1+\alpha},\ \ \gamma_3 = \frac{1}{1+\alpha},\ \ \gamma_4 = \frac{4(1+\alpha)+\beta(\beta-\alpha-4)}{2(1+\alpha)^2},\ \ \gamma_5 = \frac{4+\beta}{1+\alpha},$$

$$\gamma_6 = \frac{\beta}{1+\alpha},\ \ \gamma_7 = \frac{\beta}{(1+\alpha)^2},\ \ \gamma_8 = \frac{-\beta(\beta-\alpha-4)}{(1+\alpha)^2},\ \ \gamma_9 = \frac{-\beta(\beta-4\alpha-4)}{2\,(1+\alpha)^3},\ \ L = \frac{\gamma_0}{1+\gamma_0\cdot \operatorname{arctg}\nu}.$$

Заметим, что точка $\nu = 0$ для уравнения (10) является регулярной особой точкой [5, 6], поэтому решение однородного дифференциального уравнения можно искать с помощью обобщенных степенных рядов, разложив в степенные ряды функции $\psi_i(\nu)$, $i = 0, 1, 2, 3,$ входящие в уравнение (10).

Решение уравнения (10) ищем в виде обобщенного степенного ряда

$$\widetilde{G} = \nu^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \nu^n, \quad C_0 \neq 0. \tag{11}$$

Вычисляя производные и, подставляя их в (10), приравнивая коэффициенты при $\nu^{n+\rho}$, получаем определяющее уравнение $\rho^3 + 2\rho^2 - \rho - 2 = 0,$ корни которого равны соответственно: $\rho_1 = 1,$ $\rho_2 = -2,$ $\rho_3 = -1.$

Заметим, что разность корней равна целому числу, следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов методом Фробениуса, система линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения (10) содержит логарифмические члены [5, 6] и имеет вид

$$\widetilde{G}_1(\nu) = \nu \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,1}\nu^n, \quad \widetilde{G}_2(\nu) = \frac{1}{\nu^2}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,2}\nu^n + \omega_1 \ln\frac{\nu}{\nu_0}\,\widetilde{G}_1(\nu), \tag{12}$$

$$\widetilde{G}_3(\nu) = \frac{1}{\nu}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,3}\nu^n + \omega_2 \ln\frac{\nu}{\nu_0}\,\widetilde{G}_1(\nu). \tag{13}$$

Здесь $w_1, w_2 - const.$

Подставляя (12)–(13) в уравнение (10), методом неопределенных коэффициентов получаем рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов $C_{n,i},$ $i = 1,\ 2,\ 3.$

Таким образом, общее решение уравнения (10) имеет вид $\widetilde{G}(\nu) = A_1\widetilde{G}_1(\nu) + A_2\widetilde{G}_2(\nu) + A_3\widetilde{G}_3(\nu)$. Ряды, определяющие функции $\widetilde{G}_i(\nu)$, $i = 1, 2, 3$ равномерно сходятся при $\nu \in (0,\ 1)$.

В результате проведенного исследования доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение уравнения* (10) *имеет вид* $\widetilde{G}(\nu) = A_1\widetilde{G}_1(\nu) + A_2\widetilde{G}_2(\nu) + A_3\widetilde{G}_3(\nu)$, *где коэффициенты* A_1, A_2, A_3 *– произвольные постоянные, функции* $\widetilde{G}_1(\nu)$, $\widetilde{G}_2(\nu)$, $\widetilde{G}_3(\nu)$ *– задаются формулами* (12)–(13). *Функция* $\widetilde{G}(\nu)$ *удовлетворяет краевым условиям* (5).

Зная общее решение уравнения (10), мы можем найти компоненты векторного поля $\mathbf{U_g}(x)$ и скалярной функции давления $P_g(x)$ в области $\Omega_g = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_p$ ($x \in \Omega_g$), удовлетворяющих системе уравнений (2)–(4) и краевым условиям (5), при степенном виде зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры (9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1960.
2. *Котеров В.Н., Шмыглевский Ю.Д., Щепров А.В.* Обзор аналитических исследований установившихся течений вязкой несжимаемой жидкости (2000-2004 гг.) // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. № 5. С. 899-920.
3. *Ладыженская О.А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса. Существование и гладкость // УМН. 2003. Т. 58. Вып. 2 (350). С. 45-78.
4. *Малай Н.В., Миронова Н.Н., Глушак А.В.* Решение краевой задачи для уравнения Навье–Стокса при обтекании нагретого сфероида газообразной средой // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 879-883.
5. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1981. 703 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Малай Николай Владимирович, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и математической физики, e-mail: malay@bsu.edu.ru

Самойлова Надежда Николаевна, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры теоретической и математической физики, e-mail: mironovanadya@mail.ru

Для цитирования: *Малай Н.В., Самойлова Н.Н.* Решение линеаризованной по скорости системы уравнений Навье–Стокса с учетом степенного вида зависимости вязкости, теплопроводности и плотности газообразной среды от температуры // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 448–455. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-448-455

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-448-455

SOLUTION OF THE SYSTEM OF NAVIER–STOKES EQUATIONS LINEARIZED WITH RESPECT TO THE VELOCITY WITH REGARD OF A POWER-LOW DEPENDENCE OF VISCOSITY, THERMAL CONDUCTIVITY AND THE GASEOUS MEDIUM DENSITY ON THE TEMPERATURE

N. V. Malai, N. N. Samoilova

Belgorod National Research University
85 Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation
E-mail: malay@bsu.edu.ru, mironovanadya@mail.ru

Abstract. We received the solution of the system of Navier–Stokes equations linearized with respect to the velocity in the spheroidal coordinate system with regard of a power-law dependence of viscosity, thermal conductivity and the gaseous medium density on the temperature by means of generalized power series.
Keywords: system of Navier–Stokes equations; a spheroid

REFERENCES

1. Happel J., Brenner H. *Gidrodinamika pri malykh chislakh Reynol'das* [Low Reynolds Number Hydrodynamics]. Moscow, Mir Publ., 1960. (In Russian).

2. Koterov V.N., Shmyglevskiy Yu.D., Shcheprov A.V. Obzor analiticheskikh issledovaniy ustanovivshikhsya techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti (2000-2004 gg.) [A survey of analytical studies of steady viscous incompressible flows (2000-2004)]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2005, vol. 45, no. 5, pp. 899-920. (In Russian).

3. Ladyzhenskaya O.A. Shestaya problema tysyacheletiya: uravneniya Nav'e–Stoksa. Sushchestvovanie i gladkost' [Sixth problem of the millennium: Navier–Stokes equations, existence and smoothness]. *Uspekhi matematicheskikh nauk – Russian Mathematical Surveys*, 2003, vol. 58, no. 2 (350), pp. 45-78. (In Russian).

4. Malay N.V., Mironova N.N., Glushak A.V. Reshenie kraevoy zadachi dlya uravneniya Nav'e-Stoksa pri obtekanii nagretogo sferoida gazoobraznoy sredoy [Solution of the boundary value problem for the Navier–Stokes equation for the flow of a gaseous medium past a heated spheroid]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 6, pp. 879-883. (In Russian).

5. Koddington E.A., Levinson N. *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1958. (In Russian).

6. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam* [Typical Differential Equations Guide]. Moscow, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1981, 703 p. (In Russian).

Received 17 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Malai Nikolai Vladimirovich, Belgorod National Research University, Belgorod, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of Theoretical and Mathematical Physics Department, e-mail: malay@bsu.edu.ru.

Samoilova Nadezhda Nikolaevna, Belgorod National Research University, Belgorod, the Russian Federation, Lecturer of Theoretical and Mathematical Physics Department, e-mail: mironovanadya@mail.ru

For citation: Malai N.V., Samoilova N.N. Reshenie linearizovannoy po skorosti sistemy uravneniy Nav'e–Stoksa s uchetom stepennogo vida zavisimosti vyazkosti, teploprovodnosti i plotnosti gazoobraznoy sredy ot temperatury [Solution of the system of Navier–Stokes equations linearized with respect to the velocity with regard of a power-law dependence of viscosity, thermal conductivity and the gaseous medium density on the temperature]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 448-455. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-448-455 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465
УДК 517.929

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **В. В. Малыгина**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: mavera@list.ru

Аннотация. Рассматривается модель динамики изолированной популяции, особи которой проходят три стадии развития. Для описания модели используется нелинейное автономное дифференциальное уравнение с сосредоточенным и распределенным запаздыванием. Получены эффективные достаточные признаки асимптотической устойчивости нетривиального положения равновесия.

Ключевые слова: динамика популяций; функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием; устойчивость

1. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена изучению модели динамики популяций, проходящей в своем развитии три возрастных стадии. Первые варианты такой модели, использующие аппарат уравнений с последействием, были предложены в работе [1]; там же были приведены примеры решений, построенных численными методами. В работе [2] было начато исследование устойчивости решений таких уравнений, в работах [3] и [4] это исследование было продолжено и дополнено новыми результатами. В заключительной части работы [3] ставился ряд новых задач и, в частности, в качестве возможного обобщения предлагалась следующая модель:

$$\dot{y}(t)=\beta y(t-\tau)-\lambda(y(t))y(t)-Ky(t),\quad t\geqslant 0, \tag{1}$$

где

$$Ky(t)=\begin{cases}\beta\int_0^h e^{-\int_{t-s}^t\lambda(y(\zeta))d\zeta}y(t-\tau-s)dR(s), & \text{если } t\geqslant h,\\ \beta\int_0^t e^{-\int_{t-s}^t\lambda(y(\zeta))d\zeta}y(t-\tau-s)dR(s)+ & \\ \qquad\qquad +\beta e^{-\int_0^t\lambda(y(\zeta))d\zeta}\left(\int_0^{h-t}\varphi(s)dR(t+s)\right), & \text{если } t\leqslant h.\end{cases}$$

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (№ 1.5336.2017/8.9) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00928).

Здесь $y(t)$ — количество зрелых особей в момент времени t; интенсивность гибели таких особей (процесс «самолимитирования») описывается непрерывной, неотрицательной, монотонно возрастающей функцией $\lambda(u)$, причем $\lambda(0) = 0$, $\lim_{u\to+\infty} \lambda(u) = +\infty$. Посредством коэффициента $\beta = \eta e^{-\mu\tau}$ учитывается скорость производства потомства на одну особь $\eta > 0$, интенсивность гибели незрелых особей от внешних факторов $\mu > 0$ и продолжительность времени созревания особей $\tau > 0$. Зрелые индивидуумы имеют максимальное время жизни $h > 0$, по достижении которого они либо погибают, либо переходят в третью — не репродуктивную — стадию жизни.

Оператор K задает скорость уменьшения численности особей за счет гибели или процессов старения. Неотрицательная функция φ описывает скорость производства первоначально существующих особей. Функция R предполагается неубывающей на отрезке $[0, h]$, причем $R(0) = 0$, $R(h) = 1$. Функцию $1 - R(t + s)$ можно рассматривать как долю особей, вступивших в момент времени t в стадию зрелости, и оставшихся в этой стадии к моменту $t + s$.

Интегралы в описании оператора K понимаются в смысле Римана–Стилтьеса.

Функция R, как функция ограниченной вариации, всегда может быть представлена в виде суммы кусочно-постоянной, абсолютно непрерывной и сингулярной функций. С учетом прикладного характера задачи можно отбросить сингулярную составляющую и ограничить класс функций R следующим:

$$R(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi(t - h_k) + \int_0^t r(s)ds, \tag{2}$$

где $a_k \geqslant 0$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_m \leqslant h$, χ — функция Хевисайда, r — неотрицательная непрерывная на $[0, h]$ функция.

Отметим, что модель, рассмотренная в работах [3] и [4], соответствует ситуации, когда $R(t) = \chi(t-h)$, то есть случаю сосредоточенного запаздывания. В данной работе нас будет интересовать вариант комбинированного последействия, которое включает как «сосредоточенное» (в точках $h_1, h_2, \ldots, h_m$) запаздывание, так и «распределенное» (по отрезку $[0, h]$), которое учитывается функцией r.

При отрицательных значениях аргумента предполагаем функцию y доопределенной непрерывной начальной функцией: $y(\xi) = \psi(\xi)$ при $\xi \leqslant 0$.

Начальная численность особей равна $y(0) = \int_0^h (1 - R(s))\, \varphi(s)ds$.

Аналогично $[1, 2]$ устанавливаем, что уравнение (1) при любой начальной функции в вышеперечисленных предположениях однозначно разрешимо на любом конечном интервале $[0, l] \subset [0, \infty)$. При этом, если начальная функция априори предполагается неотрицательной, то решение $y(t)$ также оказывается неотрицательным при любом $t \geqslant 0$. Для обоснования этого достаточно перейти (подробнее см. [1]) от уравнения (1) с заданным начальным условием к эквивалентной интегральной форме

$$y(t) = Gy(t), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор G определяется соотношениями

$$Gy(t) = \begin{cases} \beta \int_0^h R(s) e^{-\int_{t-s}^{t} \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)ds, & \text{если } t \geqslant h, \\ \beta \int_0^t R(s) e^{-\int_{t-s}^{t} \lambda(y(\zeta))d\zeta} y(t-\tau-s)ds + \\ \qquad + e^{-\int_0^t \lambda(y(\zeta))d\zeta} \left(\beta \int_0^{h-t} R(s+t)\varphi(s)ds\right), & \text{если } t \leqslant h. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что оператор G является изотонным и эволюционным. Очевидно, что в соответствии с физическим смыслом задачи начальная функция неотрицательна, откуда следует неотрицательность $y(t)$ при любом $t \geqslant 0$.

2. Вспомогательная функция

Для удобства исследования и описания свойств решения уравнения (1) введем вспомогательную функцию

$$\rho(w) = \int_0^h e^{-ws} dR(s), \quad w \geqslant 0.$$

С учетом представления (2) функция ρ состоит из двух компонент:

$$\rho(w) = \sum_{k=1}^{m} a_k e^{-h_k w} + \int_0^h e^{-ws} r(s) ds.$$

Достаточно полную информацию о свойствах функции ρ дает следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функция ρ обладает следующими свойствами:*
a) ρ имеет производные всех порядков, причем $\rho^{(n)}(w) = (-1)^n \int_0^h s^n e^{-ws} dR(s)$;
b) ρ монотонно убывает на $[0, \infty)$;
c) $\rho(0) = 1$;
d) $\lim_{w\to+\infty} \rho(w) = 0$;
e) $\lim_{w\to+\infty} w\rho'(w) = 0$;
f) $\lim_{w\to+\infty} w\rho(w) = r(0)$.

Доказательство. Дифференцируемость и вид производных функции ρ вытекают непосредственно из определения ρ и теоремы Лейбница о дифференцируемости интеграла по параметру.

Так как $\rho'(w) = -\int_0^h s e^{-ws} dR(s) < 0$ при любом $w \geqslant 0$, то ρ монотонно убывает.

Свойство c) очевидно, так как $\rho(0) = \int_0^h dR(s) = R(h) - R(0) = 1$.

При доказательстве свойств d)–f) требуется установить их справедливость только для второй (интегральной) компоненты функции ρ, так как для первой они верны в силу $\lim_{w\to\infty} e^{-h_k w} = \lim_{w\to\infty} w e^{-h_k w} = 0$.

Обозначим $r_{\max} = \max_{t\in[0,h]} r(t)$. Свойство d) следует из неравенств:

$$0 \leqslant \int_0^h e^{-ws} r(s) ds \leqslant r_{\max} \int_0^h e^{-ws} ds \leqslant \frac{r_{\max}}{w} \int_0^{+\infty} e^{-s} ds,$$

а свойство e) из аналогичных оценок:

$$w \left| \int_0^h s e^{-ws} r(s) ds \right| \leqslant r_{\max} \int_0^h w s e^{-ws} ds \leqslant \frac{r_{\max}}{w} \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds.$$

Осталосьдоказать наиболее интересное свойство f). Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta>0$, такое, что при всех $s\in[0,\delta)$ справедливо $|r(s)-r(0)|<\varepsilon/3$. Оценим разность

$$\begin{aligned}|w\rho(w)-r(0)| &= \left|\int_0^h we^{-ws}\left(r(s)-r(0)\right)ds - r(0)e^{-wh}\right| \leqslant \\ &\leqslant \int_0^\delta we^{-ws}\left|r(s)-r(0)\right|ds + \int_\delta^\infty we^{-ws}\left|r(s)-r(0)\right|ds + r(0)e^{-wh} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon/3\int_0^{+\infty} e^{-s}ds + 2r_{\max}\int_{\delta w}^{+\infty} e^{-s}ds + r(0)e^{-wh} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon/3 + 2r_{\max}e^{-\delta w} + r(0)e^{-wh}.\end{aligned}$$

Теперь по заданному $\delta>0$ найдем такое $w_0>0$, что при всех $w\geqslant w_0$ справедливы неравенства $\left|2r_{\max}e^{-\delta w}\right|<\varepsilon/3$ и $\left|r(0)e^{-wh}\right|<\varepsilon/3$.

Тем самым мы показали, что для любого $\varepsilon>0$ найдется w_0, начиная с которого верно неравенство $|w\rho(w)-r(0)|<\varepsilon$. Лемма доказана.

3. Точки равновесия

Проведем классификацию равновесных состояний нашей задачи. Пусть y^* — точка равновесия уравнения (1). Подстановка в (1) дает:

$$y^*\left(\beta-\lambda(y^*)-\beta\int_0^h e^{-\lambda(y^*)s}dR(s)\right)=0,$$

откуда следует либо $y^*=0$, либо должно выполняться равенство

$$\beta\left(1-\int_0^h e^{-\lambda(y^*)s}dR(s)\right)=\lambda(y^*).$$

Далее нас будет интересовать ненулевое положение равновесия, соответствующее, согласно постановке задачи, жизнеспособной (невырождающейся) популяции.

Обозначим $w=\lambda(y^*)$. При $y^*>0$ в силу свойств функции λ имеем $w>0$. С учетом обозначений предыдущего раздела получаем

$$\beta=\frac{w}{1-\rho(w)}. \tag{3}$$

Так как функция λ имеет определенную на R_+ обратную функцию, то уравнение (1) имеет ненулевое положение равновесия тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет положительный корень. Выясним, при каких условиях на параметры уравнения (1) это возможно. Пусть $f(w)=\frac{w}{1-\rho(w)}$. Из свойств b) и c) функции ρ следует, что функция f определена и непрерывно дифференцируема при всех $w>0$. Легко видеть, что

$$f'(w)=\frac{1-\rho(w)+w\rho'(w)}{\left(1-\rho(w)\right)^2}=\frac{\rho(0)-\rho(w)+w\rho'(w)}{\left(1-\rho(w)\right)^2}=\frac{w(\rho'(w)-\rho'(\theta))}{\left(1-\rho(w)\right)^2},$$

где $0 < \theta < w$. Из свойства a) функции ρ заключаем, что $f'(w) > 0$. Кроме того,

$$\lim_{w\to+0} f(w) = -\lim_{w\to+0} 1/\rho'(w) = -1/\rho'(0),$$

а с учетом свойства d) функции ρ

$$\lim_{w\to+\infty} f(w) = \lim_{w\to+\infty} \frac{w}{1-\rho(w)} = +\infty.$$

Таким образом, f — непрерывно дифференцируемая, монотонно возрастающая на $(0,+\infty)$ функция с областью значений $(-1/\rho'(0),+\infty)$. Из равенства (3) получаем:

- если $\beta \leqslant -1/\rho'(0)$, то уравнение (1) имеет только нулевую точку равновесия;
- если $\beta > -1/\rho'(0)$, то уравнение (1) имеет, кроме нулевой, положительную точку равновесия $y^* = \lambda^{-1}(w)$, которая однозначно определяется единственным положительным корнем уравнения (3): $w = f^{-1}(\beta)$.

Дальше мы будем интересоваться только вторым случаем.

4. Признак устойчивости

Рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости точки равновесия $y^* > 0$, опираясь на уравнение линейного приближения.

Будем считать, что в окрестности точки y^* функция λ непрерывно дифференцируема; обозначим $v = \lambda'(y^*)y^*$. Сделаем в уравнении (1) замену переменных $y = y^*+x$, отбросим нелинейные слагаемые, учитывая, что при малых x

$$\lambda(y^*+x) \approx \lambda(y^*) + \lambda'(y^*)x,\ 1-\exp\left(\lambda'(y^*)\int_{t-s}^{t} x(s)ds\right) \approx \lambda'(y^*)\int_{t-s}^{t} x(s)ds.$$

В итоге придем к линейному приближению уравнения (1):

$$\dot{x}(t) + (v+w)x(t) = (Tx)(t), \quad t \in \mathrm{R}_+, \tag{4}$$

где

$$(Tx)(t) = \ \beta x(t-\tau) - \beta\int_0^h e^{-ws}x(t-\tau-s)\,dR(s) + \beta v\int_0^h e^{-ws}\left(\int_{t-s}^{t} x(\zeta)d\zeta\right)dR(s). \tag{5}$$

Задача об устойчивости ненулевой точки равновесия уравнения (1) свелась, таким образом, к задаче устойчивости нулевого решения уравнения (4). В силу линейности (4) устойчивость нулевого решения для него эквивалентна устойчивости любого решения, поэтому далее будем говорить просто об устойчивости уравнения (4).

Для удобства изложения приведем здесь формулировку известного признака устойчивости, на основе которого будет исследовано уравнение (4).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + ax(t) = (Tx)(t) + f(t), \quad t \in \mathrm{R}_+, \tag{6}$$

где $a > 0$, а T — линейный регулярный вольтерров оператор с ограниченным последействием, f — локально-суммируемая функция.

Через C и L_∞ обозначим пространства непрерывных и ограниченных в существенном на полуоси функций с естественными нормами.

Теорема 4.1. [5] Пусть $T : C \to L_\infty$ и $\|T\|_{C\to L_\infty} < a$. Тогда уравнение (6) экспоненциально устойчиво.

Применим теорему 4.1 к уравнению (4). В данном случае $a = v + w$, а оператор T определен равенством (5). Не нарушая общности [6] можно считать, что в равенстве (6) при отрицательных значениях аргумента функция x доопределяется нулем. Очевидно, что оператор T удовлетворяет всем перечисленным выше условиям. Оценим его норму. Так как

$$\operatorname{vrai}\sup_{t\geqslant 0} |(Tx)(t)| \leqslant \beta \left(1 + \int_0^h e^{-ws}\, dR(s) + v\int_0^h se^{-ws}\, dR(s)\right) \sup_{t\geqslant 0} |x(t)|,$$

то $\|Tx\|_{L_\infty} \leqslant \beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w))\,\|x\|_C$, следовательно,

$$\|T\|_{C\to L_\infty} \leqslant \beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w))\,. \tag{7}$$

Теорема 4.2. *Если для всех $w > 0$ выполнено неравенство*

$$v > \frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)}, \tag{8}$$

то ненулевое положение равновесия уравнения (1) *локально экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Применим теорему 4.1 к уравнению (4). В данном случае $a = v+w$, а для нормы оператора T, определенного равенством (5), имеет место оценка (7). Значит, уравнение (4) экспоненциально устойчиво, если $\beta\,(1 + \rho(w) - v\rho'(w)) < v + w$. Учитывая (3), перепишем предыдущее неравенство в виде $v(1 - \rho(w) + w\rho'(w)) > 2w\rho(w)$, что эквивалентно (8), так как $1 - \rho(w) + w\rho'(w) > 0$ (см. доказательство монотонности функции f). Следовательно, выполнение неравенства (8) гарантирует экспоненциальную устойчивость уравнения (4), откуда, в силу теоремы 1 из [7], следует утверждение теоремы.

5. Область устойчивости

Обозначим

$$g(w) = \frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)}$$

и отметим некоторые свойства функции g.

Из свойства a) функции ρ следует, что g — непрерывно дифференцируемая на $[0, \infty)$ функция. Далее, так как

$$\lim_{w\to+0} g(w) = \lim_{w\to+0} \frac{2w\rho(w)}{1 - \rho(w) + w\rho'(w)} = \lim_{w\to+0} \frac{2}{w} \cdot \frac{\rho(w) + w\rho'(w)}{\rho''(w)} = \frac{\rho(0)}{\rho''(0)} \lim_{w\to+0} \frac{2}{w} = +\infty,$$

то график функции g имеет вертикальную асимптоту $w = 0$. Наконец, из свойств d), e) и f) функции ρ получаем

$$\lim_{w\to+\infty} g(w) = \lim_{w\to+\infty} \frac{2w\rho(w)}{1-\rho(w)+w\rho'(w)} = 2r(0),$$

то есть у графика функции g есть горизонтальная асимптота.

В частности, если $R(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi(t-h_k)$, то всегда $\lim_{w\to+\infty} g(w) = 0$.

Ниже приведены графики функций g при различном выборе параметров уравнения (1).

Рис. 1: $h = 1$, $R(t) = \chi(t-1)$.

Рис. 2: $h = 1$, $R(t) = \frac{1}{2}\chi(t-1) + \frac{t}{2}$.

Рис. 3: $h = 1$, $R(t) = 3t - 6t^2 + 4t^3$.

Рис. 4: $h = 1$, $R(t) = 5t - 20t^2 + 40t^3 - 40t^4 + 16t^5$.

Область устойчивости, определяемая теоремой 4.2, задается неравенством $v > g(w)$ и на рисунках обозначена цветом. Тонкой линией отмечены горизонтальные асимптоты графиков функций g.

Приведенные примеры показывают, что такие свойства функции g, как монотонность и выпуклость, существенно зависят от вида функции r.

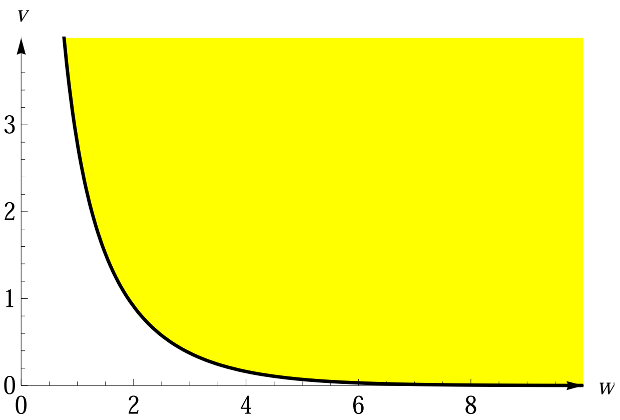

Рис. 1.

Рис. 2.

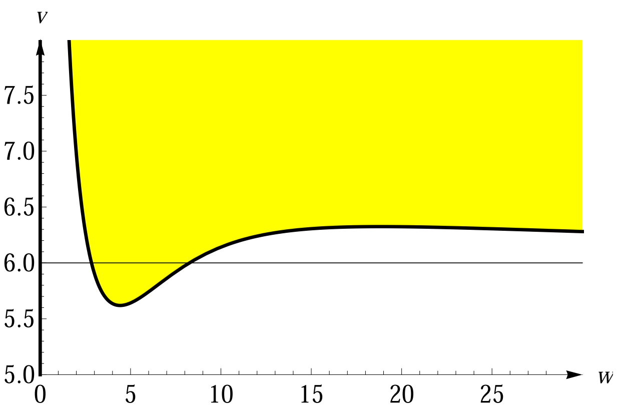

Рис. 3.

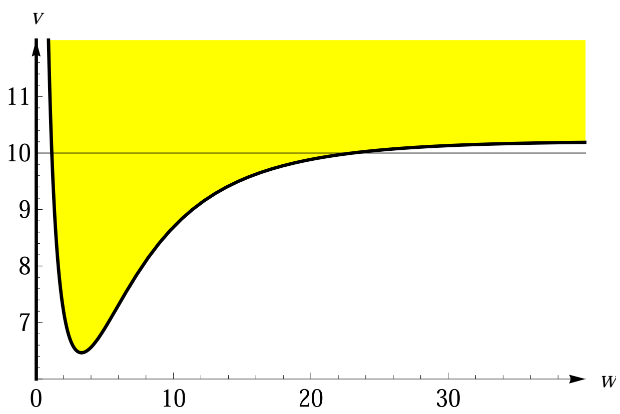

Рис. 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарасов И.А., Перцев Н.В.* Анализ решений интегро-дифференциального уравнения, возникающего в динамике популяций // Вестник Омского университета. 2003. № 2. С. 13-15.

2. *Перцев Н.В.* Об устойчивости нулевого решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций // Известия высших учебных заведений. Математика. 1999. № 8. С. 47-53.

3. *Малыгина В.В., Мулюков М.В., Перцев Н.В.* О локальной устойчивости одной модели динамики популяций с последействием // Сибирские электронные математические известия. 2014. Т. 11. С. 951-957.

4. *Малыгина В.В., Мулюков М.В* О локальной устойчивости одной модели динамики популяции с тремя стадиями развития // Известия высших учебных заведений. Математика. 2017. № 4. С. 35-42.

5. *Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В.* Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 4. С. 25-63.

6. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

7. *Азбелев Н.В., Малыгина В.В.* Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 1994. № 6. С. 20-27.

Поступила в редакцию 19 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Малыгина Вера Владимировна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЦ «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: mavera@list.ru

Для цитирования: *Малыгина В.В.* Об устойчивости одной модели динамики популяций с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 456–465. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465

ON THE STABILITY OF A POPULATION DYNAMICS MODEL WITH DELAY

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomolskiy Av., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: mavera@list.ru

Abstract. We consider a model of the dynamics of an isolated population whose individuals pass through the three stages of evolution. We use a nonlinear autonomous differential equation with concentrated and distributed delay for description of the model. Effective sufficient conditions for the asymptotic stability of the nontrivial equilibrium point are obtained.
Keywords: population dynamics; delay differential equation; stability

REFERENCES

1. Tarasov I.A., Pertsev N.V. Analiz resheniy integro-differentsial'nogo uravneniya, voznikayushchego v dinamike populyatsiy [The analysis of solutions to an integro-differential equation emerging in population dynamics]. *Vestnik Omskogo universiteta – Herald of Omsk University*, 2003, no. 2, pp. 13-15. (In Russian).

2. Pertsev N.V. Ob ustoychivosti nulevogo resheniya odnoy sistemy integro-differentsial'nykh uravneniy, voznikayushchey v modelyakh dinamiki populyatsiy [On the stability of the zero solution of a system of integro-differential equations emerging in population dynamics]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1999, no. 8, pp. 47-53. (In Russian).

3. Malygina V.V., Mulyukov M.V., Pertsev N.V. O lokal'noy ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsiy s posledeystviem [On the local stability of a population dynamics model with aftereffect]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya – Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 951-957. (In Russian).

4. Malygina V.V., Mulyukov M.V. O lokal'noy ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsii s tremya stadiyami razvitiya [On local stability of a population dynamics model with three development stages]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 35-42. (In Russian).

5. Sabatulina T.L., Malygina V.V. Ob ustoychivosti lineynogo differentsial'nogo uravneniya s ogranichennym posledeystviem [On stability of a differential equation with aftereffect]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 25-41. (In Russian).

The work is performed within the basic part of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project 1.5336.2017/8.9), and is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 18-01-00928).

6. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Funcional Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

7. Azbelev N.V., Malygina V.V. Ob ustoychivosti trivial'nogo resheniya nelineynykh uravneniy s posledeystviem [On the stability of a trivial solution to nonlinear equations with aftereffect]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1994, no. 6, pp. 20-27. (In Russian).

Received 19 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Malygina Vera Vladimirovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Leader Researcher of the Research Center on Functional Differential Equations, e-mail: mavera@list.ru

For citation: Malygina V.V. Ob ustoychivosti odnoy modeli dinamiki populyatsiy s zapazdyvaniem [On the stability of a population dynamics model with delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 456–465. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-456-465 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

УДК 519.651

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ПОРОЖДЕННОЙ УРАВНЕНИЕМ ЛАПЛАСА

© **А. Н. Мзедавее, В. И. Родионов**

ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет»
426034, Российская Федерация, г. Ижевск, ул. Университетская, 1
E-mail: assad0711@yahoo.com, rodionov@uni.udm.ru

Аннотация. Определено однопараметрическое семейство конечномерных пространств, состоящих из специальных двумерных сплайнов лагранжевого типа (параметр N связан с размерностью пространства). Уравнение Лапласа порождает в каждом таком пространстве задачу минимизации функционала невязки. Доказаны существование и единственность оптимальных сплайнов. Для их коэффициентов и невязок получены точные формулы. Показано, что с ростом N минимум функционала невязки есть величина $\mathrm{O}(N^{-5})$, а специальная последовательность, состоящая из оптимальных сплайнов, фундаментальна.

