ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 26
№ 133
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 26, № 133, 2021

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам (распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133
Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать», ООО «УП Урал-Пресс»

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26, № 133. – 104 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133

Подписано в печать 22.03.2021. Дата выхода в свет 06.04.2021
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 13,0. Усл. печ. л. 12,1. Тираж 1000 экз. Заказ № 21078. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 26, no. 133, 2021

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). Extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019
ПИ no. ФС77-76133
Subscription index in the catalogue of the Stock Company Agency "Rospechat", LLC "Ural-Press" is 83372

Editor M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2021. – Vol. 26, no. 133. – 104 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133

Podpisano v pechat' 22.03.2021. Data vykhoda v svet 06.04.2021
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.
Pech. list 13,0. Usl. pech. list 12,1. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 21078. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy"
of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14
УДК 517.938

О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ[1,2,3], **Сергей Михайлович ДЗЮБА**[4]

[1] ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

[2] ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Российская Федерация, г. Москва, ул. Мясницкая, 20

[3] ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

[4] ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems

Aleksandr P. AFANAS'EV[1,2,3], **Sergei M. DZYUBA**[4]

[1] Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

[2] HSE University
20 Myasnitskaya St., Moscow 101000, Russian Federation

[3] Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

[4] Tver State Technical University
22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Аннотация. В статье приведено новое свойство рекуррентных движений динамических систем. В компактном метрическом пространстве данное свойство устанавливает связь между движениями общего вида и рекуррентными движениями. Кроме того, это свойство устанавливает весьма простой характер поведения рекуррентных движений, что органично дополняет классическое определение, приведенное в монографии [В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. URSS, М., 2004].

Впервые указанное выше новое свойство рекуррентных движений фактически было анонсировано в более ранней статье авторов [А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба. О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения. 2005, т. 41, № 11, с. 1469–1474]. В этой же статье приведено краткое доказательство соответствующей теоремы. Это доказательство оказалось слишком схематичным. Кроме того, оно (доказательство) содержит ряд очевидных пробелов.

Некоторое время назад выяснилось, что на основании данного нового свойства можно показать, что в компактном метрическом пространстве α- и ω-предельные множества каждого движения являются минимальными. Из этого следует, что в компактном метрическом пространстве каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение является рекуррентным.

Значение этих результатов очевидно. Они ясно указывают причину того, что в настоящее время отсутствуют критерии существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений. Более того, они показывают причину того, что известные попытки построения устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений на компактных замкнутых многообразиях оказались неудачными; во всяком случае примеров таких движений нет.

Ключевым для нового свойства минимальных множеств является указанное новое свойство рекуррентных движений. Поэтому в настоящей статье мы приводим полное и подробное доказательство этого свойства.

Впервые результаты настоящей работы были доложены 28 января 2020 г. на семинаре Добрушинской математической лаборатории в ИППИ РАН им. А. А. Харкевича.

Ключевые слова: динамические системы; минимальные множества; рекуррентные и устойчивые по Пуассону движения

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 18-01-00842_а, № 20-01-00347_а).

Для цитирования: *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 5–14. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14.

Abstract. The article presents a new property of recurrent motions of dynamical systems. Within a compact metric space, this property establishes the relation between motions of general type and recurrent motions. Besides, this property establishes rather simple behaviour of recurrent motions, thus naturally corroborating the classical definition given in the monograph [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov. Qualitative Theory of Differential Equations. URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

Actually, the above-stated new property of recurrent motions was announced, for the first time, in the earlier article by the same authors [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba. On recurrent trajectories, minimal sets, and quasiperoidic motions of dynamical systems // Differential Equations. 2005, v. 41, № 11, p. 1544–1549]. The very same article provides a short proof for the corresponding theorem. The proof in question turned out to be too schematic. Moreover, it (the proof) includes a range of obvious gaps.

Some time ago it was found that, on the basis of this new property, it is possible to show that within a compact metric space α- and ω-limit sets of each and every motion are minimal. Therefore, within a compact metric space each and every motion, which is positively (negatively) stable in the sense of Poisson, is recurrent.

Those results are of obvious significance. They clearly show the reason why, at present, there are no criteria for existence of non-recurrent motions stable in the sense of Poisson. Moreover, those results show the reason why the existing attempts of creating non-recurrent motions, stable in the sense of Poisson, on compact closed manifolds turned out to be futile. At least, there are no examples of such motions.

The key point of the new property of minimal sets is the stated new property of recurrent motions. That is why here, in our present article, we provide a full and detailed proof for that latter property.

For the first time, the results of the present study were reported on the 28th of January, 2020 at a seminar of Dobrushin Mathematic Laboratory at the Institute for Information Transmission Problems named after A. A. Kharkevich of the Russian Academy of Sciences.

Keywords: dynamical systems; minimal sets; recurrent motions and motions stable in the sense of Poisson

Acknowledgements: The work is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-01-00842_a, no. 20-01-00347_a).

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. O novykh svoystvakh rekurrentnykh dvizheniy i minimal'nykh mnozhestv dinamicheskikh sistem [About new properties of recurrent motions and

minimal sets of dynamical systems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 5–14. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-5-14. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ и положим

$$f(t,p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

(a) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;

(b) для всех $p \in \Sigma$ справедливо равенство

$$g^0 p = p;$$

(c) для всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено групповое свойство

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда будем говорить, что группа преобразований g^t — динамическая система, а функция $t \to f(t,p)$ — движение, если точка $p \in \Sigma$ фиксирована (см. [1, с. 347]).

Примерами системы g^t могут служить группы преобразований, порожденные автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и автономными системами функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа, и некоторые другие (см., например, [2, гл. 4]).

Важнейшим из движений, как известно, является рекуррентное. Напомним, что движение $f(t,p)$ называется рекуррентным, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau,T} = \{f(t,p)\colon\ t \in [\tau, \tau + T]\}$$

траектории

$$K = \{f(t,p)\colon\ t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию K с точностью до ε (см. [1, с. 402]).

В полном метрическом пространстве замыкание траектории рекуррентного движения представляет собой компактное минимальное множество (см. [1, с. 404]). При этом каждое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см. [1, с. 401]). Более полно, найдется такая вполне упорядоченная система компактных инвариантных множеств

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_k \supset \ldots \supset M_\omega \supset M_{\omega+1} \supset \ldots, \tag{0.1}$$

занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов, что выполнено равенство

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k \cap \ldots \cap M_\omega \cap M_{\omega+1} \cap \ldots$$

(см. [1, с. 349, 401]).

Дальнейшие исследования в данном направлении главным образом свелись к распространению определения рекуррентности на более широкий класс систем. При этом для некоторых систем достаточно общего вида было подробно изучено существование движений, асимптотически приближающихся к рекуррентным (см., например, [3–7]). Что касается системы g^t, то в работе [8] получено ранее не известное свойство рекуррентных движений. Дальнейшее развитие этого свойства позволило установить существование аналога рекуррентного движения для некоторого достаточно широкого класса систем, содержащего в себе как частный случай систему g^t (см. [9]).

Заметим теперь, что свойства системы (0.1) детально не изучались. Рассмотрение данной проблемы позволило выявить новые свойства рекуррентных движений и минимальных множеств системы g^t. Целью настоящей работы является изложение этих свойств.

1. Новое свойство рекуррентных движений

Предположим, что пространство Σ компактно. В таком пространстве новое свойство рекуррентных движений системы g^t устанавливает следующая

Теорема 1.1. *Пусть q — некоторая точка пространства Σ и $f(t,q)$ — соответствующее движение. Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существует рекуррентное движение $f(t,p)$, удовлетворяющее следующим условиям:*

(i) *равномерно на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t+(N_{k_l}-1)T,q) = f(t,p);$$

(ii) *равномерно на всей оси $\mathbb{R}$ выполнено равенство*

$$\lim_{l\to+\infty} f(t+(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T,p) = f(t,p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое положительное число T. Для всех $N=1,2,\ldots$ положим

$$q_N = f((N-1)T,q). \tag{1.1}$$

Тогда, как несложно заметить, при этих значениях N имеет место равенство

$$q_N = \underbrace{g^T\ldots g^T}_{N-1} q.$$

Поэтому

$$q_{N+1} = g^T q_N, \quad N=1,2,\ldots \tag{1.2}$$

Пусть теперь $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ — произвольная последовательность натуральных чисел. В соответствие с $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ из множества

$$q_1, q_2, \ldots, q_N, \ldots$$

выберем последовательность $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Согласно компактности пространства Σ из $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(q_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, пределом которой является точка p, лежащая в ω-предельном множестве

$$\Omega = \bigcap_{s\ge 0}\overline{\bigcup_{t\ge s} f(t,q)}$$

движения $f(t,q)$. При этом множество Ω компактно и инвариантно, а движение $f(t,p)$ расположено в множестве Ω (см. [1, с. 358]).

Для простоты обозначений будем считать, что выбранная подпоследовательность $(q_{N_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ совпадает с последовательностью $(q_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Так как отображение $t\to g^t x$ непрерывно, оно равномерно непрерывно на произвольном отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Но пространство Σ компактно. Поэтому множество X функций

$$t\to f(t,q_N),\quad N=1,2,\dots,$$

определенных на всей оси $\mathbb{R}$, равностепенно непрерывно на произвольном отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (см., например, [10, с. 212]). Следовательно, при $t\in\mathbb{R}$ равномерно на каждом из отрезков $[a,b]\subset\mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(t,q_{N_k}) = f(t,p). \tag{1.3}$$

Из непрерывности отображения $g^t x$ по t,x и компактности пространства Σ следует, что множество F функций

$$t\to f(t\pm NT,p),\quad N=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$, равностепенно непрерывно. Поэтому его замыкание $\bar{F}$ компактно в топологии равномерной сходимости (см., например, [11, с. 489]).

Для всех $k=1,2,\dots$ обозначим через X_{N_k} — множество функций

$$t\to f(t+NT,q_{N_k}),\quad N=0,1,\dots,$$

определенных на отрезке $[0,T]$. Тогда согласно равенствам (1.1) и (1.3) имеет место включение

$$\bar{F}_0\subset\bigcap_{k\geq 1}\bar{X}_{N_k}, \tag{1.4}$$

где $\bar{X}_{N_k}$ — замыкание множества X_{N_k}, а $\bar{F}_0$ — замыкание множества F_0 функций

$$t\to f(t+NT,p),\quad N=0,1,\dots,$$

также определенных на $[0,T]$, (см. [2, с. 101]).

Пусть

$$\Delta_{N_k}=N_{k+1}-N_k,\quad k=1,2,\dots$$

Поскольку в силу соотношений (1.1) и (1.2)

$$q_{N_{k+1}}=f(\Delta_{N_k}T,q_{N_k}),$$

то справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T,q_{N_k})=p. \tag{1.5}$$

Более того, так как множество Ω компактно, без потери общности можем считать, что существует предел

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T,p)=p^*, \tag{1.6}$$

где $p^*\in\Omega$.

Если $p \neq p^*$, то в силу равенств (1.5) и (1.6) найдутся такие положительное ε и натуральное k_0, что при $k > k_0$ выполнено неравенство

$$d(f(\Delta_{N_k}T, q_{N_k}), f(\Delta_{N_k}T, p)) \geq \varepsilon. \tag{1.7}$$

В этом случае движение $f(t,p)$ не является периодическим движением с периодом, кратным T. Значит,

$$\sup_{k\geq 1} \Delta_{N_k} = +\infty$$

и

$$\sup_{k\geq 1} (\Delta_{N_{k+1}} - \Delta_{N_k}) = +\infty. \tag{1.8}$$

Пусть

$$t_k = (\Delta_{N_k} + 1)T, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Согласно неравенству (1.7) для всех $k > k_0$ справедливо неравенство

$$\max_{0\leq t\leq t_k} d(f(t, q_{N_k}), f(t,p)) \geq \varepsilon.$$

Тогда в силу равенства (1.3) несложно построить такие последовательности $(\varepsilon_l)_{l\in\mathbb{N}} \downarrow 0$ положительных и $(k_l)_{l\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что выполнены неравенства

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d(f(t, q_{N_{k_l}}), f(t,p)) \geq \varepsilon \tag{1.9}$$

и

$$\max_{0\leq t\leq t_{k_l}} d(f(t, q_{N_{k_{l+1}}}), f(t,p)) < \varepsilon_l. \tag{1.10}$$

Легко видеть, что объединение

$$\bigcup_{l\geq 1} [0, t_{k_l}]$$

расширяющихся отрезков

$$[0, t_{k_1}] \subset [0, t_{k_2}] \subset \ldots \subset [0, t_{k_l}] \subset \ldots$$

исчерпывает всю полуось $\mathbb{R}^+$. Более того, на каждом из таких отрезков $[0, t_{k_l}]$ выполнены неравенства (1.9) и (1.10). Последнее, однако, в силу равенства (1.8) и включения (1.4) невозможно.

Полученное противоречие означает, что справедливо равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(\Delta_{N_k}T, p) = p.$$

Поэтому равномерно на каждом из отрезков $[a,b] \subset \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to+\infty} f(t + \Delta_{N_k}T, p) = f(t,p). \tag{1.11}$$

Поскольку множество $\bar{F}$ компактно, то согласно равенству (1.11) также имеет место равенство

$$\bar{F} = \bigcap_{k\geq 1} g^{\Delta_{N_k}T} \bar{F} \tag{1.12}$$

(см. [2, с. 105]). Предположим, что сходимость в (1.11) не равномерна на всей оси $\mathbb{R}$. Тогда существует такое положительное число ε, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} d(f(t+\Delta_{N_k}T, p), f(t,p)) \geq \varepsilon.$$

Поэтому найдутся такие последовательности $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow \varepsilon$ положительных и $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ натуральных чисел, что

$$\delta_k = \max_{-m_kT\leq t\leq m_kT} d(f(t+\Delta_{N_k}T, p), f(t,p)) \geq \varepsilon_k.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \delta_k \geq \varepsilon.$$

Последнее, однако, противоречит равенству (1.12). Значит, сходимость в равенстве (1.11) равномерна на всей оси $\mathbb{R}$.

Для всех $N = 1, 2, \ldots$ обозначим через F_N — множество функций

$$t \to f(t+(N+l)T, p), \quad l = 0, 1, \ldots,$$

определенных на отрезке $[0, T]$. Пусть $\bar{F}_N$ — замыкание множества F_N. Тогда, поскольку $F_N \subset F_0$, то каждое из множеств F_N равностепенно непрерывно. Следовательно, все множества $\bar{F}_N$ компактны в топологии равномерной сходимости. Более того, согласно равенству (1.12) каждое из множеств $\bar{F}_N$ инвариантно. Поэтому существует компактное в топологии равномерной сходимости минимальное множество

$$M \subset \bigcap_{N\geq 1} \bar{F}_N$$

(см. [1, с. 401]). Но в силу соотношения (1.12) справедливы равенства

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = \ldots = \bar{F}_N = \ldots = \bar{F}.$$

Значит,

$$\bar{F} = M. \tag{1.13}$$

Согласно (1.13) замыкание $\bar{K}$ траектории K движения $f(t,p)$ является компактным минимальным множеством. Следовательно, в силу теоремы Биркгофа о минимальных множествах и рекуррентных движениях $f(t,p)$ является рекуррентным движением (см. [1, с. 402]). □

З а м е ч а н и е 1.1. В условиях теоремы 1.1 выбор числа T не зависит от выбора последовательности $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и обратно.

2. Новое свойство минимальных множеств

Новое свойство минимальных множеств системы g^t тривиально вытекает из теоремы 1.1. Это свойство устанавливает следующая

Теорема 2.1. *Пусть q — некоторая точка пространства Σ и Ω — ω-предельное множество движения $f(t,q)$. Тогда, если пространство Σ компактно, то Ω — минимальное множество.*

Доказательство. Для всех $N = 0, 1, \dots$ обозначим через Q_N — множество функций

$$t \to f(t + N + l, q), \quad l = 0, 1, \dots,$$

определенных на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\bar{Q}_N$ — замыкание множества Q_N. Положим

$$Q = \bigcap_{N \geq 0} \bar{Q}_N. \tag{2.1}$$

Очевидно, что

$$\bar{Q}_0 \supset \bar{Q}_1 \supset \dots \supset \bar{Q}_N \supset \dots$$

Поэтому для каждой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ справедливо равенство

$$Q = \bigcap_{k \geq 1} \bar{Q}_{N_k}. \tag{2.2}$$

Если пространство Σ компактно, то каждое из множеств Q_N равностепенно непрерывно (см., например, [10, с. 212]). В этом случае множество Q непусто (см. [2, с. 105]). Более того,

$$\Omega = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} f(t, q)}.$$

Отсюда в силу теоремы 1.1 и равенств (2.1) и (2.2) следует, что Ω — минимальное множество. □

Легко видеть, что утверждение, аналогичное теореме 2.1, справедливо также и для α-предельных множеств. Поэтому справедлива следующая

Теорема 2.2. *В компактном метрическом пространстве Σ каждое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t, p)$ является рекуррентным.*

Замечание 2.1. В монографии [1, с. 38, 365] предприняты две попытки построения устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений на торе $\mathfrak{T}$ с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. Однако, обе эти попытки оказались неудачными.

В самом деле, следуя [1, с. 38], на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(x_1^2 + x_2^2), \tag{2.3}$$

где λ — некоторое положительное иррациональное число. Считается, что каждое непродолжаемое решение этой системы определено на всей оси $\mathbb{R}$, т. е. является движением. Также считается, что движения системы (2.3) осуществляются по кривым уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda. \tag{2.4}$$

Кривые уравнения (2.4) порождают на торе $\mathfrak{T}$ эргодический поток (см., например, [12, с. 450]). Отсюда делается вывод, что на $\mathfrak{T}$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (2.3) порождает три типа движений:

Вообще говоря, утверждение о том, что каждое непродолжаемое решение системы (2.3) является движением, требует доказательства. Без этого доказательства разговор о движениях на торе $\mathfrak{T}$ лишен какого-либо смысла.

(α) положение равновесия $(0,0)$;

(β) положительно асимптотические и отрицательно устойчивые по Пуассону;

(γ) отрицательно асимптотические и положительно устойчивые по Пуассону.

Последнее, однако, неверно, поскольку правые части системы (2.3) не являются периодическими и, следовательно, непродолжаемые решения этой системы, отличные от положения равновесия $(0,0)$, не могут быть представлены на торе $\mathfrak{T}$.

В примере на [1, с. 365] данная неточность устранена. Однако это никак не меняет существо проблемы.

В самом деле, следуя [1, с. 365], на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2), \tag{2.5}$$

где λ — положительное иррациональное число. Правые части системы (2.5) равномерно ограничены. Поэтому все непродолжаемые решения этой системы являются движениями. Считается, что все такие движения осуществляются по кривым уравнения (2.4). Если это так, то на торе $\mathfrak{T}$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (2.5) порождает три указанных выше типа движений (α), (β) и (γ). Более того, для этих типов движений имеет место тождество

$$\dot{x}_1(t) \equiv \sin^2 \pi x_1(t) + \sin^2 \pi \lambda x_1(t).$$

Следовательно, на плоскости $\mathbb{R}^2$ движение $(x_1(t), x_2(t))$ типа (γ) удовлетворяет условиям

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} x_2(t) = +\infty. \tag{2.6}$$

Для некоторой последовательности $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \uparrow +\infty$ при всех достаточно больших k положим

$$x_{1k} = x_1(t_k) - i_k, \quad x_{2k} = x_2(t_k) - j_k,$$

где $x_{1k} \in [0,1)$, $x_{2k} \in [0,1)$ и i_k, j_k — соответствующие натуральные числа. В силу условий (2.6) без какой-либо потери общности можем считать, что в $\mathbb{R}^2$ точки (x_{1k}, x_{2k}) лежат на разных траекториях системы (2.5). Поэтому говорить о положительной устойчивости по Пуассону движения $(x_1(t), x_2(t))$ на торе $\mathfrak{T}$ можно лишь в смысле равенств

$$x_1(0) = \lim_{k\to+\infty} x_{1k}, \quad x_2(0) = \lim_{k\to+\infty} x_{2k}$$

и при условии, что движения системы (2.5) осуществляются по кривым уравнения (2.4); последнее в [1, с. 365] не доказано.