Ключевые слова: интерполяция; многомерный сплайн; многочлены Чебышёва

Введение

Работа продолжает исследования [1–4]. Уравнение Лапласа $\mathrm{u}_{tt}+\mathrm{u}_{\xi\xi}=0$, заданное в прямоугольнике, заменой переменных приводится к виду $\mathrm{a}\mathrm{u}_{tt}+\mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}=0$ (в терминах новых переменных из квадрата $\Pi\doteq[0,1]^2$). Пусть $\mathrm{a}>0$, $\mathrm{b}>0$, а непрерывные функции φ_0, φ_1, ϱ_0, $\varrho_1\colon\,[0,1]\to\mathbb{R}$ таковы, что

$$\varphi_0(0)=\varrho_0(0),\quad \varphi_0(1)=\varrho_1(0),\quad \varphi_1(0)=\varrho_0(1),\quad \varphi_1(1)=\varrho_1(1),$$

существуют производные $\varphi_0''(0)$, $\varphi_0''(1)$, $\varphi_1''(0)$, $\varphi_1''(1)$, $\varrho_0''(0)$, $\varrho_0''(1)$, $\varrho_1''(0)$, $\varrho_1''(1)$ и

$$\mathrm{a}\varrho_0''(0)+\mathrm{b}\varphi_0''(0)=0,\quad \mathrm{a}\varrho_1''(0)+\mathrm{b}\varphi_0''(1)=0,\quad \mathrm{a}\varrho_0''(1)+\mathrm{b}\varphi_1''(0)=0,\quad \mathrm{a}\varrho_1''(1)+\mathrm{b}\varphi_1''(1)=0.$$

Функция $\mathrm{u}=\mathrm{u}(t,\xi)$, $(t,\xi)\in\Pi$, являющаяся решением задачи

$$\mathrm{a}\mathrm{u}_{tt}+\mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi}=0,\quad \mathrm{u}(0,\xi)=\varphi_0(\xi),\quad \mathrm{u}(1,\xi)=\varphi_1(\xi),\quad \mathrm{u}(t,0)=\varrho_0(t),\quad \mathrm{u}(t,1)=\varrho_1(t),$$

представима в виде $\mathrm{u} = \mathrm{u}^{(0)} + \mathrm{u}^{(1)} + \mathrm{u}^{(2)}$, где

$$\mathrm{u}^{(0)} = \mathrm{u}^{(0)}(t,\xi) \doteq \varphi_0(0)\,(\,1-t\,)(\,1-\xi\,) + \varphi_0(1)\,(\,1-t\,)\,\xi + \varphi_1(0)\,t\,(\,1-\xi\,) + \varphi_1(1)\,t\,\xi$$

— билинейная функция, а функции $\mathrm{u}^{(1)} = \mathrm{u}^{(1)}(t,\xi)$ и $\mathrm{u}^{(2)} = \mathrm{u}^{(2)}(t,\xi)$ — решения задач

$$\mathrm{a}\mathrm{u}_{tt} + \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi} = 0, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \mathrm{p}_0(\xi), \quad \mathrm{u}(1,\xi) = \mathrm{p}_1(\xi), \quad \mathrm{u}(t,0) = \widetilde{\varrho}_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \widetilde{\varrho}_1(t), \tag{1}$$

$$\mathrm{a}\mathrm{u}_{tt} + \mathrm{b}\mathrm{u}_{\xi\xi} = 0, \quad \mathrm{u}(0,\xi) = \widetilde{\varphi}_0(\xi), \quad \mathrm{u}(1,\xi) = \widetilde{\varphi}_1(\xi), \quad \mathrm{u}(t,0) = \mathrm{q}_0(t), \quad \mathrm{u}(t,1) = \mathrm{q}_1(t), \tag{2}$$

соответственно. Использованы следующие обозначения:

$$\mathrm{p}_i(\xi) \doteq -\tfrac{1}{12}\,\varphi_i''(0)\,(\,\xi^3 - 3\,\xi^2 + 2\,\xi\,) + \tfrac{1}{12}\,\varphi_i''(1)\,(\,\xi^3 - \xi\,), \quad i = 0,1,$$

$$\mathrm{q}_i(t) \doteq -\tfrac{1}{12}\,\varrho_i''(0)\,(\,t^3 - 3\,t^2 + 2\,t\,) + \tfrac{1}{12}\,\varrho_i''(1)\,(\,t^3 - t\,), \quad i = 0,1,$$

— это кубические полиномы, а

$$\widetilde{\varphi}_i(\xi) \doteq \varphi_i(\xi) - \varphi_i(0)\,(\,1-\xi\,) - \varphi_i(1)\,\xi - \mathrm{p}_i(\xi), \quad i = 0,1,$$

$$\widetilde{\varrho}_i(t) \doteq \varrho_i(t) - \varrho_i(0)\,(\,1-t\,) - \varrho_i(1)\,t - \mathrm{q}_i(t), \quad i = 0,1,$$

— это функции, порожденные граничными функциями исходной задачи.

В работе обсуждается специальная задача оптимизации, порожденная задачей (1), а аналогичная задача, порожденная задачей (2), симметрична, — следует лишь осуществить замены $\mathrm{a} \longleftrightarrow \mathrm{b}$, $\;t \longleftrightarrow \xi$, $\;\mathrm{p}_i(\cdot) \longleftrightarrow \mathrm{q}_i(\cdot)$, $\;\varrho_i(\cdot) \longleftrightarrow \varphi_i(\cdot)$.

1. Постановка задачи построения оптимального сплайна

Задача (1) порождает задачу поиска оптимального сплайна задачи

$$J(u) \doteq \big\|\,\mathrm{a}\,u_{tt} + \mathrm{b}\,u_{\xi\xi}\,\big\|^2_{\mathrm{L}_2(\Pi)} \to \min, \qquad u \in \sigma(\Pi), \tag{3}$$

где $\sigma(\Pi)$ — это пространство, состоящее из *допустимых* сплайнов (см. ниже), зависящих от коэффициентов u_1^i, u_2^i, $i = 1,\ldots,3N-1$ (где N — параметр, отвечающий за количество узлов разностной схемы), и определенных в квадрате Π. Пусть, далее,

$$n \doteq N-1, \qquad \tau \doteq \tfrac{1}{3N}, \qquad h \doteq \tfrac{1}{3}, \qquad \theta \doteq \tfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}N^2},$$

а точки $(\tau_i, h_j) \in \Pi$ таковы, что $\tau_i \doteq i\tau$, $i = 0,1,\ldots,3N$, $h_j \doteq jh$, $j = 0,1,2,3$.

Массив $\big(u_j^i\big)$, $i = 0,1,\ldots,3N$, $j = 0,1,2,3$, называется *допустимым*, если:

1) $u_0^i = \widetilde{\varrho}_0(\tau_i)$, $u_3^i = \widetilde{\varrho}_1(\tau_i)$ для всех $i = 0,1,\ldots,3N$;

2) $u_j^0 = \mathrm{p}_0(h_j)$, $u_j^{3N} = \mathrm{p}_1(h_j)$ для $j = 0,1,2,3$.

Одномерные интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\omega_\kappa(\zeta) \doteq \prod_{\alpha=0,1,2,3:\ \alpha\neq\kappa} \frac{\zeta-\alpha}{\kappa-\alpha}, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \qquad \kappa = 0,1,2,3$$

(такие, что $\omega_\kappa(\mu) = \delta_{\kappa\mu}$ для всех $\kappa,\mu = 0,1,2,3$, где $\delta_{\kappa\mu}$ — символ Кронекера) и допустимый массив $\big(u_j^i\big)$, $i = 0,1,\ldots,3N$, $j = 0,1,2,3$, порождают семейство полиномов

$$Q^k(s,\eta) \doteq \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} u_j^{3k-3+i}\,\omega_i(s)\,\omega_j(\eta), \quad s,\eta \in \mathbb{R}, \qquad k = 1,\ldots,N.$$

Пусть $P^k(t,\xi) \doteq Q^k(s,\eta)$, где $s \doteq \frac{t}{\tau} - 3k+3$, $\eta \doteq \frac{\xi}{h} = 3\,\xi$. Тогда $P^k(\tau_{3k-3+i}, h_j) = u_j^{3k-3+i}$ для всех $k = 1,\ldots,N$ и $i,j = 0,1,2,3$. Следовательно, полином $P^k(\cdot,\cdot)$ является двумерным интерполяционным многочленом Лагранжа, определенным в 16 узлах полосы $\Pi^k \doteq \bigl\{\,(t,\xi) \in \Pi: \ \ \tau_{3k-3} \leqslant t \leqslant \tau_{3k}, \ \ 0 \leqslant \xi \leqslant 1\,\bigr\}$. Значит, определена непрерывная функция $u\colon \Pi \to \mathbb{R}$, такая, что $u(t,\xi) = P^k(t,\xi)$ при $(t,\xi) \in \Pi^k$. Другими словами, всякий допустимый массив порождает бикубический сплайн, который мы называем *аппроксимирующим.* Разнообразие таких сплайнов определяется лишь наборами чисел u_1^i, u_2^i, $i = 1,\ldots,3N-1$. Это означает, что аппроксимирующие сплайны образуют конечномерное пространство. Обозначим его $\sigma(\Pi) = \sigma_{_N}(\Pi)$.

2. Конечные разности аппроксимирующих сплайнов

Всякий допустимый массив $\bigl(u_j^i\bigr)$, $i = 0,1,\ldots,3N$, $j = 0,1,2,3$, порождает термы

$$x^i \doteq u_0^i - u_1^i - u_2^i + u_3^i, \qquad y^i \doteq u_0^i - 3u_1^i + 3u_2^i - u_3^i, \qquad i = 0,1,\ldots,3N,$$

$$X_0^k \doteq x^{3k-3} - x^{3k-2} - x^{3k-1} + x^{3k}, \qquad Y_0^k \doteq x^{3k-3} - 3x^{3k-2} + 3x^{3k-1} - x^{3k}, \tag{4}$$

$$X_1^k \doteq y^{3k-3} - y^{3k-2} - y^{3k-1} + y^{3k}, \qquad Y_1^k \doteq y^{3k-3} - 3y^{3k-2} + 3y^{3k-1} - y^{3k}, \qquad k = 1,\ldots,N,$$

и граничные элементы

$$z_0^k \doteq \tfrac{1}{2}\,\theta^{-1}\bigl[\,\Delta\widetilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-3},\tau) + \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-3},\tau) + \Delta\widetilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-2},\tau) + \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-2},\tau)\,\bigr],$$

$$w_0^k \doteq \tfrac{3}{2}\,\theta^{-1}\bigl[\,\Delta\widetilde{\varrho}_0^{(3)}(\tau_{3k-3},\tau) + \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(3)}(\tau_{3k-3},\tau)\,\bigr],$$

$$z_1^k \doteq \tfrac{1}{6}\,\theta^{-1}\bigl[\,\Delta\widetilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-3},\tau) - \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-3},\tau) + \Delta\widetilde{\varrho}_0^{(2)}(\tau_{3k-2},\tau) - \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(2)}(\tau_{3k-2},\tau)\,\bigr],$$

$$w_1^k \doteq \tfrac{1}{2}\,\theta^{-1}\bigl[\,\Delta\widetilde{\varrho}_0^{(3)}(\tau_{3k-3},\tau) - \Delta\widetilde{\varrho}_1^{(3)}(\tau_{3k-3},\tau)\,\bigr],$$

$$p_0^k \doteq z_0^k + w_0^k, \qquad q_0^k \doteq z_0^k - w_0^k, \qquad p_1^k \doteq z_1^k + w_1^k, \qquad q_1^k \doteq z_1^k - w_1^k,$$

$$k = 1,\ldots,N, \tag{5}$$

$$\xi^0 \doteq p_0^1 + x^0, \qquad \xi^k \doteq p_0^{k+1} - q_0^k, \qquad k = 1,\ldots,n, \qquad \xi^N \doteq -\,x^{3N} - q_0^N,$$

$$\eta^0 \doteq p_1^1 + y^0, \qquad \eta^k \doteq p_1^{k+1} - q_1^k, \qquad k = 1,\ldots,n, \qquad \eta^N \doteq -\,y^{3N} - q_1^N,$$

$$\xi \doteq \operatorname{col}\bigl(\,\xi^0,\xi^1,\ldots,\xi^N\,\bigr), \qquad \eta \doteq \operatorname{col}\bigl(\,\eta^0,\eta^1,\ldots,\eta^N\,\bigr). \tag{6}$$

Применяем обозначения $\Delta f^{(m)}(t,\tau)$ для конечных разностей $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\,C_m^i\,f(t+i\tau)$.

3. Основные результаты

Утверждение 1. *Для любого* $u \in \sigma_{_N}(\Pi)$ *имеет место равенство*

$$J(u) = \frac{3\,\mathrm{a}^2}{64\,\tau^3}\sum_{k=1}^{N} I^k,$$

$$\begin{aligned}
I^k \doteq{}& 4\theta^2\bigl[\,x^{3k-3} + x^{3k} + 2z_0^k\,\bigr]^2 - 6\theta\,(\,1+\theta\,)\,\bigl[\,x^{3k-3} + x^{3k} + 2z_0^k\,\bigr]\,X_0^k + \tfrac{9}{10}\,(\,3+5\theta+3\theta^2\,)\,\bigl[X_0^k\,\bigr]^2\\
&+\tfrac{4}{3}\,\theta^2\bigl[\,x^{3k-3} - x^{3k} + 2w_0^k\,\bigr]^2 - \tfrac{6}{5}\,\theta\,(\,5+\theta\,)\,\bigl[\,x^{3k-3} - x^{3k} + 2w_0^k\,\bigr]\,Y_0^k + \tfrac{27}{70}\,(\,21+7\theta+\theta^2\,)\,\bigl[Y_0^k\,\bigr]^2\\
&+12\theta^2\bigl[\,y^{3k-3} + y^{3k} + 2z_1^k\,\bigr]^2 - \tfrac{18}{5}\,\theta\,(\,1+5\theta\,)\,\bigl[\,y^{3k-3} + y^{3k} + 2z_1^k\,\bigr]\,X_1^k + \tfrac{27}{70}\,(\,1+7\theta+21\theta^2\,)\,\bigl[X_1^k\,\bigr]^2\\
&+4\theta^2\bigl[\,y^{3k-3} - y^{3k} + 2w_1^k\,\bigr]^2 - \tfrac{18}{5}\,\theta\,(\,1+\theta\,)\,\bigl[\,y^{3k-3} - y^{3k} + 2w_1^k\,\bigr]\,Y_1^k + \tfrac{81}{350}\,(\,5+7\theta+5\theta^2\,)\,\bigl[Y_1^k\,\bigr]^2.
\end{aligned}$$

Утверждение 2. *Коэффициенты* u_1^i, u_2^i, $i=1,\ldots,3N-1$, *оптимального аппроксимирующего сплайна* $u\in\sigma_{N}(\Pi)$ *вычислимы по формулам* (4) *через величины* x^{3k}, y^{3k}, $k=0,1,\ldots,N$, X_0^k, Y_0^k, X_1^k, Y_1^k, $k=1,\ldots,N$, *удовлетворяющие системе уравнений*

$$\begin{cases} x^{3k-3}+2\,\mathrm{y}\,x^{3k}+x^{3k+3}+v_0^k=0, & k=1,\ldots,n,\\ X_0^k=\gamma_0\left[\,x^{3k-3}+x^{3k}+2z_0^k\,\right], & k=1,\ldots,N,\\ Y_0^k=\delta_0\left[\,x^{3k-3}-x^{3k}+2w_0^k\,\right], & k=1,\ldots,N,\\ y^{3k-3}+2\,\mathrm{x}\,y^{3k}+y^{3k+3}+v_1^k=0, & k=1,\ldots,n,\\ X_1^k=\gamma_1\left[\,y^{3k-3}+y^{3k}+2z_1^k\,\right], & k=1,\ldots,N,\\ Y_1^k=\delta_1\left[\,y^{3k-3}-y^{3k}+2w_1^k\,\right], & k=1,\ldots,N.\end{cases} \tag{7}$$

В системе фигурируют константы x^0, x^{3N}, y^0, y^{3N} (известные априори, см. (4)),

$$\alpha_0\doteq\frac{1}{2}\,\frac{1+\theta^2}{3+5\theta+3\theta^2},\quad \beta_0\doteq\frac{1}{30}\,\frac{35+3\theta^2}{21+7\theta+\theta^2},\quad \gamma_0\doteq\frac{10}{3}\,\frac{\theta\,(\,1+\theta\,)}{3+5\theta+3\theta^2},\quad \delta_0\doteq\frac{14}{9}\,\frac{\theta\,(\,5+\theta\,)}{21+7\theta+\theta^2},$$

$$\alpha_1\doteq\frac{3}{10}\,\frac{3+35\theta^2}{1+7\theta+21\theta^2},\quad \beta_1\doteq\frac{3}{2}\,\frac{1+\theta^2}{5+7\theta+5\theta^2},\quad \gamma_1\doteq\frac{14}{3}\,\frac{\theta\,(\,1+5\theta\,)}{1+7\theta+21\theta^2},\quad \delta_1\doteq\frac{70}{9}\,\frac{\theta\,(\,1+\theta\,)}{5+7\theta+5\theta^2},$$

$$\mathrm{y}\doteq\frac{\alpha_0+\beta_0}{\alpha_0-\beta_0},\qquad \mathrm{x}\doteq\frac{\alpha_1+\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}$$

(справедливо $\alpha_0>\beta_0$, $\alpha_1>\beta_1$, $\mathrm{y}>2$, $\mathrm{x}>2$) и граничные элементы (см. (5))

$$v_0^k\doteq(\,1+\mathrm{y}\,)\left[\,z_0^k+z_0^{k+1}\,\right]+(\,1-\mathrm{y}\,)\left[\,w_0^k-w_0^{k+1}\,\right],$$
$$v_1^k\doteq(\,1+\mathrm{x}\,)\left[\,z_1^k+z_1^{k+1}\,\right]+(\,1-\mathrm{x}\,)\left[\,w_1^k-w_1^{k+1}\,\right].$$

Первая совокупность уравнений (7) имеет самостоятельный характер: ее уравнения связывают между собой лишь переменные вида x^{3m}. Матрица совокупности имеет трехдиагональный вид с доминирующей главной диагональю (так как $\mathrm{y}>2$), поэтому совокупность имеет единственное решение (его легко найти методом прогонки). После этого из второй и третьей совокупностей в (7) явно вычисляются все значения X_0^k и Y_0^k. Аналогично решаются четвертая (где $\mathrm{x}>2$), пятая и шестая совокупности в (7). Полученные значения позволяют, в конечном счете, найти величины u_1^i, u_2^i, $i=1,\ldots,3N-1$ (см. определения (4)), порождающие оптимальный аппроксимирующий сплайн.

Утверждение 3. *Единственным решением первой и четвертой совокупностей системы* (7) *являются числа*

$$x^{3k}=-\frac{1}{U_n(\mathrm{y})}\left[\,B_{k1}(\mathrm{y})\,x^0+B_{kn}(\mathrm{y})\,x^{3N}+\sum_{i=1}^{n}B_{ki}(\mathrm{y})\,v_0^i\,\right],\qquad k=1,\ldots,n,$$

$$y^{3k}=-\frac{1}{U_n(\mathrm{x})}\left[\,B_{k1}(\mathrm{x})\,y^0+B_{kn}(\mathrm{x})\,y^{3N}+\sum_{i=1}^{n}B_{ki}(\mathrm{x})\,v_1^i\,\right],\qquad k=1,\ldots,n.$$

В представлении используются многочлены Чебышёва 2-го рода $U_n(\cdot)$ $\big($согласно [5, с. 96] неравенства $\mathrm{y}>2$, $\mathrm{x}>2$ влекут $U_n(\mathrm{y})\neq0$, $U_n(\mathrm{x})\neq0\big)$ и функциональные матрицы $B(\cdot)=\big(\,B_{ki}(\cdot)\,\big)$, $B_{ki}(\cdot)=(-1)^{k+i}\left[\,\delta_{i-1,k}^{\geqslant}\,U_{k-1}(\cdot)\,U_{n-i}(\cdot)+\delta_{ki}^{\geqslant}\,U_{n-k}(\cdot)\,U_{i-1}(\cdot)\,\right]$, $k,i=1,\ldots,n$. Применяем символ $\delta_{ki}^{\geqslant}$ такой, что $\delta_{ki}^{\geqslant}=0$ (при $k<i$), а иначе $\delta_{ki}^{\geqslant}=1$.

Утверждение 4. *Для минимума* $J_{_N} \doteq \min J(\cdot)$ *функционала* (3) *имеет место точная формула*

$$J_{_N} = \frac{81\,\mathrm{b}^2}{16N}\left[\,\frac{\alpha_0-\beta_0}{U_n(\mathrm{y})}\left\langle\, \xi, \widetilde{B}(\mathrm{y})\,\xi\,\right\rangle + \frac{\alpha_1-\beta_1}{U_n(\mathrm{x})}\left\langle\, \eta, \widetilde{B}(\mathrm{x})\,\eta\,\right\rangle\,\right].$$

В представлении используются многочлены Чебышёва 1-го рода $T_n(\cdot)$, порождающие функциональные матрицы $\widetilde{B}(\cdot) = \big(\,\widetilde{B}_{ki}(\cdot)\,\big)$, $k, i = 0, 1, \ldots, N$, такие, что

$$\widetilde{B}_{ki}(\cdot) = (-1)^{k+i}\left[\,\delta^{\geqslant}_{i-1,k}\, T_k(\cdot)\, T_{N-i}(\cdot) + \delta^{\geqslant}_{ki}\, T_{N-k}(\cdot)\, T_i(\cdot)\,\right].$$

Векторы ξ и η — это граничные элементы (6), а для записи квадратичных форм применяется скалярное произведение $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ пространства $\mathbb{R}^{1+N}$.

Утверждение 5. *Если* $\varrho_0, \varrho_1 \in \mathrm{C}^5[0,1]$, *то* $J_{_N} = \mathrm{O}(N^{-5})$.

Зафиксируем натуральное $N_0 \geqslant 2$. Последовательность $N_m = N_0\, 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$, порождает функциональную последовательность $\{\,\overline{u}_m\}$, где $\overline{u}_m : \Pi \to \mathbb{R}$ — это оптимальный аппроксимирующий сплайн в пространстве $\sigma_{N_m}(\Pi)$.

Утверждение 6. *Если* $\varrho_0, \varrho_1 \in \mathrm{C}^5[0,1]$, *то последовательность* $\{\,\overline{u}_m\}$ *фундаментальна по норме пространства* $\mathrm{L}_2(\Pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Родионов В.И.* О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в численном анализе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 4. С. 146-153.

2. *Родионов В.И.* Об одном методе построения разностных схем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5. С. 2656-2659.

3. *Родионов В.И., Родионова Н.В.* О решении двух задач оптимизации, порожденных простейшим волновым уравнением // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1406-1409.

4. *Мзедавее А.Н., Родионов В.И.* О решении одной задачи оптимизации, порожденной уравнением Лапласа // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: материалы Междунар. науч. конф. Воронеж, 2017. С. 252-255.

5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 328 с.

Поступила в редакцию 17 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 22 мая 2018 г.

Принята в печать 19 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Мзедавее Асаад Насер, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, аспирант, кафедра информатики и математики, e-mail: assad0711@yahoo.com

Родионов Виталий Иванович, Удмуртский государственный университет, г. Ижевск, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой информатики и математики, e-mail: rodionov@uni.udm.ru

Для цитирования: *Мзедавее А.Н., Родионов В.И.* О точном решении одной задачи оптимизации, порожденной уравнением Лапласа // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 466–472. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472

ON EXACT SOLUTION OF OPTIMIZATION TASK GENERATED BY THE LAPLACE EQUATION

A. N. Mzedawee, V. I. Rodionov

Udmurt State University
1 Universitetskaya St., Izhevsk 426034, Russian Federation
E-mail: assad0711@yahoo.com, rodionov@uni.udm.ru

Abstract. A one-parameter family of finite-dimensional spaces consisting of special two-dimensional splines of Lagrangian type is defined (the parameter N is related to the dimension of the space). The Laplace equation generates in each such space the problem of minimizing the residual functional. The existence and uniqueness of optimal splines are proved. For their coefficients and residuals, exact formulas are obtained. It is shown that with increasing N, the minimum of the residual functional is $\mathrm{O}(N^{-5})$, and the special sequence consisting of optimal splines is fundamental.
Keywords: interpolation; multivariate spline; Chebyshev's polynomials

REFERENCES

1. Rodionov V.I. O primenenii spetsial'nykh mnogomernykh splaynov proizvol'noy stepeni v chislennom analize [On application of special multivariate splines of any degree in the numerical analysis]. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 4, pp. 146-153. (In Russian).

2. Rodionov V.I. Ob odnom metode postroeniya raznostnykh skhem [About method for constructing difference schemes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, vol. 18, no. 5, pp. 2656-2659. (In Russian).

3. Rodionov V.I., Rodionova N.V. O reshenii dvukh zadach optimizatsii, porozhdennykh prosteyshim volnovym uravneniem [On solution of two optimization problems generated by the simplest wave equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1406-1409. (In Russian).

4. Mzedavee A.N., Rodionov V.I. O reshenii odnoy zadachi optimizatsii, porozhdennoy uravneniem Laplasa [On solution of optimization tasks generated by the Laplace equation]. *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Sovremennye metody prikladnoy matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiy»* [Proceedings of the International Scientific Conference "Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technologies"]. Voronezh, 2017, pp. 252-255. (In Russian).

5. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny* [Classical Orthogonal Polynomials]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 328 p. (In Russian).

Received 17 April 2018
Reviewed 22 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Mzedawee Asaad Naser, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Department of Informatics and Mathematics, e-mail: assad0711@yahoo.com

Rodionov Vitalii Ivanovich, Udmurt State University, Izhevsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Informatics and Mathematics, e-mail: rodionov@uni.udm.ru

For citation: Mzedawee A.N., Rodionov V.I. O tochnom reshenii odnoi zadachi optimizatsii, porozhdennoi uravneniem Laplasa [On exact solution of optimization task generated by the Laplace equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 466–472. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-466-472 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478

УДК 519.711.3

ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ОКРЕСТНОСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

© **Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин**

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»
398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Аннотация. В статье определяются окрестностные структуры (орграфы специального вида) и обсуждается их связь с дискретными системами управления. Перечисляются архетипы окрестностных структур и соответствующие этим архетипам системы управления.

Ключевые слова: дискретная система; окрестностная структура; орграф; архетип

Введение

Классические дискретные системы управления (см. [1]) можно считать специальным классом дискретных динамических систем (обычных, без управления). Действительно, рассмотрим динамическую систему

$$X^{t+1} = \mathcal{F}(X^t)\,, \quad X = (X_1, \ldots, X_N) \in \mathbb{R}^N\,. \tag{1}$$

Назовем такую систему *неполной*, если она не содержит уравнений для некоторых неизвестных X_i и некоторые неизвестные X_j отсутствуют в правых частях уравнений. Обозначим эти две непересекающиеся группы неизвестных через U и W, а остальные неизвестные – через V. Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} V^{t+1} = F(V^t, U^t) \\ W^{t+1} = C(V^t, U^t) \end{cases} \tag{2}$$

и в такой интерпретации это классическая дискретная система управления. На языке графов это элементарное наблюдение может быть переформулировано следующим

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854 а).

образом: динамической системе (1) соответствует полносвязный орграф, в котором любые две вершины соединены двумя противоположными дугами и каждая вершина имеет петлю; неполной системе (2) соответствует орграф, в котором могут быть вершины без входящих ребер и вершины без выходящих ребер; при интерпретации неполной системы как системы управления этим вершинам соответствуют входы и выходы. Такие орграфы имеет смысл рассматривать как самостоятельные объекты; мы называем их окрестностными структурами. Каждой окрестностной структуре соответствует система вида (2). Две версии определения окрестностных структур были даны ранее в [2] и [3]. В настоящей статье мы уточняем эти определения и рассматриваем простейшие окрестностные структуры (архетипы), для которых записываем соответствующие им дискретные системы управления.

1. Определение окрестностной структуры

В определении окрестностной структуры нам будет удобно различать термины «вершина» и «узел» орграфа: каждый узел мы считаем вершиной, но не каждую вершину – узлом. А именно, узлами мы будем называть только вершины, имеющие как входящие, так и выходящие дуги. Петли, по определению, являются одновременно входящими и выходящими дугами. Дуга орграфа, не являющаяся петлей, называется *простой* дугой. Символом $*$ мы обозначаем произвольную вершину орграфа.

Окрестностная структура $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\widehat{V})$ над конечным множеством $\widehat{V}$ – это орграф $\mathfrak{N} = (\widehat{V}; E)$, содержащий вершины $\widehat{V} = U \sqcup V \sqcup W$ трех типов: *входы* U, *узлы* V и *выходы* W, при этом:

- каждая вершина инцидентна, по крайней мере, одной дуге;
- каждый вход $u \in U$ имеет только выходящие дуги $e(u, *)$, где $* \in V \sqcup W$;
- каждый выход $w \in W$ имеет только входящие дуги $e(*, w)$, где $* \in U \sqcup V$;
- каждые две узла $v', v'' \in V$, могут быть соединены между собой не более чем двумя противоположно ориентированными дугами $e(v', v'')$ и $e(v'', v')$;
- каждый узел $v \in V$ *может быть рефлексивным*, то есть может иметь петлю $e(v, v)$;
- каждый узел $v \in V$ имеет входящие и выходящие дуги.

Заметим, что входы и выходы окрестностной структуры по определению не имеют петель. Окрестностная структура называется *рефлексивной*, если все ее *узлы* имеют петли. В [2] и [3] окрестностные структуры были, по определению, рефлексивными. Дуги окрестностной структуры мы называем также *связями.* На рисунках мы изображаем узлы окружностями, входы и выходы – квадратами. Как обычно в теории графов, *источниками* вершины мы называем все входящие в нее вершины и *стоками* – все исходящие. Все узлы (то есть вершины из V) имеют стоки и источники. Рефлексивные узлы являются сами для себя стоками и источниками. Все входы имеют только стоки и все выходы – только источники. Пример окрестностной структуры изображен на рис. 1. На этом рисунке вершины 1 и 2 – это входы, вершины 8, 9, 10 – выходы, вершины 3, 4, 5, 6, 7 – узлы, узлы 4, 5 и 6 являются рефлексивными.

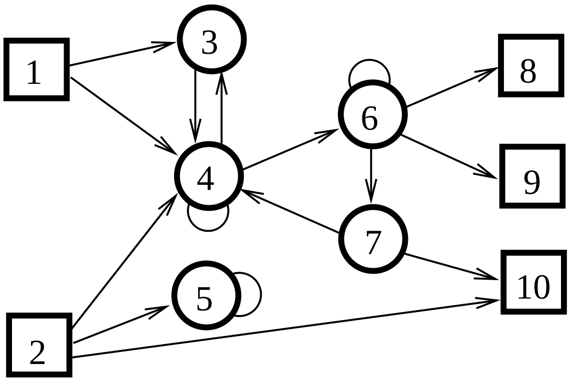

Рис. 1: Окрестностная структура

З а м е ч а н и е 1. *Связность окрестностной структуры.* Как правило, мы рассматриваем связные окрестностные структуры, но в определении не требуем связности орграфа $\mathfrak{N}$. В частности, определенные выше окрестностные структуры могут иметь изолированные рефлексивные узлы. Несвязные структуры полезны в некоторых случаях, например, при описании иерархических окрестностных структур.

З а м е ч а н и е 2. *Рефлексивные входы и выходы.* Узлы без входящих *простых* дуг и узлы без выходящих *простых* дуг допустимы в силу определения окрестностной структуры, но должны иметь петли, то есть должны быть рефлексивными. Узел без входящих дуг мы называем также *рефлексивным входом*, узел без выходящих дуг – *рефлексивным выходом*, см. рис. 2. Окрестностная структура на рис. 1 не имеет рефлексивных входов и имеет один рефлексивный выход.

Рис. 2: Рефлексивный вход и рефлексивный выход

2. Архетипы окрестностных структур

Классификацию окрестностных структур можно рассматривать как классификацию орграфов специального типа. Перечислим все *окрестностные архетипы* – структуры самого начального уровня с не более чем одной вершиной в каждом из множеств входов U, узлов V и выходов W.

Имеется единственная структура-архетип с одной вершиной: это узел с петлей. Мы будем называть эту структуру *окрестностной монадой*, см. рис. 3. Далее, имеются три структуры-архетипа с двумя вершинами (*окрестностные диады*): диада с рефлексивным входом, диада с рефлексивным выходом и простая диада; см. рис. 4. Структуры-архетипы с тремя вершинами (*окрестностные триады)* распадаются на два класса: основные и составные. Основные триады – это главная триада, сквозная триада (или

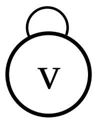

Рис. 3: Монада: единственная окрестностная структура с $|\widehat{V}| = 1$

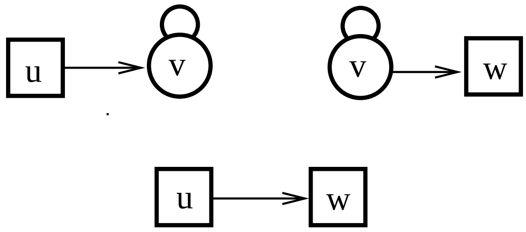

Рис. 4: Окрестностные диады

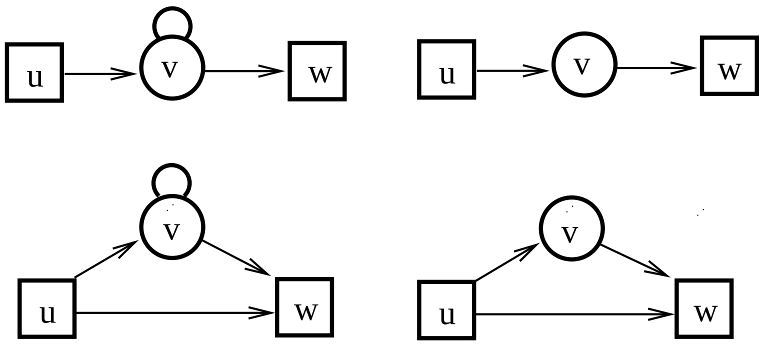

Рис. 5: Основные окрестностные триады

триада без рекурсий), полная главная триада и полная сквозная триада; см. рис. 5 (перечисление триад на рисунке – слева направо и сверху вниз). Составные триады являются производными от диад. Это триада с рефлексивным входом, триада с рефлексивным выходом и сепарабельная триада; см. рис. 6. Первые две составные триады – это склейки диады с рефлексивным выходом/входом и простой диады; третья – это несвязное объединение монады и простой диады. Любая окрестностная структура

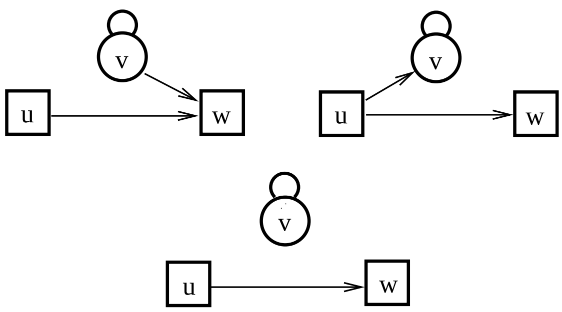

Рис. 6: Составные окрестностные триады

(и соответствующая ей система/модель) может быть отнесена к одному из перечисленных архетипов. Например, архетипом моделей без входа и выхода является монада, архетипом регрессионных моделей является простая диада, архетипом нейронных сетей прямого распространения является сквозная триада. Для каждого архетипа очевидным образом записывается соответствующая дискретная система управления (см. таблицу).

$V^{t+1} = F(V^t)$	монада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t)$	диада с рефлексивным входом
$V^{t+1} = F(V^t)\,,\ \ W^t = C(V^t)$	диада с рефлексивным выходом
$W^{t+1} = G(U^t)$	простая диада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t)\,,\ \ W^t = C(V^t)$	главная триада
$V^{t+1} = F(U^t)\,,\ \ W^t = C(V^t)$	сквозная триада
$V^{t+1} = F(V^t, U^t)\,,\ \ W^t = C(V^t, U^t)$	полная главная триада
$V^{t+1} = F(U^t)\,,\ \ W^t = C(V^t, U^t)$	полная сквозная триада
$V^{t+1} = F(V^t)\,,\ \ W^t = C(V^t, U^t)$	триада с рефлексивным входом
$V^{t+1} = F(V^t, U^t)\,,\ \ W^t = C(U^t)$	триада с рефлексивным выходом
$V^{t+1} = F(V^t)\,,\ \ W^t = C(U^t)$	сепарабельная триада

Приведенную классификацию архетипов и соответствующих им систем можно рассматривать как формализацию и уточнение бинарной классификации систем управления (2) по наличию и отсутствию обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.

2. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 37. Вып. 4. С. 87-95.

3. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Канюгина А.С.* Квазистатические окрестностные системы // Современные наукоемкие технологии. 2018. Вып. 4. С. 137-142.