References

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Издательство URSS, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].

[2] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984. [J. K. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Mir Publ., Moscow, 1984 (In Russian)].

[3] R. K. Miller, “Almost periodic differential equations as dynamical systems with application to existence of a.p. solutions”, *Journal of Differential Equations*, **1**:3 (1965), 337–345.

[4] L. G. Deysach, G. R. Sell, “On the existence of almost periodic motions”, *The Michigan Math. J.*, **12**:1 (1965), 87–95.

[5] V. M. Millionshchikov, "Recurrent and almost periodic limit solutions of non-autonomous systems", *Differential Equations*, **4**:9 (1968), 1555–1559.

[6] N. P. Bhatia, S.-N. Chow, "Weak attraction, minimality, recurrence, and almost periodicity in semisystems", *Funkcialaj Ekvacioj*, **15** (1972), 35–59.

[7] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC, New York, 2009.

[8] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, "О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем", *Дифференциальные уравнения*, **41**:11 (2005), 1469–1474; англ. пер.:A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "On recurrent trajectories, minimal sets, and quasiperoidic motions of dynamical systems", *Differential Equations*, **41**:11 (2005), 1544–1549.

[9] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, "Слабый периодический оператор сдвига и обобщенно-периодические движения", *Дифференциальные уравнения*, **49**:1 (2013), 123–127; англ. пер.:A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, "Weak periodic shift operator and generalized-periodic motions", *Differential Equations*, **49**:1 (2013), 126–131.

[10] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, *Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах*, Издательство ЛКИ, М., 2007. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, *Poisson Stability in Dynamical and Continuous Periodic Systems*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[11] Л. Шварц, *Анализ*. V. 2, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisys*. V. 2, Moscow, 1972 (In Russian)].

[12] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, М., Издательство ЛКИ, 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@isa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Дзюба Сергей Михайлович
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 08.09.2020 г.
Поступила после рецензирования 22.12.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas'ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, HSE University; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@isa.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4171-5745

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2981-8549

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Sergei M. Dzyuba
E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 08.09.2020
Reviewed 22.12.2020
Accepted for press 05.03.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25
УДК 517.929

Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу

Анастасия Владимировна ЕГОРОВА
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting

Anastasia V. EGOROVA
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается структурированная популяция, особи которой разделены на n возрастных или типических групп $x_1,\ldots,x_n$. Предполагаем, что в любой момент времени k, $k=0,1,2\ldots$ численность популяции $x(k)$ определяется как решение нормальной автономной системы разностных уравнений $x(k+1)=F\big(x(k)\big)$, где $F(x)=\operatorname{col}\big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\big)$ — заданные векторные функции с вещественными неотрицательными компонентами $f_i(x)$, $i=1,\ldots,n$. Исследуется случай, когда имеется возможность влиять на размер популяции путем промыслового изъятия. В работе рассмотрена модель эксплуатируемой популяции в виде

$$x(k+1)=F\big((1-u(k))x(k)\big),$$

где вектор $u(k)=\big(u_1(k),\ldots,u_n(k)\big)\in[0,1]^n$ — управление, выбором которого можно достигать увеличения показателей сбора ресурса. Предполагается, что стоимости условной единицы каждого из рассматриваемых n классов постоянны и равны $C_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$. Для определения стоимости ресурса, получаемого в результате промысла, в рассмотрение вводится функция дисконтированного дохода, которая имеет вид

$$H_\alpha\big(\overline{u},x(0)\big)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}C_ix_i(j)u_i(j)e^{-\alpha j},$$

где $\alpha>0$ — коэффициент дисконтирования. Решается задача построения управлений на конечном и бесконечном промежутках времени, при которых дисконтированный доход от извлечения возобновляемого ресурса достигает наибольшего значения. В качестве следствий получены результаты о построении оптимального способа добычи однородной популяции (т. е. при $n=1$).

Ключевые слова: структурированная популяция; задача оптимизации для средней временной выгоды; дисконтированный доход; оптимальная эксплуатация; режим эксплуатации популяции

Для цитирования: *Егорова А.В.* Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 15–25. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25.

Abstract. A structured population the individuals of which are divided into n age or typical groups $x_1, \ldots, x_n$ is considered. We assume that at any time moment k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ the size of the population $x(k)$ is determined by the normal autonomous system of difference equations $x(k+1) = F\big(x(k)\big)$, where $F(x) = \operatorname{col}\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$ are given vector functions with real non-negative components $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n.$ We investigate the case when it is possible to influence the population size by means of harvesting. The model of the exploited population under discussion has the form

$$x(k+1) = F\big((1 - u(k))x(k)\big),$$

where $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n$ is a control vector, which can be varied to achieve the best result of harvesting the resource. We assume that the cost of a conventional unit of each of n classes is constant and equals to $C_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n.$ To determine the cost of the resource obtained as the result of harvesting, the discounted income function is introduced into consideration. It has the form

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

where $\alpha > 0$ is the discount coefficient. The problem of constructing controls on finite and infinite time intervals at which the discounted income from the extraction of a renewable resource reaches the maximal value is solved. As a corollary, the results on the construction of the optimal harvesting mode for a homogeneous population are obtained (that is, for $n = 1$).

Keywords: structured population; optimization problem for the average temporary gain; discounted income; optimal exploitation; mode of exploitation of the population

For citation: Egorova A.V. Optimizatsiya diskontirovannogo dokhoda dlya strukturirovannoy populyatsii, podverzhennoy promyslu [Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 15–25. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Проблема рационального использования возобновляемых природных ресурсов остается актуальной на протяжении многих лет. Подтверждением этому является большое количество работ, посвященных исследованию динамики популяций: предложено большое количество математических моделей, предназначенных как для чисто теоретических, так и для численных исследований, опирающихся на данные реальных популяций [1]. Многие работы посвящены исследованиям развития структурированных популяций, разделенных на возрастные группы или типические группы; в частности, в [2, 3] рассмотрены задачи оптимальной эксплуатации с постоянной долей изъятия.

В настоящее время большой интерес вызывают задачи оптимального сбора возобновляемого ресурса в вероятностных моделях. Эти исследования, мотивированные современными задачами экологии и экономики, являются также источником новых задач в математической теории управления и оптимизации. В работах [4, 5] рассматриваются модели сбора возобновляемого ресурса, описанные дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями; определен способ добычи такого ресурса в долгосрочной перспективе, при котором сохраняется часть популяции, и приведена оценка функции средней временной выгоды. Обзор литературы, посвященной данной тематике, приведен в [6].

Модели периодического сбора ресурса предложены и исследованы в [7–9] и ряде других работ. В [7] предполагается, что периодический сбор осуществляется достаточно быстро и описывается импульсным воздействием, а возобновляемый ресурс имеет логистический закон роста. В [8] исследуется задача оптимизации для циклического сбора ресурса, распределенного на окружности с заданной плотностью. В [9] рассмотрена актуальная для математической экономики задача максимизации чистого дисконтированного дохода от эксплуатации популяции. Показано, что периодический сбор ресурса является оптимальным для моделей динамики популяций, структурированных по возрасту.

В данной статье рассматривается модель динамики структурированной популяции, разделенной на возрастные или типические группы и подверженной промыслу. Исследуется задача определения оптимального сбора ресурса на конечном и бесконечном промежутках времени при заданных ограничениях на условия промысла, для которого функция дисконтированного дохода максимальна.

1. Дисконтированный доход для моделей структурированных популяций, заданных нормальной автономной системой разностных уравнений

Рассмотрим популяцию, состоящую из $n \geqslant 2$ видов или возрастных групп $x_1, \ldots, x_n$. Модель данной популяции исследовалась в работе [10]; приведем описание этой модели для полноты изложения.

Стандартно обозначим $R^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ — конус неотрицательных векторов в $\mathbb{R}^n$, $C^2(\mathbb{R}^n_+)$ — класс функций, определенных на R^n_+ и имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ количество ресурса каждого класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$. Динамику популяции при отсутствии эксплуатации будем описывать следующей системой нелинейных разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $x(k) = \operatorname{col}\big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big) \in R^n_+$, $F(x) = \operatorname{col}\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$. Будем предполагать, что функции $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ удовлетворяют условию $f_i(0) = 0$ и матрица Якоби $\Big(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$ является невырожденной для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Будем также предполагать, что для некоторой области $I \subseteq \mathbb{R}^n_+$ такой, что $0 \in I$, выполнено включение $F(I) \subseteq I$. Это условие обеспечивает продолжаемость решения системы (1.1) в области I.

Здесь и везде далее в работе в скобках обозначены временны́е параметры, а нижними индексами — пространственные параметры.

Обозначим через $u_i(k)$ долю ресурса i-го вида, добытого в момент $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, что $u_i(k) \in [0, 1]$. Определим вектор

$$U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots\big)\big\},$$

где $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0, 1]^n$ и рассмотрим последовательность $\overline{u} \in U$ как управление, которым можно варьировать для достижения лучшего результата сбора ресурса. Полагая, что $x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида перед сбором в момент k, а $(1-u_i(k))x_i(k)$ — количество ресурса, оставшееся после сбора, запишем модель популяции, подверженной промыслу, в виде системы

$$x(k+1) = F\big((1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $(1 - u(k))x(k) \doteq \operatorname{col}\big((1 - u_1(k))x_1(k), \ldots, (1 - u_n(k))x_n(k)\big)$.

Положим $\widetilde{x}(k) \doteq (1-u(k))x(k)$ и запишем систему (1.2) в эквивалентной форме

$$\widetilde{x}(k+1) = (1-u(k+1))F\big(\widetilde{x}(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Будем предполагать что стоимости единицы каждого из классов добываемой продукции постоянны и равны $C_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$ (естественно считаем, что одновременно все C_i не могут обращаться в 0). Стоимость всей продукции в момент времени j будем определять формулой

$$h_\alpha(j) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент дисконтирования. Определим функцию

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} h_\alpha(j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}\,, \tag{1.3}$$

аргументов $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$, которую назовем *дисконтированным доходом* от извлечения ресурса.

Стоит отметить, что в работе [10] рассматриваются задачи оптимизации для средней временной выгоды, заданной в виде

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j).$$

2. Оптимальный режим промысла структурированной популяции на конечном промежутке времени

Обозначим $\overline{u}(k) \doteq (u(0), \ldots, u(k-1))$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, где, как и выше, полагаем $u(j) = (u_1(j), \ldots, u_n(j)) \in [0,1]^n$, $j = 0, ..., k-1$. Определим функцию

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}, \tag{2.1}$$

равную стоимости ресурса, полученного в результате k сборов.

Следующая теорема определяет оптимальный режим сборов для достижения максимума функции $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$. Отметим, что близкий результат получен в [10, теорема 1], где рассматривалась задача максимизации функции

$$H\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j).$$

Теорема 2.1. *Пусть функция* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i e^{\alpha}\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$, *координаты которой удовлетворяют неравенству* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) \tag{2.2}$$

на множестве $[0,1]^{kn}$ *при следующем значении* $\overline{u}^*(k)$ *(определяющем режим эксплуатации):*
если $k=1$, *то* $\overline{u}^*(1)=(u^*(0))$, *где* $u^*(0)=(1,\ldots,1)$;
если $k=2$, *то* $\overline{u}^*(2)=\big(u^*(0),u^*(1)\big)$, *где* $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\ldots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$, $u^*(1)=(1,\ldots,1)$;
если $k\geqslant 3$, *то* $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\ldots,u^*(k-1)\big)$, *где* $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\ldots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$, $u^*(j)=\Big(1-\frac{x_1^*}{f_1(x^*)},\ldots,1-\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\Big)$ *при* $j=1,\ldots,k-2$, $u^*(k-1)=(1,\ldots,1)$.

Доказательство. В случае $k=1$ функция H_α принимает вид

$$H_\alpha\big(\overline{u}(1),x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i x_i(0)u_i(0).$$

Очевидно, что ее максимальное значение достигается при $u^*(0)=(1,\ldots,1)$ и равно

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(1),x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

При $k\geqslant 2$ рассмотрим режим эксплуатации $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\ldots,u^*(k-1)\big)$, определенный в условии теоремы. Найдем

$$x(1)=F\big((1-u^*(0))x(0)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)}x_1(0),\ldots,\frac{x_n^*}{x_n(0)}x_n(0)\Big)=F(x^*). \tag{2.3}$$

Если $k\geqslant 3$, то для любого $j=2,\ldots,k-1$

$$x(j)=F\big((1-u^*(j-1))x(j-1)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)}f_1(x^*),\ldots,\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}f_n(x^*)\Big)=F(x^*). \tag{2.4}$$

Подставляя значения $x(1),\ldots,x(k-1)$ и $\overline{u}^*(k)$ в (2.1), получаем равенство (2.2).

Зафиксируем $x(0)\in\mathbb{R}^n_+$ такое, что $x_i(0)\geqslant x_i^*$, $i=1,\ldots,n$ и докажем, что

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k),x(0)\big)\leqslant H_\alpha\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big)=D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)}-1}{1-e^\alpha}+\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) \tag{2.5}$$

для любых $\overline{u}(k)\in[0,1]^{kn}$. Стоит отметить, что $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^*\in\mathbb{R}^n_+$, поэтому для всех $\Delta x=(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\in\mathbb{R}^n$ таких, что $x^*+\Delta x\in\mathbb{R}^n_+$, выполнено неравенство $D(x^*+\Delta x)\leqslant D(x^*)$, которое равносильно

$$\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*+\Delta x)-(x_i^*+\Delta x_i)e^\alpha\big)\leqslant\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*)-x_i^*e^\alpha\big).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(x^*+\Delta x)\leqslant\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*)+\Delta x_i e^\alpha\big). \tag{2.6}$$

Представим $u(j) \in [0,1]^n$ в виде $u(j) = u^*(j) + \Delta u(j)$, $\Delta u(j) = \big(\Delta u_1(j), \ldots, \Delta u_n(j)\big)$, $j = 0, \ldots, k-1$. Найдем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)\big(u_i^*(j) + \Delta u_i(j)\big) e^{-\alpha j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)(u_i^*(j) + \Delta u_i(j)) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)(1 + \Delta u_i(k-1)) e^{-\alpha(k-1)}. \quad (2.7)$$

Оценим последнее слагаемое в (2.7). Поскольку $u^*(k-1) = (1, \ldots, 1)$, то $\Delta u_i(k-1) \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)(1 + \Delta u_i(k-1)) e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) e^{-\alpha(k-1)}. \quad (2.8)$$

Пусть $k = 2$, тогда из (2.8) получаем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(2), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\big(u_i^*(0) + \Delta u_i(0)\big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)\big(1 + \Delta u_i(1)\big) e^{-\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\Big(1 - \frac{x_i^*}{x_i(0)} + \Delta u_i(0)\Big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) e^{-\alpha} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) e^{-\alpha}. \quad (2.9)$$

Найдем

$$x(1) = F\big((1 - u(0))x(0)\big) = F\big((1 - u_1(0))x_1(0), \ldots, (1 - u_n(0))x_n(0)\big) =$$
$$= F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)} - \Delta u_1(0)\Big)x_1(0), \ldots, \Big(\frac{x_n^*}{x_n(0)} - \Delta u_n(0)\Big)x_n(0)\Big) =$$
$$= F\big(x_1^* - \Delta u_1(0)x_1(0), \ldots, x_n^* - \Delta u_n(0)x_n(0)\big) = F(x^* - \Delta u(0)x(0)). \quad (2.10)$$

Тогда из (2.6) следует

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(x^* - \Delta u(0)x(0)\big) \leqslant e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - \Delta u_i(0)x_i(0)e^{\alpha}\big). \quad (2.11)$$

Таким образом, из (2.9) и (2.11) имеем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(2), x(0)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)e^{-\alpha} - \Delta u_i(0)x_i(0)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)e^{-\alpha} - x_i^*\big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = e^{-\alpha}D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H_\alpha\big(\overline{u}^*(2), x(0)\big), \quad (2.12)$$

т. е. (2.2) выполнено.

Затем, если $k \geqslant 3$, то

$$u(k-2) = u^*(k-2)+\Delta u(k-2) = \Big(1-\frac{x_1^*}{f_1(x^*)}+\Delta u_1(k-2), \dots, 1-\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}+\Delta u_n(k-2)\Big), \quad (2.13)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x(k-1) = F\big((1-u(k-2))x(k-2)\big) = \\ = F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)} - \Delta u_1(k-2)\Big)x_1(k-2), \dots, \Big(\frac{x_n^*}{f_n(x^*)} - \Delta u_n(k-2)\Big)x_n(k-2)\Big). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть $\Delta x(k-2) \doteq \big(\Delta x_1(k-2), \dots, \Delta x_n(k-2)\big)$, где

$$\Delta x_i(k-2) = \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2) - x_i^*. \quad (2.15)$$

Тогда $x(k-1) = F(x^* + \Delta x(k-2))$ и $x_i(k-1) = f_i(x^* + \Delta x(k-2))$, $i = 1, \dots, n$. Таким образом, учитывая (2.6), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n C_i x_i(k-1)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i f_i\big(x^* + \Delta x(k-2)\big)e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*) + \Delta x_i(k-2)e^{\alpha}\big)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i\Big(f_i(x^*) + \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{\alpha} - x_i^* e^{\alpha}\Big)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &= D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{i=1}^n C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^n C_i x_i(j)u_i(j)e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(k-1)e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^n C_i x_i(j)u_i(j)e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(k-2)\Big(1 - \frac{x_i^*}{f_i(x^*)} + \Delta u_i(k-2)\Big)e^{-\alpha(k-2)} + \\ &+ D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{i=1}^n C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)} = \\ &= D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^n C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^n C_i x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Далее, из (2.8), (2.12) и (2.16) (при $k \geqslant 3$) следуют неравенства

$$
\begin{gathered}
H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) \leqslant \\
\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \\
\leqslant D(x^*) e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2) e^{-\alpha(k-2)} \leqslant \\
\leqslant D(x^*)\big(e^{-\alpha(k-1)} + e^{-\alpha(k-2)}\big) + \sum_{j=0}^{k-4}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-3) e^{-\alpha(k-3)} \leqslant \ldots \leqslant \\
\leqslant D(x^*) \sum_{j=2}^{k-1} e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) u_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) e^{-\alpha} \leqslant \\
\leqslant D(x^*) \sum_{j=1}^{k-1} e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = D(x^*) \frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big).
\end{gathered}
$$

Следовательно, $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \leqslant H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big)$ для всех $\overline{u}(k) \in [0,1]^{kn}$. □

Отметим, что равенства (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) получены аналогично работе [10]. Здесь они приводятся для полноты доказательства.

3. Оптимальный режим промысла структурированной популяции для достижения наибольшего дисконтированного дохода

Как и выше, полагаем, что стоимость ресурса, извлеченного за k изъятий, задается равенством

$$
H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},
$$

где $\overline{u}(k) \doteq (u(0), \ldots, u(k-1))$, $u(j) = (u_1(j), \ldots, u_n(j)) \in [0,1]^n$ для всех $j = 0, 1, \ldots, k-1$ и $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из (1.3) следует, что $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \underline{\lim}_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$.

Теорема 3.1. *Предположим, что* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i e^{\alpha}\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$, *координаты которой удовлетворяют неравенству* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$
H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \frac{D(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)
$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:*

$$
u^*(0) = \Big(1 - \frac{x_1^*}{x_1(0)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{x_n(0)}\Big), \qquad u^*(k) = \Big(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\Big)
$$

для всех $k \geqslant 1$.