Поступила в редакцию 23 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Для цитирования: *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Дискретные системы и окрестностные структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 473–478. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478

DISCRETE SYSTEMS AND NEIGHBORING STRUCTURES

N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398600, Russian Federation
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Abstract. In the article, neighborhood structures (digraphs of a special type) are defined and their relationship with discrete control systems is discussed. The archetypes of the neighborhood structures and the control systems corresponding to these archetypes are listed.
Keywords: discrete system; neighborhood structure; digraph; archetype

REFERENCES

1. Pervozvanskiy A.A. *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya* [Course of Automatic Control Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 616 p. (In Russian).

2. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnye struktury i metastrukturnaya identifikatsiya [Neighborhood Structures and Metastructural Identification]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2017, vol. 37, no. 4, pp. 87-95. (In Russian).

3. Shmyrin A.M., Mishachyov N.M., Kanyugina A.S. Kvazistaticheskie okrestnostnye sistemy [Quasi-static neighborhood systems]. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii – Modern High Technologies*, 2018, no. 4, pp. 137-142. (In Russian).

Received 23 April 2018
Reviewed 24 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

For citation: Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Diskretnye sistemy i okrestnostnye struktury [Discrete systems and neighboring structures]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 473–478. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-473-478 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487
УДК 519.711.3

ОКРЕСТНОСТНЫЕ МЕТАСИСТЕМЫ НА ОРГРАФАХ

© **Н. М. Мишачев, А. М. Шмырин**

ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический университет»
398600, Российская Федерация, г. Липецк, ул. Московская, 30
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Аннотация. В статье обсуждаются окрестностные системы на ориентированных графах. Вводятся понятия окрестностной метасистемы и метаструктурной идентификации. Рассматриваются связанные с этими понятиями вопросы идентификации систем управления.
Ключевые слова: окрестностная система; окрестностная структура; орграф; метаструктурная идентификация

Введение

Системы на графах, или системы уравнений, ассоциированные с графами, в той или иной версии нередко возникают в приложениях (см., например, [1] или [2]), но эти версии, как правило, отражают специфику соответствующих приложений. В [3] и [4] были определены *окрестностные системы*, которые являются достаточно общим классом систем на графах, и им было посвящено значительное количество публикаций. Заметим, что в более ранней работе [3] термин «окрестностные системы» отсутствовал, но соответствующие классы систем и графов уже обсуждались. Термин «окрестностные системы» появился в [4], но в этой работе отсутствовало, хотя и подразумевалось, описание ассоциированных с такими системами графов. Позднее, начиная с [5], внимание было перенесено на эти графы, которые были названы *окрестностными структурами*, а разные типы окрестностных систем рассматривались уже как надстройки над окрестностными структурами. Определение окрестностной структуры последовательно видоизменялось в [6] и [7], окончательная версия была предложена в [8]. Параллельно были определены два класса систем над окрестностными структурами: *вертексные*, когда уравнения системы соответствуют вершинам структуры, и *реляционные*, когда уравнения соответствуют дугам; в обоих случаях системы могут быть как статическими, так и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00854 а).

динамическими. При этом окрестностные системы из [3] и [4] интерпретировались как статические вертексные системы.

1. Окрестностные системы в пространстве состояний

В работах [3] и [4] ставилась задача обобщения классических дискретных систем управления

$$\begin{cases} X^{t+1} = F(X^t, U^t) \\ W^{t+1} = C(X^t, U^t) \end{cases} \tag{1.1}$$

на случай распределенных систем, при этом система (1.1) считалась заданной на конечном подграфе $G_{[0,T]}$ бесконечного линейного орграфа $G_{\mathbb{Z}}$ над $\mathbb{Z}$ с дугами $(n, n+1)$. Идея обобщения состояла в замене орграфа $G_{[0,T]}$ произвольным орграфом. Моменты дискретного времени $t \in \{0, \ldots, T\}$ заменялись элементами v некоторого конечного множества V (узлами), векторы состояний X^t и входов U^t в момент времени t – векторами состояний X^v и входов U^v в узлах v, а система уравнения (1.1) – мультисистемой, состоящей из $|V|$ подсистем, соответствующих узлам $v \in V$ и включающих в себя переменные состояний и входов (управлений) из «окрестностей по состояниям и управлениям» этих узлов. Эти окрестности задавались двумя орграфами G_X и G_U над V, которые, как уже упоминалось, были явно описаны в [3] и неявно присутствовали в [4]. На самом деле такая система, записанная в координатном виде или, другими словами, «в пространстве состояний», может быть интерпретирована как система уравнений

$$\begin{cases} \widetilde{X} = \widetilde{F}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) \\ \widetilde{W} = \widetilde{C}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) \end{cases} \qquad \text{или, в неявной форме,} \qquad \begin{cases} \widehat{F}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) = 0 \\ \widehat{C}(\widetilde{X}, \widetilde{U}) = 0 \end{cases}$$

для стационарных состояний дискретной динамической модели

$$\begin{cases} \widetilde{X}^{t+1} = \widetilde{F}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) = \widetilde{X}^t + \widehat{F}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) \\ \widetilde{W}^{t+1} = \widetilde{C}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) = \widetilde{W}^t + \widehat{C}(\widetilde{X}^t, \widetilde{U}^t) \end{cases} \tag{1.2}$$

вида (1.1), где «мультивекторные» переменные $\widetilde{X}$ и $\widetilde{U}$ содержат все векторы состояний X^v и все векторы входов U^v, при этом орграфы G_X и G_U «структурируют» систему, то есть задают для каждого из уравнений наборы переменных, входящих в это уравнение.

2. Окрестностные системы и окрестностные структуры

Описанная выше интерпретация окрестностных систем позволяет считать связанные с ними структурные графы не альтернативой для переменной времени, а средством описания вхождения пространственных переменных в уравнения системы (1.1). Основным объектом изучения становятся окрестностные структуры (орграфы) и ассоциированные с ними вертексные и реляционные системы. Эти системы, в отличие от статических окрестностных систем из [4], уже по происхождению являются динамическими, поскольку переменная времени T сохраняется, а не «растворяется» в вершинах графа V. Статические системы при этом возникают, как обычно, в виде моделей для стационарных состояний динамических систем. Конечно, динамику во времени можно ввести и в классе окрестностных систем из [4], но, чтобы формально оставаться в этом классе, нужно перейти от графов G_X и G_U к счетным графам $G_X \times G_{\mathbb{Z}}$ и $G_U \times G_{\mathbb{Z}}$. В новой интерпретации окрестностных систем подобный переход также имеет смысл, но действует в обратном направлении, превращая динамические (вертексные или реляционные) системы в статические, и может рассматриваться как аналог перехода к расширенному фазовому пространству. Укажем еще одно отличие новой идеологии от старой: вместо двух орграфов G_X и G_U над V мы рассматриваем один орграф над $\widehat{V} = U \sqcup V \sqcup W$, где U и W – это входы и выходы, что соответствует структуре системы (1.1). Пример окрестностной структуры см. на рис. 1. На этом рисунке вершины 1 и

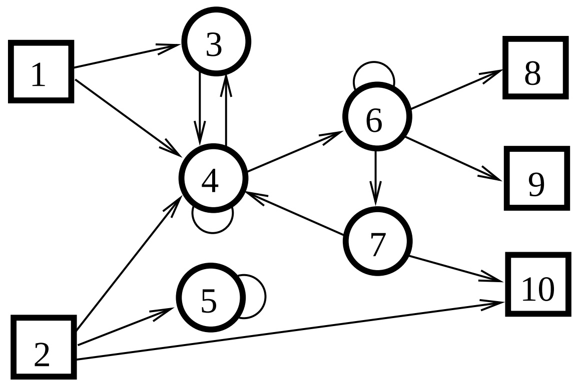

Рис. 1: Окрестностная структура

2 – это входы, вершины 8, 9, 10 – выходы, вершины 3, 4, 5, 6, 7 – внутренние узлы, узлы 4, 5 и 6 имеют петли («самодействия»). Узел 5 является, в нашей терминологии, *рефлексивным выходом.*

3. Метаструктурная идентификация

В связи с описанным выше изменением точки зрения на окрестностные системы мы фактически возвращаемся к задаче моделирования объектов классическим системам вида (1.1), но при этом в качестве первого этапа моделирования рассматриваем задачу «метаструктурной идентификации», имея в виду определение узлов модели, связей между узлами и наборов соответствующих переменных. Данная задача, конечно, всегда так или иначе решается в процессе моделирования, и в этом смысле здесь нет ничего принципиально нового. Однако, как мы считаем, полезно выделить и до определенной степени формализовать этот «метаструктурный» этап построения модели объекта. Конечно, любая формализация данного этапа будет в какой-то степени ограничивать класс используемых моделей, и наша «вертексно-реляционная» – не исключение, но это неизбежное свойство всякой формализации. Поясним происхождение термина «метаструктурная идентификация». *Структурная* идентификация моделируемой системы, как правило, может быть разделена на два этапа. На первом этапе мы определяем узлы модели, связи между ними и соответствующие этим узлам и связям наборы переменных. Эта информация эквивалентным образом может быть представлена в виде *метасистемы*, являющейся прототипом для окончательной аналитической системы. Прототип (метасистема) определяет наборы переменных и их вхождения в уравнения модели. На втором этапе выбирается аналитический тип уравнений модели и, по возможности, минимизируется количество неизвестных параметров, подлежащими дальнейшей параметрической идентификации. Мы сохраняем термин «структурная идентификация» для второго этапа, а первый предлагаем называть *метаструктурной идентификацией* и определяем ее как построение окрестностной структуры (орграфа), указание переменных модели, которые мы называем *оснащениями* структуры, и определение типа взаимодействий между узлами структуры. Наш опыт математического моделирования показывает, что во многих случаях имеет смысл различать два типа таких взаимодействий: *вертексный*, когда уравнения модели задают состояния узлов структуры в зависимости от состояний входов и все выходы из узлов совпадают с их состояниями, и *реляционный*, когда уравнения модели задают состояния выходов из узлов (свое состояние для каждого выхода) в зависимости от состояний входов в эти узлы. В первом случае уравнения и оснащения соответствуют узлам окрестностной структуры, во втором – ее дугам. Метаструктурную идентификацию мы считаем завершенной в тех случаях, когда все переменные модели (оснащения) становятся *метаскалярными*, то есть используются в уравнениях как единые символы, независимо от их сколь угодно сложной внутренней структуры (векторной, матричной и т. п.). Для описания вертексных и реляционных систем над заданной окрестностной структурой очень удобным оказалось понятие метаграфа (см. [9]). В статье [8] мы определили указанные два типа моделей, используя язык метаграфов, и описали связи между этими моделями. Заметим, что идеология метаструктурной идентификации остается в силе и для непрерывных систем.

4. Метаструктурная идентификация и структурно-графовые модели

Метаструктурная идентификация находится в промежутке между абстрактной общей теорией систем, в которой применение графов обсуждается на уровне общих рекомендаций, и специализированными структурно-графовыми моделями, подобными моделям потоковых графов или сигнальных графов (см., например, [1] и [2]). В этом промежутке находятся также и классические структурные схемы систем управления (см., например, [10]). Наши окрестностные структуры имеют с этими схемами довольно много общего. Укажем на следующие важные различия, которые, в смысле указанного выше порядка, сводятся к тому, что окрестностные структуры находятся ближе к левому концу (общей теории систем), а классические структурные схемы – ближе к правому. Структурные схемы обычно рисуют по уже имеющейся математической модели, в то время как окрестностные структуры возникают на этапе построения модели, когда еще не определены переменные и тем более нет никаких уравнений. Далее, в идеологии структурных схем основное внимание уделяется линейным моделям и алгебраическим операциям – сложению и умножению, в то время как основное назначение окрестностных структур, снабженных наборами переменных (оснащениями), – это описание последовательности вхождений (в том числе рекурсивых вхождений) переменных в уравнения, конкретный тип которых на этапе метаструктурной идентификации не обсуждается. Еще одним отличием окрестностных структур от классических структурных схем является возможность выбора между вертексными и реляционными моделями.

5. Пример

Динамическая вертексная метасистема, соответствующая окрестностной структуре на рис. 1, имеет вид:

$$\begin{cases} X^{t+1}(3) = F_3(U^t(1), X^t(4)) \\ X^{t+1}(4) = F_4(U^t(1), U^t(2), X^t(3), X^t(4), X^t(7)) \\ X^{t+1}(5) = F_5(U^t(2), X^t(5)) \\ X^{t+1}(6) = F_6(X^t(4), X^t(6)) \\ X^{t+1}(7) = F_7(X^t(6)) \\ W^{t+1}(8) = C_8(X(6)) \\ W^{t+1}(9) = C_9(X(6)) \\ W^{t+1}(10) = C_{10}(U(2), X(7)) \end{cases}$$

Динамическая реляционная метасистема, соответствующая структуре на рис. 1, имеет вид:

$$\begin{cases} \quad Y^{t+1}(3,4) = F_{3,4}(U^t(1,3)), Y^t(4,3)) \\ \begin{cases} Y^{t+1}(4,3) = F_{4,3}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \\ Y^{t+1}(4,4) = F_{4,4}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \\ Y^{t+1}(4,6) = F_{4,6}(U^t(1,4), U^t(2,4), Y^t(3,4), Y^t(4,4), Y^t(7,4)) \end{cases} \\ \quad Y^{t+1}(5,5) = F_{5,5}(U^t(2,5)), Y^t(5,5)) \\ \begin{cases} Y^{t+1}(6,6) = F_{6,6}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,7) = F_{6,7}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,8) = F_{6,8}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \\ Y^{t+1}(6,9) = F_{6,9}(Y^t(4,6), Y^t(6,6)) \end{cases} \\ \begin{cases} Y^{t+1}(7,4) = F_{7,4}(Y^t(6,7)) \\ Y^{t+1}(7,10) = F_{7,10}(Y^t(6,7)) \end{cases} \\ \quad W^{t+1}(8) = C_8(Y(6,8)) \\ \quad W^{t+1}(9) = C_9(Y(6,9) \\ \quad W^{t+1}(10) = C_{10}(U(1,10), Y(7,1)) \end{cases}$$

Все переменные в этих уравнениях считаются метаскалярными. Присутствуя в уравнениях как скаляры, они могут иметь сколь угодно сложную внутреннюю структуру.

6. Нестационарные динамические системы

Выше мы предполагали, что правые части динамических систем (1.1) или (1.2) не зависят явно от (дискретного) времени, то есть рассматривали стационарные динамические системы. Данное ограничение не является обязательным. Можно считать, что такая зависимость в (1.1) или (1.2) имеется. При этом, однако, должна сохраняться окрестностная структура, то есть схема вхождения переменных в уравнения. Отказ от этого условия приводит к классу систем над «динамическими» окрестностными структурами, то есть структурами, зависящими от времени. Стандартный переход к расширенному фазовому пространству позволяет свести такие окрестностные структуры к обычным «статическим», но со счетным количеством узлов.

7. Заключение

Во многих случаях начальный этап математического моделирования объекта можно формализовать как *метаструктурную идентификацию*: построение окрестностной структуры (орграфа), определение переменных модели (оснащений) и определение способа взаимодействия вершин графа (вертексного или реляционного). Результатом метаструктурной идентификации является окрестностная метасистема уравнений вида (1.1). Термин *окрестностная* в данном контексте указывает на распределенность системы, которая математически выражается в разреженности вхождений переменных в уравнения системы, эта разреженность кодируется орграфом. Полезным, хотя и не обязательным, критерием завершенности метаструктурной идентификации является метаскалярность переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кафаров В.В., Мешалкин В.П.* Анализ и синтез химико-технологических систем. М.: Химия, 1991. 432 с.

2. *Татур Т.А.* Основы теории электрических цепей. М.: Высшая школа, 1980. 274 с.

3. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырин Д.А.* Смешанное управление смешанными системами. Липецк: ЛГТУ, 1998. 80 с.

4. *Блюмин, С.Л. Шмырин А.М.* Окрестностные системы. Липецк: ЛЭГИ, 2005. 131 с.

5. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М., Косарева А.С.* Кластеризация окрестностной структуры // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 2. С. 459-464. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-459-464.

6. *Шмырин А.М., Мишачев Н.М.* Окрестностные системы и алгоритм Качмажа // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 2113-2120. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120.

7. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Параметрическая идентификация окрестностных систем вблизи номинальных режимов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 558-564. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564.

8. *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные структуры и метаструктурная идентификация // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 37. Вып. 4. С. 87-95.

9. *Basu A., Blanning R.* Metagraphs and their applications. N. Y.: Springer, 2007.

10. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Мишачев Николай Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры высшей математики, e-mail: amsh@lipetsk.ru

Для цитирования: *Мишачев Н.М., Шмырин А.М.* Окрестностные метасистемы на орграфах // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 479–487. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487

NEIGHBORHOOD METASYSTEMS ON DIGRAPHS

N. M. Mishachev, A. M. Shmyrin

Lipetsk State Technical University
30 Moskovskaya St., Lipetsk 398600, Russian Federation
E-mail: nmish@lipetsk.ru, amsh@lipetsk.ru

Abstract. The article discusses neighborhood systems on oriented graphs. The concepts of the neighborhood metasystem and metastructural identification are introduced. The questions of identification of control systems related to these concepts are considered.
Keywords: neighborhood system; neighborhood structure; digraph; metastructural identification

REFERENCES

1. Kafarov V.V., Meshalkin V.P. *Analiz i sintez khimiko-tekhnologicheskikh system* [Analysis and Synthesis of Chemical-Technological Systems]. Moscow, Khimiya Publ., 1991, 432 p. (In Russian).

2. Tatur T.A. *Osnovy teorii elektricheskikh tsepey* [Fundamentals of the Theory of Electrical Circuits]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1980, 274 p. (In Russian).

3. Blyumin S.L., Shmyrin A.M., Shmyrin D.A. *Smeshannoe upravlenie smeshannymi sistemami* [Mixed Control of Mixed Systems]. Lipetsk, Lipetsk State Technical University Publ., 1998, 80 p. (In Russian).

4. Blyumin S.L., Shmyrin A.M. *Okrestnostnye sistemy* [Neighborhood Systems]. Lipetsk, Lipetsk Environmental and Cultural Institute Publ., 2005, 131 p. (In Russian).

5. Shmyrin A.M., Mishachev N.M., Kosareva A.S. Klasterizatsiya okrestnostnoy struktury [Clustering of neighborhood structure]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 2, pp. 459-464. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-459-464.

6. Shmyrin A.M., Mishachev N.M. Okrestnostnye sistemy i algoritm Kachmazha [Neighborhood systems and Kaczmarz algorithm]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 2113-2120. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2113-2120.

7. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Parametricheskaya identifikatsiya okrestnostnykh sistem vblizi nominal'nykh rezhimov [Parametric identification of neighborhood systems near nominal modes]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 558-564. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-558-564.

8. Mishachev N.M., Shmyrin A.M. Okrestnostnye struktury i metastrukturnaya identifikatsiya [Neighborhood Structures and Metastructural Identification]. *Tavricheskiy vestnik informatiki i*

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-07-00854 a).

matematiki – Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics, 2017, vol. 37, no. 4, pp. 87-95. (In Russian).

9. Basu A., Blanning R. *Metagraphs and their applications.* New York, Springer, 2007.

10. Krasovskiy A.A. (ed.). *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* [A Handbook on the Theory of Automatic Control]. Moscow, Nauka Publ., 1987, 712 p. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Mishachev Nikolay Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: nmish@lipetsk.ru

Shmyrin Anatoliy Mikhailovich, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation, Doctor of Techniques, Professor, the Head of the Higher Mathematics Department, e-mail: amsh@lipetsk.ru

For citation: Mishachev N.M., Shmyrin A. M. Okrestnostnye metasistemy na orgrafah [Neighborhood metasystems on digraphs]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 479–487. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-479-487 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502
УДК 517.929

УСТОЙЧИВОСТЬ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© **М. В. Мулюков**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29
E-mail: Mulykoff@gmail.com

Аннотация. Рассматривается система линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием в случае, когда ее характеристическая функция линейно зависит от одного скалярного параметра. Осуществлено развитие метода D-разбиения применительно к задаче построения области устойчивости этого уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием; автономные уравнения; асимптотическая устойчивость; метод D-разбиения

Введение

Пусть $\mathbb{R}^{N\times N}$ — алгебра вещественных $N\times N$-матриц. Через I и Θ будем обозначать единичную и нулевую матрицу. Нормы в $\mathbb{R}^N$ и $\mathbb{R}^{N\times N}$ согласованы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \displaystyle\int_0^h dR(s)x(t-s) = f(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \\ x(\xi) = \psi(\xi), \quad \xi\in[-h,0), \end{cases} \tag{0.1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $h>0$; при каждом $t\in[0,h]$ определена матрица $R(t)\in\mathbb{R}^{N\times N}$; компонентами матричной функции R являются функции ограниченной вариации $R_{ij}:[0,h]\to\mathbb{R}$ такие, что $R_{ij}(0)=0$; интеграл понимается в смысле Римана–Стилтьеса; функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^N$ суммируема на каждом конечном отрезке, принадлежащем $\mathbb{R}_+$; функция $f_\psi(t)=\int_t^h dR(s)\psi(t-s)$ суммируема на $[0,h]$.

Работа выполнена в рамках базовой части госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00928).

Как известно [1, с. 9, 84], [2, с. 23], [3], решение задачи Коши для системы (0.1) в пространстве локально абсолютно непрерывных вектор-функций существует, единственно и представимо в виде:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)\hat{f}(s)ds, \tag{0.2}$$

где $\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t) + f_\psi(t), & \text{если } t \le h, \\ f(t), & \text{если } t > h. \end{cases}$

Из формулы (0.2) вытекает, что асимптотические свойства любого решения системы (0.1) определяются свойствами *фундаментальной матрицы*, удовлетворяющей матричному уравнению $\dot{X}(t) + \int_0^h dR(s)X(t-s) = \Theta$ при почти всех $t \in \mathbb{R}_+$ и условиям $X(0) = I$, $X(\xi) = \Theta$ при $\xi < 0$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Систему (0.1) будем называть *асимптотически устойчивой*, если $\lim\limits_{t\to\infty}\|X(t)\| = 0$.

В частности, из формулы (0.2) вытекает, что асимптотическая устойчивость системы (0.1) эквивалентна тому, что $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\| = 0$ при любой непрерывной начальной функции.

Будем говорить, что функция комплексного аргумента *устойчива*, если все ее корни лежат слева от мнимой оси. Как известно [4, с. 101], система (0.1) асимптотически устойчива в том и только в том случае, если устойчива ее *характеристическая функция*

$$\Phi(z) = \det\Big(Iz + \int_0^h e^{-zs}dR(s)\Big). \tag{0.3}$$

Если компоненты матрицы R — заданные функции и запаздывание h – известное число, то вопрос об устойчивости функции (0.3) решается применением одного из следующих методов: критерий Рауса–Гурвица и теорема Эрмита–Билера [5, с. 46] (для полиномов), теорема Понтрягина [6] и метод Чеботарева–Меймана [7] (для квазиполиномов), годограф Найквиста–Михайлова [8] (для произвольных целых функций).

Однако, если параметры функции (0.3) не фиксированы, то возникает задача построения *области устойчивости*, то есть отыскания всех параметров, при которых данная функция устойчива. Построение области устойчивости с помощью перечисленных выше методов приводит к сложной параметрической задаче, полностью решить которую удается лишь в простейших случаях. Преодолеть эту трудность удалось Ю.И. Неймарку, предложившему *метод D-разбиения* [9], основная идея которого заключалась в разбиении пространства параметров на области, внутри которых количество корней характеристической функции постоянно (называемых *областями D-разбиения*), и последующем выборе среди них области устойчивости.

Несмотря на то, что предложенная Неймарком последовательность действий принципиально применима для любого количества параметров, в том числе входящих в характеристическую функцию нелинейно, практически удается применить ее лишь для задач с небольшим количеством параметров. Уже в трехмерном случае область устойчивости, как правило, исследуется по двумерным сечениям. Кроме того, если зависимость от параметров нелинейна, то ее вид предполагается конкретным, а ограничения на вид уравнения существенны.

В связи с этим для каждой задачи параметры делятся на две группы: часть из них фиксируются, а область устойчивости строится в пространстве оставшихся параметров.

Назовем систему (0.1) n *-параметрической*, если ее характеристическая функция линейно зависит от n вещественных параметров. Таким образом, если общее количество параметров функции (0.3) равно m, то задача исследования устойчивости системы (0.1) сводится к исследованию $(m-n)$-параметрического семейства n-параметрических систем.

Иными словами, m-мерная область устойчивости строится по n-мерным сечениям, для которых применяется метод D-разбиения. Поскольку никакое конечное число сечений не позволяет судить о всей области устойчивости, метод D-разбиения нуждается в развитии: для того, чтобы проанализировать зависимость структуры областей D-разбиения от параметров семейства, необходимо по возможности наиболее полно выяснить свойства областей и формализовать способ выделения области устойчивости.

В работах [10–12] удалось добиться продвижения в развитии метода D-разбиения применительно к исследованию устойчивости двупараметрических систем (0.1). Фиксированием одного из двух параметров такую систему можно привести к однопараметрической системе, поэтому полученные в настоящей работе результаты в принципе могут быть выведены как следствия из соответствующих утверждения для двупараметрических систем. Однако проще оказывается изложить метод D-разбиения применительно к исследованию устойчивости однопараметрических систем независимо от результатов указанных работ, при этом сохранив общую концепцию и терминологию.

1. Структура областей D-разбиения для однопараметрических характеристических уравнений

Обозначим через $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ алгебру целых функций, определенных на $\mathbb{C}$, с вещественными коэффициентами ряда Маклорена.

Лемма 1.1. *Если f — целая функция, то следующие утверждения эквивалентны:*

а) $f \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$*;*
б) f *отображает вещественную ось в себя;*
в) $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$.

Доказательство. Докажем а) $\Rightarrow$ в). Обозначим $z = re^{i\varphi}$, тогда

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \overline{e^{in\varphi}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{-in\varphi} = f(\overline{z}).$$

Докажем в) $\Rightarrow$ б). Если $z \in \mathbb{R}$, то $\overline{f(z)} = f(z)$, то есть $f(z) \in \mathbb{R}$.

Докажем б) $\Rightarrow$ а). Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, тогда для любого $z \in \mathbb{R}$ имеем $0 = \operatorname{Im} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} c_n z^n$, следовательно, все c_n вещественны. $\square$

Теорема 1.1. *Характеристическая функция* (0.3) *имеет вид*

$$\Phi(z) = z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \phi_n(z), \tag{1.1}$$

где $\phi_n \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ *и* $\sup_{\operatorname{Re} z \geq 0} \big|\phi_n(z)\big| < \infty$.

Доказательство. Обозначим $P(z) = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$. Для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$P_{ij}(z) = \int_0^h e^{-zs} dR_{ij}(s) = \int_0^h \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k s^k}{k!} dR_{ij}(s) = \\ = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k z^k}{k!} \int_0^h s^k dR_{ij}(s) + T_m(z),$$

где $T_m(z) = \int_0^h \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k z^k s^k / k! dR_{ij}(s)$. Далее,

$$\lim_{m\to\infty} \big|T_m(z)\big| \leq \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big| \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} |z|^k h^k / k! = 0,$$

следовательно,

$$P_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k z^k}{k!}, \tag{1.2}$$

где $a_k = \int_0^h s^k dR_{ij}(s)$. В силу неравенства $|a_k| \leq h^k \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big|$ ряд (1.2) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то есть P_{ij} – целая функция.

При $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеем $\big|P_{ij}(z)\big| \leq \int_0^h \big|dR_{ij}(s)\big| < \infty$, следовательно, все миноры, составленные из матрицы P, представляют собой ограниченные на полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ функции из $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.

Известно [13, с. 55], что для любой $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ справедливо равенство

$$\det(Iz + A) = z^N + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n c_n z^{N-n}, \tag{1.3}$$

где c_n – это сумма всех главных миноров порядка n матрицы A. Утверждение доказываемой теоремы непосредственно вытекает из сравнения (1.1) и (1.3), если положить $A = \int_0^h e^{-zs} dR(s)$ и $\phi_n(z) = c_n(-1)^n$. □

Согласно определению, характеристическая функция однопараметрической системы линейно зависит от скалярного параметра p, то есть $\Phi(z) = \Phi(z,p)$. Поскольку домножение на целую нигде не обращающуюся в ноль функцию не влияет на расположение корней функции Φ, вместо нее можно рассматривать функцию F такую, что $F(z,p) = e^{w(z)} \Phi(z,p)$, где w — любая функция из $\mathrm{E}_{\mathbb{R}}$.

Определение 1.1. Уравнение $F(z,p) = 0$ будем называть однопараметрическим характеристическим уравнением системы (0.1).

Имеем $\phi_n(z,p) = a_n(z) + pb_n(z)$, поэтому $F(z,p) = f_0(z) + pf_1(z)$, где

$$f_0(z) = e^{w(z)}\left(z^N + \sum_{n=0}^{N-1} z^n a_n(z)\right), \quad f_1(z) = e^{w(z)} \sum_{n=0}^{N-1} z^n b_n(z).$$

О п р е д е л е н и е 1.2. *Область устойчивости* — это совокупность всех точек p вещественной оси, которым соответствует устойчивая функция $F(\cdot,p)$.

С формальной точки зрения для описания границы области устойчивости корректно пользоваться иными обозначениями, поэтому рассмотрим уравнение

$$f_0(z) + rf_1(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

где r — вещественный параметр.

О п р е д е л е н и е 1.3. Любой точке $r \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие число $\rho(r)$, равное количеству корней (с учетом кратности) с неотрицательной вещественной частью функции $F(\cdot,r)$, и будем называть его *абсолютным индексом точки* r.

Основная цель исследования устойчивости системы (0.1) — найти множество точек с нулевым абсолютным индексом; принадлежность точки p данному множеству эквивалентна устойчивости функции $F(\cdot,p)$.

Вообще говоря, при непрерывном изменении параметров корни с положительной вещественной частью могут появляться либо благодаря переходу через мнимую ось, либо появлению из „бесконечно удаленной точки“ [9, с. 62]. Однако, в силу того, что коэффициент при z^N не обращается в нуль и зависимость F от r равномерна по z в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$, второй вариант исключается.

Рассмотрим плоскость $\mathbb{R}^2$, точки которого будем обозначать символом (r,φ), где $\varphi \in \mathbb{R}$. Значение φ будем называть *частотой* этой точки, а число r — *проекцией* точки (r,φ).

О п р е д е л е н и е 1.4. Точку (r,φ) назовем *точкой D-разбиения*, если $F(i\varphi,r) = 0$.

В силу того, что $F(\cdot,r) \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$, уравнения $F(i\varphi,r) = 0$ и $F(-i\varphi,r) = 0$ эквивалентны, следовательно, достаточно рассмотреть только неотрицательные значения φ.

Рассмотрим функцию

$$u(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(i\varphi) f_0(-i\varphi).$$

Чтобы найти точки D-разбиения, исследуем разрешимость уравнения

$$f_0(i\varphi) + rf_1(i\varphi) = 0 \tag{1.4}$$

относительно r при фиксированном φ.

1. Если $u(\varphi) \neq 0$, то (1.4) неразрешимо.
2. Если $u(\varphi) = f_1(i\varphi) = 0$ и $f_0(i\varphi) \neq 0$, то (1.4) неразрешимо.

3. Если $f_0(i\varphi) = f_1(i\varphi) = 0,$ то $u(\varphi) = 0$ и уравнение (1.4) имеет бесконечного много решений.
4. Если $u(\varphi)=0$ и $f_1(i\varphi)\neq 0$, то (1.4) имеет единственное решение $r=-f_0(i\varphi)/f_1(i\varphi)$.

В третьем случае функции f_0 и f_1 имеют общий корень на мнимой оси, поэтому функция $F(\cdot, r)$ имеет этот же корень при любом $r,$ следовательно, область устойчивости пуста.

Таким образом, при условии, что у функций f_0 и f_1 нет общих корней на мнимой оси, точка D-разбиения с частотой φ существует в том и только том случае, если $u(\varphi) = 0$ и $f_1(i\varphi) \neq 0$.

Структура точек D-разбиения зависит от того, является функция u тождественным нулем или нет.

Теорема 1.2. *Если* $u(\varphi) \equiv 0$ *и* $f_1(z) \not\equiv 0,$ *то область устойчивости пуста.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1.1 тождество $\operatorname{Im} f_0(-i\varphi)f_1(i\varphi) \equiv 0$ эквивалентно следующему: $f_0(-i\varphi)f_1(i\varphi) \equiv f_0(i\varphi)f_1(-i\varphi)$. В силу теоремы единственности [14, с. 51] для любого $z \in \mathbb{C}$ выполняется равенство $f_0(-z)f_1(z) \equiv f_0(z)f_1(-z)$ и, следовательно,
$$F(z, r)f_1(-z) \equiv F(-z, r)f_1(z). \tag{1.5}$$

Предположим, что нашлось $a \in \mathbb{R}$ такое, что $F(\cdot, a)$ устойчива, тогда из (1.5) вытекает, что любой корень функции $F(\cdot, a)$ является корнем функции f_1 с учетом кратности, то есть существует функция $\beta \in \mathrm{E}_{\mathbb{R}}$ такая, что $f_1(z) \equiv F(z, a)\beta(z)$. Таким образом, для любого $r \in \mathbb{R}$ получаем представление
$$F(z, r) \equiv F(z, a)\bigl(1 + (r - a)\beta(z)\bigr). \tag{1.6}$$

В силу (1.5) функция β четная, поэтому из (1.6) вытекает, что $F(\cdot, r)$ устойчива только в том случае, если уравнение $1+(r-a)\beta(z) = 0$ не имеет решений в комплексной плоскости.

Согласно малой теореме Пикара [14, с. 61] функция β принимает все возможные значения за исключением не более чем одного. Следовательно, область устойчивости состоит из одной или двух точек. Покажем, что это невозможно.

При произвольном R рассмотрим замкнутый контур C_R на комплексной плоскости, состоящий из полуокружности $z = Re^{i\varphi}$, где $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, и отрезка мнимой оси $z = iy$, где $y \in [-R, R]$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что при $\operatorname{Re} z \geq 0$ имеем $\lim_{|z|\to\infty} F(z, a)/F(z, r) = 1$, следовательно, существует $M = \sup_{\operatorname{Re} z>0}\bigl|\beta(z)\bigr|$.

При $\Delta a < 1/M$ и достаточно большом R на контуре C_R имеем
$$\bigl|F(z, a + \Delta a) - F(z, a)\bigr| = \bigl|F(z, a) \cdot \Delta a \cdot \beta(z)\bigr| < \bigl|F(z, a)\bigr|,$$

следовательно, по теореме Руше [4, с. 140] функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ не имеет корней внутри контура C_R, а в силу произвольности R, и в положительной полуплоскости.

Если бы функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ имела корень z_0 на мнимой оси, то нарушилось бы неравенство $\left|F(z_0, a+\Delta a) - F(z_0, a)\right| < \left|F(z_0, a)\right|$ на контуре C_R, поэтому функция $F(\cdot, a+\Delta a)$ устойчива. Область устойчивости — открытое множество и, следовательно, пустое. □

Итак, если $u(\varphi) \equiv 0$, то область устойчивости либо пуста, либо совпадает со всей вещественной осью, причем последний случай встречается тогда и только тогда, когда $f_1(z) \equiv 0$ и f_0 является устойчивой функцией.

Далее будем рассматривать случай, когда $u(\varphi) \not\equiv 0$. По теореме единственности существует упорядоченная последовательность неотрицательных корней функции u. Удалим из этой последовательности те частоты φ, для которых $f_1(i\varphi) = 0$. Оставшуюся последовательность обозначим через $\{\theta_n\}$ ($n = 0, 1, 2 \dots$).

Обозначим $t_n = -f_0(i\theta_n)/f_1(i\theta_n)$.

Лемма 1.2. *Любой отрезок содержит конечное число чисел* t_n.

Доказательство. Предположим, что интервалу $(-d, d)$ принадлежит бесконечная подпоследовательность t_{n_k}. Из теоремы 1.1 вытекает, что при $z \neq 0$ в точке D-разбиения (t_{n_k}, θ_{n_k}) выполняется равенство

$$1 = -\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n(i\theta_{n_k})r + b_n(i\theta_{n_k})}{(i\theta_{n_k})^{N-n}}.$$

Любому конечному отрезку принадлежит конечное число элементов последовательности $\{\theta_{n_k}\}$, поэтому $\lim_{k\to\infty} \theta_{n_k} = \infty$, следовательно,

$$1 \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\left|a_n(i\theta_{n_k})\right|d + \left|b_n(i\theta_{n_k})\right|}{\theta_{n_k}^{N-n}} = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что t_{n_k} не существует. □

Итак, если у функций f_0, f_1 нет общих корней на мнимой оси, то $\left\{(t_n, \theta_n)\right\}$ — это множество точек D-разбиения, а последовательность $\{t_n\}$ разбивает $\mathbb{R}$ на не более чем счетное множество интервалов, которые будем называть *областями D-разбиения.* Абсолютные индексы любых двух точек области D-разбиения I равны друг другу — это число будем обозначать $\rho(I)$ и называть абсолютным индексом области I.

Классифицируем точки D-разбиения.

Символом $F'(z, r)$ обозначим производную по первому аргументу.

Определение 1.5. Будем называть точку D-разбиения (r, φ) *регулярной*, если $F'(i\varphi, r) \neq 0$, и *нерегулярной*, если $F'(i\varphi, r) = 0$.

Приведем следствие из теоремы о неявном операторе [15, с. 415]. Рассмотрим регулярную точку D-разбиения (a, φ). В окрестности точки a существует единственная аналитическая функция $Z_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ такая, что $Z_\varphi(a) = i\varphi$ и $F\big(Z_\varphi(r), r\big) \equiv 0$.

В нерегулярных точках D-разбиения выполняется равенство $f_0'(i\theta_n) + t_n f_1'(i\theta_n) = 0$. Подставив формулу для t_n в это выражение, получаем, что точка с частотой θ_n нерегулярна, если и только если $\big(f_0(i\theta_n)/f_1(i\theta_n)\big)' = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.6. Регулярную точку D-разбиения (r,φ) назовем *стационарной*, если $\operatorname{Re} Z'_\varphi(r)=0$, и *нестационарной*, если $\operatorname{Re} Z'_\varphi(r)\neq 0$.

Теорема 1.3. *Точка D-разбиения (t_n,θ_n) нестационарна в том и только том случае, если $u'(\theta_n)=0$, при этом справедливо равенство*

$$\operatorname{Re} Z'_{\theta_n}(t_n)=\frac{u'(\theta_n)}{\bigl|F'(i\varphi,a)\bigr|^2}. \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В точке D-разбиения (a,φ) имеем:

$$dF(i\varphi,a)=\bigl(F'(i\varphi,a)Z'_\varphi(a)+f_1(i\varphi)\bigr)\,dr.$$

В любой точке r, такой что $F\bigl(Z_\varphi(r),r\bigr)=0$, полный дифференциал функции F равен нулю, следовательно, имеет место равенство

$$\operatorname{Re} Z'_\varphi(a)=-\frac{\operatorname{Re} F'(i\varphi,a)f_1(-i\varphi)}{\bigl|F'(i\varphi,a)\bigr|^2}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим функцию $\tilde u(z)=-if_1(iz)f_0(-iz)$. Очевидно, $u(\varphi)=\operatorname{Re}\tilde u(\varphi)$. Далее, подставляя в числитель (1.8) равенство $rf_1(-i\varphi)=-f_0(-i\varphi)$, получаем

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Re} F'(i\varphi,a)f_1(-i\varphi)&=-\operatorname{Re} f_1(-i\varphi)\bigl(f_0'(i\varphi)+rf_1'(i\varphi)\bigr)=\\
&=\operatorname{Re}\bigl(f_1'(i\varphi)f_0(-i\varphi)-f_0'(i\varphi)f_1(-i\varphi)\bigr)=\\
&=\operatorname{Re}\bigl(f_1'(i\varphi)f_0(-i\varphi)-f_0'(-i\varphi)f_1(i\varphi)\bigr)=\\
&=\operatorname{Re}\bigl(f_1(i\varphi)f_0(-i\varphi)\bigr)'=\operatorname{Re}\tilde u'(\varphi)=u'(\varphi).
\end{aligned}$$ □

Рассмотрим отрезок $[a,b]$, не содержащий ни одной нерегулярной точки D-разбиения. Обозначим через $n_1,n_2,\dots n_M$ номера точек D-разбиения, проекции которых принадлежат $[a,b]$ (множество конечно согласно лемме 1.2). В окрестности точки t_{n_k} функция $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}$ не обращается в ноль (в противном случае последовательность $\{t_n\}$ имела бы предельную точку на вещественной оси).

Если $t_{n_k}\in(a,b)$, при переходе через точку t_{n_k} функция $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}$ меняет знак с отрицательного на положительный и $\theta_{n_k}\neq 0$, то это соответствует переходу пары комплексно-сопряженных корней из отрицательной полуплоскости в положительную. Рассмотрев все возможные варианты, приходим к следующей формуле:

$$\rho(b)-\rho(a)=\sum_{k=1}^{M} v_k s_k, \tag{1.9}$$

где v_k равно единице, если $\theta_{n_k}=0$, и двум в любом другом случае, а s_{n_k} вычисляется по следующему правилу:

- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)<0$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)<0$, то $s_k=+1$;
- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)<0$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)<0$, то $s_k=-1$;
- если $t_{n_k}\in(a,b)$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}+0)\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(t_{n_k}-0)>0$, то $s_k=0$;

- если $t_{n_k} = a$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(a+0) > 0$, то $s_k = 0$;
- если $t_{n_k} = a$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(a+0) < 0$, то $s_k = -1$;
- если $t_{n_k} = b$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(b-0) > 0$, то $s_k = 0$;
- если $t_{n_k} = b$ и $\operatorname{Re} Z_{\theta_{n_k}}(b-0) < 0$, то $s_k = +1$.

Заметим, что если $t_{n_k} \in (a,b)$ и $u'(\theta_{n_k}) \neq 0$, то согласно теореме 1.3 имеем

$$s_k = \operatorname{sgn} u'(\theta_{n_k}). \tag{1.10}$$

Рассмотрим характеристическую функцию, к которым приводит исследование уравнений с запаздыванием первого порядка:

$$\Phi(z) = z + pg(z), \tag{1.11}$$

где функция g подчинена условиям: (1) $g(0) > 0$; (2) существует $\alpha > 0$ такое, что $g(y) = g(-y)e^{-2\alpha y}$ для любого $y \in \mathbb{R}$.

Обозначим p через r и запишем характеристическое уравнение в виде

$$ze^{\alpha z} + rg(z)e^{\alpha z} = 0,$$

то есть $f_0(z) = ze^{\alpha z}$ и $f_1(z) = g(z)e^{\alpha z}$.

В силу упоминавшейся выше теоремы единственности равенство $g(z) = g(-z)e^{-2\alpha z}$ выполняется для любого $z \in \mathbb{C}$, следовательно, $\operatorname{Im} f_1(i\varphi) \equiv 0$ (этим тождеством можно заменить условие (2)).

Обозначим $\varphi_n = \frac{\pi}{\alpha}\left(n - \frac{1}{2}\right)$.

Теорема 1.4. *Пусть выполняются условия (1) и (2).*

а) Если $(-1)^n f(i\varphi_n) \geq 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$, *то функция* (1.11) *устойчива в том и только том случае, если* $p > 0$.

б) Если существует $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $(-1)^n f_1(i\varphi_n) < 0$, *то существует*

$$p^* = \frac{1}{\max\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigl((-1)^{n+1} f_1(i\varphi_n)/\varphi_n\bigr)}$$

и функция (1.11) *устойчива в том и только том случае, если* $p \in (0, p^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $u(\varphi) = \operatorname{Im} f_1(i\varphi) f_0(-\varphi) = -f_1(i\varphi)\varphi\cos\alpha\varphi$.

Функция u обращается в ноль, если $f_1(i\varphi) = 0$ или $\varphi\cos\alpha\varphi = 0$. Частотам точек D-разбиения соответствуют те и только те корни функции u, для которых $f_1(i\varphi) \neq 0$.

По условию $f_1(0) \neq 0$, поэтому $\theta_0 = 0$. Для того, чтобы найти остальные частоты, необходимо из чисел $\{\varphi_n\}$ исключить те, для которых $f_1(i\varphi_n) = 0$. Оставшиеся числа представляют собой множество $\{\theta_n\}$ ($n \geq 1$).

Имеем $t_0 = -f_0(0)/f_1(0) = 0$ и $u'(0) = -f_1(0) < 0$. Согласно теореме 1.3 точка D-разбиения $(0,0)$ нестационарна, и $\operatorname{Re} Z_0(0) < 0$. В силу $\rho(0) = 1$ абсолютный индекс области D-разбиения, примыкающей к нулю справа, равен нулю.

Очевидно, $\lim_{z\to\infty} F(z,r) = +\infty$ при $z \in \mathbb{R}$. Если $r < 0$, то $F(r,0) = rf(0) < 0$ и, следовательно, функция $F(\cdot, r)$ имеет вещественный положительный корень. Таким образом, слева от нуля нет точек с положительным индексом.

Нетрудно установить, что $t_n = (-1)^{n+1}\theta_n/f_1(i\theta_n)$.

В случае *а)* имеем $t_n < 0$ для любого n, поэтому существует область D-разбиения $(0, +\infty)$ и нулевой абсолютный индекс имеет эта и только эта область.

Предположение случая *б)* эквивалентно тому, что существуют точки D-разбиения, проекции которых положительны. Согласно лемме 1.2 среди них существует точка, проекция которой наименьшая — легко видеть, что проекция этой точки равна p^*.

Выше мы показали, что $\rho\big((0,p^*)\big) = 0$. Пусть a — внутренняя точка области D-разбиения, расположенная правее точки p^*. Тогда, согласно формулам (1.9), (1.10), имеем

$$\rho(a) = 2\sum_{k=1}^{M} \operatorname{sgn} u'(\theta_{n_k}),$$

где суммирование ведется по всем точкам D-разбиения, проекции которых принадлежат интервалу $(0,a)$. Для этих точек имеем

$$u'(\theta_{n_k}) = (-1)^{n_k+1}\alpha\theta_{n_k} f_1(i\theta_{n_k}) = \alpha f_1^2(i\theta_{n_k})t_{n_k} > 0,$$

следовательно, $\rho(a) = 2M > 0$. □

2. Примеры однопараметрических характеристических уравнений

В данном параграфе рассматриваются два уравнения первого порядка с запаздыванием. В обоих случаях области устойчивости были известны, но получены различными методами. Ниже области устойчивости будут построены универсальным способом, основанном на результатах предыдущего параграфа.

П р и м е р 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + px(t-\tau_1) + px(t-\tau_2) = 0, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

где τ_1, τ_2 — фиксированные положительные запаздывания. Область устойчивости для этого уравнения найдена в работе [16], где доказательство основано на непосредственном применении принципа аргумента, при этом некоторые выкладки были пропущены. Стоит отметить, что к необходимости исследования границ области устойчивости уравнения (2.12) приводит описание динамики популяции полевых мышей (*Microtus agrestis*) [17, гл. 4, § 4].

Теорема 2.5. [16, с. 65] Уравнение (2.12) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < p < \frac{\pi}{2(\tau_1+\tau_2)\cos\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая функция уравнения (2.12) имеет вид:

$$\Phi(z,p) = z + p(e^{-\tau_1 z} + e^{-\tau_2 z}),$$

то есть $g(z) = e^{-\tau_1 z} + e^{-\tau_2 z}$. Легко видеть, что $g(0) > 0$ и $\alpha = (\tau_1+\tau_2)/2$, следовательно, условия теоремы 1.4 выполнены и $f_1(z) = 2\operatorname{ch}\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{2}z\right)$.

Далее,

$$f_1(i\varphi_n) = 2\cos\bigl(\gamma\pi(n-1/2)\bigr),$$

где $\gamma = \left|\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\right| \in [0,1)$, следовательно, $\theta_n = \varphi_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, $f_1(i\varphi_1) > 0$, поэтому реализуется случай *б)*.

Покажем, что $f_1(i\varphi_1)/\varphi_1 > \bigl|f_1(i\varphi_n)\bigr|/\varphi_n$ для любого $n > 2$.

Доказываемое неравенство эквивалентно следующему:

$$(2n-1)\cos(\gamma\pi/2) > \Bigl|\cos\bigl(\gamma\pi(n-1/2)\bigr)\Bigr|.$$

Обозначив $\xi = \pi(1-\gamma)/2$ и $k = 2n-1$, перепишем последнее неравенство в виде:

$$k\sin\xi > |\sin k\xi|, \tag{2.13}$$

доказательство которого по индукции при натуральных $k \geq 2$ не составляет труда.

Итак, $p^* = \varphi_1/f_1(i\varphi_1) = \pi/\bigl(2(\tau_1+\tau_2)\cos(\gamma\pi/2)\bigr)$. □

П р и м е р 2.2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + p\int_{\tau_1}^{\tau_2} x(t-s)ds = 0, \quad t > 0, \tag{2.14}$$

где $\tau_2 > \tau_1 \geq 0$. Область устойчивости этого уравнения найдена в работе [18] с помощью построения годографа.

Теорема 2.6. [18] Уравнение (2.14) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда

$$0 < p < \frac{\pi^2}{2(\tau_1+\tau_2)^2\sin\left(\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая функция уравнения (2.12) имеет вид:

$$\Phi(z,p) = z + p\frac{e^{-\tau_1 z} - e^{-\tau_2 z}}{z},$$

следовательно, $g(z) = (e^{-\tau_1 z} - e^{-\tau_2 z})/z$ (при $z = 0$ функция доопределена по непрерывности значением $g(0) = \tau_2 - \tau_1 > 0$).

Применим теорему 1.4: очевидно, $\alpha = (\tau_1+\tau_2)/2$ и $f_1(z) = 2\operatorname{sh} z/z$.

Далее,

$$f_1(i\varphi_n) = \frac{\tau_1+\tau_2}{\pi(n-1/2)}\sin\left(\gamma\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) \neq 0,$$

где $\gamma = (\tau_2 - \tau_1)/(\tau_2 + \tau_1)$.

Остается при $n \geq 2$ доказать неравенство:

$$\frac{f_1(i\varphi_1)}{\varphi_1} > \left|\frac{f_1(i\varphi_n)}{\varphi_n}\right|. \tag{2.15}$$

Обозначим $\xi = \pi\gamma/2$ и $k = 2n - 1$ и перепишем (2.15) в виде:

$$k^2 \sin\xi > |\sin k\xi|.$$

Последнее неравенство вытекает из (2.13).

Следовательно, $p^* = \varphi_1^2/f_1(i\varphi_1) = \pi^2/\big(2(\tau_1+\tau_2)^2\sin(\gamma\pi/2)\big)$. □

Заключение

В примерах, разобранных во втором параграфе, была использована теорема 1.4. Однако, не всякое однопараметрическое характеристическое уравнение можно представить в виде (1.11). Более того, даже если такое представление возможно, условия (1) или (2) для функции g могут не выполняться.

Тем не менее, для однопараметрических характеристических уравнений общего вида применимы результаты, изложенные в первом параграфе. Общий подход можно предложить в виде следующей последовательности действий.

1. Убедиться в том, что $u(\varphi) \neq 0$.
2. Найти множество частот точек D-разбиения — пересечение решений уравнения $u(\varphi) = 0$ и неравенства $f(i\varphi) \neq 0$ — и соответствующих им частот.
3. Обнаружить нерегулярные точки D-разбиения. Они разбивают $\mathbb{R}$ на не более чем счетное множество интервалов $\{J_m\}$ ($m = 0, 1, 2 \ldots$).
4. Тем или иным методом найти абсолютный индекс хотя бы одной точки в каждой области J_m.
5. Определить знак самой младшей ненулевой производной функции $\operatorname{Re} Z_{\theta_n}$ во всех регулярных точках D-разбиения, при этом в нестационарных точках можно воспользоваться формулой (1.8).
6. Воспользовавшись формулой (1.9), вычислить абсолютные индексы всех областей D-разбиения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. 230 с.

3. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом // Известия высших учебных заведений. Математика. 1997. № 6. С. 3-16.

4. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 351 с.

5. *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 176 с.

6. *Понтрягин Л.С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Известия РАН. Серия математическая. 1942. Т. 6. № 3. С. 115-134.

7. *Мейман Н.Н., Чеботарев Н.Г.* Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1949. № 26. С. 3-331.

8. *Михайлов А.В.* Метод гармонического анализа в теории регулирования // Автоматика и телемеханика. 1938. № 3. С. 27-81.

9. *Неймарк Ю.И.* Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949. 140 с.

10. *Мулюков М.В.* Структура областей D-разбиения для двупараметрических характеристических уравнений систем с запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения: теория и приложения: материалы конф., посвящ. 95-летию со дня рождения проф. Н.В. Азбелева. Пермь, 2018. С. 180-200.

11. *Мулюков М.В.* Области D-разбиения с прямолинейными границами // Математика в современном мире: тез. докл. Междунар. конф. Новосибирск, 2017. С. 233.

12. *Mulyukov M.V.* Classification of Two-Parameter Autonomous Linear Systems with Delay // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol. 230. № 5. P. 724-727. DOI 10.1007/s10958-018-3777-1.

13. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

14. *Маркушевич А.И.* Целые функции. Элементарный очерк. М.: Наука, 1975. 120 с.

15. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.

16. *Stepan G.* Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions. N. Y.: John Wiley & Sons, 1989. 151 p.

17. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.

18. *Вагина М.Ю.* Логистическая модель с запаздывающим усреднением // Автоматика и телемеханика. 2003. № 4. С. 167-173.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 24 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Мулюков Михаил Вадимович, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь научно-исследовательского центра «Функционально-дифференциальные уравнения», e-mail: Mulykoff@gmail.com

Для цитирования: *Мулюков М.В.* Устойчивость однопараметрических систем линейных автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 488–502. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502

STABILITY OF ONE-PARAMETER SYSTEMS OF LINEAR AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDED DELAY

M. V. Mulyukov

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skii Pr., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: Mulykoff@gmail.com

Abstract. We consider a system of linear autonomous differential equations with bounded delay in the case when its characteristic function depends linearly on one scalar parameter. The application of the D-subdivision method to the problem of constructing the stability region for this equation was developed.
Keywords: delay differential equations; autonomous equations; asymptotic stability; D-subdivision method

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional-Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

2. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of Solutions of the Equations with Ordinary Derivatives]. Perm, Perm State University Publ., 2001, 230 p. (In Russian).

3. Azbelev N.V., Simonov P.M. Ustoychivost' uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom [Stability of equations with delayed argument]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1997, no. 6, pp. 3-16. (In Russian).

4. Myshkis A.D. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 351 p. (In Russian).

5. Postnikov M.M. *Ustoychivye mnogochleny* [Stable Polynomials]. Moscow, Editorial URSS, 2004, 176 p. (In Russian).

6. Pontryagin L.S. O nulyakh nekotorykh elementarnykh transtsendentnykh funktsiy [On zeros of some transcendental functions]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya – Izvestiya: Mathematics*, 1942, vol. 6, no. 3, pp. 115-134. (In Russian).

7. Meyman N.N., Chebotarev N.G. Problema Rausa–Gurvitsa dlya polinomov i tselykh funktsiy [The Routh–Hurwitz problem for polynomials and entire functions]. *Trudy Matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova AN SSSR – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1949, no. 26, pp. 3-331. (In Russian).

8. Mikhaylov A.V. Metod garmonicheskogo analiza v teorii regulirovaniya [Method of harmonic analysis in control theory]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 1938, no. 3, pp. 27-81. (In Russian).

The research is carried out within the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project No. 1.5336.2017/8.9), and is supported by RFBR (project No. 18-01-00928).

9. Neymark Yu.I. *Ustoychivost' linearizovannykh sistem (diskretnykh i raspredelennykh)* [Stability of Linearized Systems (Discrete and Distributed)]. Leningrad, Leningrad Holding the Order of the Red Banner Air Force Engineering Academy Publ., 1949, 140 p. (In Russian).

10. Mulyukov M.V. Struktura oblastey D-razbieniya dlya dvuparametricheskikh kharakteristicheskikh uravneniy sistem s zapazdyvaniem [Structure of the D-subdivision domains for the two-parameter characteristic equations of systems with delay]. *Materialy konferentsii «Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya: teoriya i prilozheniya», posvyashchennoy 95-letiyu so dnya rozhdeniya professora N. V. Azbeleva* [Proceedings of the Conference "Functional-Differential Equiations: Theory and Applications" Dedicated to the 95th Anniversary of Professor N.V. Azbelev]. Perm, 2018, pp. 180-200. (In Russian).

11. Mulyukov M.V. Oblasti D-razbieniya s pryamolineynymi granitsami [D-subdivision domains with straight bounds]. *Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy konferentsii «Matematika v sovremennom mire»* [Proceedings of the All-Russian Conference "Mathematics in the Modern World"]. Novosibirsk, 2017, p. 233.

12. Mulyukov M.V. Classification of Two-Parameter Autonomous Linear Systems with Delay. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 724-727. DOI10.1007/s10958-018-3777-1.

13. Lankaster P. *The Theory of Matrices*. New York, Academic Press, 1969, 316 p.

14. Markushevich A.I. *Tselye funktsii. Elementarnyy ocherk* [Entire Functions. Elementary Essay]. Moscow, Nauka Publ., 1975, 120 p. (In Russian).

15. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 488 p. (In Russian).

16. Stepan G. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions*. New York, John Wiley & Sons, 1989, 151 p.

17. Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan T.-H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. Cambridge, Cambridge University Press, 1981.

18. Vagina M.Yu. Logisticheskaya model' s zapazdyvayushchim usredneniem [A Delay-Averaged Logistic Model]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*, 2003, no. 4, pp. 167-173. (In Russian).

Received 20 April 2018
Reviewed 24 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Mulyukov Mikhail Vadimovich, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Engineer Researcher of the Research Center «Functional-Differential Equations», e-mail: Mulykoff@gmail.com

For citation: Mulyukov M.V. Ustojchivost' odnoparametricheskih sistem linejnyh avtonomnyh differencial'nyh uravnenij s ogranichennym zapazdyvaniem [Stability of one-parameter systems of linear autonomous differential equations with bounded delay]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 488–502. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-488-502 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509

УДК 517.925

КОЛМОГОРОВСКИЕ МАТРИЦЫ И НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ЦЕПИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

© **А. И. Перов**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1
E-mail: anperov@mail.ru

Аннотация. В терминах эргодичности усредненных систем с постоянными коэффициентами (и колмогоровской матрицей) указаны признаки эргодичности непрерывных марковских цепей с конечным числом состояний с периодическими и почти периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: колмогоровские матрицы; непрерывные марковские цепи с периодическими и почти периодическими коэффициентами

Введение

В [1] дано определение колмогоровских бесконечных матриц в связи с некоторыми задачами теории вероятностей. Изучение непрерывных марковских цепей приводит к счетным системам дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Предпринята попытка использовать здесь теорию полугрупп операторов в банаховом пространстве, которая натолкнулась на существенные трудности, преодолеть которые полностью не удалось и до настоящего времени.

Цель, поставленная в этой статье, значительно скромнее: мы рассматриваем конечные системы линейных дифференциальных уравнений, описывающих непрерывную марковскую цепь с конечным числом состояний [2], но с переменными коэффициентами [3] (см. также [4]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

1. Основные понятия

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Вектор $\mathbf{p}$ с компонентами $p_1, p_2, ..., p_n$ называется *вероятностным,* если $p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, ..., p_n \geq 0$ и $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$; короче $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{1p} = 1$, где $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)$ (строка) [5].

Совокупность всех вероятностных векторов образует симплекс $\mathbf{W}$ размерности $n{-}1$.

Определение 2. Вещественная квадратная матрица $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *марковской*, если

$$\begin{array}{llll} m_{ij} \geq 0 & \text{при } 1 \leq i, j \leq n & \mathbf{M} \geq \mathbf{0}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} = 1, & 1 \leq j \leq n & \mathbf{1M} = \mathbf{1}. \end{array} \tag{1}$$

Спектр марковской матрицы лежит в единичном круге комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем 1 является ее собственным значением. Для приложений особенно важен тот факт, когда 1 является простым собственным значением марковской матрицы $\mathbf{M}$, а все остальные собственные значения лежат внутри единичного круга (*эргодический случай*). Последнее имеет место тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{M}$ является *примитивной* [6]: $\mathbf{M}^p > 0$ при некотором натуральном p. Эргодичность означает, что $\mathbf{M}^k\mathbf{x} \to \mathbf{p}$ при $k \to \infty$ и $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$, где $\mathbf{p}$ – вектор финальных вероятностей.

По теореме Хопфа [7], если марковская матрица $\mathbf{M}$ положительная: $\mathbf{M} > 0$, и $m = \min m_{ij}$ $(0 < m < 1)$, то

$$|\lambda| \leq \frac{1-m}{1+m} \quad \lambda \in \mathrm{sp}\,\mathbf{M}\backslash 1. \tag{2}$$

Свойство эргодичности можно сформулировать иначе. Пусть $\mathbf{L}$ – подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности $n{-}1$, определяемое равенством $\mathbf{1x} = \mathbf{0}$. Это подпространство является инвариантным относительно матрицы (оператора) $\mathbf{M}$: $\mathbf{ML} \subseteq \mathbf{L}$. Эргодичность имеет место в том и только в том случае, если оператор $\mathbf{M}|\mathbf{L}$ является сжатием

$$\mathrm{spr}\,\mathbf{M}|\mathbf{L} < 1. \tag{3}$$

Определение 3. Матрица (оператор) называется *сжатием*, если ее (его) спектральный радиус меньше единицы.

Согласно критерию Деблина эргодичность имеет место, если матрица $\mathbf{M}$ имеет хотя бы одну строку, целиком состоящую из положительных элементов.

Определение 4. Вещественная квадратная матрица $\mathbf{K} = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *колмогоровской*, если

$$\begin{array}{lll} k_{ii} \leq 0, \; 1 \leq i \leq n; & k_{ij} \geq 0 \text{ при } i \neq j, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} k_{ij} = 0, \; 1 \leq i \leq n & \mathbf{1K} = \mathbf{0}. \end{array} \tag{4}$$

Спектр колмогоровской матрицы лежит в левой полуплоскости, причем 0 является ее собственным значением (чисто мнимых собственных значений колмогоровская матрица не имеет). Система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{5}$$

описывает непрерывную марковскую цепь с n состояниями [7]. В силу свойства *внедиагональной неотрицательности* колмогоровской матрицы $k_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$ матрицант $e^{t\mathbf{K}}$ является неотрицательным при $t \geq 0$. Для приложений весьма важен тот случай, когда $e^{t\mathbf{K}}\mathbf{x}$ при любом $\mathbf{x} \in \mathbf{W}$ и $t \to \infty$ имеет предел $\mathbf{p} \in \mathbf{W}$ и этот предел не зависит от $\mathbf{x}$ (свойство *эргодичности*). Указанное свойство имеет место тогда и только тогда, когда 0 является простым собственным значением матрицы $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}\mathbf{p} = \mathbf{0}, \ \ \mathbf{p} \in \mathbf{W}, \ \ \mathbf{p} > \mathbf{0}. \tag{6}$$

($\mathbf{p}$ – вектор финальных вероятностей).

Свойство эргодичности можно сформулировать иначе. Подпространство $\mathbf{L}$ является инвариантным относительно матрицы (оператора) $\mathbf{K}$: $\mathbf{K}\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$. Эргодичность имеет место в том и только в том случае, когда оператор $\mathbf{K}|\mathbf{L}$ является *гурвицевым*

$$\operatorname{spa} \mathbf{K}|\mathbf{L} < 0. \tag{7}$$

О п р е д е л е н и е 5. Матрица (оператор) называется *гурвицевой*, если ее (его) спектральная абсцисса отрицательна.

Рассмотрим непрерывную марковскую цепь с конечным числом n состояний, описываемую системой линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)x_j, \ \ 1 \leq i \leq n; \ \ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}(t)\mathbf{x}, \tag{8}$$

где $\mathbf{K}(t) = (k_{ij}(t))$. Мы предположим, что это система ω-периодична

$$k_{ij}(t+\omega) = k_{ij}(t), \ \ \mathbf{K}(t+\omega) = \mathbf{K}(t) \tag{9}$$

(например, суточные, недельные или месячные колебания).

Мы предположим, что $k_{ij}(t)$ – измеримые суммируемые на отрезке $[0, \omega]$ функции, причем матрица $\mathbf{K}(t)$ при любом t является колмогоровской

$$\begin{gathered} k_{ii}(t) \leq 0, \ \ 1 \leq i \leq n; \ \ k_{ij}(t) \geq 0 \ \text{ при } \ i \neq j, \\ \sum_{i=1}^{n} k_{ij}(t) = 0, \qquad\qquad 1 \leq i \leq n. \end{gathered} \tag{10}$$

Наряду с системой с периодическими коэффициентами (8) рассмотрим усредненную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\xi_j, \ \ 1 \leq i \leq n; \ \ \dot{\xi} = \mathbf{C}\xi, \tag{11}$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega k_{ij}(t)dt, \ \ \mathbf{C} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \mathbf{K}(t)dt. \tag{12}$$

Из (10) вытекает, что $\mathbf{C}$ – колмогоровская матрица

$$\begin{aligned} &c_{ii} \le 0, \ \ 1 \le i \le n; \ \ c_{ij} \ge 0 \ \text{ при } \ i \ne j, \\ &\sum_{i=1}^n c_{ij} = 0, \qquad\qquad 1 \le i \le n. \end{aligned} \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть колмогоровская матрица* $\mathbf{C}$ *(12) является эргодической. Тогда система (8) имеет единственное вероятностное решение* $\mathbf{p}(t)$, *которое является положительным* $\mathbf{p}(t) > 0$, *и периодическим,* $\mathbf{p}(t+\omega) = \mathbf{p}(t)$, *причем*

$$||\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}(t)|| \le Ne^{-\varepsilon(t-s)}\sum_{k=0}^{n-1}||\mathbf{x}(s) - \mathbf{p}(s)||, \tag{14}$$

при $t \ge s$, *где* N, ε *– некоторые положительные числа, где* $\mathbf{x}(t)$ *любое другое решение системы (8) с* $\mathbf{x}(0) \in \mathbf{W}$.

Рассмотрим систему (8) в предположении почти периодичности (в смысле Бора [8]) ее коэффициентов. В этом случае коэффициенты усредненной системы (11) определяются по следующему правилу

$$c_{ij} = \lim_{0<b-a\to\infty}\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b k_{ij}(t)dt, \ \ \mathbf{C} = \lim_{0<b-a\to\infty}\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \mathbf{K}(t)dt. \tag{15}$$

Из (10) вытекает, что матрица $\mathbf{C}$ – колмогоровская. Аналогично теореме 1 имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Рассмотрим систему (8) с почти периодическими коэффициентами. Пусть колмогоровская матрица* $\mathbf{C}$, *элементы которой получены по правилу (15), является эргодической. Тогда система (8) имеет единственное вероятностное решение* $\mathbf{p}(t)$, *которое является положительным* $\mathbf{p}(t) > 0$, *и почти периодическим, причем имеет место оценка (14). Группа частот почти периодического решения* $\mathbf{p}(t)$ *содержится в группе частот системы (8).*

Приведем достаточное условие эргодичности, состоящее в том, что

$$(-1)^{n-1}\mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & ... & j-1 & j+1 & ...n \\ 1 & ... & j-1 & j+1 & ...n \end{pmatrix} > 0, \ \ 0 \le j \le n \tag{15}$$

(при $j = 1$ и $j = n$ нужно заменить соответствующие вероятности). Условие (15) означает, что все главные миноры порядка $n-1$ матрицы $\mathbf{C}$ должны быть положительны. Заметим, что единственный минор n-го порядка равен нулю.

Если в системе (8) матрица (10) является трехдиагональной (якобиевой), то есть $k_{ij}(t) = 0$ при $|i-j| > 1$, то матрицант $\mathbf{U}(t)$ при $t > 0$ ($\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$) является осцилляционной матрицей со всеми вытекающими отсюда спектральными свойствами (и, в частности, с чисто вещественным спектром) [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИИЛ, 1962. 832 с.

2. *Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я.* Основы линейной алгебры и некоторые ее приложения. М.: Высшая школа, 1971. 216 с.

3. *Перов А.И.* Признаки эргодичности колмогоровских почти периодических систем // ДАН. 2001. Т. 380. № 1. С. 9-12.

4. *Перов А.И.* Признаки эргодичности марковских почти периодических систем // ДАН. 2002. Т. 384. № 4. С. 455-459.

5. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 369 с.

6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

8. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. 360 с.

9. *Seneta E.* Non-negative Matrices and Markov Chains. Sydney: Springer, 2006. 292 p.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Для цитирования: *Перов А.И.* Колмогоровские матрицы и непрерывные марковские цепи с конечным числом состояний // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 503–509. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509

KOLMOGOROV MATRIX, AND A CONTINUOUS MARKOV CHAIN WITH A FINITE NUMBER OF STATES

A. I. Perov

Voronezh State University
1, Universitetskaya sq., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: anperov@mail.ru

Abstract. In terms of ergodicity of averaged systems with constant coefficients (and Kolmogorov matrix), the signs of ergodicity of continuous Markov chains with a finite number of States with periodic and almost periodic coefficients are indicated.
Keywords: Kolmogorov matrices; continuous Markov chains with periodic and almost periodic coefficients

REFERENCES

1. Hille E., Phillips R. *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semigroups]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 832 p. (In Russian).