Доказательство. Положим $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ такое, что $x_i(0) \geqslant x_i^*$ для всех $i = 1, \dots, n$. В (2.5) перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)}-1}{1-e^\alpha} + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) = \frac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

Покажем, что равенство $H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \dfrac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum\limits_{i=1}^n C_i x_i(0)$ выполняется при режиме эксплуатации $\overline{u}^*$, описанном в условии теоремы. Действительно, аналогично (2.3) и (2.4) при таких управлениях получаем, что $x(j) = F(x^*)$ (т. е. $x_i(j) = f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, n$) для каждого $j \geqslant 1$. Следовательно,

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) =$$
$$= \varliminf_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n C_i x_i(0)\Big(1 - \frac{x_i^*}{x_i(0)}\Big) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^n C_i x_i(j)\Big(1 - \frac{x_i^*}{f_i(x^*)}\Big)e^{-\alpha j}\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i^* + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*) - x_i^*\big)e^{-\alpha j} =$$
$$= \frac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0). \quad (3.1)$$

Таким образом, $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \dfrac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum\limits_{i=1}^n C_i x_i(0) = H\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ для всех $\overline{u} \in U$. □

4. Оптимальный режим эксплуатации однородной популяции

Рассмотрим модель развития однородной популяции (при $n = 1$) при отсутствии эксплуатации. Такая модель задается разностным уравнением

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Также будем рассматривать класс функций, определенных в $I = [0, a]$, т. е. $f \in C^2(I)$, и удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ и $f(I) \subseteq I$. Считая, что $x(k)$ — количество ресурса до изъятия в момент k, рассмотрим модель однородной популяции, подверженной промыслу, в виде

$$x(k+1) = f\big((1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Без ограничения общности при $n = 1$ можно полагать $C_1 = 1$. В таком случае дисконтированный доход от извлечения ресурса за k изъятий равен

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} x(j)u(j)e^{-\alpha j}.$$

Следствие 4.1. *Предположим, что* $d(x) \doteq f(x) - xe^{\alpha}$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* > 0$. *Тогда для любого* $x(0) \geqslant x^*$ *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = d(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + x(0)$$

на множестве $[0,1]^k$ *при следующем режиме эксплуатации:*
если $k = 1$, *то* $u^*(0) = 1$;
если $k = 2$, *то* $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$, $u^*(1) = 1$;
если $k \geqslant 3$, *то* $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$; $u^*(j) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$ *при* $j = 1, \ldots, k-2$; $u^*(k-1) = 1$.

Доказательство. Наибольшее значение функции $d(x)$, которое достигается в точке x^*, положительное, так как выполнено условие $f(0) = 0$. Значит $d(x^*) = f(x^*) - x^*e^{\alpha} > 0$. Отсюда получаем, что $f(x^*) > x^*e^{\alpha} > x^*$. Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены, а данное утверждение является ее следствием для случая $n = 1$. □

Следствие 4.2. *Пусть* $d(x) \doteq f(x) - xe^{\alpha}$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* > 0$. *Тогда для любого* $x(0) \geqslant x^*$ *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \frac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + x(0)$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:*

$$u^*(0) = 1 - \frac{x^*}{x(0)}, \qquad u^*(k) = 1 - \frac{x^*}{f(x^*)}$$

для всех $k \geqslant 1$.

Доказательство. Аналогично (3.1) при $n = 1$ получаем, что при управлениях, указанных в условии следствия 4.2, $x(j) = f(x^*)$ для всех $j \geqslant 1$. Значит,

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \underline{\lim}_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = \frac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + x(0).$$

Отсюда получаем, что $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \dfrac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ для всех $\overline{u} \in U$.

Таким образом, данное утверждение является следствием теоремы 3.1 для случая $n = 1$. □

Работа выполнена под руководством д.ф.-м.н., профессора кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых Людмилы Ивановны Родиной.

References

[1] Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков, О. Л. Ревуцкая, О. Л. Жданова, Г. П. Неверова, “Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **11**:1 (2019), 119–151. [E. Ya. Frisman, M. P. Kulakov, O. L. Revutskaya, O. L. Zhdanova, G. P. Neverova, “The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations”, *Computer Research and Modeling*, **11**:1 (2019), 119–151 (In Russian)].

[2] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, "Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования", *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:1 (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, "Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study", *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:1 (2016), 1–13 (In Russian)].

[3] О. Л. Ревуцкая, Е. Я. Фрисман, "Влияние равновесного промысла на сценарии развития двухвозрастной популяции", *Информатика и системы управления*, **53**:3 (2017), 36–48. [O. L. Revutskaya, E. Ya. Frisman, "Influence of stationary harvesting on development of a two-age population scenario", *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **53**:3 (2017), 36–48 (In Russian)].

[4] Л. И. Родина, "Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 685–695. [L. I. Rodina, "About one stochastic harvesting model of a renewed resourse", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 685–695 (In Russian)].

[5] Л. И. Родина, "Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, "Properties of average time prot in stochastic models of harvesting a renewable resource", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].

[6] L. G. Hansen, F. Jensen, "Regulating fisheries under uncertainty", *Resource and Energy Economics*, **50** (2017), 164–177.

[7] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, "Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса", *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **22**:2 (2016), 38–46; англ. пер.:A. O. Belyakov, A. A. Davydov, "Efficiency Optimization for the Cyclic Use of a Renewable Resource", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **299**:suppl. 1 (2017), 14–21.

[8] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, С. В. Скопинцев, "Об оптимальном сборе ресурса на окружности", *Математические заметки*, **102**:4 (2017), 521–532. [M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskiy, S. V. Skopincev, "On optimal harvesting of a resource on a circle", *Mathematical Notes*, **102**:4 (2017), 521–532 (In Russian)].

[9] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, "On optimal harvesting in age-structured populations", *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making*, 2016, 149–166.

[10] А. В. Егорова, Л. И. Родина, "Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova,L. I. Rodina, "On optimal harvesting of renewable resource from the structured population", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

Информация об авторе

Егорова Анастасия Владимировна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Information about the author

Anastasia V. Egorova, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Поступила в редакцию 26.01.2021 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Received 26.01.2021
Reviewed 25.02.2021
Accepted for press 05.03.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34

УДК 517.988.8+517.929

О применении методологии i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений

Аркадий Владимирович КИМ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

On application of the i-smooth analysis methodology to elaboration of numerical methods for solving functional differential equations

Arkadii V. KIM

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Аннотация. В статье обсуждается ряд аспектов применения i-гладкого анализа в разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). На конкретных примерах демонстрируется принцип разделения конечномерных и бесконечномерных составляющих в структуре численных схем для ФДУ, а также применение различных типов интерполяции предыстории: Лагранжа и Эрмита. Представлен общий подход к построению численных методов типа Рунге–Кутты для нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Получены условия сходимости и установлен порядок сходимости таких методов.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения; численные методы; i-гладкий анализ; системы с последействием

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-01-00352_а).

Для цитирования: *Ким А.В.* О применении методологии i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 26–34. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34.

Abstract. The article discusses a number of aspects of the application of i-smooth analysis in the development of numerical methods for solving functional differential equations (FDE). The principle of separating finite- and infinite-dimensional components in the structure of numerical schemes for FDE is demonstrated with concrete examples, as well as the usage of different types of prehistory interpolation, those by Lagrange and Hermite. A general approach to constructing Runge–Kutta-like numerical methods for nonlinear neutral differential equations is presented. Convergence conditions are obtained and the order of convergence of such methods is established.

Keywords: functional differential equations; numerical methods; i-smooth analysis; systems with delays

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00352_a).

For citation: Kim A.V. O primenenii metodologii i-gladkogo analiza k razrabotke chislennykh metodov resheniya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [On application of the i-smooth analysis methodology to elaboration of numerical methods for solving functional differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 26–34. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-26-34. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

С самого начала разработки приближенных методов решения функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) математики, естественно, старались перенести на системы с запаздыванием классические численные схемы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для этого, аналогично конечномерному случаю, тем или иным способом аппроксимировали соответствующие члены в разложении решения $x(\cdot)$ в ряд Тейлора

$$X(t_k+\Delta)=x(t_k)+\Delta\dot{x}(t_k)+\ldots+\frac{\Delta^n}{n!}x^{(n)}(t_k)+\ldots .$$

Анализ разработанных подходов показывает, что, пытаясь копировать численные методы ОДУ, математики интуитивно использовали (правда, не осознавая этого и, соответственно, строгого не обосновывая) методологию i-гладкого анализа:

a) копирование по конечномерной переменной численных схем ОДУ,

b) «обработка» запаздывания операторами интерполяции.

На таком пути нередко удавалось получить формальные аналоги численных методов ОДУ, однако, их практическая реализация зачастую осложняется требованием разработки трудоемких процедур счета в точках разрывов и другими проблемами. Такая трудоемкость и «искусственность» многих построений связана была с тем, что классический конечномерный анализ не позволяет адекватно учитывать специфику и особенности динамики решений систем с последействием, функциональная природа которых требует применения специальных функциональных методов. Оказалось, i-гладкий анализ включает инфинитезимальные конструкции и методы, эффективно учитывающие («обрабатывающие») в соответствующих построениях и доказательствах конечномерную составляющую решения и функциональное последействие, что позволило построить завершенную теорию численных методов для ФДУ [1–3], полностью аналогичную конечномерной (ОДУ) теории численных методов: в случае исключения запаздывания, теория [1–3] совпадает с теорией численных методов ОДУ.

В [1–3] рассматривались, в основном, уравнения запаздывающего типа. В настоящей работе обсуждаются некоторые аспекты применения i-гладкого анализа в разработке численных методов для ФДУ нейтрального типа. Принципиальное отличие состоит в том, что для таких уравнений необходимо использовать более гладкую, чем для «обычных» систем с последействием, интерполяцию. В целом же, как показывают примеры конкретных численных схем, общая методология применения i-гладкого анализа в численных методах для ФДУ нейтрального типа аналогична [1–3].

Во втором разделе статьи обсуждается ряд общих аспектов применения i-гладкого анализа в теории численных методов ФДУ.

В третьем и четвертом разделах на примерах конкретных уравнений рассматриваются численные схемы, использующие методологию i-гладкого анализа и различные варианты интерполяции: Лагранжа и Эрмита.

В заключении представлен общий подход, основанный на методологии i-гладкого анализа, к построению численных методов типа Рунге–Кутты для нелинейных ФДУ нейтрального типа.

1. i-гладкий анализ и общий подход к разработке численных методов для ФДУ

Для исследования и описания инфинитезимальных свойств операторов сдвигов теории ФДУ была разработана методология i-гладкого анализа [3–5], состоящая в:

1) разделении конечномерных и бесконечномерных (функциональных) составляющих в структуре и свойствах ФДУ,

2) применении инвариантной производной [3–6].

Замечание 1.1. Удобство и «эффективность» класса инвариантных производных состоит в определенной «универсальности», заключающейся в установленной связи инвариантной производной с обобщенной производной теории распределений (обобщенных функций) и обобщенной производной Соболева [3–5].

Первоначально i-гладкий анализ был разработан [4, 5] для исследования задач устойчивости систем с последействием, но оказалось, что методология i-гладкого анализа позволяет разрабатывать и другие разделы теории ФДУ аналогично (с точностью до обозначений) теории ОДУ. Поэтому, по совету А.Д. Мышкиса, автор начал переизлагать различные разделы теории ФДУ в на основе методологии и конструкций i-гладкого анализа; и к началу 90-годов прошлого столетия у автора сложились *принципы разработки численных методов для ФДУ* на основе методологии i-гладкого анализа:

a) по конечномерной составляющей — численная схема ОДУ,

b) применение инвариантной производной для строго обоснования метода (доказательства сходимости и т.д.).

Примерно в это же время (начало 90-х) инженеры поставили перед автором вопрос о возможности разработки методов численного решения систем с последействием и соответствующего эффективного программного обеспечения для ФДУ. Автор был уверен в правильности приведенных выше принципов разработки численных методов для ФДУ и предложил В. Г. Пименову (в то время доценту УрГУ) совместно поработать в этом направлении. В. Г. Пименов занимался дифференциальными играми систем с запаздыванием и преподавал на кафедре вычислительной математики, в силу чего был специалистом как в теории ФДУ, так и в численных методах. К работе были также привлечены аспиранты А. Б. Ложников и О. В. Онегова. Расчеты, проведенные по нескольким несложным численным схемам, построенным без строгого обоснования, показали эффективность и несложность программирования численных алгоритмов, разрабатываемых на основе i-гладкого анализа. Это придало автору уверенность в правильности предложенного подхода и в окончательном успехе разработки численных методов и программного обеспечения на основе методологии i-гладкого анализа. Поэтому автор обратился к Н. Н. Красовскому и А. Ф. Сидорову (в то время директору ИММ УрО РАН) с предложением о создании группы по разработке численных методов и комплекса программ решения ФДУ. После доклада автора на ученом совете института, 1 сентября 1997 года, в ИММ УрО РАН была официально сформирована группа ФДУ (А. В. Ким, В. Г. Пименов, А. Б. Ложников, О. В. Онегова). К этому времени стала уже понятна структура численных схем типа Рунге–Кутты для нелинейных ФДУ, и компьютерное моделирование показало их работоспособность и эффективность. Теперь уже все сотрудники группы были уверены в правильности подхода и успехе. Так как разработанное программное обеспечение работало эффективно, то теперь основной акцент следовало сделать на строгом математическом обосновании разработанных численных алгоритмов. С этим блестяще справился В. Г. Пименов, и соответствующие результаты были опубликованы в монографии [1]; завершенная и полная теория численных методов ФДУ представлена в [2, 3].

Так как практически все инженеры и многие научные работники знакомы с пакетом прикладных программ MATLAB, то было принято решение разрабатывать комплекс программ в формате Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Разработка Time-Delay System Toolbox велась совместно со специалистами Control Information System Laboratory (School of Electrical Engineering, Seoul National University), и в 1998 году была выпущена beta-версия Time-Delay System Toolbox (Исходные программы и руководство пользователя можно скачать с www.dropmefiles.com./33omA).

2. Численный метод с интерполяцией Лагранжа

Рассмотрим задачу нахождения на интервале $[t_0, \theta]$ приближенного решения линейного уравнения нейтрального типа

$$\dot{x}(t) = Lx(t) + Mx(t-\tau) + N\dot{x}(t-\tau), \tag{2.1}$$

с постоянными коэффициентами L, M, N, запаздыванием $\tau > 0$, при заданной начальной функции $\phi(\cdot)$.

Зададим на $[t_0, \theta]$ равномерную сетку $\{t_n\}_{n=0}^{N}$ с шагом $\Delta = \frac{\theta - t_0}{n}$. Через $x_n \approx x(t_n)$ будем обозначать значение приближенного решения в узле t_n.

В работе [7] для приближенного решения уравнения (2.1) используется следующий численный метод s-го порядка

$$x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{s} b_i K_{n,i},$$

$$K_{n,i} = \Delta L(u_n + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} K_{n,j}) + \Delta(M u_{n-l+\delta} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} K_{n-l+\delta,j}) + N K_{n-l+\delta,i}, \;\; i = 1, 2, \ldots, s,$$

в котором a_{ij} и b_j — параметры метода ($i, j = 1, 2, \ldots, s$); $l = \left[\frac{\tau}{\Delta}\right]$ (символом $[\,\cdot\,]$ обозначено наименьшее целое число, которое больше заданного числа или равно ему); $\delta = l - \frac{\tau}{\Delta}$; значения $u_{n-l+\delta}$, $K_{n-l+\delta,j}$, $n = 1, 2, \ldots$ определяются через начальную функцию $\phi(\cdot)$ и интерполяцию Лагранжа

$$L_p(\delta) = \prod_{k=-r,\, k\neq p}^{p} \frac{\delta - k}{p - k}$$

($r, q > 0$ — целые числа и $r \le q \le r + 2$) соотношениями

$$u_{n-l-\delta} = \begin{cases} \phi(n-l-\delta) & \text{при } \; n-l-\delta \le 0, \\ \displaystyle\sum_{p=-r}^{q} L_p(\delta) u_{n-l-\delta} & \text{при } \; n-l-\delta \ge 0; \end{cases}$$

$$K_{n-l+\delta,\,j} = \begin{cases} \dot{\phi}(n-l-\delta) & \text{при } \ n-l+\delta \le 0, \\ \displaystyle\sum_{p=-r}^{q} L_p(\delta) K_{n-l+p,\,j} & \text{при } \ n-l+\delta \ge 0. \end{cases}$$

Приведенная выше схема является естественным методом типа Рунге–Кутты с применением интерполяции Лагранжа, см. [8]. Отметим, что, в соответствии с методологией i-гладкого анализа, по конечномерной компоненте данная численная схема является s-этапным методом Рунге–Кутты для ОДУ. В сочетании с интерполяцией Лагранжа это дает соответствующую численную схему для уравнения нейтрального типа.

3. Одинарно диагональный неявный метод типа Рунге–Кутты с интерполяцией Эрмита

Для ОДУ

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t))$$

m-этапный одинарно диагональный неявный метод Рунге–Кутты, задается формулами (в точке t_n)

$$k_1 = g(t_n + c_1 h, x_n + h a_{11} k_1),$$

$$k_2 = g(t_n + c_2 h, x_n + h\, a_{21}\, k_1\, h\, a_{22}\, k_2),$$

$$\vdots$$

$$k_i = g(t_n + c_i h, x + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j),$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^{m} b_i\, k_j \ \ (i = 1, ..., m).$$

В работе [9] для приближенного решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), x(t-\tau)\big), \ \ t > t_0,$$

$$x(t) = \phi(t), \ \ t \le t_0$$

(с постоянным запаздыванием $\tau > 0$ и начальной функцией $\phi(\cdot)$) применялся аналог этого метода в форме

$$k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^{i} a_{ij} k_j, y(t_n + c_i h - \tau)),$$

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^{q} b_i k_i,$$

и для вычисления значений $x(t_n + c_i h - \tau)$ в правой части ФДУ использовалась интерполяция Эрмита.

В частности, в приложении к линейному ФДУ

$$\dot{x}(t) = \lambda x(t) + \mu x(t-\tau), \ \ t \ge t_0,$$

с начальным условием

$$\dot{x}(t) = \phi(t), \ \ t \le t_0,$$

полином Эрмита наименьшей степени, согласованный с x и $\dot{x}$ в точках $t_0, \ldots, t_n$, является полиномом максимально степени $2n+1$, определяемым как

$$p_{2n+1}(t) = \sum_{j=0}^{n} H_{n,j}(t)x(t_j) + \sum_{j=0}^{m} \overline{H}_{n,j}\dot{x}(t_j),$$

где

$$H_{n,j} = [1 - 2(t - t_j)L'_{n,j}]L^2_{n,j},$$
$$\overline{H}_{n,j}(t) = (t - t_j)L^2_{n,j}(t),$$

и

$$L_j(t) = \prod_{j=r}^{s} \frac{t-l}{j-l} \ \ (j \ne l);$$

в этом случае коэффициенты 3-точечной интерполяции Эрмита равны

$$H_{2.0} = (c) = 0.25(4 + 3c)c^2(c-1)^2,$$

$$H_{2.1} = (c+1)^2 c(c-1)^2,$$
$$H_{2.2} = 0.25(1+c)^2 c^2 (c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.0}(c) = 0.25(1+c)^2 c^2 (c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.1}(c) = (1+c)(c-1)^2,$$
$$\overline{H}_{2.2}(c) = 0.25(1+c)^2 c^2 (c-1)^2.$$

4. Общая схема численных методов типа Рунге–Кутты для ФДУ нейтрального типа

Дифференциальные уравнения нейтрального типа формируют специальный класс ФДУ, в которых правая часть дифференциального уравнения зависит от значений производной в предшествующие моменты времени. В данном разделе представлена общая схема методов типа Рунге–Кутты для решения ФДУ нейтрального типа. С применением методологии i-гладкого анализа обоснование результатов данного раздела проводится аналогично случаю ФДУ запаздывающего типа [1–3].

Задача Коши для уравнения нейтрального типа состоит в решении уравнения

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t+s), \dot{x}(t+s)), \ \ -\tau \le s < 0, \tag{4.1}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x^0, \tag{4.2}$$

$$x(t_0 + s) = y^0(s), \ \ -\tau \le s < 0, \tag{4.3}$$

где $F(f, x, y(\cdot), \dot{y}(\cdot)) : [t_0, \theta] \times R^n \times Q[-\tau, 0) \times Q[-\tau, 0) \to R^n$, $\theta > 0$, $Q[-\tau, 0)$ — множество кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ функций, x^0 — начальная точка, $y^0(\cdot)$ — начальное запаздывание (см., например, [3, 5]).

Предполагаем, что для задачи (4.1)–(4.3) выполняются условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши, например [10].

Для простоты будем рассматривать одномерный случай: (4.1) — уравнение нейтрального типа. Отметим, что все результаты с соответствующими изменениями (в частности заменой R на R^n) обобщаются на случай n-мерной системы ФДУ.