2. Blokh E.L., Loshinskiy L.I., Turin V.Ya. *Osnovy lineynoy algebry i nekotorye ee prilozheniya* [The Basics of Linear Algebra and Some of Its Applications]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1971, 216 p. (In Russian).

3. Perov A.I. Priznaki ergodichnosti kolmogorovskikh pochti periodicheskikh sistem [Signs of ergodicity of Kolmogorov almost periodic systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2001, vol. 380, no. 1, pp. 9-12. (In Russian).

4. Perov A.I. Priznaki ergodichnosti markovskikh pochti periodicheskikh sistem [Signs of ergodicity of Markov almost periodic systems]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2002, vol. 384, no. 4, pp. 455-459. (In Russian).

5. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to the Theory of Matrices]. Moscow, Nauka Publ., 1969, 369 p. (In Russian).

6. Gantmacher F.R. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 576 p. (In Russian).

7. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on Mathematical Stability Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian).

8. Gantmacher F.R., Krein M.G. *Ostsillyatsionnye matritsy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem* [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1950, 360 p. (In Russian).

9. Seneta E. *Non-negative Matrices and Markov Chains.* Sydney, Springer, 2006, 292 p.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).

Received 18 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Perov Anatoly Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of System Analysis and Management, e-mail: anperov@mail.ru

For citation: Perov A.I. Kolmogorovskie matritsy i nepreryvnye markovskie tsepi s konechnym chislom sostoyaniy [Kolmogorov matrix, and a continuous Markov chain with a finite number of States]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 503–509. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-503-509 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

УДК 517.925.52

ПРИМЕНЕНИЕ ИДЕЙ МЕТОДА НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© **А. И. Перов**[1), **В. К. Каверина**[2)

[1) ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: office@main.vsu.ru

[2) ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»
394026, Российская Федерация, г. Воронеж, Московский проспект, 14
E-mail: vmkaf@vgasu.vrn.ru

Аннотация. Указываются условия, связанные с методом направляющих функций, при выполнении которых периодически возмущенная автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет периодическое решение.

Ключевые слова: периодически возмущенная автономная система ОДУ; топологическая степень отображения; усреднение по Стеклову; коэрцитивность отображения

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывное локально липшицево отображение, для которого

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

Кроме того, нулевое стационарное решение $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ системы (1) является асимптотически устойчивым в целом, то есть любое решение $\mathbf{x}(t)$ этой системы может быть определено для всех $t \geq 0$ и

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00197).

Наряду с системой (1) рассмотрим неавтономную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + h(t), \tag{4}$$

где $h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – любая непрерывная периодическая векторная функция, $h(t+\omega) = h(t)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть непрерывное локально липшицево отображение* $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям (2), (3) и условию коэрцитивности отображения, то есть*

$$\|f(\mathbf{x})\| \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|\mathbf{x}\| \to +\infty. \tag{5}$$

Пусть любое решение $\mathbf{x}(t)$ *с начальным условием* $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *системы (4) может быть определено для всех* $t \geq t_0$.

Тогда периодически возмущенная система (4) имеет по крайней мере одно ω*-периодическое решение:* $\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию (3) нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом, следовательно, по теореме Н.Н. Красовского [1, с. 37] существует такая непрерывно дифференцируемая функция $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой $u(\mathbf{0}) = 0$, $u(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ и $u(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$; для которой

$$(grad\, u(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) < 0, \quad (\mathbf{x} \neq 0). \tag{6}$$

Здесь $grad\, u(\mathbf{x})$ – градиент рассматриваемой функции в точке $\mathbf{x}$, то есть вектор с компонентами $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_1, ..., \partial u(\mathbf{x})/\partial x_n$. Градиентное отображение $grad\, u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является непрерывным и обладает свойствами: $grad\ u(\mathbf{0}) = 0$, $grad\ u(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Так как выполнено условие $u(\mathbf{x}) \to +\infty$ при $\|\mathbf{x}\| \to +\infty$, то по теореме М.А. Красносельского [2, с. 111] (см. также [3, с. 53]) топологическая степень градиентного отображения $grad\ u(\mathbf{x})$ на границе ∂G любого открытого ограниченного множества G, содержащего нуль пространства в качестве внутренней точки, равно единице:

$$deg(grad\, u(\mathbf{x}), \partial G) = 1. \tag{7}$$

Проверим линейную гомотопность векторных полей $grad\ u(\mathbf{x})$ и $-f(\mathbf{x})$: $(1-\lambda) grad\, u(\mathbf{x}) - \lambda f(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Так как при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ это неравенство очевидно, то, предполагая обратное, найдем такие $\mathbf{x}_0 \neq 0$ и $0 < \lambda_0 < 1$, для которых имеет место равенство $(1-\lambda_0) grad\, u(\mathbf{x}_0) - \lambda_0 f(\mathbf{x}_0) = 0$. Умножая обе части последнего равенства на $-f(\mathbf{x}_0)$, получим $\lambda_0 \|f(\mathbf{x}_0)\|^2 = (1-\lambda_0)(grad\, u(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_0)) > 0$, что явно противоречит (6).

Так как по доказанному векторные поля $grad\, u(\mathbf{x})$ и $-f(\mathbf{x})$ гомотопны на ∂G, то их топологические степени совпадают; поэтому согласно (7) имеем $deg(-f(\mathbf{x}), \partial G) = 1$, откуда немедленно следует, что [3, с. 51]

$$deg(f(\mathbf{x}), \partial G) = (-1)^n. \tag{8}$$

Хорошо известно, что начальное значение при $t = 0$ периодического решения с периодом ω является неподвижной точкой отображения Пуанкаре $p(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, где $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\omega, 0, \mathbf{x})$, то есть должно быть $\mathbf{x} = p(\mathbf{x})$.

Пусть $k = max\|h(t)\|$, $0 \le t \le \omega$. В силу свойства коэрцитивности (5) можно указать такое $r > 0$, что $\|f(\mathbf{x})\| > k$ при $\|\mathbf{x}\| = r$.

По теореме Руше из (8) получим

$$deg(f(\mathbf{x}) + h(t), \partial S^n) = (-1)^n$$

при каждом фиксированном значении t. Положим $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) - \mathbf{x} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Если $q(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in \partial S^n$, то в силу сказанного выше возмущенная система (4) имеет периодическое решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, 0, \xi)$. Пусть теперь $q(\xi) \ne 0$ при $\xi \in \partial S^n$, то есть непрерывное векторное поле $q(\mathbf{x})$ является невырожденным на ∂S^n. Центральная часть доказательства заключается в установлении формулы

$$deg(q(\mathbf{x}), \partial S^n) = (-1)^n. \tag{9}$$

По теореме Кронекера [4, с. 162] отсюда будет следовать, что непрерывное отображение $q(\mathbf{x})$ обращается в нуль в некоторой точке $\xi \in S^n$. Тогда $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, 0, \xi)$ будет ω-периодическим решением возмущенной системы (4), и наше утверждение доказано.

При доказательстве формулы (9) мы не предполагаем, что выполнено условие ω-невозвращаемости [5, с. 48]

$$\mathbf{x}(t, 0, \xi) \ne \xi \quad \text{при} \quad \xi \in \partial S^n \ \text{ и } \ 0 < t \le \omega. \tag{10}$$

Поэтому наши рассуждения меняются следующим образом. Прежде всего для каждого $\xi \in \partial S^n$ найдем единственное $\lambda(\xi) \in [0, \omega]$, для которого

$$\mathbf{x}(\lambda(\xi), 0, \xi) = \xi \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t, 0, \xi) \ne \xi \quad \text{при} \quad \lambda(\xi) < t \le \omega.$$

Напомним, что $\mathbf{x}(0, 0, \xi) = \xi$ и в рассматриваемом случае $\mathbf{x}(\omega, 0, \xi) \ne \xi$ при любом $\xi \in \partial S^n$, так что существование функции $\lambda(\xi) : \partial S^n \to [0, \omega]$ не вызывает сомнений. (В случае, когда выполнено условие ω-невозвращаемости (10), очевидно, имеем $\lambda(\xi) \equiv 0$.) Нетрудно проверить, что $\lambda(\xi)$ является полунепрерывной сверху [6, с. 353], и потому измерима на сфере ∂S^n, рассматриваемой как $(n-1)$-мерное риманово многообразие с лебеговой мерой.

Рассмотрим измеримую гомотопию $\varphi(\xi, \alpha) : \partial S^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, положив

$$\varphi(\xi, 0) = \dot{\mathbf{x}}(\lambda(\xi), 0, \xi) = f(\xi) + h[\lambda(\xi)];$$

$$\varphi(\xi, \alpha) = \frac{\mathbf{x}(\alpha\omega + (1-\alpha)\lambda(\xi), 0, \xi) - \xi}{d(\xi, \alpha)} \ \text{ при } \ 0 < \alpha \le 1,$$

где непрерывная и положительная при $0 < \alpha \le 1$ функция $d(\xi, \alpha)$ определяется следующим образом $d(\xi, \alpha) = \alpha(\omega - \lambda(\xi))$ при $0 \le \alpha \le 1/2$ и $d(\xi, \alpha) = (1-\alpha)(\omega - \lambda(\xi)) + (2\alpha - 1)$ при $1/2 < \alpha \le 1$.

Отметим, что гомотопии такого типа в близкой ситуации встречаются в [7, см., например, с. 172]. Рассматриваемая гомотопия $\varphi(\xi,\alpha)$ измерима по ξ и непрерывна по α, то есть удовлетворяет условиям Каратеодори [8, с. 120]. Кроме того, как нетрудно видеть, она является невырожденной: $\varphi(\xi,\alpha)\neq 0$ при $\xi\in\partial S^n$ и $\alpha\in[0,1]$.

От измеримой гомотопии $\varphi(\xi,\alpha)$ перейдем к новой

$$\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)=\frac{1}{\mu S(\xi,\varepsilon)}\int\limits_{S(\xi,\varepsilon)}\varphi(\eta,\alpha)d\mu$$

(усреднение по Стеклову (сравни с [6, с. 377]); здесь $S(\xi,\varepsilon)$ – это $(n-1)$-мерный шар на ∂S^n с центром в точке $\xi\in\partial S^n$ и радиусом $\varepsilon>0$). Нетрудно проверить, что в силу выбора ∂S^n при $\varepsilon>0$ построенная гомотопия $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha):\partial S^n\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ является непрерывной по совокупности переменных и невырожденной: $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)\neq 0$ при $\xi\in\partial S^n$ и $\alpha\in[0,1]$. Стандартные рассуждения показывают, что из (8) при $\alpha=0$ вытекает равенство $deg(\varphi_\varepsilon(\xi,0),\partial S^n)=deg(f(\xi)+h[\lambda(\xi)],\partial S^n)=(-1)^n$ (в этом пункте удобнее писать $f(\xi)$, подчеркнув явную зависимость отображения f от ξ). Отсюда в силу невырожденности непрерывной гомотопии $\varphi_\varepsilon(\xi,\alpha)$ получаем $deg(\varphi_\varepsilon(\xi,1),\partial S^n)=deg(q_\varepsilon(\xi),\partial S^n)=(-1)^n$. Но $q(\xi):\partial S^n\to\mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение и потому $q_\varepsilon(\xi)\to q(\xi)$ равномерно по $\xi\in\partial S^n$ при $0<\varepsilon\to 0$, откуда вытекает, что $deg(q(\xi),\partial S^n)=(-1)^n$ и формула (9) с точностью до обозначений установлена.

Теорема 1 появилась как попытка ответить на вопрос, заданный в книге [9, с. 220]. Отметим, что подобное утверждение было сформулировано нами ранее в работе [10], но здесь изложено более подробное доказательство, которое представляет, по нашему мнению, и самостоятельный интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1960. 331 с.

3. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы анализа. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. 290 с.

4. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1979. 558 с.

5. *Перов А.И., Евченко В.К.* Метод направляющих функций. Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. 182 с.

6. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.

7. *Рейссиг Р., Сансоне Дж., Конти Р.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970. 318 с.

8. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ИИЛ, 1954. Т. 2. 346 с.

9. *Зубов В.И.* Теория колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

10. *Евченко В.К.* Об одной задаче из теории колебаний // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1136-1138.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Перов Анатолий Иванович, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры системного анализа и управления, e-mail: anperov@mail.ru

Каверина Валерия Константиновна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: lera_evk@mail.ru

Для цитирования: *Перов А.И., Каверина В.К.* Применение идей метода направляющих функций при исследовании неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 510–516. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516

RESEARCH OF THE NONAUTONOMOUS SYSTEM OF ODE BY THE IDEAS OF THE METHOD OF GUIDING FUNCTIONS

A. I. Perov[1), **V. K. Kaverina**[2)

[1) Voronezh State University
1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: office@main.vsu.ru
[2) Voronezh State Technical University
14 Moskovskiy pt., Voronezh 394026, Russian Federation
E-mail: vmkaf@vgasu.vrn.ru

Abstract. We indicate sufficient conditions connected with the method of guiding functions, under which periodically perturbed autonomous system of ODE has an periodic solution.
Keywords: periodically perturbed autonomous system of ODE; topological degree of transformation; Steclov average; coercitivity of transformation

REFERENCES

1. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some Problems of Dynamic Stability Theory]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p. (In Russian).

2. Krasnoselskiy M.A. *Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravneniy* [The Shift Operator on the Path of the Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1960, 331 p. (In Russian).

3. Zvyagin V.G. *Vvedenie v topologicheskie metody analiza* [The Introduction in the Topological Methods of Analysis]. Voronezh, Voronezh State University Publishing House, 2014, 290 p. (In Russian).

4. Ortega G., Rheinboldt V. *Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi* [Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables]. Moscow, Mir Publ., 1979, 558 p. (In Russian).

5. Perov A.I., Evchenko V.K. *Metod napravlyayushchikh funktsiy* [Method of Guiding Functions]. Voronezh, Publ.-Polygraphic Centre of Voronezh State University, 2012, 182 p. (In Russian).

6. Natanson I.P. *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of Real Variable]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 480 p. (In Russian).

7. Reissig R., Sansone G., Conti R. *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Nonlinear Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 318 p. (In Russian).

8. Sansone G. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1954, vol. 2, 346 p. (In Russian).

9. Zubov V.I. *Teoriya kolebaniy* [The Theory of Oscillations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1979, 400 p. (In Russian).

10. Evchenko V.K. Ob odnoy zadache iz teorii kolebaniy [About one problem from the oscillations theory]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov*

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 16-01-00197).

University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1136-1137. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Perov Anatolii Ivanovich, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the System Analysis and Control Department, e-mail: anperov@mail.ru

Kaverina Valeria Konstantinivna, Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, e-mail: lera_evk@mail.ru

For citation: Perov A.I., Kaverina V.K. Primenenie idei metoda napravlyayushih funkcii pri issledovanii neavtonomnoi sistemy obyknovennyh differencial'nyh uravnenii [Research of the nonautonomous system of ODE by the ideas of the method of guiding functions]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 510–516. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-510-516 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

УДК 517.988.8

О СХОДИМОСТИ И СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

© А. А. Петрова

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение с нелокальным весовым интегральным условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени неявного метода Эйлера. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов. Установлены оценки погрешностей приближенных решений, сходимость приближенных решений к точному решению и порядки скорости сходимости.

Ключевые слова: гильбертово пространство; параболическое уравнение; нелокальное весовое интегральное условие; проекционно-разностный метод; неявный метод Эйлера

Введение

Рассматривается абстрактное параболическое уравнение с весовым интегральным условием на решение на интервале времени от 0 до T. Ранее эта задача в условиях слабой разрешимости решалась приближенно полудискретным методом Галеркина, сводящим параболическую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. В настоящей работе данная задача, также в условиях слабой разрешимости, решается приближенно проекционно-разностным методом, который является методом полной дискретизации. При этом для временной аппроксимации используется неявная схема Эйлера. В этом случае процесс нахождения приближенных решений задачи сводится к нахождению решений конечных линейных систем алгебраических уравнений.

1. Описание точной и приближенной задач

Пусть задана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u,\, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Пусть для всех $u,\, v \in V$ выполнены оценки

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V,\ \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $M \geqslant 0$. Очевидно, что форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что для $u,\, v \in V$ выполняется $a(u,v) = (Au, v)$. Отсюда следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v), в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [2].

В пространстве V' на $[0,T]$ рассматривается параболическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

В (2) заданы функция $t \to f(t) \in V'$, элемент $\overline{u}$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$. Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

В [3] доказана теорема о существовании слабого решения задачи (2).

Теорема 1. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1). Пусть также функция $f(t) \in L_1(0,T;H)\bigcap L_2(0,T;V')$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0,T]$. Предположим, что $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V|\, Av \in H\}$. Тогда задача (2) имеет единственное решение $u(t)$, такое что $u \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$.*

Пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Отметим, что на V_h можно рассматривать нормы пространств V, H, V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$, таким что $\|v_h\|_V = 1$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на $V_h \subset H$. P_h допускает продолжение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$.

По теореме Лакса–Мильграмма [4], для любого элемента $u \in V$ существует единственный элемент $u_h \in V_h$ такой, что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом, определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой, что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$ выполнено $a(R_h u, v_h) = a(u, v_h)$.

В пространстве V_h рассмотрим приближенную задачу:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A u_k^h = f_k^h \ \ (k = \overline{1,\, N}), \qquad \sum_{k=1}^N p_k u_k^h \tau = \overline{u}_h. \tag{3}$$

В (3) N – натуральное число, $\tau = T/N$; $p_k = p(t_k)$, где t_k – точки разбиения отрезка $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, такого что $t_k - t_{k-1} = \tau$; $f_k^h = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\,dt \quad (k = \overline{1,N})$; $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 задача (3) имеет единственное решение.*

2. Оценка погрешности и сходимость приближенных решений

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть* $u(t)$ *– слабое решение задачи (2), а* u_k^h $(k = \overline{0,N})$ *- решение задачи (3). Обозначим через* $z_k^k = u_k^h - \overline{P}_h u(t_k)$. *Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2 \tau + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2 \tau\Big) \leqslant$$

$$C\left\{\sum_{k=1}^N \|\psi_k^h\|_{V_h'}^2 \tau + \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h A u(t)\|_H\,dt\right)^2\right\}, \tag{4}$$

где $\psi_k^h = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A[u(t) - \overline{P}_h u(t_k)]\,dt \quad (k = \overline{1,N})$.

Для получения сходимости приближенных решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V, то есть $\|(I - Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Здесь Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h. Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ также предельно плотна в пространствах H и V'.

Предположим теперь, что подпространства $V_h \subset V$ такие, что выполняются аппроксимационные свойства, типичные для метода конечных элементов [4], [5],

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant r_1 h \|v\|_V, \tag{5}$$

$$\|v_h\|_V \leqslant r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \tag{6}$$

где константы r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V$ и h. Условие (6) в приложениях означает равномерное разбиение области пространственных переменных на конечные элементы. В простейшем одномерном случае такими подпространствами являются, например, подпространства кусочно-линейных на равномерной сетке функций [5]. Из (5) и (6) следует (см. [6]) равномерная по h оценка

$$\|P_h\|_{V\to V} \leqslant 1 + r_1 r_2.$$

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть* $\{V_h\}$ *– предельно плотная в* V *последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (5), (6). Пусть* $\tau h^{-2} \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда при* $h \to 0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2\,dt +$$

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия 1. Пусть решение* $u(t)$ *задачи (2) обладает дополнительной гладкостью* $u' \in L_2(0,T;V)$, *а* $Au \in L_2(0,T;H)$. *Пусть также* $p' \in L_2(0,T)$. *Тогда при* $h \to 0$ *и* $\tau \to 0$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{8}$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$ [7]. Пусть, вместо условия (5), пространства $V_h \subset V$, удовлетворяют условию

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq rh\|v\|_E \quad (v \in E), \tag{9}$$

которое, как и (5), типично для подпространств типа конечных элементов (см. [4]).

Следствие 3. *Пусть выполнены условия следствия 2. Пусть также* $u \in L_2(0,T;E)$ *и выполнено условие (9). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \leqslant$$

$$C\left\{ h^2 \Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt \Big) + \tau^2 \Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \Big) \right\};$$

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \leqslant$$

$$C\left\{ h^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \tau^2 \Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \Big) \right\};$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau\leqslant$$

$$C\left\{h^2\Big(\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\Big)+\tau^2\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петрова А.А., Смагин В.В.* Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 8. С. 49-59.

2. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. 384 с.

3. *Петрова А.А., Смагин В.В.* Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2014. № 4. С. 160-169.

4. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.

5. *Оганесян Л.А., Руховец Л.А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван, 1979. 236 с.

6. *Смагин В.В.* Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений // Математический сборник. 1994. Т. 185. № 11. С. 79-94.

7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Петрова Анастасия Александровна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, e-mail: rezolwenta@mail.ru

Для цитирования: *Петрова А.А.* О сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с весовым интегральным условием // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 517–523. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523

ON THE CONVERGENCE AND RATE OF THE CONVERGENCE OF A PROJECTION-DIFFERENCE METHOD FOR APPROXIMATE SOLVING A PARABOLIC EQUATION WITH WEIGHT INTEGRAL CONDITION

A. A. Petrova

Voronezh State University
1 Universitetskaya Pl., Voronezh 394018, Russian Federation
E-mail: rezolwenta@mail.ru

Abstract. In the Hilbert space the abstract linear parabolic equation with nonlocal weight integral condition for the solution is resolved approximately by projection-difference method using time-implicit Euler's method. Approximation of the problem by spatial variables is oriented on the finite element method. Errors estimations of approximate solutions, convergence of approximate solution to exact one and orders of rate of convergence are established.
Keywords: Hilbert space; parabolic equation; nonlocal weighted integral condition; projection-diffrence method; time-implicit Euler's method

REFERENCES

1. Petrova A.A., Smagin V.V. Skhodimost' metoda Galyorkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem na reshenie [Convergence of the Galyorkin method of approximate solving parabolic equation with weight integral condition]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2016, no. 8, pp. 49-59. (In Russian).

2. Aubin J.-P. *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary Problems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 384 p. (In Russian).

3. Petrova A.A., Smagin V.V. Razreshimost' variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral'nym usloviem [Solvability of the variational problem of parabolic type with a weighted integral condition]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 160-169. (In Russian).

4. Ciarlet P.G. *Metod konechnykh elementov dlya ellipticheskikh zadach* [Finite Element Method for Elliptic Problems]. Moscow, Mir Publ., 1980, 512 p. (In Russian).

5. Oganesyan L.A., Rukhovets L.A. *Variatsionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [Variational-Difference Methods for Solving Elliptic Equations]. Yerevan, 1979, 236 p. (In Russian).

6. Smagin V.V. Koertsitivnye otsenki pogreshnostey proektsionnogo i proektsionno-raznostnogo metodov dlya parabolicheskikh uravneniy [The coercive estimations of errors of projection and projection-difference methods for parabolic equations]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik: Mathematics*, 1994, vol. 185, no. 11, pp. 79-94. (In Russian).

7. Lions J.-L., Magencs E. *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Inhomogeneous Boundary Value Problems and Their Applications]. Moscow, Mir Publ., 1971, 372 p. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Petrova Anastasiya Alexandrovna, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis and Operator Equations Department, e-mail: rezolwenta@mail.ru

For citation: Petrova A.A. O skhodimosti i skorosti skhodimosti proekcionno-raznostnogo metoda resheniya parabolicheskogo uravneniya s vesovym integral'nym usloviem [On the convergence and rate of the convergence of a projection-difference method for approximate solving a parabolic equation with weight integral condition]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 517–523. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-517-523 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530

УДК 517.92

О ФОРМАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© **Г. Г. Петросян**

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
394043, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Аннотация. В докладе приводится формальное представление решений не скалярных полулинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с помощью функции Маттаг-Леффлера.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; функция Миттаг-Леффлера; гамма-функция; банахово пространство

Введение

В последние десятилетия большой интерес математиков во всем мире привлекают дифференциальные уравнения и включения дробного порядка (см. [1–3]), для разрешения которых одними из самых эффективных методов являются методы теории топологической степени для уплотняющих операторов (см. монографию [4]).

Рассмотрим задачу Коши для скалярного полулинейного дифференциального уравнения дробного порядка:

$$^{C}D^{q}x(t) = \lambda x(t) + f(t), \quad t \in [0, T] \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $0 < q < 1, \lambda \in \mathbb{R}$, $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Решением данной задачи называют функцию $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую начальному условию (2), для

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017 / 4.6).

которой дробная производная Капуто ${}^C D^q x$ также непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (1). Известно (см., например, [5]), что единственное решение данной задачи есть функция

$$x(t) = E_q(\lambda t^q)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s)\, ds, \tag{3}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ – функция Миттаг-Леффлера.

В случае, если мы поставим данную задачу в банаховом пространстве E

$${}^C D^q x(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $A : D(A) \subset E \to E$ – линейный ограниченный замкнутый оператор в E, порождающий ограниченную C_0- полугруппу $\{U(t)\}$, $t \geq 0$, $f : [0,T] \to E$ – непрерывная функция, то интегральное решение определяют в виде функции (см. статьи [6–8])

$$x(t) = \mathcal{G}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{T}(t-s) f(s) ds, \qquad t \in [0,T],$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \xi_q(\theta) U(t^q\theta) d\theta, \qquad \mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\xi_q(\theta) U(t^q\theta) d\theta, \tag{6}$$

$$\xi_q(\theta) = \frac{1}{q}\theta^{-1-\frac{1}{q}} \Psi_q(\theta^{-1/q}), \tag{7}$$

$$\Psi_q(\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\theta^{-qn-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q), \theta \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Здесь функцию Ψ_q называют функцией Райта. У многих авторов и читателей возникает вопрос о сходимости ряда, определяющего функцию Райта, так как в источниках такую информацию не получается найти, кроме того, интересна связь между представлением решения в банаховом пространстве и решения в скалярном случае. Мы в работе разъясним эти вопросы.

1. Основные понятия

О п р е д е л е н и е 1. Функция вида

$$E_{q,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(qn+\beta)}, \quad q, \beta > 0,\ z \in \mathbb{C}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Отметим, что $E_q(z) = E_{q,1}(z)$.

Определим еще одну функцию, которая тесно связана с функцией Миттаг-Леффлера:

$$M(\theta, q) = \frac{1}{\theta q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\theta)^n}{n!\Gamma(-qn)}, \quad q > -1,\, \theta \in \mathbb{C} \tag{9}$$

Ряд, стоящий в формуле для последней функции, абсолютно сходится при всех $q > -1$, кроме того, если мы обозначим символом $\mathcal{L}$ преобразование Лапласа, справедливы равенства (см., например, [5, 9])

$$\mathcal{L}(M(\theta, q))(s) = E_{q,1}(-s), \quad \mathcal{L}(\theta q M(\theta, q))(s) = E_{q,q}(-s). \tag{10}$$

В дальнейшем нам пригодятся следующие свойства гамма-функции:

$$\Gamma(q)\Gamma(1-q) = \frac{\pi}{\sin \pi q}, \tag{11}$$

$$\Gamma(q+1) = q\Gamma(q). \tag{12}$$

2. Основные результаты

Чтобы установить переход от интегрального решения в банаховом пространстве к решению в скалярном случае, преобразуем операторы $\mathcal{G}, \mathcal{T}$, для этого подставим (8) в (7), а затем результат подстановки в (6), тогда мы имеем:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q)U(t^q\theta)d\theta,$$

$$\mathcal{T}(t) = q\int_0^\infty \theta\frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q)U(t^q\theta)d\theta.$$

Дальнейшие преобразования приведем для оператора $\mathcal{G}$, для оператора $\mathcal{T}$ все выводится аналогично. Воспользовавшись свойствами (11) и (12), мы имеем:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\sin(n\pi q)U(t^q\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(nq+1)}{n!}\frac{\pi}{\Gamma(nq)\Gamma(1-nq)}U(t^q\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{nq\Gamma(nq)}{n!}\frac{\pi}{(-nq)\Gamma(nq)\Gamma(-nq)}U(t^q\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\pi q}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{(-\pi)}{n!\Gamma(-nq)}U(t^q\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{q\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\theta)^n}{n!\Gamma(-nq)}U(t^q\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\infty M(\theta, q)U(t^q\theta)d\theta.$$

Таким образом, мы получили следующие представления:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty M(\theta, q)U(t^q\theta)d\theta, \quad \mathcal{T}(t) = \int_0^\infty \theta q M(\theta, q)U(t^q\theta)d\theta.$$

Теперь, используя тот факт, что в скалярном случае $U(t^q\theta) = e^{\lambda t^q \theta}$, мы имеем:

$$\mathcal{G}(t) = \int_0^\infty M(\theta, q)U(t^q\theta)d\theta = \int_0^\infty e^{-(-\lambda t^q)\theta} M(\theta, q)d\theta = \mathcal{L}(M(\theta, q))(-\lambda t^q) = E_{q,1}(\lambda t^q),$$

$$\mathcal{T}(t) = \int_0^\infty \theta q M(\theta, q)U(t^q\theta)d\theta = \int_0^\infty e^{-(-\lambda t^q)\theta} \theta q M(\theta, q)d\theta = \mathcal{L}(\theta q M(\theta, q))(-\lambda t^q) = E_{q,q}(\lambda t^q).$$

Таким образом, если мы обобщим функцию Миттаг-Леффлера для случая линейного ограниченного оператора в банаховом пространстве, то мы можем переписать решение задачи (4) - (5) в следующем, более простом, виде:

$$x(t) = E_q(t^q A)x_0 + \int_0^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}((t-s)^q A) f(s)\, ds.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. Vol. 18. № 1. P. 269-292.

2. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Applicable Analysis. 2017. Vol. 96. P. 1-21.

3. *Обуховский В.В., Петросян Г.Г.* О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 1. С. 192-209.

4. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных оторбажений и дифференциальных включений. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

5. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 2006.

6. *Петросян Г.Г., Афанасова М.С.* О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017. № 1. С. 135-151.

7. *Петросян Г.Г.* О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2012. № 2. С. 207-212.

8. *Петросян Г.Г.* On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Воронеж, 2016. С. 7-8.

9. *Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R.* Probability Distributions Generated by Fractional Diffusion Equations. N. Y.: Cornell University, 2007. 46 p.

Поступила в редакцию 20 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Петросян Гарик Гагикович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Для цитирования: *Петросян Г.Г.* О формальном представлении решений дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 524–530. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530

ON THE FORMAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

G. G. Petrosyan

Voronezh State Pedagogical University
86 Lenin St., Voronezh 394043, Russian Federation
E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

Abstract. The paper presents a formal representation of solutions of non-scalar semilinear differential equations in Banach spaces by means of the Mattag-Leffler function.
Keywords: differential equation; Mittag-Leffler function; gamma function; Banach space

REFERENCES

1. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. On semilinear fractional order differential inclusions in banach spaces. *Fixed Point Theory*, 2017, Vol. 18, no. 1, pp. 269-292.

2. Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Applicable Analysis*, 2017, vol. 96, pp. 1-21.

3. Obukhovskiy V.V., Petrosyan G.G. O zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s impul'snymi kharakteristikami v banakhovom prostranstve [On the Cauchy problem for functional differential inclusions of fractional order with impulsive characteristics in a Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 192-209. (In Russian).

4. Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obukhovskiy V.V. *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otorbazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Many-Valued Separations and Differential Inclusions]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam, Elsevier Science B.V., 2006.

6. Petrosyan G.G., Afanasova M.S. O zadache Koshi dlya differentsial'nogo vklyucheniya drobnogo poryadka s nelineynym granichnym usloviem [On the Cauchy problem for a differential inclusion of fractional order with nonlinear boundary conditions]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 135-151. (In Russian).

7. Petrosyan G.G. O nelokal'noy zadache Koshi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s drobnoy proizvodnoy v banakhovom prostranstve [On a nonlocal Cauchy problem for functional

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the frameworks of the project part of the state work quota (Project № 1.3464.2017 / 4.6).

differential equations with fractional derivative in the Banach space]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 207-212. (In Russian).

8. Petrosyan G.G. On the structure of the solutions set of the Cauchy problem for a differential inclusions of fractional order in a Banach space. *Nekotorye voprosy analiza, algebry, geometrii i matematicheskogo obrazovaniya* [Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry and Mathematical Education]. Voronezh, 2016, pp. 7-8.

9. Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. *Probability Distributions Generated by Fractional Diffusion Equations*. New York, Cornell University, 2007, 46 p.

Received 20 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Petrosyan Garik Gagikovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, e-mail: garikpetrosyan@yandex.ru

For citation: Petrosyan G.G. O formal'nom predstavlenii resheniy differentsial'nyh uravneniy drobnogo poryadka [On the formal representation of solutions of differential equations of fractional order]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 524–530. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-524-530 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538
УДК 517.929

О ПРИМЕНЕНИИ W-МЕТОДА Н.В. АЗБЕЛЕВА К СИСТЕМЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

© В. П. Плаксина

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: vpplaksina@list.ru

Аннотация. Рассматривается краевая задача для системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Краевые условия задачи определяются условиями связи ребер графа. Приводится алгоритм, согласно которому система уравнений на графе сводится к системе, заданной на множестве Θ непересекающихся отрезков действительной прямой. К системе, определенной на множестве $\Theta,$ применяется W-метод Н.В.Азбелева, позволяющий получить эффективные условия однозначной разрешимости исходной системы. Приведен пример.
Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; дифференциальное уравнение на геометрическом графе

Одной из классических задач механики является нахождение деформации струны (системы связанных струн) под действием внешней нагрузки.

С математической точки зрения система связанных струн образует граф. Деформация в каждой точке струны определяется как решение дифференциального уравнения второго порядка. Для описания деформации системы связанных струн используется теория дифференциальных уравнений на геометрическом графе, разработанная группой математиков под руководством Ю.В. Покорного (см. монографии [1, 2]).

Пусть характеристики упругости струны таковы, что ее деформация представляет собой решение дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Так получается система функционально-дифференциальных уравнений на геометрическом графе. Для изучения свойств решения системы функционально-дифференциальных уравнений применим теорию абстрактного функционально-дифференциального уравнения, разработанную группой математиков под руководством Н.В. Азбелева (см. монографии [3, 4]).

Рассмотрим вопрос об однозначной разрешимости системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе. Предлагается следующая схема получения эффективных условий однозначной разрешимости указанной системы.

1. Расположим струны вдоль действительной оси так, чтобы они образовывали систему Θ непересекающихся отрезков.
2. Запишем условия связи и закрепления струн как краевые условия.
   Далее будем следовать схеме [4, стр. 30].
3. Решим модельную задачу для уравнения $\ddot{x} = z$, заданного на множестве Θ, с полученными выше краевыми условиями. Решение этой задачи запишем в виде $x = Wz$.
4. С помощью подстановки $x = Wz$ сведем систему функционально-дифференциальных уравнений на графе к операторному уравнению второго рода, заданному на несвязном компакте.
5. Получим условия однозначной разрешимости операторного уравнения. Эти условия будут гарантировать однозначную разрешимость системы функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе.

Проиллюстрируем применение указанного алгоритма.

Рассмотрим систему из струн, представляющую собой n-угольник. Вершины многоугольника обозначим $B_1, B_2, \dots B_n$. К каждой вершине B_i, $i = \overline{1,n}$, прикреплена дополнительно ровно одна струна, второй конец которой (обозначим его A_i) жестко закреплен. Таким образом, рассматриваемая система состоит из $2n$ струн: $\Gamma_i = B_iB_{i+1}$, $i = \overline{1,n-1}$; $\Gamma_n = B_nB_1$; $\Gamma_{n+j} = A_jB_j$, $j = \overline{1,n}$.

Пусть деформация x_i каждой струны Γ_i, $i = \overline{1,2n}$, под действием внешней силы $f = \big(f_1, f_2, \dots, f_n\big)$ определяется функционально-дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x}(t) - p_i(t)x_{h_i}(t) = f_i(t), \quad t \in \Gamma_i, \quad i = \overline{1,2n}. \tag{1}$$

Здесь параметр t определяет положение точки на струне Γ_i, функции p_i, h_i определяются характеристиками упругости неоднородной струны Γ_i, $i = \overline{1,2n}$.

Будем предполагать, что функции $p_i\colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ суммируемы. Функции $h_i\colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ измеримы, $x_{h_i}(t) = \begin{cases} x\big[h_i(t)\big], & \text{если } h_i(t) \in \Gamma_i \\ 0, & \text{если } h_i(t) \notin \Gamma_i \end{cases}$, $t \in \Gamma_i$, $i = \overline{1,2n}$. Функции $f_i\colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ суммируемы, $x_i\colon \Gamma_i \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны вместе с первой производной.

Таким образом, на графе $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i$ задана система $2n$ функционально-дифференциальных уравнений второго порядка. Краевые условия определяются условиями связи струн.

Запишем краевые условия. Для этого на графе введем параметризацию следующим образом. Струнам $\Gamma_i = A_iB_i$, $i = \overline{1,n}$, поставим в соответствие отрезки $\big[a_i, b_i\big]$, $i = \overline{1,n}$; струне B_nB_1 – отрезок $\big[c_1, c_2\big]$; струнам B_iB_{i+1}, $i = \overline{1,n-1}$, – отрезки $\big[c_{2i+1}, c_{2i+2}\big]$, $i = \overline{1,n-1}$. Отрезки $\Theta_i = \big[a_i, b_i\big]$, $\Theta_{n+i} = \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big]$, $i = \overline{1,n}$, расположены в произвольном порядке на действительной оси и не имеют общих точек.

Закрепленным концам соответствуют краевые условия вида

$$x(a_i) = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Условиям непрерывного соединения сторон многоугольника – условия вида

$$\begin{aligned} &x(c_{2i+1}) - x(c_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &x(c_1) - x(c_{2n}) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Условиям непрерывного соединения струн, образующих многоугольник, и струн с закрепленным концом – условия вида

$$x(b_i) - x(c_{2i}) = 0, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Кроме того, в вершинах B_i заданы условия связи

$$\begin{aligned} &\dot{x}(b_i) + \dot{x}(c_{2i}) + \dot{x}(c_{2i+1}) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ &\dot{x}(b_n) + \dot{x}(c_{2n}) + \dot{x}(c_1) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решением системы (1)–(5) будем называть абсолютно непрерывную функцию, первая производная которой также абсолютно непрерывна на несвязном множестве $\Theta = \bigcup\limits_{i=1}^{2n} \Theta_i,$ удовлетворяющую почти всюду уравнениям (1) и условиям (2)–(5).

Рассмотрим на множестве Θ уравнение

$$\ddot{x}(t) = z(t), \qquad t \in \Theta. \tag{6}$$

Задачу (6), (2)–(5) будем рассматривать в качестве модельной. Найдем явное представление ее решения. Для этого рассмотрим сначала вспомогательную задачу для уравнений (6) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &x(a_i) = 0, \quad x(b_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ &x(c_j) = 0, \qquad\qquad\qquad j = \overline{1, 2n}. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение задачи (6)–(7) имеет вид $x(t) = \int\limits_{\Theta} \Lambda(t, s) z(s)\, ds,$ где $\Lambda(t, s)$ – функция Грина, определяемая равенствами

$$\Lambda(t, s) = \begin{cases} -\dfrac{(b_i - t)(s - a_i)}{b_i - a_i}\theta(t - s) - \dfrac{(b_i - s)(t - a_i)}{b_i - a_i}\theta(s - t), & \text{если } t, s \in [a_i, b_i] \\[2ex] -\dfrac{(c_{2i} - t)(s - c_{2i-1})}{c_{2i} - c_{2i-1}}\theta(t - s) - \dfrac{(c_{2i} - s)(t - c_{2i-1})}{c_{2i} - c_{2i-1}}\theta(s - t), & \text{если } t, s \in [c_{2i-1}, c_{2i}] \end{cases}$$

для $i = \overline{1, n},$ в остальных случаях $\Lambda(t, s) = 0.$

Перейдем к задаче для уравнения (6) с краевыми условиями (2)–(5).

В качестве фундаментальной системы решений уравнений (6) рассмотрим функцию $x_0(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{4n}(t)\big)$. Здесь $x_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \big[a_i, b_i\big] \\ 0, & \text{если } t \notin \big[a_i, b_i\big] \end{cases}$,

$x_{n+i} = \begin{cases} t - a_i, & \text{если } t \in \big[a_i, b_i\big] \\ 0, & \text{если } t \notin \big[a_i, b_i\big] \end{cases}$, $x_{2n+i} = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big] \\ 0, & \text{если } t \notin \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big] \end{cases}$,

$x_{3n+i} = \begin{cases} t - c_{2i-1}, & \text{если } t \in \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big] \\ 0, & \text{если } t \notin \big[c_{2i-1}, c_{2i}\big] \end{cases}$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть краевые условия (2)–(5) определяют вектор-функционал $\ell = \big(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{4n}\big)^T$, где $\ell_i x = x(a_i)$, $i = \overline{1, n}$; $\ell_{n+j} x = x(c_{2j+1}) - x(c_{2j})$, $j = \overline{1, n-1}$; $\ell_{2n} x = x(c_1) - x(c_{2n})$; $\ell_{2n+i} x = x(b_i) - x(c_{2i})$, $i = \overline{1, n}$; $\ell_{3n+j} x = \dot{x}(b_j) + \dot{x}(c_{2j}) + \dot{x}(c_{2j+1})$, $j = \overline{1, n-1}$; $\ell_{4n} x = \dot{x}(b_n) + \dot{x}(c_{2n}) + \dot{x}(c_1)$. Матрица ℓx_0 является блочной, ее определитель отличен от нуля. Следовательно, задача (6), (2)–(5) является однозначно разрешимой при любой правой части [4, с. 22].

Построим функцию Грина $W(t, s)$ задачи (6), (2)–(5). Для этого воспользуемся формулой $W(t, s) = \Lambda(t, s) - x_0(t)\big(\Lambda x_0\big)^{-1}\big(\ell\Lambda\big)(s)$ [4, с. 27], которая связывает функции Грина $W(t, s)$ и $\Lambda(t, s)$ краевых задач для одного и того же уравнения с различными краевыми условиями.

Преобразование (6), (2)–(5) устанавливает изоморфизм между пространством абсолютно непрерывных на множестве Θ функций и пространством L суммируемых на Θ функций с нормой $\big\|z\big\|_L = \int\limits_{\Theta} \big|z(s)\big|\, ds$.

Преобразование, обратное к (6), (2)–(5), имеет вид

$$x(t) = \int\limits_{\Theta} W(t, s) z(s)\, ds. \tag{8}$$

В качестве примера запишем преобразование (8) для случая $n = 3$, $b_i - a_i = 1$, $c_{2i} - c_{2i-1} = 1$, $i = \overline{1, 3}$.

Пусть $t \in \big[a_i, b_i\big]$, $i = \overline{1, 3}$. Тогда

$$\begin{gathered} x(t) = -\int\limits_{a_i}^{t} \big(b_i - t\big)\big(s - a_i\big) z(s)\, ds - \int\limits_{t}^{b_i} \big(b_i - s\big)\big(t - a_i\big) z(s)\, ds - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{a_i}^{b_i} \big(s - a_i\big) z(s)\, ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}} \big(s - a_{i+2}\big) z(s)\, ds\right) - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \big(s - c_{2j-1}\big) z(s)\, ds - \int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}} \big(c_{2j} - s\big) z(s)\, ds\right) - \\ -\frac{1}{2}\big(t - a_i\big)\left(\int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}} \big(s - c_{2j+1}\big) z(s)\, ds + \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}} \big(s - c_{2j+3}\big) z(s)\, ds\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $t \in \left[c_{2j-1}, c_{2j}\right]$, $j=\overline{1,3}$. Тогда

$$x(t) = -\int\limits_{c_{2j-1}}^{t} \left(c_{2j}-t\right)\left(s-c_{2j-1}\right)z(s)\,ds - \int\limits_{t}^{c_{2j}} \left(c_{2j}-s\right)\left(t-c_{2j-1}\right)z(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{2}\left(t-c_{2j-1}\right)\left(\int\limits_{a_i}^{b_i}\left(s-a_i\right)z(s)\,ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}}\left(s-a_{i+2}\right)z(s)\,ds\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(t-c_{2j-1}\right)\left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left(s-c_{2j-1}\right)z(s)\,ds - \int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left(c_{2j}-s\right)z(s)\,ds\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(t-c_{2j-1}\right)\left(\int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}}\left(c_{2j+2}-s\right)z(s)\,ds - \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}}\left(s-c_{2j+3}\right)z(s)\,ds\right) - \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}\left(c_{2j}-t\right)\left(\int\limits_{a_{i+1}}^{b_{i+1}}\left(s-a_i\right)z(s)\,ds + \int\limits_{a_{i+2}}^{b_{i+2}}\left(s-a_{i+2}\right)z(s)\,ds\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(c_{2j}-t\right)\left(\int\limits_{c_{2j-1}}^{c_{2j}}\left(c_{2j}-s\right)z(s)\,ds - \int\limits_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}}\left(s-c_{2j+1}\right)z(s)\,ds\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(c_{2j}-t\right)\left(\int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}}\left(s-c_{2j+3}\right)z(s)\,ds + \int\limits_{c_{2j+3}}^{c_{2j+4}}\left(c_{2j+4}-s\right)z(s)\,ds\right).$$

В формулах (9) и (10) $i=j=\overline{1,3}$. Индексы точек a_i, b_i вычисляются по модулю 3: a_4 (b_4) a_1 (b_1) соответственно, a_5 (b_5) равны a_2 (b_2). Индексы точек c_j вычисляются по модулю 6: c_7 считаем равным c_1, c_5 полагаем равным c_2, c_9 равно c_3, c_10 совпадает с c_4.

Подставим формулы (9) и (10) в уравнение (1). Получим операторное уравнение вида $(I-K)z=f$, где $(K_i z)(t) = p_i(t)\int\limits_{\Theta} W_{h_i}(t,s)z(s)\,ds$, $t \in \Theta_i$, $i=\overline{1,2n}$, $K = \left(K_1, K_2, \ldots, K_{2n}\right)^T$. Оценивая норму оператора K, получим эффективные условия разрешимости системы уравнений (1)–(6).

В приведенном выше примере условие $\left\|p\right\|_L < \dfrac{4}{3}$ гарантирует однозначную разрешимость задачи (1)–(6).

Приведенная выше схема в работе [5] применялась для получения условий однозначной разрешимости системы функционально-дифференциальных уравнений на графе, представляющем собой пучок связанных струн. В работах [6–8] – для получения условий однозначной разрешимости сингулярных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005. 272 с.

2. *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М.: Физматлит, 2009. 192 с.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

4. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

5. *Плаксина В.П., Провоторова Е.Н.* Об одном классе краевых задач для импульсных систем // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 881-885.

6. *Плаксина В.П., Плаксина И.М., Плехова Э.В.* Условия разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1364-1369.

7. *Плаксина И.М.* О применимости W-метода к сингулярному функционально-дифференциальному уравнению второго порядка // Теория управления и математическое моделирование: тез. докл. Всерос. конф. с междунар. участием, посвящ. памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, 2015. С. 115-117.

8. *Плаксина И.М.* Об одной модельной сингулярной задаче // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2010. № 1. С. 19-23.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Плаксина Вера Павловна, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: vpplaksina@list.ru

Для цитирования: *Плаксина В.П.* О применении W -метода Н.В. Азбелева к системе функционально-дифференциальных уравнений, заданных на геометрическом графе // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 531–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538

ON OBTAINING EFFECTIVE CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF A SYSTEM OF FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS DETERMINATED ON A GEOMETRIC GRAPH

V. P. Plaksina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skiy Pr., Perm 614990, Russian Federation
E-mail: vpplaksina@list.ru

Abstract. This paper is devoted to consideration of a boundary value problem for a system of functional differential equations determined on a geometric graph. The boundary conditions of the problem are determined by the conditions for the connection of the edges of the graph. There is an algorithm that reduces the system of equations on the graph to the system determined on the set Θ of disjoint segments of the real axis. The Azbelev's W-method is applied to the system determined on the set Θ, what makes it possible to obtain effective conditions for the unique solvability of the original system. An example is given.

Keywords: functional-differential equation; differential equation on a geometric graph

REFERENCES

1. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., Borovskikh A.V., Lazarev K.P., Shabrov S.A. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations at Geometrical Graphs]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 272 p. (In Russian).

2. Pokornyy Yu.V., Bakhtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. *Ostsillyatsionnyy metod Shturma v spektral'nykh zadachakh* [Schturm Oscillatory Method at Special Problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 192 p. (In Russian).

3. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Inclusions]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

4. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of Modern Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications]. Moscow, Institute of Computer Science Publ., 2002, 384 p. (In Russian).

5. Plaksina V.P., Provotorova E.N. Ob odnom klasse kraevykh zadach dlya impul'snykh sistem [On one class of boundary value problems for impulse systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 8, pp. 881-885. (In Russian).

6. Plaksina V.P., Plaksina I.M., Plekhova E.V. Usloviya razreshimosti zadachi Koshi dlya kvazilineynogo singulyarnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [Solvability conditions of the Cauchy problem for a second order quasilinear singular functional-differential equation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1364-1369. (In Russian).

7. Plaksina I.M. O primenimosti W-metoda k singulyarnomu funktsional'no-differentsial'nomu uravneniyu vtorogo poryadka [On applicability of W-method to second order singular functional differential equation]. *Tezisy dokladov Vserossiyskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem «Teoriya upravleniya i matematicheskoe modelirovanie», posvyashchennoy pamyati professora N.V. Azbeleva i professora E.L. Tonkova* [Proceedings of the All-Russian Conference with International Participation in Honor of Memory of Professor N.V. Azbelev and Professor E.L. Tonkov "Control Theory and Mathematical Modelling"]. Izhevsk, 2015, pp. 115-117. (In Russian).

8. Plaksina I.M. Ob odnoy model'noy singulyarnoy zadache [On one model singular problem]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2010, no. 1, pp. 19-23. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Plaksina Vera Pavlovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, e-mail: vpplaksina@list.ru

For citation: Plaksina V.P. O primenenii W-metoda N.V. Azbeleva k sisteme funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy, zadannykh na geometricheskom grafe [On obtaining effective conditions for the solvability of a system of functional-differential equations determinated on a geometric graph]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 531–538. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-531-538 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки
Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546
УДК 517.929

О РАЗРЕШИМОСТИ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЕНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© **И. М. Плаксина**

ФГБОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
614990, Российская Федерация, г. Пермь, Комсомольский пр., 29
E-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Аннотация. В предлагаемой работе получены условия однозначной разрешимости линейного функционально-дифференциального уравнения первого порядка, сингулярного по независимой переменной, содержащего сингулярный коэффициент и отклонение аргумента специального вида.
Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение; сингулярное уравнение; линейное дифференциальное уравнение; задача Коши; оператор Чезаро; разрешимость

Введение

В предлагаемой работе рассматривается линейное функционально-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) + a(t)x_h(t) + (Tx)(t) = f(t), \qquad t \in (0, b], \tag{0.1}$$

где $x_h(t) = \begin{cases} x\big[h(t)\big], & \text{если } h(t) \in [0,b] \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,b] \end{cases}$.

Уравнение (0.1) содержит несуммируемый коэффициент $a\colon (0,b] \to \mathbb{R}$ и является сингулярным по независимой переменной, сингулярность сосредоточена в точке $t = 0$. Коэффициент a растет в окрестности нуля с той же скоростью, что и функция $kt^{-\alpha}$, $\alpha > 1$. Отклонение $h(t)$ стремится к нулю при $t \to 0+$ так же, как функция t^{β}, $\beta > 1$. Вид линейного оператора T будет определен ниже.

В статье получены условия разрешимости уравнения (0.1) при любой правой части и найдена константа $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$, такая, что весовое начальное условие

$$\lim_{t \to 0+} t^{\gamma} x(t) = 0 \tag{0.2}$$

гарантирует единственность решения уравнения (0.1).

При исследовании уравнения (0.1) применялась методика абстрактного функционально-дифференциального уравнения, основные положения которой приведены, например, в книге [1]. Также использовались свойства оператора Чезаро [2–4]. Эти же способы применялись в статьях [5–7].

Отметим, что уравнение (0.1) может быть записано как уравнение с запаздыванием на отрицательной полуоси. Вопросам разрешимости таких уравнений посвящены работы [8–10]. Сингулярные функционально-дифференциальные уравнения также изучались в работах И.Т. Кигурадзе, З.П. Сохадзе, Р. Хакла, А. Ронто, В. Пилипенко. Подробный библиографический обзор приведен в работе [11].

1. Пространства

Положим $p \in (1, \infty)$. Определим пространство L^p функций $z\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, таких, что $\left\|z\right\|_{L^p}^p = \int\limits_0^b \left|z(t)\right|^p dt < \infty$. Также определим пространство D_0^p абсолютно непрерывных функций $y\colon [0,b] \to \mathbb{R}$, имеющих производную в пространстве L^p и удовлетворяющих дополнительному условию $y(0) = 0$. Норма в этом пространстве имеет вид $\left\|y\right\|_{D_0^p} = \left\|\dot{y}\right\|_{L^p}$. Далее, определим пространство $L^p(\gamma)$ функций f, таких, что $t^\gamma f(t) \in L^p$, с нормой $\left\|f\right\|_{L^p(\gamma)} = \left\|t^\gamma f(t)\right\|_{L^p}$. Наконец, определим пространство $D_0^p(\gamma)$ функций x, таких, что $t^\gamma x(t) \in D_0^p$, с нормой $\left\|x\right\|_{D_0^p(\gamma)} = \left\|t^\gamma x(t)\right\|_{D_0^p}$.

2. Постановка задачи

Уравнение (0.1) будем рассматривать в следующих предположениях.

Коэффициент $a(t)$ асимптотически стремится к $\dfrac{k}{t^\alpha}$, то есть представим в виде $a(t) = \dfrac{k}{t^\alpha} + \tilde{a}(t)$, где $\alpha > 1$ и функция $\tilde{a}$ такова, что:

1) $\lim\limits_{t \to 0+} t^\alpha \tilde{a}(t) = 0$;

2) $\tilde{a} \in L^p[\varepsilon, b]$ для всех значений $0 < \varepsilon < b$;

3) $\tilde{a} \in L[0,b]$.

Кроме того, будем считать, что

$$t^{(\alpha p - 1)/p} \tilde{a}(t) \in L^p. \tag{2.1}$$

Отклонение $h\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ определяется равенством $h(t) = t^\beta \tilde{h}(t)$. Здесь $\beta > 1$ и измеримая функция $\tilde{h}$ такова, что справедливы оценки $0 < m_{\tilde{h}} \leqslant \tilde{h}(t) \leqslant M_{\tilde{h}} < \infty$ при всех $t \in [0,b]$. Далее, функция h имеет обратную функцию g, представимую в виде $g(t) = t^{1/\beta} \tilde{g}(t)$, где при всех $t \in [0,b]$ выполняются неравенства $0 < m_{\tilde{g}} \leqslant \tilde{g}(t) \leqslant M_{\tilde{g}} < \infty$.

Вполне непрерывный линейный оператор $T\colon D_0^p(\gamma) \to L^p(\gamma)$ определяется равенством $(Tx)(t) = P(t) x_H(t)$, где $P \in L^p(\gamma)$; $x_H(t) = \begin{cases} x\big[H(t)\big], & \text{если } H(t) \in [0,b] \\ 0, & \text{если } H(t) \notin [0,b] \end{cases}$, функция $H\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ измерима, причем $H(t) \leqslant t$.

Пусть $f \in L^p(\gamma)$. Решение уравнения (0.1) будем искать в пространстве $D_0^p(\gamma)$. Положим

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{\beta - 1} - \frac{1}{p}\,. \tag{2.2}$$

Отметим, что так как $\alpha > 1$ и $\beta > 1$, то $\gamma < \dfrac{p-1}{p}$.

3. Вспомогательные результаты

Определим на пространстве L^p операторы A и B вида $(Az)(t) = \dfrac{k}{t^\alpha} \int\limits_0^{h(t)} \left(\dfrac{t}{s}\right)^\gamma z(s)\,ds$ и $(Bz)(t) = \tilde{a}(t) \int\limits_0^{h(t)} \left(\dfrac{t}{s}\right)^\gamma z(s)\,ds$ соответственно.

Лемма 3.1. *Оператор A ограничен в пространстве L^p, причем имеет место оценка $\|A\|_{L^p \to L^p} \leqslant |k|\vartheta$, где*

$$\vartheta^p = \left(\frac{\beta-1}{\alpha-1}\right)^p \frac{1}{\beta} M_{\tilde{h}}^{(\alpha-1)(p-1)/(\beta-1)} m_{\tilde{g}}^{(1-\alpha)\beta/(\beta-1)}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся тестом Шура [12, с. 33; 4]. Тест Шура представляет собой полуэффективный признак, заключающийся в том, что существование неотрицательной функции $v_1(t)$ и положительной функции $v_2(s)$, таких, что $\left[\int\limits_0^b |K(t,s)| v_2(s)\,ds\right]^{p-1} \leqslant \mu_1 v_1(t)$ и $\int\limits_0^b |K(t,s)| v_1(t)\,dt \leqslant \mu_2 [v_2(s)]^{p-1}$, гарантирует ограниченность в пространстве L^p интегрального оператора K вида $(Kz)(t) = \int\limits_0^b K(t,s) z(s)\,ds$ и оценку его нормы $\|K\|^p_{L^p \to L^p} \leqslant \mu_1 \mu_2$.

Положим $v_1(t) = t^{(1-p)/p}$ и $v_2(s) = s^{-1/p}$. Получим $\mu_1 = \left[|k| \dfrac{\beta-1}{\alpha-1} M_{\tilde{h}}^{(\alpha-1)/(\beta-1)}\right]^{p-1}$ и $\mu_2 = |k| \dfrac{\beta-1}{\alpha-1} \dfrac{1}{\beta} m_{\tilde{g}}^{(1-\alpha)\beta/(\beta-1)}$. □

Отметим, что для применимости теста Шура с указанными функциями v_1, v_2 требуется, чтобы константа γ определялась равенством (2.2).

Лемма 3.2. *Пусть $|k| < \dfrac{1}{\vartheta}$, где величина ϑ определяется равенством* (3.1). *Тогда оператор $I + A$ обратим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие леммы обеспечивает неравенство $\|A\|_{L^p \to L^p} < 1$. □

Лемма 3.3. *Оператор B вполне непрерывен в пространстве L^p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся неравенством Гельдера. Получим $|(Bz)(t)| \leqslant \nu \hat{u}(t) \|z\|_{L^p}$, где $\nu = \mathrm{const}$, $\hat{u}(t) = t^{(\alpha p - 1)/p} |\tilde{a}(t)|$.

Так как в силу условия (2.1) $\hat{u}(t) \in L^p$, то (теорема 6.3 [13, с. 111]) оператор $B\colon L^p \to L^p$ является u–ограниченным и, следовательно, вполне непрерывным. □

Лемма 3.4. *Пусть выполняются условия леммы* 3.2 *.*

Тогда оператор $I + A + B$ *фредгольмов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы С.М. Никольского (см., например, [1, с. 28]) о том, что сумма ограниченного обратимого и вполне непрерывного оператора является фредгольмовым оператором. □

О п р е д е л е н и е 3.1. Произвольный оператор $\bar{A}$: $L^p \to L^p$ называется [1, с. 81] вольтерровым, если для каждого $c \in (0, b)$ равенство $(\bar{A}z)(t) = 0$ имеет место почти всюду на $[0, c]$ для всех таких $z \in L^p$, что $z(t) = 0$ почти всюду на $[0, c]$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\big|k\big| < \dfrac{1}{\vartheta}$, $b = 1$, $M_{\tilde{h}} \leqslant 1$.

Тогда оператор $I + A$ *обратим, причем обратный к нему оператор вольтерров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 3.2 и теоремы, аналогичной теореме 2.1 [1, с. 85], о том, что оператор $(I + \bar{A})^{-1}$ является вольтерровым, если оператор $\bar{A}$ линеен, ограничен и вольтерров, а также его спектральный радиус меньше единицы.

Так как спектральный радиус оператора A не превосходит его нормы, которая в силу условия $\big|k\big| < \dfrac{1}{\vartheta}$ меньше единицы, то оператор $(I + A)^{-1}$ вольтерров. □

Приведем формулировку теоремы, аналогичной теореме 2.3 [1, с. 86].

Утверждение 3.1. *Пусть оператор* $\bar{A}: L^p \to L^p$ *линеен, ограничен и вольтерров.*

Пусть, далее, оператор $\bar{B}: L^p \to L^p$ *линеен, вполне непрерывен и вольтерров.*

Тогда из существования и вольтерровости оператора $(I + \bar{A})^{-1}$ *следует существование и вольтерровость оператора* $(I + \bar{A} + \bar{B})^{-1}$.

Лемма 3.6. *В условиях леммы* 3.5 *оператор* $I + A + B$ *обратим, причем обратный оператор вольтерров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из лемм 3.3 и 3.5, а также утверждения 3.1. □

4. Основной результат

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* (2.1) *и условия леммы* 3.5*.*

Тогда задача (0.1) – (0.2) *имеет единственное решение в пространстве* $D_0^p(\gamma)$ *при любой правой части* $f \in L^p(\gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим вспомогательную переменную $y(t) = t^{\gamma}x(t)$. Тогда уравнение (0.1) примет вид

$$t^{-\gamma}\left(\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t}\right)y(t) + a(t)\big[h(t)\big]^{-\gamma}y\big[h(t)\big] + P(t)\big[H(t)\big]^{-\gamma}y\big[H(t)\big] = f(t), \qquad t \in [0, b], \quad (4.1)$$

или

$$\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t}y(t) + a(t)\left(\frac{t}{h(t)}\right)^{\gamma}y\big[h(t)\big] + P(t)\left(\frac{t}{H(t)}\right)^{\gamma}y\big[H(t)\big] = t^{\gamma}f(t), \qquad t \in [0, b]. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) определено для $y \in D_0^p$. Запишем изоморфизм между пространствами D_0^p и L^p:

$$\dot{y}(t) - \frac{\gamma}{t} y(t) = z(t), \qquad t \in [0, b]. \tag{4.3}$$

Так как $\gamma < \dfrac{p-1}{p}$, то в силу [2], [8] обратное преобразование имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{\gamma} z(s)\, ds. \tag{4.4}$$

Здесь $z \in L^p$.

Подставим выражения (4.3) и (4.4) в уравнение (4.2). Получим уравнение

$$(I + A + B + Q)z = \varphi, \tag{4.5}$$

эквивалентное уравнению (4.2). Эквивалентность понимается в том смысле, что между решениями уравнений (4.2) и (4.5) существует взаимно-однозначное соответствие, определяемое равенствами (4.3) и (4.4).

Оператор $Q\colon L^p \to L^p$ определяется равенством $(Qz)(t) = P(t) \int_0^{H(t)} \left(\dfrac{t}{s}\right)^{\gamma} z(s)\, ds$. При $H(t) \leqslant t$ в силу неравенства Гельдера оператор Q является u–ограниченным, где $u(t) \sim t^{(p-1)/p}\big|P(t)\big|$. Так как $\gamma < \dfrac{p-1}{p}$ и $P \in L^p(\gamma)$, то $u \in L^p$. Кроме того, так как $H(t) \leqslant t$, то оператор Q вольтерров.

Правая часть φ имеет вид $\varphi(t) = t^{\gamma} f(t)$.

Так как в силу леммы 3.6 оператор $I + A + B$ обратим и обратный оператор вольтерров, то в силу утверждения 3.1 уравнение (4.5) имеет единственное решение в пространстве L^p при любой правой части $\varphi \in L^p$. Так как уравнение (4.2) эквивалентно уравнению (4.5), то уравнение (4.2) также однозначно разрешимо в пространстве D_0^p. Отсюда задача (0.1)–(0.2) имеет единственное решение в пространстве $D_0^p(\gamma)$ при любой правой части $f \in L^p(\gamma)$. □

П р и м е р 4.1. Рассмотрим уравнение $\dot{x}(t) + \dfrac{k}{t^2} x\big(t^3\big) = f(t)$. Здесь $\alpha = 2$, $\tilde{a} \equiv 0$; $\beta = 3$, $\tilde{h} \equiv 1$, $\tilde{g} \equiv 1$. Поэтому $\gamma = \dfrac{p-2}{2p}$ и оператор A определяется равенством $(Az)(t) = \dfrac{k}{t^2} \int_0^{t^3} \left(\dfrac{t}{s}\right)^{(p-2)/2p} z(s)\, ds$. Отсюда $\big\|A\big\|^p \leqslant \dfrac{1}{3}\Big(2\big|k\big|\Big)^p$. Поэтому при $\big|k\big| < \dfrac{3^{1/p}}{2}$ уравнение имеет единственное решение в пространстве $D_0^p\left(\dfrac{p-2}{2p}\right)$. Это решение удовлетворяет условию $\lim\limits_{t \to 0+} t^{(p-2)/2p} x(t) = 0$ в силу определения пространства $D_0^p\left(\dfrac{p-2}{2p}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991, 280 с.

2. *Muntean I.* The spectrum of the Cesaro operator // Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation. 1980. Vol. 22 (45). № 1. P. 97-105.

3. *Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В.* О спектре оператора Чезаро // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. № 4. С. 33-37.

4. *Абдуллаев А.Р., Плаксина И.М.* Об оценке спектрального радиуса одного сингулярного интегрального оператора // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 2. С. 3-9.

5. *Абдуллаев А.Р.* О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае // Труды Института прикладной математики им. И.Н. Векуа. 1990. № 37. С. 5-12.

6. *Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В.* Об одной краевой задаче для сингулярного дифференциального уравнения второго порядка // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 4. С. 30-35.

7. *Плаксина И.М.* Об одном сингулярном линейном функционально-дифференциальном уравнении // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 2. С. 92-96.

8. *Баландин А.С.* О разрешимости на оси некоторых классов дифференциально-разностных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18. Вып. 5-2. С. 2449-2451.

9. *Баландин А.С.* О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. Вып. 5. С. 1044-1050.

10. *Баландин А.С., Малыгина В.В.* О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последействием // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 2. С. 7-13.

11. *Bravyi E.I., Plaksina I.M.* On the Cauchy problem for singular functional-differential equations // Advances in Difference Equations. 2017. № 1. P. 91. DOI: 10.1186/s13662-017-1149-7.

12. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985. 160 с.

13. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.

14. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983. 432 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Плаксина Ирина Михайловна, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры автоматизации технологических процессов, e-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Для цитирования: *Плаксина И.М.* О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 539–546. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546

ON SOLVABILITY OF SINGULAR CAUCHY PROBLEM FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH SPECIAL TYPE DEVIATION

I. M. Plaksina

Perm National Research Polytechnic University
29 Komsomol'skiy Pr., Perm 614990 Russian Federation
E-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

Abstract. At this paper unique solvability conditions of singular at independent variable linear first order functional-differential equation with special type argument deviation and singular coefficient were obtained.
Keywords: functional-differential equation; singular equation; linear differential equation; Cauchy problem; Cesaro operator; solvability

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 280 p. (In Russian).

2. Muntean I. The spectrum of the Cesaro operator. *Mathematica. Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximation*, 1980, vol. 22 (45), no. 1, pp. 97-105.

3. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. O spektre operatora Chezaro [On a spectrum of Chesaro operator]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2011, no. 4, pp. 33-37. (In Russian).

4. Abdullaev A.R., Plaksina I.M. Ob otsenke spektral'nogo radiusa odnogo singulyarnogo integral'nogo operatora [An estimate of the spectral radius of a certain singular integral operator]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 3-9. (In Russian).

5. Abdullaev A.R. O razreshimosti zadachi Koshi dlya singulyarnogo uravneniya vtorogo poryadka v kriticheskom sluchae [On solvability of Cauchy problem for a second order singular equation]. *Trudy Instituta prikladnoy matematiki im. I.N. Vekua – Proceedings of the I.N. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 1990, no. 37, pp. 5-12. (In Russian).

6. Abdullaev A.R., Plekhova E.V. Ob odnoy kraevoy zadache dlya singulyarnogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka [On the one boundary value problem for singular second order differential equation]. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya – Scientific and Technical Volga Region Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 30-35. (In Russian).

7. Plaksina I.M. Ob odnom singulyarnom lineynom funktsional'no-differentsial'nom uravnenii [One class of singular linear functional differential equations]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2012, no. 2, pp. 92-96. (In Russian).

8. Balandin A.S. O razreshimosti na osi nekotorykh klassov differentsial'no-raznostnykh uravneniy [On solvability some classes of differential-difference equations on the line]. *Vestnik Tambovskogo*

universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2013, vol. 18, no. 5-2, pp. 2449-2451. (In Russian).

9. Balandin A.S. O razreshimosti na osi avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy s ogranichennym zapazdyvaniem [On solvability of autonomous differential equations with bounded delay on the axis]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2015, vol. 20, no. 5, pp. 1044-1050. (In Russian).

10. Balandin A.S., Malygina V.V. O razreshimosti na osi avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy s posledeystviem [On solvability of autonomous delay differential equations on the real axis]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika – Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2016, no. 2, pp. 7-13. (In Russian).

11. Bravyi E.I., Plaksina I.M. On the Cauchy problem for singular functional-differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2017, no. 1, p. 91. DOI: 10.1186/s13662-017-1149-7.

12. Halmosh P., Sander V. Ogranichennye integral'nye operatory v prostranstvakh L^2 [Bounded Integral Operators at Spaces L^2] Moscow, Nauka Publ., 1985, 160 p. (In Russian).

13. Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P., Pustylnik E.I., Sobolevskiy P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators at Spaces of Integrable Functions]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 499 p. (In Russian).