Для численного решения уравнения (4.1) зададим на $[t_0, t_0 + \theta]$ временну́ю сетку $t_k = t_0 + \Delta k$, $k = 0, 1, \ldots, N$ с равномерным шагом $\Delta = \frac{\theta}{N}$ (N — целое число). Для простоты будем предполагать, что отношение $\frac{\tau}{\Delta} = m$ является натуральным числом. Численный метод основывается на введении дискретной численной модели u_l уравнения (4.1). Будем через $x_l \in R$ обозначать значение точного решения $x(t_l) = x_l$ в точке t_l.

Сделаем несколько пояснений относительно используемых обозначений.

1. Для обозначения числовых последовательностей часто используется индекс n, например, x_n. Для простоты в данном разделе мы рассматриваем одномерное уравнение нейтрального типа, но в общем случае x может быть и n-мерным вектором, поэтому для обозначения последовательностей будем использовать нижний индекс l, например x_l, в то время как n зарезервируем для обозначения размерности системы.

2. Отметим, что дискретная модель обозначается буквой u, а ее значение в момент t_l через u_l, в то время как x_l обозначает значение точного решения в этот же момент.

В соответствии с базовыми принципами методологии i-гладкого анализа [3, 5], общий подход к построению численных методов для уравнений нейтрального типа аналогичен случаю ФДУ запаздывающего типа [1–3], поэтому рассмотрим только ключевые понятия и конструкции.

В численном методе необходимо вычислять значения правой части ФДУ (отображения f) на основе конечного набора значений $\{u_i\}_k = \{u_i : i \geq 0,\ k - N \leq i \leq k\}$, называемого предысторией дискретной модели в момент t_k и определяющего дальнейшую динамику дискретной модели. Для вычисления f необходимо использовать процедуру интерполяции. Для ФДУ запаздывающего типа интерполяция сплайнами является одним из наиболее эффективных способов интерполяции предыстории (см, например, [1–3]). Так как в правые части уравнений нейтрального типа входят производная решения $x(t)$ в предшествующие моменты времени, то при интерполяции следует учитывать и согласованность производных в узлах интерполяции. Для этого удобно использовать интерполяцию Эрмита. В дальнейшем, для определенности, под интерполяцией Эрмита понимаются интерполяционные многочлены Эрмита, построенные методами, описанными в [11]. Отображение $I : \{u_l\} \to u_H(\cdot)$ будем называть оператором интерполяции Эрмита. Так как мы применяем только интерполяцию Эрмита, то букву H (Hermite) в интерполяционном полиноме $u_H(\cdot)$ будем опускать и просто писать $u(\cdot)$.

Определение 4.1. Оператор интерполяции I имеет порядок погрешности p на точном решении $x(t)$, если найдутся константы C_1 и C_2 такие, что для всех $l = 0, 1, \ldots, N$ и $t \in [t_l - \tau, t_l]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \leq C_1 \max_{l-m \leq i \leq l} \|u_i - x_i\| + C_2 \Delta^p.$$

Определение 4.2. Для любого $a > 0$ оператором экстраполяции E предыстории численной модели называется отображение $E : \{u_i\}_l \to u(\cdot) \in Q[t_i, t_i + a\Delta]$.

Оператор экстраполяции получается, например, продолжением интерполяционного многочлена Эрмита на $[t_i, t_i + a\Delta]$, что и предполагается в дальнейшем.

Определение 4.3. Экстраполяция предыстории модели имеет порядок погрешности p на точном решении, если существуют константы C_3 и C_4 такие, что для всех $a > 0$ и всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$ и $t \in [t_l, t_l + a\Delta]$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - u(t)\| \leq C_3 \max_{l-m \leq i \leq l} \|u_i - x_i\| + C_4 \Delta^p.$$

Опишем общую схему численных методов типа Рунге–Кутты численного решения функционально-дифференцируемых уравнений нейтрального типа.

Определение 4.4. Явным m-стадийным методом типа Рунге–Кутты (с оператором интерполяции-экстраполяции IE) называется дискретная модель

$$u_0 = x_0, \tag{4.4}$$

$$u_{l+1} = u_l + \Delta \sum_{i=1}^{k} \sigma_i h_i(u_{t_i}), \quad l = 1, \ldots, N-1, \tag{4.5}$$

$$h_1(u_l, u_{t_l}(\cdot)) = f(t_l, u_l, u_{t_l}(\cdot), \dot{u}_{t_l}(\cdot)), \tag{4.6}$$

$$h_i(u_l, u_{t_l}(\cdot)) = f(t_i + a_i\Delta, u_i + \Delta \sum_{j=1}^{i} b_{ij} h_j(u_l, u_{t_l}, u_{t_l + a_i\Delta}(\cdot), \dot{u}_{t_l}(\cdot)). \tag{4.7}$$

Числа a_i, σ_i, b_{ij} называются коэффициентами метода.

Определение 4.5. Невязкой (погрешностью аппроксимации) метода типа Рунге–Кутты называется

$$\psi(t_l) = \frac{x_{l+1} - x_l}{\Delta} - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i h_i(x_l, x_{t_l}(\cdot)).$$

Определение 4.6. Невязка имеет порядок p, если $\psi(t_l) \leq C\Delta^p$ для некоторой константы $C > 0$ при всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Теорема 4.1. *Если:*

- *метод* (4.4)–(4.7) *имеет невязку порядка* $p_1 > 0$,
- *интерполяция предыстории модели имеет порядок* $p_2 > 0$,
- *экстраполяция модели имеет порядок* $p_3 > 0$,

то метод сходится, причем порядок сходимости p *метода удовлетворяет условию*

$$p \geq \min\{p_1, p_2, p_3\}.$$

References

[1] A. V. Kim, V. G. Pimenov, *Numerical Methods for Delay Differential Equations. Application of i-Smooth Analysis.* V. 44, Lecture Notes Series, Research Institute of Mathematics. Global Analysis Research Center. Seoul National Univertsity, Seoul, 1999.

[2] А. В. Ким, В. Г. Пименов, *i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений*, Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2004, 256 с. [A. V. Kim, V. G. Pimenov, *i-Smooth Analysis and Numerical Methods for Solving Functional Differential Equations*, Research and Publishing Center "Regular and Chaotic Dynamics", Moscow–Izhevsk, 2004 (In Russian), 256 pp.]

[3] A. V. Kim, *i-Smooth Analysis. Theory and Applications*, Wiley Publ., New Jersey, 2015.

[4] А. В. Ким, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием*, Уральский ГУ, Екатеринбург, 1992. [A. V. Kim, *The Direct Lyapunov Method in the Theory of Stability of Systems with Aftereffect*, Ural State University Publ., Yekaterinburg, 1992 (In Russian)].

[5] А. В. Ким, *i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения*, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1996, 234 с. [A. V. Kim, *i-Smooth Analysis and Functional Differential Equations*, IMM UB RAS, Yekaterinburg, 1996 (In Russian), 234 pp.]

[6] А. В. Ким, "О решении нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений", *Дифференциальные уравнения*, **23**:9 (1987), 1503–1510. [A. V. Kim, "The solution of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations", *Differ. Uravn.*, **23**:9 (1987), 1504–1510 (In Russian)].

[7] Guang-Da Hu, "Delay-dependent stability of Runge-Kutta methods for linear neutral systems with multiple delays", *Kybernetika*, **54**:4 (2018), 718–735.

[8] A. Bellen, M. Zennaro, *Numerical Methods for Delay Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[9] F. Ismail, R. Ali Al-Khasa, A. San Lwin, M. Suleiman, "Numerical treatment of delay differential equations by Runge-Kutta methods using hermite interpolation", *Matematika*, **18** (2002), 79–90.

[10] V. B. Kolmanovskii, V. R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Publ., London, 1986.

[11] А. А. Самарский, А. В. Гулин, *Численные методы*, Наука, М., 1989. [A. A. Samarskiy, A. V. Gulin, *Numerical Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1989].

Информация об авторе

Ким Аркадий Владимирович, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 25.12.2020 г.
Поступила после рецензирования 12.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Arkadii V. Kim, Doctor of Physics and Mathematics, Senior Scientific Researcher. N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation. E-mail: avkim@imm.uran.ru

Received 25.12.2020
Reviewed 12.02.2021
Accepted for press 05.03.2021

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43
УДК 519.6

Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре

Евгений Борисович ЛАНЕЕВ, Дмитрий Юрьевич БЫКОВ, Анастасия Владимировна ЗУБАРЕНКО, Ольга Николаевна КУЛИКОВА, Дарья Алексеевна МОРОЗОВА, Евгений Владимирович ШУНИН

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»

117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder

Evgeniy B. LANEEV, Dmitriy Yu. BYKOV, Anastasia V. ZUBARENKO, Olga N. KULIKOVA, Darya A. MOROZOVA, Evgeniy V. SHUNIN

RUDN University

6 Miklukho-Maklay St., Moscow 117198, Russian Federation

Аннотация. В работе рассматривается смешанная задача для уравнения Лапласа в области в круговом цилиндре. На боковой поверхности цилидрической области заданы однородные краевые условия первого рода. Цилиндрическую область с одной стороны ограничивает поверхность общего вида, на которой заданы условия Коши, т. е. заданы функция и ее нормальная производная. Другая граница цилиндрической области свободна. Такая задача некорректно поставлена, и для построения ее приближенного решения в случае данных Коши, известных с некоторой погрешностью, необходимо применение регуляризирующих алгоритмов. В работе рассматриваемая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. На основе решения интегрального уравнения получено явное представление точного решения поставленной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи для уравнения Лапласа в круге. Устойчивое решение интегрального уравнения получено методом регуляризации Тихонова. В качестве его приближенного решения рассматривается экстремаль функционала Тихонова. На основе этого решения строится приближенное решение задачи в целом. Приведена теорема сходимости приближенного решения поставленной задачи к точному при стремлении к нулю погрешности в данных Коши и при согласовании параметра регуляризации с погрешностью в данных. Результаты работы могут быть использованы для математической обработки данных тепловидения в медицинской диагностике.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача; уравнение Лапласа; функции Бесселя; интегральное уравнение первого рода; метод регуляризации Тихонова

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-01-00590_а).

Для цитирования: *Ланеев Е.Б., Быков Д.Ю., Зубаренко А.В., Куликова О.Н., Морозова Д.А., Шунин Е.В.* Об одной некорректно поставленной краевой задаче для уравнения Лапласа в круговом цилиндре // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 35–43. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43.

Abstract. In this paper, we consider a mixed problem for the Laplace equation in a region in a circular cylinder. On the lateral surface of a cylidrical region, the homogeneous boundary conditions of the first kind are given. The cylindrical area is bounded on one side by an arbitrary surface on which the Cauchy conditions are set, i.e. a function and its normal derivative are given. The other border of the cylindrical area is free. This problem is ill-posed, and to construct its approximate solution in the case of Cauchy data known with some error it is necessary to use regularizing algorithms. In this paper, the problem is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind. Based on the solution of the integral equation, an explicit representation of the exact solution of the problem is obtained in the form of a Fourier series with the eigenfunctions of the first boundary value problem for the Laplace equation in a circle. A stable solution of the integral equation is obtained by the Tikhonov regularization method. The extremal of the Tikhonov functional is considered as an approximate solution. Based on this solution, an approximate solution of the problem in the whole is constructed. The theorem on convergence of the approximate solution of the problem to the exact one as the error in the Cauchy data tends to zero and the regularization parameter is matched with the error in the data is given. The results can be used for mathematical processing of thermal imaging data in medical diagnostics.

Keywords: ill-posed problem; Laplace equation; Bessel function; integral equation of the first kind; Tikhonov regularization method

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 18-01-00590_a).

For citation: Laneev E.B., Bykov D.Yu., Zubarenko A.V., Kulikova O.N., Morozova D.A., Shunin E.V. Ob odnoy nekorrektno postavlennoy krayevoy zadache dlya uravneniya Laplasa v krugovom tsilindre [On an ill-posed boundary value problem for the Laplace equation in a circular cylinder]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 35–43. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-35-43. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работе рассматривается некорректно поставленная смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в круговом цилиндре с условиями Коши на поверхности общего вида. Такая задача возникает в медицинской диагностике как задача обработки термографических данных с целью выявления патологий у пациента, которые могут быть сопоставлены аномальным стационарным источниками тепла в теплопроводящей среде со стационарным распределением температуры, удовлетворяющем стационарному уравнению теплопроводности, т. е. уравнению Лапласа. Функция температуры на поверхности тела дает представление о плотности распределения источников тепла внутри тела. Как правило, такое представление сильно искажено за счет удаленности источников тепла от поверхности исследуемого тела. Уточненную информацию об источниках можно получить, анализируя распределение температуры вблизи источников, решая задачу продолжения гармонической функции с границы в сторону источников по известной функции и нормальной производной на границе. Следуя работам [1,2], в которых решена соответствующая задача для уравнения Лапласа в цилиндрической области прямоугольного сечения, краевая задача приведена к линейному интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится на основе метода регуляризации Тихонова [3]. Задача аналогична задаче продолжения поля ньютоновского потенциала с плоской поверхности [4].

1. Постановка задачи

Имеется цилиндрическая область кругового сечения

$$D(F,H) = \{(r,\varphi,z) : 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ F(r,\varphi) < z < H\},$$

ограниченная поверхностью общего вида

$$S = \{(r,\varphi,z) : 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ z = F(r,\varphi) < H\}.$$

В этой области рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0, \quad M \in D(F,H),\\ &u|_S = f,\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = g,\\ &u|_{r=a} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

включающую условия Коши на поверхности S и однородные условия первого рода на боковой поверхности цилиндра. Граница $z = H$ открыта.

Будем считать, что функции f и g непрерывны на S и обеспечивают существование решения $u \in C^2(D(F,H)) \bigcap C^1(\overline{D(F,H)})$.

Смешанная задача (1.1) с условиями Коши некорректно поставлена. Решение задачи неустойчиво по отношению к погрешности в данных f и g. Получим явное выражение точного решения задачи в зависимости от точных данных Коши f и g.

2. Точное решение краевой задачи

Пусть $\varphi(M,P)$ — функция источника первой краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\Delta v(P) = -\rho(P), \quad P \in D^\infty,\\ &v|_{r=a} = 0,\\ &v \to 0 \text{ при } |z| \to \infty. \end{aligned}$$

в бесконечном круговом цилиндре

$$D^\infty = \{(r,\varphi,z) : 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}. \tag{2.1}$$

Функция источника есть сумма фундаментального решения уравнения Лапласа и гармонической по P функции $W(M,P)$

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W(M,P), \tag{2.2}$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P и удовлетворяет граничным условиям. Функция источника (2.2) может быть представлена в виде разложения по собственным функциям оператора Лапласа в круге

$$\varphi(M,P) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon_n \exp\{-\frac{\mu_n^k}{a}|z_M - z_P|\}\frac{J_n(\mu_n^k\frac{r_M}{a})J_n(\mu_n^k\frac{r_P}{a})}{\mu_n^k a[J_n'(\mu_n^k)]^2}\cos n(\varphi_M - \varphi_P),$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0.$$

Здесь J_n — функция Бесселя, μ_n^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — нули функции J_n.

Пусть $M \in D(F, H)$. Применяя формулы Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции источника $\varphi(M, P)$, получим

$$u(M) = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad M \in D(F,H). \tag{2.3}$$

Учитывая однородные граничные условия для φ и u на боковой поверхности цилиндрической области $D(F, H)$, получим

$$u(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P + \\ + \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \tag{2.4}$$

где второй интеграл берется по кругу

$$\Pi(H) = \{(r,\varphi,z) : \, 0 < r < a, \; 0 < \varphi < 2\pi, \; z = H\}. \tag{2.5}$$

Обозначим

$$\Phi(M) = \int\limits_S \Big[g(P)\varphi(M,P) - f(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.6}$$

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P, \quad z_M < H, \tag{2.7}$$

тогда решение задачи (1.1) получим в виде

$$u(M) = v(M) + \Phi(M), \quad M \in D(F,H), \tag{2.8}$$

где функция Φ вычисляется по известным функциям f и g.

Функцию v можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} &\Delta v(M) = 0, \quad M \in D(-\infty, H), \\ &v|_{z=H} = v_H, \\ &v|_{r=a} = 0, \\ &v \to 0 \text{ при } z \to -\infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если решение задачи (1.1) существует, то функция v может быть представлена в виде ряда Фурье

$$v(M) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{\frac{\mu_n^k}{a}(z_M - H)\} J_n(\mu_n^k \frac{r}{a})[(\tilde{v}_H)^c_{nk}\cos n\varphi - (\tilde{v}_H)^s_{nk}\sin n\varphi], \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} (\tilde{v}_H)^c_{nk} = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^k)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^k \frac{r}{a}) \cos n\varphi, \\ \epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0, \\ (\tilde{v}_H)^s_{nk} = \frac{2}{\pi a^2 [J_n'(\mu_n^k)]^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr v_H(r,\varphi) J_n(\mu_n^k \frac{r}{a}) \sin n\varphi. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Ряд (2.9) сходится равномерно области $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, так как

$$\left|(\tilde{v}_H)^c_{nk}\exp\{\frac{\mu^k_n}{a}(z_M - H)\}J_n(\mu^k_n\frac{r}{a})\cos n\varphi\right| \leqslant \left|(\tilde{v}_H)^c_{nk}\right|\exp\{\frac{\mu^k_n}{a}\varepsilon\},$$

и аналогичная оценка справедлива и для $(\tilde{v}_H)^s_{nk}$.

Таким образом, из представления (2.8) решения задачи (1.1) и представления (2.9) функции v следует, что для получения явного выражения для точного решения задачи (1.1) достаточно выразить функцию v_H в (2.9) через заданные функции f и g.

Покажем, что функция v_H удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Пусть $M \in D(-\infty, F)$, где

$$D(-\infty, F) = \{(r, \varphi, z):\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < F(r, \varphi)\}.$$

Применяя формулу Грина в области $D(F, H)$ к функции $u(P)$ — решению задачи (1.1) и функции $\varphi(M, P)$ вида (2.2), аналогично (2.3), получим

$$0 = \int\limits_{\partial D(F,H)} \Big[\frac{\partial u}{\partial n}(P)\varphi(M,P) - u(P)\frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big]d\sigma_P, \quad M \in D(F,H).$$

Отсюда с учетом однородных граничных условий для φ и u и обозначений (2.6) и (2.7) получим

$$v(M) = -\Phi(M), \quad M \in D(-\infty, F). \tag{2.11}$$

Из (2.9), (2.10) функция v может быть выражена через v_H в виде интеграла

$$v(M) = \int\limits_{\Pi(H)} G(M,P)v_H(P)r_P dr_P d\varphi_P, \quad M \in D(-\infty, H), \tag{2.12}$$

где

$$G(M,P) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}|z_M - z_P|\}\frac{J_n(\mu^k_n\frac{r_M}{a})J_n(\mu^k_n\frac{r_P}{a})}{a^2[J'_n(\mu^k_n)]^2}\cos n(\varphi_M - \varphi_P), \tag{2.13}$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0.$$

Пусть $b < \min\limits_{(r,\varphi)} F(r,\varphi)$ и $M \in \Pi(b)$, где $\Pi(b)$ — область вида (2.5) при $z = b$, тогда из (2.11) и (2.12) получим интегральное уравнение первого рода

$$\int\limits_{\Pi(H)} G(M,P)v_H(P)dx_P dy_P = -\Phi(M), \quad M \in \Pi(b). \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.14) с учетом разложения (2.13) при $z_M = b$ получаем соотношение между коэффициентами Фурье единственного решения v_H и коэффициентами Фурье правой части

$$\begin{aligned} -(\tilde{v}_H)^c_{nk}\exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}(H-b)\} &= \tilde{\Phi}^c_{nk}(b), \\ -(\tilde{v}_H)^s_{nk}\exp\{-\frac{\mu^k_n}{a}(H-b)\} &= \tilde{\Phi}^s_{nk}(b), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где $\tilde{\Phi}^c_{nk}(b), \tilde{\Phi}^s_{nk}(b)$ — коэффициенты Фурье функции $\Phi(M)|_{M\in\Pi(b)}$:

$$(\tilde{\Phi})^c_{nk}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J'_n(\mu^k_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n(\mu^k_n \frac{r}{a})\cos n\varphi,$$

$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \text{ при } n \neq 0,$$

$$(\tilde{\Phi})^s_{nk}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J'_n(\mu^k_n)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi(r,\varphi,b) J_n(\mu^k_n \frac{r}{a})\sin n\varphi.$$

Отметим, что формулы (2.15) характеризуют убывание коэффициентов Фурье $\tilde{\Phi}_{nm}(b)$ с ростом n и k, если функции f и g таковы, что обеспечивают существование решения задачи (1.1) и, следовательно, — функции v_H вида (2.9). Подставляя коэффициенты Фурье $(\tilde{v}_H)_{nm}$ из (2.15) в ряд (2.9), получим функцию v в области $D(-\infty, H)$

$$v(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \exp\{\frac{\mu^k_n}{a}(H-b)\} J_n(\mu^k_n\frac{r}{a})[(\tilde{\Phi})^c_{nk}(b)\cos n\varphi - (\tilde{\Phi})^s_{nk}(b)\sin n\varphi]. \tag{2.16}$$

Ряд (2.16), как и ряд (2.9), сходится равномерно в $D(-\infty, H-\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, если решение задачи (1.1) существует при данных f и g.

Формула (2.8), где функции v и Φ вида (2.16) и (2.6) соответственно, дает явное выражение для решения задачи (1.1).

3. Построение приближенного решения задачи в случае приближенных данных Коши

Пусть функции f и g в задаче (1.1) заданы с погрешностью, то есть вместо f и g заданы функции f^δ и g^δ, такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leqslant \delta.$$

Построим приближенное решение задачи (1.1), сходящееся к точному решению при $\delta \to 0$. Функция Φ вида (2.6) в этом случае может быть получена приближенно:

$$\Phi^\delta(M) = \int\limits_S \Big[g^\delta(P)\varphi(M,P) - f^\delta(P)\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\Big] d\sigma_P. \tag{3.1}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к разности функций (3.1) и (2.6) при

$$M \in \Pi(b), \quad b < \min_{(r,\varphi)} F(r,\varphi),$$

получим оценку погрешности правой части интегрального уравнения (2.14)

$$|\Phi^\delta(M) - \Phi(M)| \leqslant \max_{M\in\Pi(b)} \Big(\int\limits_S \varphi^2(M,P) d\sigma_P\Big)^{1/2} \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} +$$

$$+ \max_{M\in\Pi(b)} \Big(\int\limits_S \big[\frac{\partial\varphi}{\partial n_P}(M,P)\big]^2 d\sigma_P\Big)^{1/2} \|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leqslant C\delta.$$

В качестве приближенного решения интегрального уравнения (2.14) с приближенной правой частью (3.1) будем рассматривать экстремаль функционала Тихонова [3] со стабилизатором нулевого порядка

$$M^\alpha[w] = \left\|Gw - \Phi^\delta\right\|^2_{L_2(\Pi(b))} + \alpha\|w\|^2_{L_2(\Pi(H))},\ \alpha > 0. \tag{3.2}$$

Экстремаль функционала может быть получена как решение уравнения Эйлера для функционала (3.2)

$$G^*Gw + \alpha w = G^*\Phi^\delta,$$

которое, в свою очередь, с использованием разложения (2.13) ядра интегрального оператора G, может быть представлено в виде алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье функции w

$$\exp\{-2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}\tilde{w}_{nk} + \alpha\tilde{w}_{nk} = -\exp\{-\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b), \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nk}(b) = \frac{2\epsilon_n}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^k)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b) J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})\cos n\varphi,$$
$$\epsilon_0 = 0.5, \quad \epsilon_n = 1 \ \text{при}\ n \neq 0,$$
$$\tilde{\Phi}^\delta_{nk}(b) = (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nk}(b) = \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_n^k)]^2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r dr \Phi^\delta(r,\varphi,b) J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})\sin n\varphi,$$

— коэффициенты Фурье функции $\Phi^\delta(M)|_{M\in\Pi(b)}$.

Решая алгебраические уравнения относительно коэффициентов Фурье экстремали и подставляя экстремаль w^δ_α вместо v_H в (2.9), найдем приближение v^δ_α к функции v в области $D(-\infty, H)$:

$$v^\delta_\alpha(M) = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\{\frac{\mu_n^k}{a}(z_M-b)\}}{1+\alpha\exp\{2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\}} J_n(\mu_n^k\frac{r}{a})[(\tilde{\Phi}^\delta)^c_{nk}(b)\cos n\varphi - (\tilde{\Phi}^\delta)^s_{nk}(b)\sin n\varphi]. \tag{3.4}$$

Функция (3.4) отличается от точной функции v вида (2.16) регуляризирующим множителем $(1+\alpha\exp\{2\frac{\mu_n^k}{a}(H-b)\})^{-1}$, обеспечивающим сходимость ряда.

В соответствии с (2.8) приближенное решение задачи (1.1) получим в виде

$$u^\delta_\alpha(M) = v^\delta_\alpha(M) + \Phi^\delta(M), \quad M\in D(F,H), \tag{3.5}$$

где v^δ_α и Φ^δ — функции вида (3.4) и (3.1) соответственно.

Для приближенного решения (3.5) имеет место

Теорема 3.1. *Пусть решение задачи* (1.1) *существует. Тогда для любого* $\alpha = \alpha(\delta)$ *такого, что* $\alpha(\delta) \to 0$ *и* $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *функция* $u_{\alpha(\delta)}$ *вида (3.5) равномерно сходится при* $\delta\to 0$ *к точному решению в* $D(F+\varepsilon, H-\varepsilon)$, $0<\varepsilon<0,5(H-\max\limits_{(r,\varphi)}F(r,\varphi))$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство соответствующей теоремы в [1].

Формулы (3.5), (3.4) и (3.1) решают поставленную задачу (1.1).

4. Приложение результатов к обратной задаче термографии

Построенное решение задачи (1.1) может быть использовано для решения обратной задачи термографии [5] в приложении к задачам математической обработки термограмм в тепловизионных исследованиях в медицине [6]. При моделировании участка тела пациента к задаче (1.1) приводит модель теплопроводящего тела цилиндрической формы, содержащего стационарные источники тепла. На боковой поверхности цилиндра поддерживается постоянная температура, что соответствует первому краевому условию в (1.1), а на поверхности S имеет место конвективный теплообмен с внешней средой, описываемый законом Ньютона. В этом случае поток тепла через поверхность S, т. е. нормальная производная, прямо пропорционален разности температур внутри тела и снаружи, что соответствует третьему краевому условию. Если распределение температуры на поверхности S может быть измерено как функция f, например, тепловизионными методами, то в рамках описанной модели оказывается известной и нормальная производная, что приводит к рассмотренной здесь задаче (1.1) восстановления пространственного распределения температуры, аномалии которого могут быть связаны с патологиями внутренних органов пациента.

References

[1] Е. Б. Ланеев, Б. Васудеван, "Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа", *Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика*, 1999, № 1, 128–133. [E. B. Laneev, B. Vasudevan,, "On a stable solution of a mixed problem for the Laplace equation", *PFUR Reports. Series: Applied Mathematics and Computer Science*, 1999, № 1, 128–133 (In Russian)].

[2] Е. Б. Ланеев, "О построении функции Карлемана на основе метода регуляризации Тихонова в некорректно поставленной задаче для уравнения Лапласа", *Дифференциальные уравнения*, **54**:4 (2018), 483–491; англ. пер.:E. B. Laneev, "Construction of a Carleman function based on the Tikhonov regularization method in an ill-posed problem for the Laplace equation", *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 476–485.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979. [A. N. Tikhonov, V. YA. Arsenin, *Metody Resheniya Nekorrektnyh Zadach*, Nauka, M., 1979 (In Russian)].

[4] А. Н. Тихонов, В. Б. Гласко, О. К. Литвиненко, В. Р. Мелихов, "О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс на основе метода регуляризации", *Изв. АН СССР. Физика Земли*, 1968, № 1, 30–48. [A. N. Tikhonov A.N., V. B. Glasko, O. K. Litvinenko, V. R. Melikhov, "O prodolzhenii potentsiala v storonu vozmushchayushchikh mass na osnove metoda regulyarizatsii", *Izv. AN SSSR. Fizika Zemli*, 1968, № 1, 30–48 (In Russian)].

[5] Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов, "Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе.", *Вестник РУДН. Серия Математика*, **10**:1 (2003), 100–110. [E. B. Laneev, M. N. Muratov,, "Ob odnoy obratnoy zadache k kraevoy zadache dlya uravneniya Laplasa s usloviem tret'ego roda na netochno zadannoy granitse", *PFUR Reports. Series: Mathematics*, **10**:1 (2003), 100–110 (In Russian)].

[6] Г. Р. Иваницкий, "Тепловидение в медицине", *Вестник РАН.*, **76**:1 (2006), 48–58. [G. R. Ivanitskii, "Thermovision in medicine", *Herald of the Russian Academy of Sciences*, **76**:1 (2006), 48–58 (In Russian)].

Информация об авторах

Ланеев Евгений Борисович, доктор физико-математических наук, профессор Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Быков Дмитрий Юрьевич, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Зубаренко Анастасия Владимировна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zubarana18@gmail.com

Куликова Ольга Николаевна, студент Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: helyakulikova@gmail.com

Морозова Дарья Алексеевна, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: dasha m96@mail.ru

Шунин Евгений Владимирович, студент магистратуры Математического института им. М. С. Никольского. Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: shunin e@mail.ru

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Ланеев Евгений Борисович
E-mail: elaneev@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.06.2020 г.
Поступила после рецензирования 08.09.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Evgeniy B. Laneev, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: elaneev@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4255-9393

Dmitriy Yu. Bykov, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: dm.yurievich@mail.ru

Anastasia V. Zubarenko, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: zubarana18@gmail.com

Olga N. Kulikova, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: helyakulikova@gmail.com

Darya A. Morozova, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: dasha m96@mail.ru

Evgeniy V. Shunin, Student, Mathematical Department. RUDN University, Moscow, Russian Federation. E-mail: shunin e@mail.ru

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Evgeniy B. Laneev
E-mail: elaneev@yandex.ru

Received 06.06.2020
Reviewed 08.09.2020
Accepted for press 05.03.2021

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54
УДК 517.988.63+517.968.4+515.124.4

Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций

Вассим МЕРЧЕЛА
Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, Гельма, П.Я. 401

On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions

Wassim MERCHELA
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University May 8, 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Аннотация. Рассматривается уравнение $G(x)=\tilde{y}$, где отображение G действует из метрического пространства X в пространство Y, на котором определено расстояние, $\tilde{y}\in Y$. Метрика в X и расстояние в Y могут принимать значение ∞, расстояние удовлетворяет лишь одному свойству метрики: расстояние между $y,z\in Y$ равно нулю тогда и только тогда, когда $y=z$. Для отображений $X\to Y$ определены понятия множеств накрывания, липшицевости и замкнутости. В этих терминах получено утверждение об устойчивости в метрическом пространстве X решений рассматриваемого уравнения к изменениям отображения G и элемента $\tilde{y}$. Это утверждение применено к исследованию интегрального уравнения

$$f\big(t,\int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds,x(t)\big)=\tilde{y}(t),\quad t\in[0,1],$$

относительно неизвестной измеримой по Лебегу функции $x:[0,1]\to\mathbb{R}$. Получены достаточные условия устойчивости решений (в пространстве измеримых функций с топологией равномерной сходимости) к изменениям функций $f,\mathcal{K},\tilde{y}$.

Ключевые слова: операторное уравнение; существование решений; устойчивость решений; накрывающее отображение; расстояние; пространство измеримых функций; интегральное уравнение

Для цитирования: *Мерчела В.* Об устойчивости решений интегральных уравнений в классе измеримых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 44–54. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54.

Abstract. Consider the equation $G(x)=\tilde{y}$, where the mapping G acts from a metric space X into a space Y, on which a distance is defined, $\tilde{y}\in Y$. The metric in X and the distance in Y can take on the value ∞, the distance satisfies only one property of a metric: the distance between $y,z\in Y$ is zero if and only if $y=z$. For mappings $X\to Y$ the notions of sets of covering, Lipschitz property, and closedness are defined. In these terms, the assertion is obtained about the stability in the metric space X of solutions of the considered equation to changes of the mapping G and the element $\tilde{y}$. This assertion is applied to the study of the integral equation

$$f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0.1],$$

with respect to an unknown Lebesgue measurable function $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Sufficient conditions are obtained for the stability of solutions (in the space of measurable functions with the topology of uniform convergence) to changes of the functions $f, \mathcal{K}, \tilde{y}$.

Keywords: operator equation; existence of solutions; stability of solutions; covering mapping; distance; space of measurable functions; integral equation

For citation: Merchela W. Ob ustoychivosti resheniy integral'nykh uravneniy v klasse izmerimykh funktsiy [On stability of solutions of integral equations in the class of measurable functions]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 44–54. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-44-54. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Результаты о неподвижных точках операторов — один из основных инструментов доказательства теорем существования решений различных классов уравнений, в том числе дифференциальных, интегральных, функционально-дифференциальных. Так, в большинстве работ по интегральным уравнениям (см., например, [1–3]) исследуются уравнения вида

$$x(t) = f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big), \quad t \in [0,1]. \tag{0.1}$$

Разрешенность уравнения (0.1) относительно неизвестной функции x позволяет применить к его изучению результаты о неподвижных точках. Однако, если уравнение не разрешено относительно неизвестной функции (или ее производной), условия его разрешимости, как правило, не удается получить с помощью теорем о неподвижной точке. Для исследования таких уравнений часто оказываются эффективными утверждения о точках совпадения и об операторных уравнениях, использующие свойства накрывания (также называемого регулярностью) отображений в метрических пространствах или в более общих пространствах с расстоянием. Такой подход для нелинейных интегральных уравнений Вольтерры, не разрешенных относительно неизвестной существенно ограниченной функции, был реализован в [4]. Аналогичные методы были использованы в [5] при исследовании задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. Для таких уравнений утверждения об уравнениях с накрывающими отображениями метрических пространств позволили также исследовать корректность задачи Коши (см. [6]), получить условия существования и оценки решений краевых задач (см. [7]), задач управления (см. [8, 9]).

Распространения на обобщенные метрические пространства результатов о накрывающих отображениях, полученные в работах [10–12], открывают возможности исследования более широких классов уравнений. В данной статье демонстрируются такие возможности применительно к интегральному уравнению в пространстве измеримых функций.

В первой части вводятся основные понятия, в том числе определяются множества накрывания и липшицевости отображения, действующего из метрического пространства в пространство с расстоянием. Далее рассматривается абстрактное уравнение с отображением, действующим из метрического пространства в пространство с расстоянием. Получены условия устойчивости решений к изменениям этого отображения. Во второй части статьи определяются расстояния между измеримыми функциями, а также исследуются множества накрывания и липшицевости конкретных отображений, действующих в полученных пространствах. Это утверждение в третьей заключительной части статьи применяется к исследованию нелинейного интегрального уравнения в пространстве измеримых функций. Здесь получены условия существования и устойчивости решений к изменениям функций, определяющих уравнение.

1. Основные понятия

Стандартно обозначаем через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел, $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Эти множества полагаем линейно упорядоченными «естественным числовым порядком», причем $+\infty > r$ при любом $r \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $X = (X, \rho)$ — метрическое пространство с метрикой $\rho : X \times X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Обозначим $B_X(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \le r\}$ — замкнутый шар в X с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (если $r = +\infty$, то $B_X(x_0, +\infty) = X$ при любом x_0).

Пусть также задано множество $Y \neq \emptyset$. *Расстоянием* в Y называют отображение $d : Y \times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такое, что

$$\forall y_1, y_2 \in Y \quad d(y_1, y_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = y_2 \tag{1.1}$$

(в отличие от метрики, расстояние d может быть несимметричным и может не удовлетворять неравенству треугольника). Будем говорить, что последовательность $\{y_i\} \subset Y$ *сходится* к элементу $y \in Y$ и писать $y_i \to y$, если $d(y_i, y) \to 0$.

Для отображения $f : X \to Y$ при определении аналогов классических понятий непрерывности и замкнутости следует учитывать, что в случае сходимости последовательности $f(x_i)$ ее предел может быть не единственным. Поэтому, например, требование замкнутости графика отображения $f : X \to Y$ является чрезвычайно ограничительным. В связи с этим обстоятельством в [11, 13] введено следующее понятие *множества замкнутости отображения* f *относительно множества* $U \subset X$,

$$\mathrm{Cl}[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall \{x_i\} \subset U \ x_i \to x, \ f(x_i) \to y \ \Rightarrow \ f(x) = y\big\}.$$

Для характеристики свойств накрывания и липшицевости определим еще два термина, введенные для отображений метрических пространств в [14] и распространенные на рассматриваемые здесь отображения $X \to Y$ в [11, 13]. Пусть заданы числа $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ и множество $U \subset X$. Определим множества

$$\mathrm{Cov}_\alpha[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \exists u \in U \ f(u) = y, \ \rho(x, u) \le \alpha^{-1} d(f(x), y), \ \ \rho(x, u) < \infty\big\},$$
$$\mathrm{Lip}_\beta[f; U] := \big\{(x, y) \in X \times Y \mid \forall u \in U \ f(u) = y \ \Rightarrow \ d(f(x), y) \le \beta \rho(x, u)\big\},$$

которые будем называть, соответственно, множествами *α-накрывания и β-липшицевости отображения* f *относительно* U.

Для определенных здесь множеств справедливы соотношения:

$$U \subset \overline{U} \subset X \times Y \ \Rightarrow \ \mathrm{Cl}[f; U] \supset \mathrm{Cl}[f; \overline{U}], \quad \mathrm{Cov}_\alpha[f; U] \subset \mathrm{Cov}_\alpha[f; \overline{U}], \quad \mathrm{Lip}_\beta[f; U] \supset \mathrm{Lip}_\beta[f; \overline{U}]. \tag{1.2}$$

Отметим, что используемые в теореме Арутюнова [15] о точках совпадения отображений $\psi, \varphi : X \to Y$ (в случае, когда оба пространства X и Y метрические) свойства α-накрывания отображения ψ и β-липшицевости отображения φ равносильны равенствам $\mathrm{Cov}_\alpha[\psi; X] = X \times Y$, $\mathrm{Lip}_\beta[\varphi; X] = X \times Y$. Теорема Арутюнова в [10] была распространена на отображения f-квазиметрических пространств, в [12] — на отображения, действующие из метрического пространства в пространство с расстоянием. Сформулируем это утверждение.

Пусть заданы отображение $F : X \times X \to Y$ и элемент $\tilde{y} \in Y$. Рассмотрим уравнение

$$G(x) := F(x, x) = \tilde{y}. \tag{1.3}$$

Исследуем устойчивость решений уравнения (1.3) к изменениям отображения F и элемента $\tilde{y}$. Но прежде приведем условия разрешимости этого уравнения.

Лемма 1.1 (см. [11])**.** *Пусть метрическое пространство X полное и задан элемент $x_0 \in X$ такой, что $d\big(F(x_0, x_0), \tilde{y}\big) < \infty$. Предположим, что существуют $\alpha > \beta \geq 0$ такие, что для любого $x \in U := B_X(x_0, R)$, где $R := (\alpha - \beta)^{-1} d\big(F(x_0, x_0), \tilde{y}\big)$, выполнены включения*

$$(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_\alpha[F(\cdot, x); X], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Lip}_\beta[F(x, \cdot); U], \quad (x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cl}[G; U].$$

Тогда в шаре U существует решение уравнения (1.3).

Теперь рассмотрим задачу об устойчивости решений уравнения (1.3), которую будем трактовать следующим образом. Пусть заданы отображения $F_i : X \times X \to Y$ и элементы $\tilde{y}_i \in Y$ $(i \in \mathbb{N})$. Нас интересуют достаточные условия существования при каждом i решения $x = \xi_i$ уравнения

$$G_i(x) := F_i(x, x) = \tilde{y}_i, \quad i \in \mathbb{N}\,. \tag{1.4}$$

и сходимости последовательности $\{\xi_i\}$ к решению уравнения (1.3).