14. Hatson V., Pim G. *Prilozheniya funktsional'nogo analiza i teorii operatorov* [Applications of Functional Analysis and Operator Theory]. Moscow, Mir Publ., 1983, 432 p. (In Russian).

Received 16 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Plaksina Irina Mikhaylovna, Perm National Research Polytechnic University, Perm, the Russian Federation, Senior Lecturer of the Automation of Technological Processes Department, e-mail: atp@pstu.ru, impl@list.ru

For citation: Plaksina I.M. O razreshimosti odnoy singulyarnoy kraevoy zadachi dlya funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s otkloneniem spetsial'nogo vida [On solvability of one singular boundary value problem for functional-differential equation with special-type deviation]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 539–546. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-539-546 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554
УДК 515.124.2 + 517.988.5

О МНОЖЕСТВАХ МЕТРИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНОЗНАЧНОЙ МЕТРИКОЙ

© **Е. А. Плужникова**[1], **Т.В. Жуковская**[2], **Ю. А. Моисеев**[1]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru, aaaum@yandex.ru
[2] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены пространства с векторнозначной метрикой, значениями которой являются элементы конуса линейного нормированного пространства. Сформулировано понятие множества метрической регулярности отображения в пространствах с векторнозначной метрикой. Получено утверждение об устойчивости множества метрической регулярности заданного отображения при его липшицевых возмущениях в пространствах с векторнозначной метрикой.

Ключевые слова: нелинейное отображение; пространство с векторнозначной метрикой; множество метрической регулярности

Введение

Накрывающие (регулярные) отображения метрических пространств исследованы в работах Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, Б. Д. Гельмана, Л. М. Грейвса, А. В. Дмитрука, А. Д. Иоффе, А. А. Милютина, Б. С. Мордуховича, Н. П. Осмоловского, А. Удерзо и других авторов. В связи с приложениями к системам уравнений (в том числе к краевым задачам и задачам управления) в работах [1–3] предложено и исследовано понятие векторно накрывающего (регулярного) отображения. В [4–7] это понятие распространено на многозначные отображения, действующие в пространствах с векторнозначной метрикой. В настоящей работе продолжены эти исследования. Определено понятие множества метрической регулярности отображения, действующего в пространствах с векторнозначной метрикой, и исследована его устойчивость к липшицевым возмущениям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-51-12064, 18-01-00106, 18-31-00227).

1. Основные понятия

Пусть задано непустое множество $\mathcal{X}$ и линейное нормированное пространство E, в котором выделен некоторый замкнутый выпуклый конус E_+. Конус задает порядок в E, то есть для любых элементов $r_1, r_2 \in E$ выполнено неравенство $r_1 \leqslant r_2$ тогда и только тогда, когда $r_2 - r_1 \in E_+$.

Векторнозначной метрикой (см., например, [2, с. 89]) называют отображение $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+$, обладающее свойствами «обычной» метрики, то есть:
1) равенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $x = u$;
2) для любых $x, u \in \mathcal{X}$ справедливо $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) = \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u,x)$;
3) для любых $x, u, v \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) \leqslant \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,v) + \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(v,u)$.
Построенное таким образом пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ называют *пространством с векторнозначной метрикой.*

Для пространств с векторнозначной метрикой можно сформулировать аналоги определений некоторых понятий, известных для метрических пространств (см. [5, с. 1975]).

Приведем некоторые из таких понятий, используемых в данной статье. *Замкнутым шаром* с центром в некоторой точке $u \in \mathcal{X}$ радиуса $r \in E_+$ в $\mathcal{X} \doteq (\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ называют множество $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u,r) \doteq \{x \in \mathcal{X} : \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u) \leqslant r\}$. Сходимость в $\mathcal{X}$ определяется естественным образом. Пусть даны последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ и элемент $x \in \mathcal{X}$. Под сходимостью $x_n \to x$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{X}$ понимается сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x) \to 0$ в E, то есть $\|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n,x)\|_E \to 0$. Множество $U \subset \mathcal{X}$ *замкнуто,* если для любой сходящейся последовательности его элементов $\{x_n\} \subset U$, $x_n \to x$ выполнено $x \in U$. Заметим, что замкнутый шар $\mathrm{B}_{\mathcal{X}}(u,r)$ будет замкнутым множеством в $\mathcal{X}$. Последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ называют *фундаментальной,* если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall m > N \quad \|\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_m)\|_E < \varepsilon.$$

Пространство $\mathcal{X}$ называется *полным,* если любая фундаментальная последовать в нем сходится.

Пусть E, M — некоторые линейные нормированные пространства с заданными замкнутыми выпуклыми конусами E_+, M_+; $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — пространства с векторнозначными метриками $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}^2 \to E_+$, $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}^2 \to M_+$. Отображение $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in \mathcal{X}$, если из $x \to x_0$ следует, что $F(x) \to F(x_0)$. В пространстве $\mathcal{L}(M,E)$ линейных ограниченных операторов $F : M \to E$ определим множество положительных операторов

$$\mathcal{L}(M,E)_+ \doteq \{F : M \to E \mid F(M_+) \subset E_+\}.$$

Множество $\mathcal{L}(M,E)_+$ является замкнутым выпуклым конусом в пространстве $\mathcal{L}(M,E)$. Обозначим $I_E : E \to E$ — тождественный оператор. Заметим, $I_E \in \mathcal{L}(E,E)_+$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть задано отображение $K \in \mathcal{L}(M,E)_+$. *Множеством K-метрической регулярности* отображения $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ будем называть множество

$$\mathfrak{M}_K(F) = \Big\{(x_0, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid \exists x \in \mathcal{X} : \ F(x) = y, \ \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(y, F(x_0)\big)\Big\}.$$

П р и м е р 1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}$ действительных чисел с «обычной скалярной» метрикой $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $\rho(u,v) = |u-v|$, $u, v \in \mathbb{R}$. Пусть $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тождественный оператор, то есть $K = 1$. Множеством 1-метрической регулярности отображения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2$ является

$$\mathfrak{M}_1(F) = \big\{(x_0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ |x_0| \geqslant \frac{1}{2}, \ y \geqslant \frac{1}{4}\big\}.$$

Для формулировки основного результата напомним понятие липшицевости отображений в пространствах с векторнозначной метрикой (см., например, [2, с. 90]).

О п р е д е л е н и е 2. Отображение $G : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называют *липшицевым с операторным коэффициентом* $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$ или Q*-липшицевым* (*относительно векторнозначных метрик*), если для любых $u, x \in \mathcal{X}$ выполнено $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(G(u), G(x)\big) \leqslant Q\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(u, x)$.

Отметим, что для отображений метрических пространств определение 2 означает «обычную липшицевость».

2. Основные результаты

Рассмотрим задачу об устойчивости множества метрической регулярности отображения при его липшицевых возмущениях.

Пусть задано отображение $\Psi : \mathcal{X}^2 \to \mathcal{Y}$ и при любом $x \in \mathcal{X}$ известно множество метрической регулярности отображения $\Psi(\cdot, x)$. Нас интересует множество метрической регулярности отображения

$$F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad F(x) = \Psi(x, x). \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть пространство* $(\mathcal{X}, \mathcal{P}_{\mathcal{X}})$ *является полным, а пространство* M — *банаховым. Пусть заданы элементы* $x_0 \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ *и отображения* $K \in \mathcal{L}(M, E)_+$, $Q \in \mathcal{L}(E, M)_+$. *Определим* $r \doteq K(I_M - QK)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(y, \Psi(x_0, x_0)\big)$. *Пусть для любого* $x \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0, r)$ *выполнены следующие условия:*

(i) *имеет место включение* $(x, y) \in \mathfrak{M}_K\big(\Psi(\cdot, x)\big)$;

(ii) *отображение* $\Psi(x, \cdot) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *является* Q*-липшицевым (относительно векторнозначных метрик);*

(iii) *отображение* $\Psi(\cdot, x) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *непрерывно в точке* x;

(iv) *для спектрального радиуса линейного ограниченного положительного оператора* $QK \in \mathcal{L}(M, M)_+$ *имеет место оценка* $sr(QK) < 1$.

Тогда $(x_0, y) \in \mathfrak{M}_K(F)$, *где* F *определено соотношением* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения 1 надо показать, что существует $x \in \mathcal{X}$ такой, что $F(x) = y$ и имеет место оценка

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(y, F(x_0)\big). \tag{2}$$

Докажем это.

Из условия теоремы (iv) следует существование линейного ограниченного оператора $(I_M - QK)^{-1} : M \to M$ и его представление в виде (см., например, [8, с. 116])

$$(I_M - QK)^{-1} = I_M + QK + (QK)^2 + \dots .$$

Так как $QK \in \mathcal{L}(M, M)_+$, то при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено

$$(I_M - QK)^{-1} \geqslant I_M + QK + \dots + (QK)^n.$$

Для произвольного $u_0 \in X$ построим итерационную последовательность $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$ следующим образом.

Положим $x_0 = u_0$, определим $\Psi(x_0, x_0)$. В силу предположения (i) существует такой $x_1 \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0, r)$, что

$$\Psi(x_1, x_0) = y, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x_0, x_0),\, \Psi(x_1, x_0)\big) = K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big).$$

Определим $\Psi(x_1, x_1)$. Вследствие предположения (ii) выполнено неравенство

$$\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x_1, x_1),\, \Psi(x_1, x_0)\big) \leqslant Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0).$$

Далее, снова в силу предположения (i) существует такой $x_2 \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0, r)$, что

$$\Psi(x_2, x_1) = y, \quad \mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leqslant K\mathcal{P}_Y\big(\Psi(x_1, x_1),\, \Psi(x_2, x_1)\big).$$

Отсюда, учитывая предыдущие выкладки, получаем

$$\mathcal{P}_X(x_2, x_1) \leqslant K\rho_Y\big(\Psi(x_1, x_1),\, y\big) \leqslant KQ\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_1, x_0) \leqslant KQK\mathcal{P}_Y\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big).$$

Повторяя подобные рассуждения, на каждом n-м шаге ($n = 1, 2, \dots$) будем определять элемент $x_n \in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0, r)$, удовлетворяющий соотношениям:

$$\Psi(x_n, x_{n-1}) = y, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_{n-1}) \leqslant K(QK)^{n-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big).$$

Построенная последовательность является фундаментальной в $\mathcal{X}$. Действительно, из оценки (iv) следует сходимость $\|(QK)^n\|_{\mathcal{L}(M,M)} \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом

$$\begin{aligned}\forall\, j = 1, 2, \dots \quad \mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n+j}, x_n) &\leqslant K(QK)^n\big(I_M + \dots + (QK)^{j-1}\big)\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big) \leqslant \\ &\leqslant K(QK)^n(I_M - QK)^{-1}\rho_Y\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big) \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.\end{aligned}$$

Вследствие полноты $\mathcal{X}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится. Пусть $x_n \to x$. Покажем, что элемент $x \in \mathcal{X}$ удовлетворяет условию (2).

Из соотношений $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x, x_n),\, \Psi(x, x)\big) = \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x, x_{n-1}),\, \Psi(x, x)\big) \leqslant Q\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_{n-1}, x)$ следует сходимость $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x, x_n),\, \Psi(x, x)\big) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, вследствие условия (iii) имеем $\Psi(x, x) = y$. Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x, x_0) \leqslant K\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(y, \Psi(x_0, x_0)\big)$ следует из оценки

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x_n, x_0) \leqslant K\big(I_M + \dots + (QK)^{n-1}\big)\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big) &\leqslant \\ \leqslant K(I_M - QK)^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(u_0, u_0),\, \Psi(x_1, u_0)\big)&.\end{aligned}$$

□

Из приведенного доказательства теоремы 1 следует, что условия (ii) и (iii) можно ослабить следующим образом.

Замечание 1. В условии теоремы 1 требование (ii) Q-липшицевости (относительно векторнозначных метрик) отображения $\Psi(x,\cdot):\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ можно заменить условием:

$$\forall x,u\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0,r) \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}\big(\Psi(x,x),\Psi(x,u)\big)\leqslant Q\,\mathcal{P}_{\mathcal{X}}(x,u).$$

Замечание 2. В условии теоремы 1 требование (iii) непрерывности в точке x отображения $\Psi(\cdot,x):\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ можно заменить условием:

$$\forall x\in \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0,r),\ \forall\{x_n\}\subset \mathrm{B}_{\mathcal{X}}(x_0,r):\ x_n\to x\ \Rightarrow\ \Psi(x_n,x)\to\Psi(x,x).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения векторных отображений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2016. № 10. С. 14-28.

2. *Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 1. С. 88-95. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-88-95.

3. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Точки совпадения отображений в пространствах с векторнозначной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1473-1481.

4. *Жуковский Е.С.* О точках совпадения многозначных векторных отображений метрических пространств // Математические заметки. 2016. Т. 100. № 3. С. 344-362.

5. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Многозначные накрывающие отображения пространств с векторнозначной метрикой в исследовании функциональных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1974-1982. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982.

6. *Плужникова Е.А., Моисеев Ю.А., Репин А.А.* О точках совпадения двух многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 6-1. С. 1309-1313. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313.

7. *Жуковский Е.С., Панасенко Е.А.* О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Труды Института математики и механики Уральского отделения РАН. 2018. Т. 24. № 1. С. 93-105.

8. *Крейн С.Г.* Функциональный анализ. М., 1972. 544 с.

Поступила в редакцию 10 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 17 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Плужникова Елена Александровна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Моисеев Юрий Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: aaaum@yandex.ru

Для цитирования: *Плужникова Е.А., Жуковская Т.В., Моисеев Ю.А.* О множествах метрической регулярности отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 547–554. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554

ON SETS OF METRIC REGULARITY OF MAPPINGS IN SPACES WITH VECTOR-VALUED METRIC

E. A. Pluzhnikova[1)], **T. V. Zhukovskaya**[2)], **Yu. A. Moiseev**[1)]

[1)] Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya st., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: pluznikova_elena@mail.ru, aaaum@yandex.ru
[2)] Tambov State Technical University
106 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Abstract. Spaces with vector-valued metric are considered. The values of a vector-valued metric are elements of a cone in some linear normed space. The concept of the set of metric regularity for mapping in spaces with vector-valued metric is formulated. A statement on the stability of the set of metric regularity of a given mapping for its Lipschitz perturbations in spaces with vector-valued metric is obtained.
Keywords: nonlinear mapping; space with vector-valued metric; the set of metric regularity

REFERENCES

1. Zhukovskiy E.S. O tochkakh sovpadeniya vektornykh otobrazheniy [On coincidence points for vector mappings]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 2016, no. 10, pp. 14-28. (In Russian).

2. Pluzhnikova E.A. Nakryvayushchiye otobrazheniya v prostranstvakh s vektornoznachnoy metrikoy [Covering mappings in the spaces with vector-valued metrics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2016, vol. 21, no. 1, pp. 88-95. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-1-88-95.

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya otobrazheniy v prostranstvakh s vektornoznachnoy metrikoy i ikh prilozheniya k differentsial'nym uravneniyam i upravlyayemym sistemam [The coincidence points of mappings in spaces with a vectorvalued metric and their applications to differential equations and control systems]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 11, pp. 1473-1481. (In Russian).

4. Zhukovskiy E.S. O tochkakh sovpadeniya mnogoznachnykh vektornykh otobrazheniy metricheskikh prostranstv [On Coincidence Points of Multivalued Vector Mappings of Metric Spaces]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 3, pp. 344-362. (In Russian).

5. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A. Mnogoznachnyye nakryvayushchiye otobrazheniya prostranstv s vektornoznachnoy metrikoy v issledovanii funktsional'nykh vklyucheniy [Multi-valued covering mappings in spaces with vector-valued metrics in research of functional inclusions]. *Vestnik*

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects №№ 17-51-12064, 18-01-00106, 18-31-00227).

Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 1974-1982. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-1974-1982.

6. Pluzhnikova E.A., Moiseev Y.A., Repin A.A. O tochkakh sovpadeniya dvukh mnogoznachnykh otobrazheniy v prostranstvakh s vektornoznachnoy metrikoy [On coincidence points of two multivalued mappings in spaces with vector-valued metrics]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 6-1, pp. 1309-1313. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-6-1309-1313.

7. Zhukovskiy E.S., Panasenko E.A. O nepodvizhnykh tochkakh mnogoznachnykh otobrazheniy v prostranstvakh s vektornoznachnoy metrikoy [On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdeleniya RAN – Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 93-105.

8. Crane S. *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. Moscow, 1972, 544 p. (In Russian).

Received 10 April 2018
Reviewed 17 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Pluzhnikova Elena Aleksandrovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Departmen, e-mail: pluznikova_elena@mail.ru

Zhukovskaya Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Further Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Moiseev Yuriy Anatol'evich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: aaaum@yandex.ru

For citation: Pluzhnikova E.A., Zhukovskaya T.V., Moiseev Yu.A. On sets of metric regularity of mappings in spaces with vector-valued metric. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 547–554. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-547-554 (In Russian, Abstr. in Engl.).

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565
УДК 519.622.2

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© А. Н. Пчелинцев

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается модификация метода степенных рядов для численного построения неустойчивых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений хаотического типа с квадратичными нелинейностями в общем виде. Найдена область сходимости рядов и предложен алгоритм построения приближенных решений.

Ключевые слова: хаос; система Лоренца; аттрактор; степенные ряды

Введение

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = B_0 + B_1 x + \varphi(x), \tag{1}$$

где $x(t) = \left[x_{(1)}(t) \ \dots \ x_{(m)}(t)\right]^{\mathrm{T}}$ – векторная функция времени t со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$, $B_0 \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор-столбец,

$$\varphi(x) = \left[\varphi_{(1)}(x) \ \dots \ \varphi_{(m)}(x)\right]^{\mathrm{T}},$$

$\varphi_{(p)}(x) = \langle Q_p x, x\rangle$, B_1 и Q_p ($p = \overline{1,m}$) – матрицы ($m \times m$) действительных чисел. Анализ современной литературы показал, что формулы общего решения систем вида (1) в классе каких-либо известных функций пока не найдено.

Пусть в фазовом пространстве системы (1) имеется ограниченное множество (называемое аттрактором), к которому стремятся со временем все соседние фазовые траектории из некоторой области, называемой областью притяжения (см. [1, с. 31]). Следовательно, аттрактор определяет поведение близких ограниченных решений системы (1) при больших значениях t. Будем рассматривать такие решения на некотором заданном отрезке времени $\Omega = [0; T]$. Заметим, что в простейшем случае аттрактором может быть, например, положение равновесия или цикл.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-07-00801).

Однако в системе с $m > 2$ может существовать так называемый странный аттрактор, состоящий из всюду плотных седловых траекторий, вдоль которых близкие траектории экспоненциально разбегаются. При этом имеются области притяжения, возвращающие траектории к аттрактору. Это и создает их хаотическое поведение. Из-за неустойчивости хаотических решений на аттракторах системы (1) правильный численный прогноз их поведения на заданном отрезке времени важен в понимании, например, процессов эволюции (если рассматривается модель [2] роста раковых опухолей) и снижения неопределенности.

Таким образом, хаотическое поведение решений динамических систем вызывает трудности применения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие исследователи используют разные числовые схемы, основанные на классических методах, например, сочетание явного метода Эйлера с центрально-разностной схемой [3], метод Адамса [4], Рунге–Кутты 4-го порядка [5] и др. Однако указанные методы не могут быть применены в нашем случае, поскольку глобальная ошибка увеличивается с увеличением отрезка интегрирования [6, с. 78, 83; 7]. С. Строгац в книге [8, с. 320–323] привел оценку времени T_c, когда две близкие в начальный момент времени траектории системы (1) критически разбегаются для системы Лоренца. В работе [7] авторы приводят регрессионную зависимость момента времени T_c от шага интегрирования Δt и порядка N_o численной схемы

$$T_c(N_o, \Delta t) \approx -2.6 N_o \lg \Delta t$$

для классических значений параметров системы Лоренца. Также авторы отмечают, что численное решение сходится к различным положениям равновесия при различных значениях шага Δt после переходных хаотических режимов.

Отметим, что численное решение не может быть улучшено за счет уменьшения шага интегрирования, поскольку ошибка интегрирования имеет экстремальный характер как функция от Δt. Эту проблему можно решить, используя высокоточные вычисления [9]. Однако данный подход ставит исследователя в жесткие рамки: во-первых, малая степень свободы для уменьшения ошибки интегрирования (изменение величины шага Δt и точности представления вещественного числа для управления вычислительным процессом), во-вторых, большой объем вычислений при очень малых Δt. Методы Рунге–Кутты высокого порядка могут быть применены для получения решений с большей точностью, но соответствующие формулы для $N_o > 6$ являются достаточно громоздкими (см., например, книгу [10]).

В статье [11] авторы описывают метод многоступенчатой спектральной релаксации, который отличается от методов, указанных выше. Они используют спектральный метод Чебышева для решения системы (1) в форме Гаусса–Зейделя с помощью итерационной схемы на каждой части отрезка интегрирования. Преимущество состоит в том, что накопление ошибки не так велико, как в прямых методах.

Для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений иногда используется метод степенных рядов (или метод рядов Тейлора). В работах [12, 13] этот метод используется как одна из разновидностей метода разложения Адомяна (МРА). В этих исследованиях авторы получают коэффициенты разложения решения в степенной ряд для разных систем вида (1) без нахождения радиуса сходимости. Ошибка приближенного хаотического решения сравнивается только с численными результатами методов Рунге–Кутты. П. Вадаш и С. Олек в работе [14] также изучили зависимость коэффициентов степенных рядов от числа членов в разложении.

В данной статье рассматривается модификация метода степенных рядов (аналогичная MPA) для системы (1). Преимущество перед общей схемой метода рядов Тейлора состоит в том, что коэффициенты разложения могут быть достаточно быстро вычислены по рекуррентным формулам для систем с квадратичной правой частью. Кроме того, получена оценка области сходимости степенного ряда. Недавно [15, 16] такой подход был применен к системам Лоренца и Чена. Здесь обобщаются результаты для систем вида (1).

1. Примеры хаотических систем с квадратичными нелинейностями

Приведем два примера систем вида (1), для которых может быть применен рассматриваемый численный метод.

1. Система Лоренца [2]

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = \sigma\left(x_{(2)} - x_{(1)}\right), \\ \dot{x}_{(2)} = r x_{(1)} - x_{(2)} - x_{(1)} x_{(3)}, \\ \dot{x}_{(3)} = x_{(1)} x_{(2)} - b x_{(3)}. \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Система Джафари–Спротта [17]

$$\begin{cases} \dot{x}_{(1)} = x_{(2)}, \\ \dot{x}_{(2)} = -x_{(1)} + x_{(2)} x_{(3)}, \\ \dot{x}_{(3)} = x_{(3)} + a x_{(1)}^2 - x_{(2)}^2 - b. \end{cases}$$

В этом случае

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Численно-аналитическое решение системы дифференциальных уравнений

Система (1) имеет квадратичную правую часть по фазовым координатам. Это позволяет получить явную формулу для вычисления коэффициентов степенного ряда и оценку области сходимости.

Пусть

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i t^i, \tag{2}$$

где $\Lambda_0 = x(0)$ – вектор значений начальных условий для системы (1), $\Lambda_i \in \mathbb{R}^m$.

Произведение степенных рядов в форме Коши в векторной форме имеет вид

$$\varphi_{(p)}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{i(p)} t^i, \;\; \Phi_{i(p)} = \sum_{j=0}^{i} \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{i-j} \rangle, \;\; p = \overline{1, m}.$$

Пусть

$$\Phi_i = \left[\Phi_{i(1)} \; \ldots \; \Phi_{i(m)} \right]^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что

$$\Lambda_1 = B_0 + B_1 \Lambda_0 + \Phi_0. \tag{3}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим из системы (1) рекуррентное соотношение для вычисления векторов-коэффициентов степенного ряда при $i \geq 2$

$$\Lambda_i = \frac{B_1 \Lambda_{i-1} + \Phi_{i-1}}{i}. \tag{4}$$

Эта формула достаточно проста и быстро вычислима по сравнению с MPA, поскольку не содержит факториалов.

Хотя правая часть системы (1) является всюду аналитической, радиус сходимости ряда может быть ограниченной величиной и зависеть от Λ_0.

3. Алгоритм построения дуги траектории

Рассмотрим алгоритм построения дуги траектории на заданном отрезке времени длиной T.

начало

1. **Задать** значения машинного эпсилон ε_m (для представления вещественного числа) и way (1 или -1).
2. **Задать** значения T, ε_p и Λ_0.
3. $t := 0$.
4. **Вычислить** значение Δt как функцию от Λ_0.
5. $t := t + \Delta t$.
6. **Если** $t > T$, **то** $flag := 1$; $\Delta t := \Delta t - (t - T)$

   Иначе если $t < T$, **то** $flag := 0$

   Иначе $flag := 1$.
7. $p := 1$; $i := 0$.
8. $x := \Lambda_0$.
9. $i := i + 1$; $p := p \cdot way \cdot \Delta t$.
10. **Вычислить** Λ_i по формулам (3) и (4).
11. $x := x + \Lambda_i \cdot p$.
12. $L := \|\Lambda_i\| \cdot |p|$.
13. **Если** $L > \varepsilon_p$, **то перейти** к шагу 9.
14. $\Lambda_0 := x$.
15. **Вывод** Λ_0.
16. **Если** $flag = 0$, **то перейти** к шагу 4.

конец.

Переменная way обеспечивает численное интегрирование в обратном времени, когда ее значение равно -1 (в прямом направлении $way = 1$). На практике мы используем оба направления для проверки точности приближенного решения.

Рассмотрим более подробно процедуру построения дуги траектории.

Пусть $t_l \in \Omega$, $l = \overline{1, N}$ – индекс отрезков времени $[t_{l-1}; t_l]$, где ряд (2) сходится, N – количество таких отрезков, $t_0 = 0$, $t_N = T$,

$$\Omega = [t_0; t_1] \cup [t_1; t_2] \cup \ldots \cup [t_{N-1}; t_N].$$

Зададим вектор Λ_0 значений начальных условий в момент времени t_0. Тогда векторы Λ_i ($i = 1, 2, \dots$) вычисляются по формулам (3) и (4) до тех пор, пока не будет верна оценка

$$\|\Lambda_i\| \, |\Delta t_l|^i < \varepsilon_p, \tag{5}$$

где ε_p – локальная точность вычислений, $\Delta t_l = t_l - t_{l-1}$. Модуль в (5) используется в случае отрицательных значений шага Δt_l.

Пусть $x_1(t)$ – m-мерный полином n_1-й степени, который получается из оценки (5) на первой стадии ($l = 1$) вычислений. На следующей стадии ($l = 2$) мы полагаем

$$\Lambda_0 := x_{l-1}(\Delta t_{l-1})$$

и установим теперь уже начальный момент времени t_1 равным нулю для упрощения вычислений, поскольку система (1) динамическая.

Если τ_l – длина отрезка некоторого отрезка сходимости ряда (2), то значение Δt_l выбирается как

$$0 < \Delta t_l < \tau_l$$

или

$$-\tau_l < \Delta t_l < 0.$$

4. Оценка длины отрезка сходимости степенного ряда в векторной форме

Оценка области сходимости ряда (2) важна, когда приближенные решения системы (1) вычисляются по алгоритму, описанному выше. Для этого введем следующие обозначения:

$$h_1(\Lambda_0) = \|\Lambda_0\|, \; \mu = m \max_{p=\overline{1,m}} \|Q_p\|,$$
$$h_2(\Lambda_0) = \begin{cases} \|B_0\| + (\|B_1\| + 2\mu)h_1 + \mu h_1^2, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|B_0\| + \|B_1\| + \mu & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Докажем, что ряд (2) сходится при $t \in (-\tau_l; \tau_l)$, где $\tau_l = 1/h_2$. Тогда число h_2 нужно выбрать так, чтобы $h_2|t| < 1$, и

$$\left\|\Lambda_i t^i\right\| \le (h_2|t|)^i.$$

Тогда ряд (2) сходится.

Теорема 1. *Неравенство*

$$\|\Lambda_i\| \le h_2^i \tag{7}$$

справедливо для любого натурального i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем использовать метод математической индукции. Рассмотрим случай, когда $h_1 > 1$.

Покажем, что (7) верно для $i = 1$. Из формулы (3) и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\|\Lambda_1\| \le \|B_0\| + \|B_1\| \|\Lambda_0\| + m \max_{p=\overline{1,m}} |\langle Q_p\Lambda_0, \Lambda_0\rangle| \le$$
$$\le \|B_0\| + \|B_1\| h_1 + \mu h_1^2 \le h_2^1,$$

что доказывает справедливость (7) при $i = 1$.

Предположим, что (7) верно при $i = k$. Тогда оно верно для любого натурального $j = \overline{1, k}$, то есть

$$\|\Lambda_j\| \le h_2^j. \tag{8}$$

Докажем теперь, что неравенство (7) верно для $i = k + 1$. Оценим

$$\left\|\sum_{j=0}^{k}\langle Q_p\Lambda_j, \Lambda_{k-j}\rangle\right\| \le \mu \|\Lambda_0\| \|\Lambda_k\| + \mu \|\Lambda_k\| \|\Lambda_0\| +$$
$$+\mu \sum_{j=1}^{k-1} \|\Lambda_j\| \|\Lambda_{k-j}\| \le 2\mu h_1 h_2^k +$$
$$+\mu \sum_{j=1}^{k-1} h_2^j h_2^{k-j} = 2\mu h_1 h_2^k + (k-1)\mu h_2^k.$$

Из формулы (4) и неравенств (8) мы получаем оценку (учтя, что $k \ge 1$ and $h_1 > 1$)

$$\|\Lambda_{k+1}\| \le \frac{\|B_1\| \|\Lambda_k\| + 2\mu h_1 h_2^k}{k+1} + \frac{k-1}{k+1}\mu h_2^k \le \|B_1\| h_2^k +$$
$$+2\mu h_1 h_2^k + \mu h_2^k \le (\|B_0\| + \|B_1\| + 2\mu h_1 + \mu) h_2^k \le$$
$$\le h_2 h_2^k = h_2^{k+1},$$

которая доказывает справедливость (7) для любого натурального i.

Теперь покажем справедливость другого случая – $h_2 \le 1$, то есть по индукции выполнение неравенства (7) в данном случае.

Для $i = 1$ мы имеем

$$\|\Lambda_1\| \le \|B_0\| + \|B_1\| + \mu = h_2^1,$$

откуда (7) верно.

Предположим, что (7) верно для $i = k$. Оценим

$$\left\|\sum_{j=0}^{k}\langle Q_p\Lambda_j, \Lambda_{k-j}\rangle\right\| \le 2\mu h_2^k + (k-1)\mu h_2^k = (k+1)\mu h_2^k.$$

Докажем справедливость (7) при $i = k + 1$. Из формулы (4) и предположения справедливости

$$\|\Lambda_{k+1}\| \le \frac{\|B_1\| \|\Lambda_k\|}{k+1} + \mu h_2^k \le \|B_1\| h_2^k + \mu h_2^k =$$
$$= (\|B_1\| + \mu) h_2^k \le h_2 h_2^k = h_2^{k+1},$$

что доказывает (7) для любого натурального i, когда $h_2 \leq 1$.

Из формулы (6) следует, что описанным методом можно численно построить и непродолжаемые решения системы (1): при приближении к вертикальным асимптотам решения значения фазовых координат увеличивается, а величина

$$\tau_l = O\left(\frac{1}{\|\Lambda_0\|^2}\right)$$

уменьшается. Отметим, что в работе [18] получена модификация метода Эйлера, позволяющая изменять значение Δt_l в зависимости от поведения фазовой координаты вблизи асимптоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 552 с.

2. *Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M.* Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2016. Vol. 462. P. 560-568.

3. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. № 2. P. 130-141.

4. *Yorke J.A., Yorke E.D.* Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model // Journal of Statistical Physics. 1979. Vol. 21. № 3. P. 263-277.

5. *Калошин Д.А.* Поиск и стабилизация неустойчивых седловых циклов в системе Лоренца // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. Вып. 11. С. 1559-1561.

6. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.

7. *Teixeira J., Reynolds C.A., Judd K.* Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design // Journal of the Atmospheric Sciences. 2007. Vol. 64. № 1. P. 175-189.

8. *Strogatz S.H.* Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. N. Y.: Perseus Books Publ., 1994. 498 p.

9. *Sarra S.A., Meador C.* On the numerical solution of chaotic dynamical systems using extend precision floating point arithmetic and very high order numerical methods // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. 2011. Vol. 16. № 3. P. 340-352.

10. *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.

11. *Motsa S.S., Dlamini P., Khumalo M.* A new multistage spectral relaxation method for solving chaotic initial value systems // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 72. № 1. P. 265-283.

12. *Hashim I., Noorani M.S.M., Ahmad R., Bakar S.A., Ismail E.S., Zakaria A.M.* Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 28. № 5. P. 1149-1158.

13. *Abdulaziz O., Noor N.F.M., Hashim I., Noorani M.S.M.* Further accuracy tests on Adomian decomposition method for chaotic systems // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. Vol. 36. № 5. P. 1405-1411.

14. *Vadasz P., Olek S.* Convergence and accuracy of Adomian's decomposition method for the solution of Lorenz equations // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000. Vol. 43. № 10. P. 1715-1734.

15. *Пчелинцев А.Н.* Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. Вып. 2. С. 191-201.

16. *Lozi R., Pchelintsev A.N.* A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2015. Vol. 25. № 13. DOI: 10.1142/S0218127415501874.

17. *Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F.* Recent new examples of hidden attractors // The European Physical Journal Special Topics. 2015. Vol. 224. № 8. P. 1469-1476.

18. *Жуковский Е.С.* О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении // Известия высших учебных заведений. Математика. 1996. Вып. 4. С. 31-34.

Поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.

Пчелинцев Александр Николаевич, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры коммерции и бизнес-информатики, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Для цитирования: *Пчелинцев А.Н.* О численном методе построения неустойчивых решений динамических систем с квадратичными нелинейностями // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 555–565. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565

ON THE NUMERICAL METHOD OF CONSTRUCTION OF UNSTABLE SOLUTIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS WITH QUADRATIC NONLINEARITIES

A. N. Pchelintsev

Tambov State Technical University
106 Sovetskaya st., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

Abstract. In this paper, the author considers the modification of the method of power series for the numerical construction of unstable solutions of systems of ordinary differential equations of chaotic type with quadratic nonlinearities in general form. A region of convergence of series is found and an algorithm for constructing approximate solutions is proposed.
Keywords: chaos; Lorentz system; attractor; power series

REFERENCES

1. Landa P.S. *Nelineynye kolebaniya i volny* [Nonlinear Oscillations and Waves]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2010, 552 p. (In Russian).

2. Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M. Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, vol. 462, pp. 560-568.

3. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, vol. 20, no. 2, pp. 130-141.

4. Yorke J.A., Yorke E.D. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model. *Journal of Statistical Physics*, 1979, vol. 21, no. 3, pp. 263-277.