Теорема 1.1. *Пусть метрическое пространство X полное и задано решение $x = \xi \in X$ уравнения* (1.3)*. Предположим, что при каждом $i \in \mathbb{N}$ существуют $\alpha_i > \beta_i \geq 0$ такие, что при $i \to \infty$ имеет место сходимость*

$$R_i := \frac{1}{\alpha_i - \beta_i} d\big(F_i(\xi, \xi), \tilde{y}_i\big) \to 0$$

и для любого $x \in U_i := B_X(\xi, R_i)$ выполнены включения

$$(x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}[F_i(\cdot, x); X], \quad (x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}[F_i(x, \cdot); U_i], \quad (x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Cl}[G_i; U_i]. \tag{1.5}$$

Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ существует решение $x = \xi_i$ уравнения (1.4) *такое, что $\xi_i \to \xi$ при $i \to \infty$.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 уравнение (1.4) имеет решение $x = \xi_i$, принадлежащее шару $U_i = B_X(\xi, R_i)$. Так как при $i \to \infty$ для радиуса этого шара выполнено $R_i \to 0$, получаем, что последовательность $\{\xi_i\}$ сходится в метрическом пространстве X к элементу ξ. □

Отметим, что в случае, когда оба пространства X и Y являются метрическими, условия устойчивости операторных уравнений вида (1.4) получены в [4], а условия устойчивости точек совпадения — в [16].

2. Множества накрывания и липшицевости отображений в пространствах измеримых функций

Здесь рассматриваются множества замкнутости, липшицевости и накрывания операторов, порождающих интегральное уравнение. Формулируемые здесь результаты с доказательствами содержатся в рукописи статьи «Метод исследования интегральных уравнений, использующий множество накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых функций» (авторы: Е.С. Жуковский, В. Мерчела), недавно представленной в журнал «Дифференциальные уравнения», и частично в работе [11].

Мы будем рассматривать интегральные уравнения в классе измеримых по Лебегу функций. Если окажется, что интеграл от некоторой измеримой функции не существует, будем писать, что этот интеграл равен ∞. Поэтому наряду с «обычным пространством» $\mathbb{R}$ действительных чисел будем рассматривать его расширение $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В $\overline{\mathbb{R}}$ определим разность двух элементов, среди которых есть ∞, соотношениями

$$\infty - \infty = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; x - \infty = \infty - x = \infty.$$

Определим операцию вычисления модуля как отображение $|\cdot| : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, причем, будем полагать, что $|\infty| = +\infty$.

Обозначим через $\overline{\mathbb{S}}$ пространство измеримых (по Лебегу) функций $u : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$, а через $\mathbb{S}$ его подпространство, содержащее измеримые функции, принимающие только конечные значения. В пространстве $\overline{\mathbb{S}}$ определим расстояние следующим образом.

Пусть задана функция двух аргументов $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ такая, что при любом фиксированном втором аргументе $z \in \overline{\mathbb{R}}$ функция первого аргумента $\theta(\cdot, z) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ непрерывна в точке z, выполнено $\theta(z,z) = 0$ и

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \gamma = \gamma(z,\delta) > 0 \;\; \forall z' \in \overline{\mathbb{R}} \;\; |z' - z| \geq \delta \;\Rightarrow\; \theta(z', z) \geq \gamma.$$

В силу принятых предположений θ является расстоянием в $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим $\overline{\mathbb{R}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta)$.

Будем также предполагать, что функция θ суперпозиционно измерима: выполнено $\theta(z_1, z_2) \in \overline{\mathbb{S}}$ для любых $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}}$ (условия суперпозиционной измеримости для пространства $\mathbb{S}$ получены в [17], см. также [18, с. 110]; эти условия сохраняются и для рассматриваемого здесь пространства $\overline{\mathbb{S}}$). Определим отображение

$$d^{\theta} : \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \quad d^{\theta}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1]} \theta(z_1(t), z_2(t)).$$

Для отображения d^{θ}, очевидно, выполнено соотношение (1.1), поэтому d^{θ} — расстояние в $\overline{\mathbb{S}}$. Определим пространство $\overline{\mathbb{S}}^{\theta} := (\overline{\mathbb{S}}, d^{\theta})$ и его подпространство $\mathbb{S}^{\theta} := (\mathbb{S}, d^{\theta})$.

Примером функции $\theta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, отвечающей всем сформулированным требованиям, является функция

$$\theta_0 : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{R}} \quad \theta_0(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Эта функция является метрикой в $\overline{\mathbb{R}}$, обозначим $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{R}}, \theta_0)$.

Легко проверяется, что сходимости в пространствах $\overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ и $\overline{\mathbb{R}}^{\theta_0}$ равносильны. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении непрерывных функций, определенных или имеющих значения в $\overline{\mathbb{R}}$, мы не будем оговаривать, относительно какого из расстояний θ или θ_0 они непрерывны.

Через функцию θ_0 в $\overline{\mathbb{S}}$ определяется метрика

$$d^{\theta_0} : \overline{\mathbb{S}} \times \overline{\mathbb{S}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{S}} \quad d^{\theta_0}(z_1, z_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} |z_1(t) - z_2(t)|.$$

Соответствующее метрическое пространство измеримых функций обозначим через $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0} := (\overline{\mathbb{S}}, \theta_0)$, а его подпространство конечных функций — через $\mathbb{S}^{\theta_0} := (\mathbb{S}, \theta_0)$. Оба метрических пространства $\overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$, $\mathbb{S}^{\theta_0}$ являются полными.

Теперь рассмотрим отображения $\mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, которые в следующем разделе будут использоваться для исследования интегральных уравнений.

Пусть задана функция $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что при любом $x \in \mathbb{R}$ и п.в. $t \in [0,1]$ функция $g(\cdot, x) : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, функция $g(t, \cdot) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна. Определим оператор суперпозиции (оператор Немыцкого) соотношением

$$N_g : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (N_g u)(t) = g(t, u(t)), \quad t \in [0,1].$$

П р е д л о ж е н и е 2.1. $\mathrm{Cl}[N_g; \mathbb{S}^{\theta_0}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$.

Пусть задано измеримое многозначное отображение $\Phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что при любом $t \in [0,1]$ множество $\Phi(t) \subset \mathbb{R}$ не пусто и замкнуто. Обозначим

$$\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{ u \in \mathbb{S} \,|\, u(t) \in \Phi(t) \text{ при п.в. } t \in [0,1] \big\}.$$

Это множество измеримых сечений измеримого многозначного отображения Φ не пусто и, более того, для Φ имеет место представление Кастэна (см. [19, п. 8.1.2], [20, § 1.5]).

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть заданы* $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{S}$, $y \in \overline{\mathbb{S}}$. *Если для функции* $g(t, \cdot) : \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнено соотношение* $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g(t,\cdot); \Phi(t)\big]$, *то* $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[N_g; \mathrm{Sel}(\Phi)\big]$. *В частности, если* $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[g(t,\cdot); \mathbb{R}\big]$ *при п.в.* $t \in [0,1]$, *то* $(x, y) \in \mathrm{Cov}_\alpha\big[N_g; \mathbb{S}\big]$.

Утверждения, аналогичные предложениям 2.1 и 2.2, при более ограничительных предположениях на функцию θ получены в [11].

Теперь пусть заданы две функции: измеримая функция $\mathcal{K} : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ и функция $\overline{g} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что при любом $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и п.в. $t \in [0,1]$ функция $\overline{g}(\cdot, x) : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима, функция $\overline{g}(t, \cdot) : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна. Определим линейный интегральный оператор

$$K : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}, \;\; \forall u \in \mathbb{S} \;\; (Ku)(t) = \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) u(s) ds, \quad t \in [0,1],$$

и нелинейный интегральный оператор

$$\Upsilon : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}, \quad \forall u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (\Upsilon u)(t) = \overline{g}\Big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s) u(s) ds\Big), \quad t \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Опишем множество липшицевости отображения Υ следующим утверждением.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Пусть*

$$k_0 := \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} \int_0^1 |\mathcal{K}(t,s)| ds < \infty,$$

заданы $x \in \mathbb{S}$, $y \in \overline{\mathbb{S}}$, $\beta \geq 0$ *и многозначное отображение* $\Phi : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$, *со значениями* $\Phi(t) \neq \emptyset$, $t \in [0,1]$, *и такое, что* $\mathrm{Sel}(\Phi) := \big\{u \in \mathbb{S} \mid u(t) \in \Phi(t)$ *при п.в.* $t \in [0,1]\big\} \neq \emptyset$. *Определим функцию* $v = Kx \in \overline{\mathbb{S}}$ *и многозначное отображение*

$$\Omega : [0,1] \rightrightarrows \overline{\mathbb{R}}, \quad \Omega(t) = (K\Phi)(t) := \Big\{ \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)u(s)ds, \ \forall u \in \mathrm{Sel}(\Phi)\Big\}, \quad t \in [0,1].$$

Тогда, если для функции $\overline{g}(t,\cdot) : \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнено соотношение* $\big(v(t), y(t)\big) \in \mathrm{Lip}_\beta\big[\overline{g}(t,\cdot); \Omega(t)\big]$, *то* $(x,y) \in \mathrm{Lip}_{k_0\beta}[\Upsilon; \mathrm{Sel}(\Phi)]$.

3. Интегральное уравнение

Применим полученные утверждения к задаче об устойчивости решений интегрального уравнения.

Пусть заданы измеримые функции $\mathcal{K}, \mathcal{K}_i : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$), удовлетворяющие условию

$$k_i := \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1]} \int_0^1 |\mathcal{K}_i(t,s)| ds < \infty, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Пусть также заданы функции $\tilde{y}, \tilde{y}_i \in \overline{\mathbb{S}}$ и функции $f : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, измеримые по первому аргументу и непрерывные по совокупности второго и третьего аргументов. Рассмотрим последовательность уравнений

$$f_i\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}_i(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Сформулируем условия существования при каждом i решения $x = \xi_i \in \mathbb{S}$ уравнения (3.2) такого, что последовательность $\{\xi_i\} \subset \mathbb{S}$ сходится к решению $x = \xi \in \mathbb{S}$ уравнения

$$f\big(t, \int_0^1 \mathcal{K}(t,s)x(s)ds, x(t)\big) = \tilde{y}(t), \quad t \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Для произвольной функции $x \in \mathbb{S}$ при любом $i \in \mathbb{N}$ определим функции

$$\overline{g}_i^{[x]} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,1] \ \ \forall u \in \overline{\mathbb{R}} \quad \overline{g}_i^{[x]}(t,u) = f_i(t,u,x(t)),$$
$$g_i^{[x]} : [0,1] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}, \quad \forall t \in [0,1] \ \ \forall u \in \mathbb{R} \quad g_i^{[x]}(t,u) = f_i(t, \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)x(s)ds, u).$$

Заданные здесь функции $g_i^{[x]}, \overline{g}_i^{[x]}$, очевидно, измеримы по первому аргументу и непрерывны по второму аргументу. Определим также при любом $i \in \mathbb{N}$ операторы $K_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta_0}$ соотношением

$$\forall u \in \mathbb{S} \ \ (K_i u)(t) = \int_0^1 \mathcal{K}_i(t,s)u(s)ds, \quad t \in [0,1].$$

Теорема 3.2. *Пусть задано решение* $\xi \in \mathbb{S}$ *уравнения* (3.3). *Предположим, что при каждом* $i \in \mathbb{N}$ *существует* $\sigma_i > 0$ *такое, что при* $i \to \infty$ *имеет место сходимость*

$$R_i := \frac{1}{\sigma_i} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [0,1]} \theta\left(f_i\big(t, (K_i\xi)(t), \xi(t)\big), \, \tilde{y}_i(t)\right) \to 0.$$

Далее, пусть для всех $i \in \mathbb{N}$ *существует* $\alpha_i > \sigma_i$ *такое, что для любой функции* $x \in U_i := B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ *при п.в.* $t \in [0,1]$ *выполнены включения*

$$\big(x(t), \tilde{y}_i(t)\big) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}\big[g_i^{[x]}(t,\cdot); \mathbb{R}\big], \tag{3.4}$$

$$\big((K_i x)(t), \tilde{y}_i(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}\big[\overline{g}_i^{[x]}(t,\cdot); \overline{\Omega}_i(t)\big], \tag{3.5}$$

где $\beta_i := k_i^{-1}(\alpha_i - \sigma_i)$, $\overline{\Omega}_i(t) := [(K_i\xi)(t) - k_iR_i,\ (K_i\xi)(t) + k_iR_i]$. *Тогда для любого* $i \in \mathbb{N}$ *существует решение* $x = \xi_i \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ *уравнения* (3.2) *такое, что последовательность* $\{\xi_i\}$ *при* $i \to \infty$ *сходится в пространстве* $\mathbb{S}^{\theta_0}$ *к заданному решению* ξ *уравнения* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (3.2) — это уравнение вида (1.4), в котором отображения $F_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \times \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ ($i \in \mathbb{N}$) определены соотношением

$$\forall x, u \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad (F_i(x,u))(t) = f_i\big(t, (K_iu)(t), x(t)\big), \quad t \in [0,1],$$

а отображения $G_i : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ ($i \in \mathbb{N}$) — соотношением

$$\forall x \in \mathbb{S}^{\theta_0} \quad G_i x = F_i(x,x).$$

Покажем, что из предположений доказываемого утверждения следует выполнение условий теоремы 1.1 для данных отображений F_i, G_i.

Пространство $\mathbb{S}^{\theta_0}$ является полным.

Зафиксируем произвольное i. Покажем, что $\mathrm{Cl}[G_i; \mathbb{S}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$. Из этого равенства будет следовать третье включение в (1.5), так как в этом случае, в силу включения $\mathrm{Cl}[G_i; U_i] \supset \mathrm{Cl}[G; \mathbb{S}]$, будет выполнено $\mathrm{Cl}[G_i; U_i] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$.

Итак, пусть дана произвольная последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{S}^{\theta_0}$, элементы $x \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ и $y \in \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ такие, что

$$d^{\theta_0}(x_n, x) \to 0, \quad d^{\theta}\big(G_i x_n, y\big) \to 0 \quad (\text{при } n \to \infty).$$

Покажем, что справедливо равенство $G_i x = y$.

Из условия (3.1) вытекает, что $d^{\theta_0}(Kx_n, Kx) \le k_0\rho(x_n, x) \to 0$. Согласно определению расстояний d^{θ_0}, d^{θ} между измеримыми функциями, получаем, что при п. в. $t \in [0,1]$ выполнены соотношения

$$\theta_0\big(x_n(t), x(t)\big) \to 0, \quad \theta_0\big((K_ix_n)(t), (K_ix)(t)\big) \to 0, \quad \theta\big((G_ix_n)(t), y(t)\big) \to 0.$$

Эти соотношения, в силу определения функций θ_0, θ равносильны «обычной сходимости»

$$x_n(t) \to x(t), \quad (K_ix_n)(t) \to (K_ix)(t), \quad (G_ix_n)(t) \to y(t).$$

Отсюда в силу непрерывности при п. в. $t \in [0,1]$ функции $f(t,\cdot,\cdot)$ (по совокупности двух аргументов) $(G_ix_n)(t) = f_i\big(t, (K_ix_n)(t), x_n(t)\big)$ сходится к $(G_ix)(t) = f_i\big(t, (K_ix)(t), x(t)\big)$. А так как, согласно принятым предположениям, имеет место сходимость $(G_ix_n)(t) \to y(t)$, получаем $(G_ix)(t) = y(t)$, $t \in [0,\tau]$. Равенство $\mathrm{Cl}[G_i; \mathbb{S}] = \mathbb{S}^{\theta_0} \times \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$ доказано.

При заданном фиксированном i для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ отображение $F_i(x,\cdot)$ представляется в виде оператора $\Upsilon : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, определенного соотношением (2.1), где функция $\overline{g} := \overline{g}^{[x]}$. Определим отображение $\Phi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ со значениями

$$\forall t \in [0,1] \quad \Phi_i(t) = [\xi(t) - R_i,\ \xi(t) + R_i].$$

Очевидно, это отображение измеримо, и множество его измеримых сечений $\mathrm{Sel}(\Phi_i) = B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$. Для $\Omega_i(t) := (K_i\Phi_i)(t)$ имеем $\Omega_i(t) \subset \overline{\Omega}_i(t)$, и поэтому из предположения (3.5) следует (см. третье из соотношений (1.2)) $\big((K_i x)(t), \tilde{y}(t)\big) \in \mathrm{Lip}_{\beta_i}\big[\overline{g}_i^{[x]}(t,\cdot); \Omega_i(t)\big]$. Согласно предложению 2.3 выполнено включение $(x, \tilde{y}_i) \in \mathrm{Lip}_{k_i\beta_i}[F_i(x,\cdot); B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)]$, в котором константа липшицевости $k_i\beta_i = \alpha_i - \sigma_i < \alpha_i$.

Для произвольного $x \in B_{\mathbb{S}^{\theta_0}}(\xi, R_i)$ исследуем множество α_i-накрывания отображения $F_i(\cdot, x) : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$. Это отображение есть оператор Немыцкого $N_{g_i^{[x]}} : \mathbb{S}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{S}}^{\theta}$, порожденный функцией $g_i^{[x]} : [0,1] \times \mathbb{R}^{\theta_0} \to \overline{\mathbb{R}}^{\theta}$. Из условия (3.4) согласно предложению 2.2 следует включение $(x, \tilde{y}) \in \mathrm{Cov}_{\alpha_i}[F_i(\cdot, x); \mathbb{S}]$.

Итак, для отображений F_i, G_i выполнены все условия теоремы 1.1, и согласно этой теореме существует решение $x = \xi_i \in \mathbb{S}^{\theta_0}$ уравнения (3.2) такое, что $\xi_i \to \xi$. $\square$

В заключение отметим, что в большинстве работ по интегральным уравнениям исследуется уравнение (0.1), разрешенное относительно неизвестной функции. Это уравнение обычно рассматривается в банаховых пространствах непрерывных или суммируемых функций. Полученные здесь результаты позволяют исследовать не разрешенное относительно неизвестной функции интегральное уравнение не только в классе измеримых функций, но и в пространстве L_p суммируемых со степенью $p \in [1, \infty]$ на отрезке $[0,1]$ функций. При выполнении предположений теоремы 3.2, если дополнительно известно, что решение ξ «предельного уравнения» (3.3) принадлежит пространству L_p, то для любого $i \in \mathbb{N}$ существует решение $\xi_i \in L_p$ уравнения (3.2) такое, что последовательность $\{\xi_i\}$ сходится к функции ξ равномерно, а следовательно, и по норме пространства L_p.

References

[1] T. Diogo, A. Pedas, G. Vainikko, “Integral equations of the third kind in L^p spaces”, *J. Integral Equations Applications*, **32**:4 (2020), 417–427.

[2] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[3] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1991.

[4] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.

[5] Е. Р. Аваков, А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.:E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:11 (2011), 1523–1537; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the well-posedness of differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equation*, **47**:11 (2011), 1541–1555.

[7] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:4 (2013), 439–455; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “Covering mappings in a product of metric spaces and boundary value problems for differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **49**:4 (2013), 420–436.

[8] Е. С. Жуковский, Е. А. Плужникова, “Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями”, *Автомат. и телемех.*, 2015, № 1, 31–56; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Pluzhnikova, “On controlling objects whose

motion is defined by implicit nonlinear differential equations", *Autom. Remote Control*, **76**:1 (2015), 24–43.

[9] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, "Точки совпадения отображений в пространствах с векторной метрикой и их приложения к дифференциальным уравнениям и управляемым системам", *Дифференциальные уравнения*, **53**:11 (2017), 1473; англ. пер.:A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, "Coincidence points of mappings in vector metric spaces with applications to differential equations and control systems", *Differential Equations*, **53**:11 (2017), 1440 –1448.

[10] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, "Теория (q_1, q_2)-квазиметрических пространств и точки совпадения", *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, "Theory of (q_1, q_2)-quasimetric spaces and coincidence points", *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.

[11] Е. С. Жуковский, В . Мерчела, "О накрывающих отображениях в обобщенных метрических пространствах в исследовании неявных дифференциальных уравнений", *Уфимский матемтический журнал*, **12**:4 (2020), 42–55; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "On covering mappings in generalized metric spaces in studying implicit differential equations", *Ufa Mathematical Journal*, **12**:4 (2020), 42–55.

[12] В. Мерчела, "К теореме Арутюнова о точках совпадения двух отображений метрических пространств", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:121 (2018), 65–73. [W. Merchela, "About Arutyunov theorem of coincidence point for two mapping in metric spaces", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:121 (2018), 65–73 (In Russian)].

[13] С. Бенараб, Е. С. Жуковский, В. Мерчела, "Теоремы о возмущениях накрывающих отображений в пространствах с расстоянием и в пространствах с бинарным отношением", *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:4 (2019), 52–63. [S. Benarab, E. S. Zhukovskiy, W. Merchela, "Theorems on perturbations of covering mappings in spaces with a distance and in spaces with a binary relation", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **25**:4 (2019), 52–63 (In Russian)].

[14] Е. О. Бурлаков, Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, Н П. Пучков, "Приложения накрывающих отображений в теории неявных дифференциальных уравнений", *Итоги науки и техники. Современная математика и ее прилоэсения. Тематические обзоры*, **165** (2019), 21–33. [E. O. Burlakov, T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, N. P. Puchkov, "Applications of covering mappings in the theory of implicit differential equations", *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **165** (2019), 21–33 (In Russian)].

[15] А. В. Арутюнов, "Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки", *Доклады РАН*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "Covering mappings in metric spaces and fixed points", *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.

[16] А. В. Арутюнов, "Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений", *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 163–169; англ. пер.:A. V. Arutyunov, "Stability of coincidence points and properties of covering mappings", *Mathematical Notes*, **86** (2009), 153–158.

[17] И. В. Шрагин, "Суперпозиционная измеримость при обобщенных условиях Каратеодори", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **19**:2 (2014), 476–478. [I. V. Shragin, "Superpositional measurability under generalized caratheodory conditions", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **19**:2 (2014), 476–478 (In Russian)].

[18] Е. С. Жуковский, "Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина", *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities", *St. Petersburg Mathematical Journal*, **30**:1 (2019), 73–94.

[19] А. Д. Иоффе , В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of Extremal Problems.* V. 6, Stud. Math. Appl., North-Holland–Amsterdam–New York, 1979.

[20] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, ЛИБРОКОМ, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multi-Valued Mappings and Differential Inclusions*, Librokom Publ., Moscow, 2011 (In Russian)].

Информация об авторе

Мерчела Вассим, аспирант. Лаборатория прикладной математики и моделирования, Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
Поступила после рецензирования 14.01.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Wassim Merchela, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory, University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3702-0932

Received 10.11.2020
Reviewed 14.01.2021
Accepted for press 05.03.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67

УДК 517.929.4

Устойчивость слабого решения гиперболической системы с распределенными параметрами на графе

Вячеслав Васильевич ПРОВОТОРОВ[1] **, Алексей Петрович ЖАБКО**[2]

[1] ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1

[2] ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская набережная, 7-9

Stability of a weak solution for a hyperbolic system with distributed parameters on a graph

Vyacheslav V. PROVOTOROV[1] **, Aleksei P. ZHABKO**[2]

[1] Voronezh State University

1 Universitetskaya pl., Voronezh 394018, Russian Federation

[2] St Petersburg University

7/9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russian Federation

Аннотация. В работе указаны условия устойчивости решения эволюционной гиперболической системы с распределенными параметрами на графе, описывающей колебательный процесс сплошной среды в пространственной сети. Гиперболическая система рассматривается в слабой постановке: слабым решением системы является суммируемая функция, удовлетворяющей интегральному тождеству, определяющему вариационную постановку для начально-краевой задачи. Основная идея, определившая все содержание настоящей работы, состоит в представлении слабого решения в виде обобщенного ряда Фурье с последующим анализом сходимости этого ряда и рядов, полученных его однократным почленным дифференцированием. Используемый подход основывается на априорных оценках слабого решения и построении (методом Фаедо–Галеркина со специальным базисом — системой обобщенных собственных функций эллиптического оператора гиперболического уравнения) слабо компактного семейства приближенных решений в выбранном пространстве состояний. Полученные результаты являются основополагающими при исследовании задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций, имеющих интересные аналогии с колебаниями многофазовых сред многомерной гидродинамики.

Ключевые слова: гиперболическая система; распределенные параметры на графе; слабое решение; устойчивость

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP05136197).

Для цитирования: *Провоторов В.В., Жабко А.П.* Устойчивость слабого решения гиперболической системы с распределенными параметрами на графе // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 55–67. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67.

Abstract. In the work, the stability conditions for a solution of an evolutionary hyperbolic system with distributed parameters on a graph describing the oscillating process of continuous medium in a spatial network are indicated. The hyperbolic system is considered in the weak formulation: a weak solution of the system is a summable function that satisfies the integral identity which determines the variational formulation for the initial-boundary value problem. The basic idea, that has determined the content of this work, is to present a weak solution in the form of a generalized Fourier series and continue with an analysis of the convergence of this series and the series obtained by its single termwise differentiation. The used approach is based on a priori estimates of a weak solution and the construction (by the Fayedo–Galerkin method with a special basis, the system of eigenfunctions of the elliptic operator of a hyperbolic equation) of a weakly compact family of approximate solutions in the selected state space. The obtained results underlie the analysis of optimal control problems of oscillations of netset-like industrial constructions which have interesting analogies with multi-phase problems of multidimensional hydrodynamics.

Keywords: hyperbolic system; distributed parameters on a graph; weak solution; stability

Acknowledgements: The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Republic Kazakhstan (project AP05136197).

For citation: Provotorov V.V., Zhabko A.P. Ustoychivost' slabogo resheniya giperbolicheskoy sistemy s raspredelennymi parametrami na grafe [Stability of a weak solution for a hyperbolic system with distributed parameters on a graph]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 55–67. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-55-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Настоящая работа является естественным продолжением исследования по слабой разрешимости гиперболической системы с распределенными параметрами на графе [1]. Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(a\,(x)\,\frac{\partial u\,(x,t)}{\partial x}\Big) + b\,(x)\,u\,(x,t) = f\,(x,t)\,, \tag{0.1}$$

с распределенными параметрами на произвольном ориентированном графе $\Gamma : x \in \Gamma$. Подробное описание коэффициентов уравнения $a(x)$, $b(x)$ и функции $f(x,t)$ приведено ниже. Слабые решения определяются с помощью интегрального тождества, заменяющего собой уравнение, начальные и граничные условия (см., например, монографию О. А. Ладыженской [2, с. 196]). При этом указываются пространства, в которых предлагается отыскание слабого решения, приводятся условия слабой разрешимости такой задачи и последующий анализ устойчивости решения.

Центральная идея, определившая все содержание настоящей работы, состоит в применении используемых в работах [1,3] подходов к анализу эволюционных начально-краевых задач и представлении решения в виде обобщенного ряда Фурье с последующим анализом сходимости этого ряда и рядов, полученным его однократным почленным дифференцированием. Существенную роль будет играть система обобщенных собственных функций и спектральные характеристики эллиптического оператора приведенного выше уравнения (0.1). При этом рассматриваются однородные граничные условия первого рода (условия Дирихле), для граничных условий второго и третьего рода будут даны необходимые указания.

Полученные результаты открывают возможности для исследования задач оптимального управления колебаниями сетеподобных промышленных конструкций.

1. Понятия и обозначения, пространства функций с носителем на графе

Используются обозначения, принятые в работах [1,3,4]: ребра γ графа Γ имеют одинаковую длину, параметризованы и ориентированы отрезком $[0,1]$, при этом концевые точки произвольного ребра γ принимают значения 0 или 1 в зависимости от ориентации; γ_0 — произвольное ребро без концевых точек; Γ_0 — множество всех ребер γ_0; $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T)$, $\gamma_T=\gamma_0\times(0,T)$, $\partial\Gamma_T=\partial\Gamma\times(0,T)$; $\partial\Gamma$ — множество граничных узлов, $J(\Gamma)$ — множество внутренних узлов графа Γ. На протяжении всей работы используется интеграл Лебега по Γ_0 или Γ_T : $\int\limits_{\Gamma_0} f(x)dx=\int\limits_{\Gamma} f(x)dx=\sum\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma} f(x)_\gamma dx$ или $\int\limits_{\Gamma_T} f(x,t)dxdt=\sum\limits_{\gamma}\int\limits_{\gamma_T} f(x,t)_\gamma dxdt$, где $f(\cdot)_\gamma$ — сужение функции $f(\cdot)$ на ребро γ.

Рассмотрим гиперболическое уравнение (0.1), коэффициенты которого $a(x)$, $b(x)$ являются измеримыми ограниченными функциями и удовлетворяют условиям

$$0<a_*\le a(x)\le a^*,\ |b(x)|\le b^*,\ x\in\Gamma, \tag{1.1}$$

функция $f(x,t)$ определена в области Γ_T.

Обозначим через $L_1(\Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$ пространства функций, интегрируемых и интегрируемых с квадратом на Γ (аналогично вводятся пространства $L_1(\Gamma_T)$ и $L_1(\Gamma_T)$); $W_2^1(\Gamma)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную 1-го порядка также из $L_2(\Gamma)$; $W_2^1(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные первого порядка из $L_2(\Gamma_T)$ (аналогично определяется пространство $W_2^2(\Gamma_T)$); $L_{2,1}(\Gamma_T)$ — пространство функций из $L_1(\Gamma_T)$ с нормой

$$\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}=\int\limits_0^T\Big(\int\limits_\Gamma u^2(x,t)dx\Big)^{1/2}dt,$$

при этом $L_2(\Gamma_T)\subset L_{2,1}(\Gamma_T)$, что следует из неравенства $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}\le\sqrt{T}\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)}$.

З а м е ч а н и е 1.1. Следует отметить, что элементы $W_2^1(\Gamma_T)$ определены на каждом сечении цилиндра Γ_T плоскостью $t=t_0$ как элементы пространства $L_2(\Gamma)$ и непрерывны по t в норме $L_2(\Gamma)$ (см. [2, с. 70]).

В пространстве $W_2^1(\Gamma)$ введем билинейную форму

$$l(\mu,\nu)=\int\limits_\Gamma\Big(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx}+b(x)\mu(x)\nu(x)\Big)dx,$$

имеет место следующее утверждение [5].

Лемма 1.1. *Пусть функция $u(x)\in W_2^1(\Gamma)$ такова, что $\ell(u,\nu)-\int\limits_\Gamma f(x)\eta(x)dx=0$ для любой функции $\eta(x)\in W_2^1(\Gamma)$ ($f(x)\in L_2(\Gamma)$ — фиксированная функция). Тогда для любого ребра $\gamma\subset\Gamma$ сужение $a(x)_\gamma\frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках ребра γ.*

Из утверждения леммы следует, что пространство $W_2^1(\Gamma)$ содержит множество $\Omega_a(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций $u(x)$, для которых при каждом $\gamma\subset\Gamma$ сужение $a(x)_\gamma\frac{du(x)_\gamma}{dx}$ непрерывно в концевых точках γ и имеют место соотношения

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)}a(1)_\gamma\frac{du(1)_\gamma}{dx}=\sum_{\gamma\in r(\xi)}a(0)_\gamma\frac{du(0)_\gamma}{dx} \tag{1.2}$$

для внутреннего узла ξ этого ребра γ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ — множества ребер, соответственно ориентированных «к узлу ξ» и «от узла ξ»). Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma)$; очевидно $W^1(a,\Gamma)\subset W_2^1(\Gamma)$. Если при этом функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и условию $u(x)|_{\partial\Gamma}=0$, то получим пространство $W_0^1(a,\Gamma)$.

Пусть далее $\Omega_a(\Gamma_T)$ — множество функций $u(x,t)\in W_2^1(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t=t_0$ ($t_0\in[0,T]$) как функции класса $W^1(a,\Gamma)$ (см. замечание 1.1) и удовлетворяют соотношениям (1.2) для всех узлов $\xi\in J(\Gamma)$. Замыкание множества $\Omega_a(\Gamma_T)$ в норме $W_2^1(\Gamma_T)$ обозначим через $W^1(a,\Gamma_T)$, $W^1(a,\Gamma_T)\subset W_2^1(\Gamma_T)$.

В пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$ для уравнения (0.1) рассматривается первая начально-краевая задача с начальными условиями

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\qquad x\in\Gamma, \tag{1.3}$$

и однородным граничным условием

$$u|_{\partial\Gamma}=0,\qquad 0\le t\le T; \tag{1.4}$$

здесь $\varphi(x)\in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x)\in L_2(\Gamma)$, $f(x,t)\in L_{2,1}(\Gamma_T)$, для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения (1.1).

О п р е д е л е н и е 1.1. Слабым решением класса $W_2^1(\Gamma_T)$ краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) называется функция $u(x,t)\in W^1(a,\Gamma_T)$, равная $\varphi(x)$ при $t=0$ и удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma_T}\Big(-\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}+a(x)\tfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)u(x,t)\eta(x,t)\Big)\,dxdt=\\&=\int\limits_{\Gamma}\psi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\Gamma_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt\end{aligned} \tag{1.5}$$

при любых $\eta(x,t)\in\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ (элементы η пространства $\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ принадлежат $W^1(a,\Gamma_T)$ и удовлетворяют равенству $\eta(x,T)=0$).

Следуя идеям работы [1] и основываясь на полученных там результатах, приведем утверждения и краткие пояснения к ним, необходимые для дальнейшего анализа поведения слабого решения $u(x,t)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4).

2. Предварительные рассуждения, используемые результаты

Сформулируем утверждения, имеющие для последующего вспомогательный характер, не останавливаясь на деталях рассуждений. Подробные доказательства представлены в работе [1] (см. также [6]).

Основополагающие условия, определяющие слабую разрешимость задачи (0.1), (1.3), (1.4), вытекают из априорной оценки в пространстве $W^2(a,\Gamma_T)$ для решения $u(x,t)$ через исходные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ этой задачи (здесь $W^2(a,\Gamma_T)$ — замыкание в норме $W_2^2(\Gamma_T)$ множества функций $u(x,t)$ из $W^1(a,\Gamma_T)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}$ также из $L_2(\Gamma_T)$).

Обозначим через $\omega(t) = \int\limits_{\Gamma}(u^2+u_t^2+u_x^2)dx$, тогда ([1, теорема 1]) для решений $u(x,t) \in W^2(a,\Gamma_T)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4) при выполнении предположений (1.1) и для любого $t \in [0,T]$ имеет место априорная оценка

$$\omega^{1/2}(t) \le C_1(t)\omega^{1/2}(0) + C_2(t)\|f\|_{2,\Gamma_t}, \tag{2.1}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ определяются постоянными a_*, a^*, b^* и временем t. Неравенство (2.1) является аналогом энергетического неравенства для гиперболической системы (0.1) с распределенными параметрами на графе Γ, позволяющее оценить норму решения $u(x,t)$ в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$ через исходные данные $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и внешнюю силу $f(x,t)$. Отсюда нетрудно получить аналогичную оценку энергетической нормы решения $u(x,t)$.

Обратимся к вопросу слабой разрешимости начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) в пространстве $W^1(a,\Gamma_T)$. Дальнейшее предварим рассмотрением спектральной задачи на графе Γ [5,7]

$$-\frac{d}{dx}\big(a(x)\frac{d\phi}{dx}\big) + b(x)\phi = \lambda\phi, \qquad \phi|_{\partial\Gamma} = 0,$$

т. е. задачи определения множества таких чисел λ, каждому из которых соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение $\phi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, удовлетворяющее тождеству

$$l(\phi,\nu) = \lambda(\phi,\nu)$$

при любой функции $\nu(x) \in W^1(a,\Gamma)$. Это означает тот факт, что $\phi(x)$ есть обобщенная собственная функция класса $W^1(a,\Gamma)$, а λ — соответствующее ей собственное значение.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения* (1.1). *Имеют место следующие утверждения.*

1. Собственные значения вещественные и имеют конечную кратность, их можно занумеровать в порядке возрастания модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$; *соответственно нумеруются и обобщенные собственные функции:* $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$.

2. Собственные значения λ_k *положительны, за исключением, может быть, конечного числа первых; если* $b(x) \ge 0$, *тогда собственные значения неотрицательны.*

3. Система обобщенных собственных функций $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $W^1(a,\Gamma)$ *и пространстве* $L_2(\Gamma)$ *(везде ниже* $\|\phi_k\|_{L_2(\Gamma)} = 1$).

Условия существования слабого решения начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) представлены следующей теоремой 2.1.

Теорема 2.1. *Для любых* $\varphi(x) \in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ *и при выполнении предположений* (1.1) *начально-краевая задача* (0.1), (1.3), (1.4) *имеет по меньше мере одно слабое решение из пространства* $W^1(a,\Gamma_T)$.

Для доказательства используется метод Фаедо–Галеркина со специальным базисом $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$, приближения $u^N(x,t)$ слабого решения ищутся в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\phi_k(x), \tag{2.2}$$

функции $c_k^N(t)$ $\left(\frac{dc_k^N(t)}{dt} \in L_1(0,T)\right)$ определяются из соотношений

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Gamma \tfrac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\phi_l(x)dx + \int\limits_\Gamma \Big(a(x)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} + b(x)u^N(x,t)\phi_l(x)\Big)dx = \\ &= \int\limits_\Gamma f(x,t)\phi_l(xdx \qquad (l=\overline{1,N}),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$c_k^N(0) = \varphi_k^N, \qquad \frac{dc_k^N(0)}{dt} = \int\limits_\Gamma \psi(x)\phi_k(x)dx \qquad (k=\overline{1,N}), \tag{2.4}$$

где φ_k^N — коэффициенты Фурье сумм $\varphi^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \varphi_k^N \phi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$. Равенства (2.3) являются системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных $c_k^N(t)$ $(k=\overline{1,N})$. Коэффициенты ее суть ограниченные функции, а правые части принадлежат $L_1(0,T)$. Система (2.3) однозначно разрешима при начальных данных (2.4). Для приближений $u^N(x,t)$ справедлива оценка (2.1). Действительно, умножая каждое из равенств (2.3) на свое $\frac{dc_l^N(t)}{dt}$ и суммируя по l от 1 до N, приходим к равенству

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Gamma \Big(\tfrac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t^2}\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial t} + a(x)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial^2 u^N(x,t)}{\partial t\partial x} + b(x)u^N(x,t)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\Big)dx = \\ &= \int\limits_\Gamma f(x,t)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}dx,\end{aligned}$$

из которого следует (см. [1]) неравенство (2.1) при $u(x,t) = u^N(x,t)$. Правая часть этого неравенства в пространстве $W^1(a,\Gamma)$ мажорируется постоянной C^*, не зависящей от N и $t \in [0,T]$, так что в результате получаем оценку

$$\int\limits_\Gamma \Big(\big(u^N(x,t)\big)^2 + \Big(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\Big)^2\Big)dx \le C^*, \qquad t \in [0,T],$$

а значит, после интегрирования по t от 0 до T

$$\|u^N\|_{W_2^1(\Gamma_T)} \le C_1^*.$$

В силу полученного неравенства из последовательности $\{u^N\}_{N\ge1}$ можно выбрать подпоследовательность $\{u^{N_i}\}_{i\ge1}$, слабо сходящуюся в $W_2^1(\Gamma_T)$ и равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Gamma)$ к некоторому элементу $u(x,t) \in W_a^1(\Gamma_T)$, которое, как нетрудно проверить, удовлетворяет тождеству (1.5).

З а м е ч а н и е 2.1. Спектральный подход, использующий при доказательстве теоремы существования слабого решения $u(x,t)$ специальный базис $\{\phi_k(x)\}_{k\ge1}$ и представление приближений $u^N(x,t)$ этого решения в виде конечных разложений (2.2) по функциям $\phi_k(x)$, позволяет формировать системы (2.3), (2.4), аппроксимирующие исходную задачу (0.1), (1.3), (1.4) (представление (2.2) — аппроксимация состояния $u(x,t)$ дифференциальной системы (0.1)). Вместе с анализом устойчивости решения $u(x,t)$, представленным ниже, это позволяет получать теоремы об аппроксимации, применяемые в задачах прикладного характера.