5. Kaloshin D.A. Poisk i stabilizatsiya neustoychivykh sedlovykh tsiklov v sisteme Lorentsa [Search for and stabilization of unstable saddle cycles in the Lorenz system]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1559-1561. (In Russian).

6. Babuska I., Prager M., Vitasek E. *Numerical Processes in Differential Equations.* New York, Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1966, 351 pp.

7. Teixeira J., Reynolds C.A., Judd K. Time step sensitivity of nonlinear atmospheric models: numerical convergence, truncation error growth, and ensemble design. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 2007, vol. 64, no. 1, pp. 175-189.

8. Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.* New York, Perseus Books Publ., 1994, 498 p.

9. Sarra S.A., Meador C. On the numerical solution of chaotic dynamical systems using extend precision floating point arithmetic and very high order numerical methods. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2011, vol. 16, no. 3, pp. 340-352.

The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 16-07-00801).

10. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Heidelberg, Springer, 1993, 528 p.

11. Motsa S.S., Dlamini P., Khumalo M. A new multistage spectral relaxation method for solving chaotic initial value systems. *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 72, no. 1, pp. 265-283.

12. Hashim I., Noorani M.S.M., Ahmad R., Bakar S.A., Ismail E.S., Zakaria A.M. Accuracy of the Adomian decomposition method applied to the Lorenz system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, vol. 28, no. 5, pp. 1149-1158.

13. Abdulaziz O., Noor N.F.M., Hashim I., Noorani M.S.M. Further accuracy tests on Adomian decomposition method for chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, vol. 36, no. 5, pp. 1405-1411.

14. Vadasz P., Olek S. Convergence and accuracy of Adomian's decomposition method for the solution of Lorenz equations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, vol. 43, no. 10, pp. 1715-1734.

15. Pchelintsev A.N. Chislennoe i fizicheskoe modelirovanie dinamiki sistemy Lorentsa [Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system]. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki – Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 191-201. (In Russian).

16. Lozi R., Pchelintsev A.N. A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015, vol. 25, no. 13. DOI: 10.1142/S0218127415501874.

17. Jafari S., Sprott J.C., Nazarimehr F. Recent new examples of hidden attractors. *The European Physical Journal Special Topics*, 2015, vol. 224, no. 8, pp. 1469-1476.

18. Zhukovskiy E.S. O parametricheskom zadanii resheniya differentsial'nogo uravneniya i ego priblizhennom postroenii [On a parametric specification of the solution of a differential equation and its approximate construction]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika – Russian Mathematics*, 1996, no. 4, pp. 31-34. (In Russian).

Received 18 April 2018
Reviewed 23 May 2018
Accepted for press 19 June 2018

Pchelintsev Alexander Nikolaevich, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Commerce and Business Informatics, e-mail: pchelintsev.an@yandex.ru

For citation: Pchelintsev A.N. O chislennom metode postroeniya neustoychivyh resheniy dinamicheskih sistem s kvadratichnymi nelineynostyami [On the numerical method of construction of unstable solutions of dynamical systems with quadratic nonlinearities]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 555–565. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-555-565 (In Russian, Abstr. in Engl.).

ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 123 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574
УДК 517.988.6, 517.929, 517.922

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ НЕЯВНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С АВТОРЕГУЛИРУЕМЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

© И. Д. Серова, А. А. Репин

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: irinka _ 36@mail.ru, aleksejjrepin@rambler.ru

Аннотация. Получены условия разрешимости и оценки решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым (то есть зависящим от искомой функции) отклонением аргумента. Используются результаты о накрывающих отображениях частично упорядоченных пространств.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение с авторегулируемым отклонением аргумента; задача Коши; упорядоченно накрывающее отображение; дифференциальное неравенство

Введение

Для получения оценок решений дифференциальных уравнений часто применяют известную теорему Чаплыгина о дифференциальном неравенстве (см. [1]). Проблемам распространения этой теоремы на различные классы уравнений посвящены многочисленные статьи. В данной работе предлагается аналог теоремы Чаплыгина для неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента. Используются предложенное и исследованное в работах [2, 3] понятие упорядоченного накрывания и результаты работ [4, 5] об антитонных возмущениях упорядоченно накрывающих отображений. На основе этих результатов в [6] была доказана теорема типа Чаплыгина для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Данная работа продолжает это исследование. Рассматриваемое здесь дифференциальное уравнение с авторегулируемым отклонением аргумента возникает, например, в задачах механики при описании взаимодействия быстро движущихся материальных точек

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-680975).

или зарядов (см. [7, 8]). Применение к этому уравнению (даже разрешенному относительно производной) классических методов анализа в нормированных или метрических пространствах затруднено в силу отсутствия непрерывности операторов, порождаемых этих уравнением. Этим обстоятельством можно объяснить ряд необычных свойств этого уравнения (подробнее см. [9, с. 278). Теорема о дифференциальном неравенстве для явного уравнения с авторегулируемым запаздыванием получена в [10, 11] методами, использующими результаты о вольтерровых операторах и теоремы о неподвижных точках изотонных операторов.

1. Упорядоченно накрывающие отображения

Пусть заданы упорядоченные пространства $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$. Для элементов $u, x \in X$ в случае $x \preceq u$ используем также обозначение $u \succeq x$. Если $x \preceq u$ и $x \neq u$, то будем писать $x \prec u$. Для элемента $u \in X$ обозначим

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : \ x \preceq u\}.$$

Напомним, что отображение $G : X \to Y$ называют *антитонным* на множестве $U \subset X$, если для любых $x, u \in U$ из $x \preceq u$ следует $G(x) \succeq G(u)$.

О п р е д е л е н и е 1. [2] Отображение $G : X \to Y$ называется *упорядоченно накрывающим множество* $V \subset Y$, если

$$\forall u \in X \quad G(\mathcal{O}_X(u)) \supset V \cap \mathcal{O}_Y(G(u)).$$

Отображение G является упорядоченно накрывающим множество V тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\forall u \in X \ \ \forall y \in V \ \ y \preceq G(u) \ \ \Rightarrow \ \ \exists x \in X \quad G(x) = y \ \& \ x \preceq u.$$

Рассмотрим уравнение

$$F(x) = y, \tag{1}$$

где $y \in Y$, а отображение $F : X \to Y$ представимо в виде

$$F(x) = \Upsilon(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Здесь отображение $\Upsilon : X^2 \to Y$ по одному аргументу обладает свойством упорядоченного накрывания, а по другому является антитонным.

Следуя [2, 3], по отображению $\Upsilon : X^2 \to Y$, множеству $U \subset X$ и элементу $y \in Y$ определим совокупность $\mathcal{S}(\Upsilon, U, y)$ всех цепей $S \subset U$, удовлетворяющих условиям

$$\forall\, x \in S \ \ \Upsilon(x, x) \succeq y,$$
$$\forall\, x_1, x_2 \in S \ \ x_1 \prec x_2 \ \ \Rightarrow \ \ \Upsilon(x_1, x_2) \preceq y.$$

Достаточные условия разрешимости уравнения (1) и оценки его решений получены в работе [4]. Приведем этот результат.

Теорема 1. *Пусть существует такой элемент* $u_0 \in X$, *что*

$$\Upsilon(u_0, u_0) \succeq y, \tag{2}$$

и выполнены условия:

(1.1) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(\cdot, x) : X \to Y$ *упорядоченно накрывает множество* $V \doteq \{y\}$ *;*

(1.2) *при любом* $x \in \mathcal{O}_X(u_0)$ *отображение* $\Upsilon(x, \cdot) : X \to Y$ *является антитонным на множестве* $\mathcal{O}_X(u_0)$ *;*

(1.3) *любая цепь* $S \in \mathcal{S}\big(\Upsilon, \mathcal{O}_X(u_0), y\big)$ *ограничена снизу, и существует ее нижняя граница* $\omega \in X$, *удовлетворяющая неравенству* $\Upsilon(\omega, \omega) \succeq y$.

Тогда множество решений уравнения (1) не пусто, в нем существует минимальный элемент, который принадлежит $\mathcal{O}_X(u_0)$.

Будем обозначать $L_\infty \doteq L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} |x(t)|$, $W \doteq W([a, b], \mathbb{R})$ – пространство измеримых на $[a, b]$ функций. В перечисленных пространствах измеримых функций считаем, что задан "обычный" порядок, то есть для функций x, u полагаем $x \le u$, если $x(t) \le u(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Пусть заданы существенно ограниченные функции $\underline{r}, \overline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\underline{r} \le \overline{r}$, и удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим многозначное отображение

$$\mathrm{B} : [a, b] \rightrightarrows \mathbb{R}, \quad \mathrm{B}(t) = [\underline{r}(t), \overline{r}(t)], \quad t \in [a, b].$$

Такое многозначное отображение измеримо (это очевидно следует из [12; теорема 2, с. 342]). Обозначим через $\mathbb{S}\mathrm{B}$ множество измеримых сечений этого отображения, то есть $z \in \mathbb{S}\mathrm{B}$ тогда и только тогда, когда $z(t) \in [\underline{r}(t), \overline{r}(t)]$ при п.в. $t \in [a, b]$. Очевидно, что $\mathbb{S}\mathrm{B} \subset L_\infty$. Будем полагать, что на $\mathbb{S}\mathrm{B}$ также задан "обычный" порядок.

Определим оператор Немыцкого

$$N_g : \mathbb{S}\mathrm{B} \to W, \quad (N_g x)(t) = g\big(t, x(t)\big), \ t \in [a, b].$$

В [3, 4] получены утверждения об упорядоченном накрывании оператора Немыцкого в случае $\underline{r}(t) = const$, $\overline{r}(t) = const$. Приведем аналог этих утверждений для рассматриваемой здесь более общей ситуации измеримых функций $\underline{r}$, $\overline{r}$. Пусть задана измеримая функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Если при п.в.* $t \in [a, b]$ *функция* $g\big(t, \cdot\big) : \mathrm{B}(t) \to \mathbb{R}$ *упорядоченно накрывает одноточечное множество* $\{y(t)\} \subset \mathbb{R}$, *то соответствующий оператор Немыцкого* $N_g : \mathbb{S}\mathrm{B} \to W$ *упорядоченно накрывает множество* $\{y\} \subset W$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для некоторой функции $u \in \mathbb{S}\mathrm{B}$ выполнено неравенство $N_g u \ge y$, то есть $g\big(t, u(t)\big) \ge y(t)$ для п.в. $t \in [a, b]$. Так как $g\big(t, \cdot\big)$ упорядоченно накрывает одноточечное множество $\{y(t)\}$, то $y(t) \in g\big(t, [\underline{r}(t), u(t)]\big)$ для п.в.

$t \in [a,b]$. Отсюда, по теореме Филиппова (см., например, [13, п. 1.5.2]), существует измеримая функция $\bar{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\bar{x}(t) \in [\underline{r}(t), u(t)], \qquad g\big(t, \bar{x}(t)\big) = y(t) \ \text{ при п.в. } \ t \in [a,b].$$

Это означает, что имеют место соотношения: $\bar{x} \in \mathbb{S}\mathrm{B}$, $\overline{x} \le u$ и $N_g \bar{x} = y$. Таким образом, оператор N_g упорядоченно накрывает множество $\{y\}$. □

2. Дифференциальное неравенство для уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента

Здесь на основании теорем 1 и 2 получено утверждение о существовании и оценке решения неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента.

Обозначим $AC_\infty \doteq AC_\infty([a,b],\mathbb{R})$ — пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, что $\dot{x} \in L_\infty$; для произвольного измеримого многозначного отображения $\mathrm{B} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ определим $AC_\infty\big(B\big) \doteq AC_\infty\big([a,b], \mathrm{B}\big)$ — подмножество AC_∞, содержащее функции $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, производная которых $\dot{x} \in \mathbb{S}\mathrm{B}$, то есть $\dot{x}(t) \in \mathrm{B}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$.

Пусть заданы функции $f : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}\backslash[a,b] \to \mathbb{R}$ и число $\gamma \ge 0$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$f\Big(t, x\big(h(t,x(t))\big), \dot{x}(t)\Big) = 0, \ t \in [a,b]; \ x(\xi) = \varphi(\xi), \ \text{если } \xi \notin [a,b], \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(a) = \gamma. \tag{4}$$

Решением (3) будем считать функцию $x \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R})$, удовлетворяющую этому уравнению при п.в. $t \in [a,b]$.

Обозначим

$$H : AC_\infty \to L_\infty, \quad (Hx)(t) \doteq \begin{cases} x(h(t,x(t))), & \text{если } h(t,x(t)) \in [a,b], \\ \varphi(h(t,x(t))), & \text{если } h(t,x(t)) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть существуют $u_0 \in AC_\infty$, $v_0 \in AC_\infty$, удовлетворяющие начальному условию $u_0(a) = v_0(a) = \gamma$, для которых при п.в. $t \in [a,b]$ справедливы неравенства:*

$$0 \le \dot{u}_0(t) \le \dot{v}_0(t), \tag{5}$$

$$f\Big(t, (Hv_0)(t), \dot{v}_0(t)\Big) \ge 0, \tag{6}$$

$$f\Big(t, (Hu_0)(t), \dot{u}_0(t)\Big) \le 0. \tag{7}$$

Определим многозначное отображение $\mathrm{B} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}$ равенством $\mathrm{B}(t) = [\dot{u}_0(t), \ \dot{v}_0(t)]$. Пусть выполнены условия:

(3.1) *для функции f при любых $u, v \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [a,b]$ имеем: $f(\cdot, v, u) : [a,b] \to \mathbb{R}$ измерима, $f(t, \cdot, u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не возрастает и непрерывна справа, $f(t, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна;*

(3.2) *для функции* h *при любых* $v \in \mathbb{R}$ *и п.в.* $t \in [a,b]$ *имеем:* $h(\cdot, v) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *измерима,* $h(t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *не убывает и непрерывна справа;*

(3.3) *функция* $\varphi : \mathbb{R}\backslash[a,b] \to \mathbb{R}$ *не убывает;*

(3.4) *справедливы неравенства:*

$$\varphi(a-0) \le u_0(a) \quad \text{или} \quad h(t,u_0(t)) \ge a \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b],$$
$$\varphi(b+0) \ge v_0(b) \quad \text{или} \quad h(t,v_0(t)) \le b \quad \text{при п.в.} \quad t \in [a,b].$$

Тогда существует решение $x \in AC_\infty([a,b],\mathrm{B})$ *задачи Коши (3), (4) (то есть существует решение, удовлетворяющее неравенствам* $\dot u_0(t) \le \dot x(t) \le \dot v_0(t)$, $t \in [a,b]$ *)*

Доказательство. Из предположения (3.2) следует измеримость функции $t \mapsto h(t,x(t))$ для любой непрерывной функции x (см. [14]). Отсюда, учитывая предположение (3.3), получаем, что функция Hx также является измеримой. Наконец, условие (3.1) гарантируют измеримость функции $t \mapsto f(t,(Hx)(t),\dot x(t))$ для любого $x \in AC_\infty$ (см. [14]).

Запишем задачу (3), (4) в виде операторного уравнения (1) относительно производной решения рассматриваемой задачи. Такое представление позволит применить теорему 1 к установлению разрешимости задачи (4), (5). С этой целью определим оператор Немыцкого

$$N_f : \mathbb{S}\mathrm{B} \times L_\infty \to W, \quad \big(N_f(u_1,u_2)\big)(t) \doteq f\big(t, u_2(t), u_1(t)\big), \ t \in [a,b],$$

и композицию

$$\Upsilon : \mathbb{S}\mathrm{B} \times \mathbb{S}\mathrm{B} \to W, \quad \Upsilon(u_1,u_2) \doteq N_f\Big(u_1, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} u_2(s)ds)\Big).$$

Тогда задача (3), (4) запишется в виде уравнения

$$\Upsilon(u,u) \equiv N_f\Big(u, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} u(s)ds)\Big) = 0 \tag{8}$$

относительно неизвестного $u \in \mathbb{S}\mathrm{B}$. Покажем, что отображение Υ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Из неравенства (6) следует неравенство $\Upsilon(\dot v_0, \dot v_0) \ge 0$, то есть выполнено условие (2). Для произвольной измеримой функции $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ при п.в. $t \in [a,b]$ функция $f(t,v(t),\cdot)$ непрерывна на отрезке $[\dot u_0(t), \dot v_0(t)]$. Поэтому из неравенств (6), (7) следует существование точки $\widetilde u \in [\dot u_0(t), \dot v_0(t)]$ такой, что $f(t,v(t),\widetilde u) = 0$, то есть функция $f(t,v(t),\cdot)$ упорядоченно накрывает множество $V(t) = \{0\}$. Тогда согласно теореме 2 при любом $z \in \mathbb{S}\mathrm{B}$ отображение

$$\Upsilon(\cdot, z) = N_f\Big(\cdot, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} z(s)ds)\Big) : \mathbb{S}\mathrm{B} \to W$$

упорядоченно накрывает множество $\{0\} \subset W$. Таким образом, выполнено условие (1.1) теоремы 1.

Согласно условиям (3.1) и (3.2) для любого $u \in \mathbb{S}\mathrm{B}$ функция $f(t,\cdot,u(t))$ при п.в. $t \in [a,b]$ является невозрастающей. Поэтому, а также в силу предположения (3.4) отображение $\Upsilon(u,\cdot):\mathbb{S}\mathrm{B} \to W$ антитонное, и условие (1.2) теоремы 1 выполнено.

Рассмотрим произвольную цепь $S \subset \mathbb{S}\mathrm{B} \subset L_\infty$ такую, что для любого $w \in S$ выполнено

$$\Upsilon(w,w) = N_f(w, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} w(s)ds)) \geq 0.$$

Как и любая ограниченная снизу цепь в L_∞, цепь S имеет точную нижнюю границу, обозначим $\underline{w} = \inf S$. Очевидно, выполнено $\underline{w} \in \mathbb{S}\mathrm{B}$. Выделим из этой цепи убывающую последовательность $\{w_i\} \subset S$ такую, что $\inf\{w_i\} = \inf S = \underline{w}$ (см. [15, гл. IV, §12, следствие 7]). Следовательно, при п.в. $t \in [a,b]$ справедливо

$$\underline{w}(t) = \inf\{w_i(t)\} = \lim_{i\to\infty} w_i(t).$$

Так как отображение $\Upsilon(w_i,\cdot):\mathbb{S}\mathrm{B} \to W$ антитонное, получаем

$$N_f(w_i, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)) \geq N_f(w_i, H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} w_i(s)ds)) \geq 0, \quad t \in [a,b].$$

Вследствие непрерывности функции $f(t, \big(H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)\big)(t), \cdot)$ выполнено

$$\Big(\Upsilon(\underline{w},\underline{w})\Big)(t) = f\Big(t, \big(H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)\big)(t), \underline{w}(t)\Big) =$$
$$= \lim_{i\to\infty} f\Big(t, \big(H(\gamma + \int_a^{(\cdot)} \underline{w}(s)ds)\big)(t), w_i(t)\Big) \geq 0, \quad t \in [a,b].$$

Итак, условие (1.3) теоремы 1 также выполнено.

Таким образом, из теоремы 1 следует, что существует решение $x \in AC_\infty([a,b],\mathrm{B})$ задачи (3),(4). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М., 1919. 18 с.

2. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E.* Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. Vol. 201. P. 330-343.

3. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475-478.

4. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610-1627.

5. *Жуковский Е.С.* Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30. № 1. С. 96-127.

6. *Серова И.Д.* О неявных дифференциальных неравенствах с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 21. Вып. 3. С. 571-578. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578.

7. *Писаренко В.Г.* Уравнения с отклоняющимся аргументом, возникающие в проблеме многих тяготеющих электрически заряженных тел при учете запаздывания сил взаимодействия // Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Киев: Наукова думка, 1977. С. 255-269.

8. *Driver R.D.* A functional-differential system of neutral type arising in a two body-problem of classical electrodynamics // Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. N. Y.: Acad. Press, 1963. P. 474-484.

9. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

10. *Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П.* К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами // Доклады Академии наук СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 268-272.

11. *Жуковский Е.С.* Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пермь, 1983.

12. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

13. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Книжный дом «Либроком», 2011.

14. *Шрагин И.В.* Условия измеримости суперпозиций // Доклады Академии наук СССР. 1971. Т. 197. № 2. С. 295-298.

15. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИИЛ, 1962. 896 с.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 21 мая 2018 г.
Принята в печать 19 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Серова Ирина Дмитриевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, студентка института математики, естествознания и информационных технологий, e-mail: irinka _ 36@mail.ru

Репин Алексей Анатольевич, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

Для цитирования: *Серова И.Д., Репин А.А.* О существовании и оценках решений неявного дифференциального уравнения с авторегулируемым отклонением аргумента // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 123. С. 566–574. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574

ABOUT EXISTENCE AND ESTIMATES OF SOLUTIONS OF THE IMPLICIT DIFFERENTIAL EQUATION WITH AUTOADJUSTABLE DEVIATION ARGUMENT

I. D. Serova, A. A. Repin

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: irinka _ 36@mail.ru, aleksejjrepin@rambler.ru

Abstract. Conditions of a solubility and assessment of solutions of an implicit differential equation with autoadjustable (that is depending on required function) argument deviation are received. Results about the covering displays of partially ordered spaces are used.
Keywords: the implicit differential equation with autoadjustable deviation argument; Cauchy's task; the covering display is ordered; differential inequality

REFERENCES

1. Chaplygin S.A. *Osnovaniya novogo sposoba priblizhennogo integrirovaniya differentsial'nykh uravneniy* [Foundations of New Method of Approximate Integration of Differential Equations]. Moscow, 1919, 18 p. (In Russian).

2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces. *Topology and its Applications*, 2016, vol. 201, pp. 330-343.

3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkakh sovpadeniya otobrazheniy v chastichno uporyadochennykh prostranstvakh [On points of convergence of reflections in partly ordered spaces]. *Doklady Akademii nauk – Proceedings of the Russian Academy of Sciences*, 2013, vol. 453, no. 5, pp. 475-478. (In Russian).

4. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh [On ordered-covering mappings and implicit differential inequalities]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 12, pp. 1610-1627. (In Russian).

5. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvayushchikh otobrazheniyakh i integral'nykh neravenstvakh tipa Chaplygina [About orderly covering mappings and Chaplygin's type integral inequalities]. *Algebra i analiz – St. Petersburg Mathematical Journal*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 96-127. (In Russian).

6. Serova I.D. O neyavnykh differentsial'nykh neravenstvakh s otklonyayushchimsya argumentom [About implicit differential inequalities with deviating argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 3, pp. 571-578. (In Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-571-578.

The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 17-41-680975).

7. Pisarenko V.G. Uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom, voznikayushchiye v probleme mnogikh tyagoteyushchikh elektricheski zaryazhennykh tel pri uchete zapazdyvaniya sil vzaimodeystviya [Equations with divergent argument that emerge in problem of many ponderable electrically charged bodies with an allowance for delay of forces of interaction]. *Differentsial'nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom* [Differential Equations with Divergent Argument]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1977, pp. 255-269. (In Russian).

8. Driver R.D. A functional-differential system of neutral type arising in a two body-problem of classical electrodynamics. *Internat. Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics.* New York, Acad. Press, 1963, pp. 474-484.

9. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of Modern Theory of Functional and Differential Equations. Methods and Applications]. Moscow, Institute of Computer Science, 2002, 384 p. (In Russian).

10. Gusarenko S.A., Zhukovskiy E.S., Maksimov V.P. K teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s lokal'no vol'terrovymi operatorami [To the theory of functional and differential equations with local Volterra operators]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1986, vol. 287, no. 2, pp. 268-272. (In Russian).

11. Zhukovskiy E.S. *Operatornyye neravenstva i funktsional'no-differentsial'nyye uravneniya: dis. … kand. fiz.-mat. nauk* [Operator Inequality and Functional and Differential Equations. Cand. phys.-math. sci. diss.]. Perm, 1983. (In Russian).

12. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach* [Theory of Extremal Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1974. (In Russian).

13. Borisovich J.G., Gelman B.D., Myshkis A.D., Obuhovskiy V.V. *Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Reflection and Differential Inclusion]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2011. (In Russian).

14. Shragin I.V. Usloviya izmerimosti superpozitsiy [Conditions for measurability of superpositions]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1971, vol. 197, no. 2, pp. 295-298. (In Russian).

15. Dunford N., Schwartz J.T. *Lineynyye operatory. T. 1. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. Vol. 1. General Theory]. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1962, 896 p. (In Russian).

Received 13 April 2018
Reviewed 21 May 2018
Accepted for press 19 June 2018
There is no conflict of interests.

Serova Irina Dmitrievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Student of the Institute Mathematic, Natural Sciences and Information Technologies, e-mail: irinka _ 36@mail.ru

Repin Alexey Anatol'evich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-Graduate Student, Functional Analysis Department, e-mail: aleksejjrepin@rambler.ru

For citation: Serova I.D., Repin A.A. O sushhestvovanii i ocenkax reshenij neyavnogo differencialnogo uravneniya s avtoreguliruemym otklonenien argumenta [About existence and estimates of solutions of the implicit differential equation with autoadjustable deviation argument]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 123, pp. 566–574. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-123-566-574 (In Russian, Abstr. in Engl.).

Журнал «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки» (Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences) является научно-теоретическим журналом, в котором публикуются оригинальные научные статьи по математике и ее приложениям, содержащие новые математические результаты, и обзорные научные статьи, освещающие современное состояние актуальных проблем математики. Основными задачами журнала являются: оперативная публикация новых математических результатов, имеющих теоретическое и прикладное значение; информирование о направлениях исследований в различных разделах математики, о современных математических проблемах; содействие развитию приложений математических методов и результатов.

В журнале также публикуются материалы математических конференций, организуемых университетом, рецензии, персоналии и информационные материалы о событиях математической жизни университета.

Индексируется Ulrich's Periodicals Directory, РИНЦ, ВИНИТИ, ERIH PLUS, SciLIT.

Порядок направления статей

1. Рукопись посылается электронной почтой в редакционную коллегию Жуковскому Евгению Семеновичу zukovskys@mail.ru или на адрес редакции vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru.

2. Поступившая в редакцию рукопись фиксируется датой поступления, о чем редакция информирует автора по электронной почте.

3. Если формальные требования «Правил для авторов» не выполнены, то статья к публикации не принимается «по формальным признакам» и об этом сообщается автору. Редакция оставляет за собой право отклонения статей в случае неспособности или нежелания автора учесть пожелания редакции.

Правила оформления рукописей

1. Редакция принимает рукописи на русском языке. По решению редколлегии возможна публикация статьи на английском языке. Статья должна быть тщательно выверена. Страницы рукописи, а также таблицы, рисунки и подписи к рисункам следует пронумеровать.

2. Рекомендуемый объем краткого сообщения составляет 3–5 журнальных страниц, статьи – 6–15, обзорной статьи – 16–40 журнальных страниц.

3. На отдельном листе и отдельным файлом прилагаются сведения обо всех авторах статьи (фамилия, имя и отчество полностью) с указанием его (их) звания, ученой степени, должности, места работы (полное название организаций, к которым приписан автор, а не аббревиатура, почтовый адрес организации с указанием города, страны, адрес электронной почты всех или одного автора, ORCID), для аспирантов и докторантов – наименование специальности, почтового адреса (с индексом для доставки номеров журналов согласно подписке); Необходимо также указать автора, ответственного за переписку с редакцией, адрес его электронной почты, номер контактного телефона. По электронному адресу авторам высылается pdf-файл опубликованной статьи бесплатно.

Структура статьи

1. Рукопись должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе TEX с использованием шаблона статьи (шаблон для статей, для кратких сообщений на русском языке; шаблон для статей, для кратких сообщений на английском языке).

2. Текст статьи начинается с индекса УДК (слева), затем следуют **НАЗВАНИЕ** статьи, **инициалы и фамилии авторов**, строкой ниже – **полное название организации с ее юридическим адресом** на русском языке (данные об аффилировании авторов). Ниже приводится краткая аннотация (150–200 слов) и ключевые слова (до 15 слов). Использование формул в аннотации нежелательно. Аннотация не должна содержать ссылок на формулы и литературу статьи. Сведения о финансовой поддержке работы (благодарности) рекомендуется указывать в ссылке на первой странице текста статьи.

3. Во введении нужно отразить актуальность исследования, дать ссылки на соответствующую литературу. Библиографические ссылки в статьях нумеруются в порядке их расположения в тексте, в обзорных работах – в алфавитном порядке.

4. Файл рукописи, написанной на русском языке, должен содержать также перевод на английский язык **НАЗВАНИЯ** статьи, **инициалов и фамилий авторов**, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, информации об авторах и списка литературы. Перечисленные сведения на английском языке приводятся после списка литературы.

Рукопись, подготовленная на английском языке, должна заканчиваться переводом на русский язык НАЗВАНИЯ статьи, инициалов и фамилий авторов, данных об аффилировании авторов, аннотации, ключевых слов, информации об авторах и списка литературы.

5. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте статьи. Оформляются в соответствии с ГОСТ Р 7.0.5-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления» и даются в порядке очередности цитированных источников в квадратных скобках [1, с. 25] или [3-10].

Политика свободного доступа

1. Журнал сразу предоставляет открытый доступ к своему контенту, исходя из следующего принципа: свободный открытый доступ к результатам исследований способствует увеличению глобального обмена знаниями.

2. Все публикации журнала в электронном виде распространяются бесплатно и без ограничений.

3. Весь контент журнала распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 (CC-BY). Журнал предоставляет право читать, сохранять, копировать, распространять, распечатывать, искать и делать ссылки на полные тексты материалов с обязательным указанием их автора(ов) и названия «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». Правильная ссылка на конкретную публикацию помещена в конце каждой статьи журнала на русском и английском языках.

4. Автор имеет право архивировать (выгружать) размещенный на сайте журнала вариант статьи (PDF-файл) и загружать его на любые репозитории открытого доступа.

5. По решению редакционной коллегии и издателя весь контент журнала, принятый к публикации и/или опубликованный до 1 января 2017 г., также распространяется по лицензии CC BY 4.0.

Авторские права и политика архивирования

Авторы, публикующиеся в данном журнале, соглашаются со следующим:

1. Весь контент журнала распространяется по лицензии CC BY 4.0. Согласно CC BY 4.0 авторы сохраняют права на свои статьи, но при этом разрешают всем беспрепятственно скачивать, повторно использовать, перепечатывать, изменять, распространять и/или копировать их при условии упоминания их авторства. На все вышеперечисленное разрешения от авторов или издателя не требуется.
2. Авторы сохраняют право заключать отдельные контрактные договоренности, касающиеся неэксклюзивного распространения версии работы в опубликованном здесь виде (например, размещение ее в институтском хранилище, публикацию в книге, перевод на другой язык), со ссылкой на ее оригинальную публикацию в этом журнале.
3. Согласно классификации SHERPA/RoMEO журнал относится к так называемым «зеленым» журналам. Авторам разрешено архивировать препринты и постпринты своих работ. Авторы имеют право размещать свою работу в сети Интернет (например, в институтском хранилище или персональном сайте) до и во время процесса рассмотрения ее в редакционной коллегии журнала.
4. Публикация статьи будет означать назначение Copyright © ее автору (авторам), однако они не могут претендовать на выплату гонорара. Авторы передают Издательству журнала – ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г.Р. Державина», авторские права на использование передаваемых материалов в составе журнала следующими способами: обнародование, воспроизведение, распространение, доведение произведения до всеобщего сведения путем размещения в сети Интернет, публичный показ, а также перевод на иностранные языки. При этом авторы имеют право использовать все материалы в их последующих публикациях при условии, что будет сделана ссылка на публикацию в журнале «Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Стоимость публикации

1. Журнал следует политике Open Access Journals, доступ к опубликованным в журнале статьям – свободный для всех (без необходимости регистрации).
2. Журнал издается на средства издателя.
3. Все публикации в журнале бесплатны.
4. Журнал является подписным периодическим научным изданием ТГУ им. Г.Р. Державина.
5. Гонорар за публикуемые в журнале статьи авторам не выплачивается.
6. Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается.
7. Редакция не взимает плату с авторов за подготовку, размещение и печать материалов. Редакция не вступает с авторами в переписку по методике написания и оформления научных статей и не занимается доводкой статей до необходимого научно-методического уровня. Журнал не предоставляет платных услуг.

Политика раскрытия и конфликты интересов

1. Неопубликованные данные, полученные из представленных к рассмотрению рукописей, не могут быть использованы в личных исследованиях без письменного согласия автора. Информация или идеи, полученные в ходе рецензирования и связанные с возможными преимуществами, должны сохраняться конфиденциальными и не использоваться с целью получения личной выгоды.
2. Все авторы обязаны раскрыть финансовые или другие конфликты интересов, которые могут быть восприняты как оказавшие влияние на результаты или выводы, представленные в работе.
3. Рецензенты не должны участвовать в рассмотрении рукописей в случае наличия конфликтов интересов вследствие конкурентных, совместных и других взаимодействий и отношений с любым из авторов, организациями, связанными с представленной работой.

Положение о конфиденциальности

1. Информация об авторах, включая их имена, аффилиацию, контактные сведения, сведения о занимаемой должности, ученой степени, ученом звании, ссылки на авторские профили, размещается в статье в разделе «Сведения об авторе» на русском и английском языках.
2. Паспортные данные и место жительства авторов, предоставленные в редакционную коллегию журнала, используются исключительно для заключения авторских договоров, оформления подписки, пересылки корреспонденции и не передаются третьим лицам.
3. Имена рецензентов не сообщаются авторам и третьим лицам.

Положения о плагиате, дублировании и избыточности публикации

1. Каждая статья проверяется на наличие неправомерных заимствований из других работ (плагиат), дублирование и избыточность публикации (включая перевод публикации с других языков). Для выявления плагиата редакционная коллегия использует Антиплагиат.
2. Статья, содержащая неправомерные заимствования из других работ (плагиат), содержащая признаки дублирования и избыточности (в том числе признаки автоплагиата), является неприемлемой и отклоняется без рецензирования.
3. Авторам разрешается подавать в журнал статьи, опубликованные на серверах препринтов, кроме опубликованных ранее в других изданиях. Такая статья не считается дублированной и избыточной.
4. Если статья опубликована, но позднее было обнаружено, что она содержит неправомерные заимствования из других работ (плагиат) или является дублированной, то редактор обращается к блок-схемам Комитета по издательской этике (COPE) для удаления такой статьи.
5. Доля повторно использованного текста (текста из других авторских произведений) в представляемой в журнал работе не должна превышать 15 % от общего объема статьи. Повторное использование текста допустимо лишь для включения необходимых определений, формулировки основных принципов и т.п., чтобы читатель мог ознакомиться со статьей без привлечения дополнительных источников. В этом случае повторное использование текста не считается автоплагиатом.
6. Если авторы считают необходимым ознакомить читателя с материалами, близкими к тематике статьи или оставшимися за рамками статьи, то они могут приводить достаточно полный список литературы, в которой интересующийся читатель может найти эти материалы.