Далее переходим к основному результату исследования — построению слабого решения задачи (0.1), (1.3), (1.4) и анализу его устойчивости.

3. Устойчивость системы (0.1)

Для получения более глубоких результатов несколько сузим пространство $L_{2,1}(\Gamma_T)$ и будем предполагать, что $f(x,t) \in L_2(\Gamma_T) \subset L_{2,1}(\Gamma_T)$, а $0 < b(x) \leq \beta$ при $x \in \Gamma$. Последнее гарантирует положительность собственных значений λ_k, $k \geq 1$ (утверждение 3 леммы 2.1), которые для упрощения дальнейших технических выкладок обозначим через $\mu_k^2 : \lambda_k = \mu_k^2$. В пространстве $W^{1,0}(a, \Gamma_T)$ рассмотрим систему (0.1). Нетрудно проверить, что сумма конечного числа частных решений

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t) \phi_k(x)$$

при произвольных коэффициентах a_k и b_k является слабым решением задачи (0.1), (1.3), (1.4) (при $f(x,t) = 0$) с начальными условиями $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \phi_k(x)$ и $\psi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k b_k \phi_k(x)$. Здесь следует заметить, что представление $u^N(x,t)$ лишь формально отличается от упомянутого выше представления (2.2). Использование его продиктовано только необходимостью указания роли собственных значений в дальнейших рассуждениях.

Разлагая функцию $f(x,t)$ в ряд Фурье

$$f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \phi_k(x), \qquad f_k(t) = \int\limits_{\Gamma} f(x,t) \phi_k(x) dx,$$

получим слабое решение задачи (0.1), (1.3), (1.4) в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{\Gamma} f_k(\tau) \sin \mu_k (t-\tau) d\tau] \phi_k(x) \tag{3.1}$$

(правая часть соотношения (3.1) есть сумма конечного числа слабых решений задачи (0.1), (1.3), (1.4), где $f(x,t)$ в (0.1) заменено на $\sum\limits_{k=1}^{N} f_k(t) \phi_k(x)$), а значит, формальное решение $u(x,t)$ задачи (0.1), (1.3), (1.4) представимо рядом

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{0}^{t} f_k(\tau) \sin \mu_k (t-\tau) d\tau] \phi_k(x). \tag{3.2}$$

Установим условия, при которых сумма ряда (3.2) будет слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4) в пространстве $W^1(a, \Gamma_T)$, для чего укажем, когда сам ряд (3.2) и ряды, полученные его однократным дифференцированием по x и t, сходятся в среднем (т. е. в $L_2(\Gamma)$). Такая сходимость рядов и будет означать, что $u(x,t)$ является слабым решением задачи (0.1), (1.3), (1.4).

Рассмотрим отрезок ряда (3.2)

$$u_{pq}(x,t) = \sum_{k=p}^{q} [a_k \cos \mu_k t + b_k \sin \mu_k t + \frac{1}{\mu_k} \int\limits_{0}^{t} f_k(\tau) \sin \mu_k (t-\tau) d\tau] \phi_k(x)$$

при $p \geq q$ и коэффициенты b_k, $T_k(t)$ этого ряда (коэффициенты a_k рассмотрим ниже):

$$b_k = \frac{1}{\mu_k}\int\limits_{\Gamma}\psi(x)\phi_k(x)dx, \qquad T_k(t) = \frac{1}{\mu_k}\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\mu_k(t-\tau)d\tau.$$

Обозначим через $\beta_k = \mu_k b_k$ и $\theta_k(t) = \mu_k T_k(t)$, причем отметим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k^2 = \int\limits_{\Gamma}\psi^2(x)dx$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\theta_k^2(t)$ сходится равномерно относительно t. Последнее следует из неравенств

$$\theta_k^2(t) \leq \int\limits_0^t \sin^2\mu_k(t-\tau)d\tau\int\limits_0^t f_k^2(\tau)d\tau \leq T\int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\theta_k^2(t)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $T\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau$.

Далее рассмотрим коэффициенты a_k и в силу тождества $l(\phi_k,\eta) = \mu_k^2(\phi_k,\eta)$ при любой функции $\eta(x) \in W^1(a,\Gamma)$ имеем (при $\eta(x) = \varphi(x)$)

$$a_k = \int\limits_{\Gamma}\varphi(x)\phi_k(x)dx = \frac{1}{\mu_k^2}\int\limits_{\Gamma}\left[a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}\frac{d\phi_k(x)}{dx} + b(x)\varphi(x)\phi_k(x)\right]dx = \frac{1}{\mu_k^2}\ell(\varphi,\phi_k).$$

Обозначим через $\alpha_k = \frac{1}{\mu_k}\ell(\varphi,\phi_k)$ и оценим сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ из соотношений $\ell(\phi_k,\phi_s) = \mu_k^2\delta_{k\,s}$ (здесь $\delta_{k\,s}$ — символ Кронекера), вытекает

$$\begin{aligned}&0 \leq \ell(\varphi - \sum_{k=1}^{N}\tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\phi_k, \varphi - \sum_{k=1}^{N}\tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\phi_k) =\\ &= \ell(\varphi,\varphi) - 2\sum_{k=1}^{N}\tfrac{\alpha_k}{\mu_k}\ell(\varphi,\phi_k) + \sum_{k=1}^{N}\tfrac{\alpha_k^2}{\mu_k^2}\ell(\phi_k,\phi_k) = \ell(\varphi,\varphi) - \sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2.\end{aligned}$$

Из последнего следует неравенство $\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k^2 \leq \ell(\varphi,\varphi)$.

Ряд (3.2) запишем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}[\alpha_k\cos\mu_k t + \beta_k\sin\mu_k t + \theta_k(t)]\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\vartheta_k(t)\phi_k(x) \tag{3.3}$$

(здесь через $\vartheta_k(t)$ обозначено выражение $\alpha_k\cos\mu_k t + \beta_k\sin\mu_k t + \theta_k(t)$). Из полученных оценок для $\theta_k(t)$ следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vartheta_k^2(t)$ мажорируется сходящимся числовым рядом $3\sum\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^2 + \beta_k^2 + T\int\limits_0^T f_k^2(\tau)d\tau]$, тогда сумма его оценивается сверху:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_k^2(t) \leq C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)} + \|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)} + \|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)}). \tag{3.4}$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость по $t \in [0,T]$ ряда (3.3) в норме, определяемой билинейной формой $\ell(\mu,\nu)$ ($\|\cdot\| = \sqrt{\ell(\cdot,\cdot)}$), так как для отрезка $u_{pq}(x,t)$ ряда (3.3) (а значит, и ряда (3.2)) и любого $\epsilon > 0$ найдется номер N_ϵ, не зависящий от t, что имеет место соотношение

$$\ell(u_{pq}, u_{pq}) = \sum_{k=p}^{q} \vartheta_k^2(t) < \epsilon \qquad \forall\, p \geq N_\epsilon, \qquad q \geq p. \tag{3.5}$$

Вследствие определения первого собственного значения $\mu_1^2 > 0$ для любой функции $\nu(x)$ из $W_0^1(a,\Gamma)$ справедливо неравенство

$$\int_\Gamma \nu^2(x)dx \leq \frac{1}{\mu_1^2}\ell(\nu,\nu). \tag{3.6}$$

Кроме того, из (1.1) следует:

$$\int_\Gamma \frac{d\nu(x)}{dx}dx \leq \frac{1}{a_*}\ell(\nu,\nu), \tag{3.7}$$

поэтому, складывая (3.6) и (3.7), получаем

$$\|\eta\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq C_*\ell(\eta,\eta), \quad C_* = \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{a_*}. \tag{3.8}$$

Так как функция $u_{pq}(x,t) \in W_0^1(a,\Gamma)$ для любого t, то из (3.5) и (3.8) вытекает неравенство

$$\|u_{pq}\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq C_*\ell(u_{pq}, u_{pq}) \leq C_*\epsilon$$

для любых $p \geq N_\epsilon$, $q \geq p$ и любого t. Последнее показывает, что ряд (3.2) сходится в норме $W_2^1(\Gamma)$ равномерно относительно $t \in [0,T]$, сумма $u(x,t)$ ряда является элементом $W_0^1(a,\Gamma)$, непрерывно зависящим от $t \in [0,T]$.

Аналогичные рассуждения для ряда, полученного почленным дифференцированием один раз по t, приводят к установлению его равномерной сходимости в $L_2(\Gamma)$ относительно $t \in [0,T]$, и поэтому $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ есть элемент $L_2(\Gamma)$, непрерывно зависящий от t. Как следствие, можем утверждать, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) принадлежит $W_0^1(a,\Gamma_T)$. Действительно, каждый член ряда (3.2) (а значит, сумма конечного числа членов) принадлежит $W_0^1(a,\Gamma_T)$. Ряд (3.2) сходится в $W_2^1(\Gamma)$ равномерно по $t \in [0,T]$, а тогда он сходится в $W_2^1(\Gamma_T)$ и сумма его принадлежит $W_0^1(a,\Gamma_T)$ в силу замкнутости $W_0^1(a,\Gamma_T)$ в норме $W_2^1(\Gamma_T)$.

Учитывая сказанное, для начальных условий (1.3) получаем:

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,\Delta t) - \varphi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq \|u(\cdot,\Delta t) - u(\cdot,0)\|_{W_2^1(\Gamma)} + \|u(\cdot,0) - \varphi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} = \\ &= \|u(\cdot,\Delta t) - u(\cdot,0)\|_{W_2^1(\Gamma)} \to 0\end{aligned}$$

при $\Delta x \to 0$. Аналогично

$$\begin{aligned}&\|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} \leq \|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t}\|_{W_2^1(\Gamma)} + \|\tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t} - \psi(\cdot)\|_{W_2^1(\Gamma)} = \\ &= \|\tfrac{\partial u(\cdot,\Delta t)}{\partial t} - \tfrac{\partial u(\cdot,0)}{\partial t}\|_{W_2^1(\Gamma)} \to 0\end{aligned}$$

при $\Delta x \to 0$.

Остается проверить, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) является слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4), т. е. удовлетворяет тождеству (1.5). Следуя [8, с. 81], представим (3.2) в виде

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}[\omega_k(t)+T_k(t)]\phi_k(x),$$

где $\omega_k(t)=a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t$, а $T_k(t)$ определены выше. В силу своего представления функции $T_k(t)$ имеют производную второго порядка для почти всех $t\in[0,T]$, равную $-\mu_k^2T_k(t)+f_k(t)$ и суммируемые с квадратом на $[0,T]$. Тогда и $u^N(x,t)$ имеет обобщенные производные по t до второго порядка, суммируемые с квадратом на Γ_T.

Для любой фиксированной функции $\eta(x,t)\in\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ (пространство $\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$ определено выше — см. определение 1.1) рассмотрим интеграл

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\big(-\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}+a(x)\tfrac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)u^N(x,t)\eta(x,t)-f(x,t)\eta(x,t)\big)dxdt-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\psi(x)\eta(x,0)dx.$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое в интеграле по Γ_T:

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\{\sum_{k=1}^{N}[(-\mu_k^2T_k(t)+f_k(t)+\mu_k^2\omega_k(t))\phi_k(x)\eta(x,t)-$$
$$-(T_k(t)+\omega_k(t))\big(a(x)\tfrac{d\phi_k(x)}{dx}\tfrac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)\phi_k(x)\eta(x,t)\big)]-f(x,t)\eta(x,t)\}dxdt-$$
$$-\int\limits_{\Gamma}\big(\psi(x)-\sum_{k=1}^{N}\mu_kb_k\phi_k(x)\big)\eta(x,0)dx.$$

Учитывая тождество $\ell(\phi,\nu)=\mu_k^2(\phi,\nu)$ для любой функции $\nu(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$, которому удовлетворяет ϕ_k, и соотношение $a(x)\frac{d\phi_k(x)}{dx}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x}+b(x)\phi_k(x)\eta(x,t)=\ell(\phi_k,\eta)$ для любой функции $\eta(x,t)\in\widetilde{W}^1(a,\Gamma_T)$, окончательно получаем

$$I^N=\int\limits_{\Gamma_T}\big(\sum_{k=1}^{N}f_k(t)\phi_k(x)-f(x,t)\big)\eta(x,t)dxdt-\int\limits_{\Gamma}\big(\psi(x)-\sum_{k=1}^{N}\mu_kb_k\phi_k(x)\big)\eta(x,0)dx.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $N\to\infty$, приходим к доказательству, что сумма $u(x,t)$ ряда (3.2) удовлетворяет тождеству (1.5), а значит, $u(x,t)$ является слабым решением начально-краевой задачи (0.1), (1.3), (1.4), причем (см. (3.4)), для любого $t\in[0,T]$ и любого $T<\infty$

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma)}\le C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)}).$$

Кроме того, вводя норму $\|u(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ соотношением

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}=\int\limits_{\Gamma}\big(u^2+u_t^2+u_x^2\big)dx,$$

получаем, ряд (1.1) сходится в метрике $\|u(\cdot,t)\|_{W_0^1(\Gamma,t)}$ равномерно относительно t и

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}\le C(\|\varphi\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f\|^2_{L_2(\Gamma_T)})$$

для любого $t\in[0,T]$ и при любом $T<\infty$.

Из последнего неравенства следует корректность рассматриваемой задачи: малому изменению исходных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$ в норме пространств, элементами которых они являются, соответствует малое изменение в метрике $\|u(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ решения $u(x,t)$, т. е. при всех $t\in[0,T]$ имеет место неравенство

$$\|u(\cdot,t)-\widetilde{u}(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(\Gamma,t)}\le C(\|\varphi-\widetilde{\varphi}\|^2_{W_0^1(\Gamma)}+\|\psi-\widetilde{\psi}\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|f-\widetilde{f}\|^2_{L_2(\Gamma_T)}),$$

где $\widetilde{u}$ — слабое решение задачи (0.1), (1.3), (1.4) с измененными исходными данными $\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\psi}(x)$ и $\widetilde{f}(x,t)$, постоянная C зависит только от T, a_*, a^* и b. □

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты* $a(x)$, $b(x)$ *— ограниченные измеримые функции на графе* Γ, *удовлетворяющие условиям* (1.1), *и пусть* $\varphi(x)\in W^1(a,\Gamma)$, $\psi(x)\in L_2(\Gamma)$, $f(x,t)\in L_2(\Gamma_T)$. *Слабое решение* $u(x,t)$ *начально-краевой задачи* (0.1), (1.3), (1.4) *имеет представление в виде ряда* (3.2), *который сходится в метрике* $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ *равномерно по* $t\in[0,T]$. *Начально-краевая задачи* (0.1), (1.3), (1.4) *корректна по исходным данным* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $f(x,t)$.

Как следствие из полученной теоремы вытекает: решение однородного уравнения (0.1) (при $f(x,t)=0$) представимо рядом

$$u_0(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t],$$

сходящимся в норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ равномерно относительно $t\in(-\infty,\infty)$. Решение $u_0(x,t)$ обладает устойчивостью в норме $\|\cdot\|_{W_2^1(\Gamma,t)}$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$.

В работе [9] представлены достаточные условия на функцию $f(x,t)$, гарантирующие ее определение в области $\Gamma_0\times[0,\infty)$ и открывающие пути анализа устойчивости неоднородного решения уравнения (0.1). Получение этих условий опирается на рассуждения, представленные в монографии Ж.–Л. Лионса [10, с. 519].

Представленные выше результаты (утверждения теорем 2.1 и 3.1) можно распространить на многомерный случай. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, рассмотрим сетеподобную ограниченную область $\Im$, состоящую из N областей $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$) и M узловых мест ω_j ($j=\overline{1,M}$, $M<N$): $\Im=\hat{\Im}\bigcup\hat{\omega}$, где $\hat{\Im}=\bigcup\limits_{k=1}^{N}\Im_k$, $\hat{\omega}=\bigcup\limits_{j=1}^{M}\omega_j$, причем $\Im_k\bigcap\Im_l=\emptyset$ ($k\neq l$), $\omega_j\bigcap\omega_i=\emptyset$ ($j\neq i$), $\Im_k\bigcap\omega_j=\emptyset$ [1, 2]. Области $\Im_k$ в узловых местах ω_j имеют общие границы в виде поверхностей сочленения S_j (meas $S_j>0$). В каждом узловом месте ω_j поверхность сочленения S_j состоит из m_j областей $\Im_{k_0}$ и $\Im_{k_i}$ ($1\leq i\leq m_j\leq N-1$): $S_j=\bigcup\limits_{i=1}^{m_j}S_{j\,i}$ (meas $S_{j\,i}>0$), где S_j и $S_{j\,i}$ являются частями границ $\partial\Im_{k_0}$ и $\partial\Im_{k_i}$ областей $\Im_{k_0}$ и $\Im_{k_i}$, соответственно; $S_{j\,i}$ — двусторонняя область для каждого j,i: $S^-_{j\,i}$ — внутренняя поверхность, $S^+_{j\,i}$ — внешняя поверхность. Таким образом, ω_j определяется поверхностью сочленения S_j, для которой только $S_{j\,i}$ являются поверхностями сочленения $\Im_{k_0}$ с $\Im_{k_i}$, $i=\overline{1,m_j}$. Граница $\partial\Im$ области $\Im$ состоит из объединения границ $\partial\Im_k$ областей $\Im_k$ ($k=\overline{1,N}$), которые не содержат поверхности сочленения каждого узлового места: $\partial\Im=\bigcup\limits_{k=1}^{N}\partial\Im_k\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{M}S_j$.

Область $\Im$ имеет сетеподобную структуру, аналогичную геометрическому графу [11, 12], каждая область $\Im_k$ соединена с другой, ей смежной, посредством узлового места и имеет одну или больше поверхностей сочленения этих областей (сравните со структурой графа: каждое ребро графа имеет две концевые точки (узлы), к которым примыкает один или больше концевых точек (узлов) других ребер).

Используется те же, что и выше, обозначения для пространства Лебега $L_q(U)$ ($q=1,2$) и пространства Соболева $W_2^1(U)$, где U — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для каждого k ($1\leq k\leq N$) обозначим через $W_{2,0}^1(\Im_k)$ замыкание в $W_2^1(\Im_k)$ множества бесконечно дифференцируемых на $\overline{\Im}_k$ функций, равных нулю на $\partial\Im_k\subset\partial\Im$.

Пусть $\Omega_a(\Im)$ — множество функций $u:\Im\to\mathbb{R}^1, u|_{\Im_k}\in W_{2,0}^1(\Im_k)$ для каждого $k=1,2,\ldots,N$, и пусть u удовлетворяет условиям согласования

$$u|_{S^+_{j\,i}} = u|_{S^-_{j\,i}},\ i=\overline{1,m_j},\ \int\limits_{S_j\subset\partial\Im_{k_0}} a(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_j}dx + \sum_{i=1}^{m_j}\ \int\limits_{S_{j\,i}\subset\partial\Im_{k_i}} a(x)\frac{u(x)}{\partial \mathbf{n}_{j\,i}}dx = 0,$$

для каждого узлового места ω_j на поверхности $S_j = \bigcup\limits_{i=1}^{m_j} S_{j\,i}$, $j=\overline{1,M}$; здесь векторы $\mathbf{n}_j$ и $\mathbf{n}_{j\,i}$ — внешние нормали к S_j и $S_{j\,i}$, соответственно; $a(x)$ — измеримая ограниченная функции из $L_2(\Im)$.

Замыкание множества $\Omega_a(\Im)$ в норме $\|u\|_{\Im} = ((u,u)_{\Im})^{1/2}$, где

$$(u,v)_{\Im} = \sum_{k=1}^{N}(u,v)_{W_2^1(\Im_k)} = \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Im_k}\big(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_\kappa}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\kappa}\big)dx,$$

назовем пространством $\widetilde{W}_0^1(a,\Im)$.

В пространстве $\widetilde{W}_0^1(a,\Im)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big) + b(x)u(x,t) = f(x,t),$$

с начальными (1.3) и граничными (1.4) условиями, измеримые ограниченные функции $a(x)$, $b(x)$ удовлетворяют условиям (1.1) (везде Γ заменяется на $\Im$); $f(x,t)\in L_{2,1}(\Im_T)$ ($L_{2,1}(\Im_T)$ — пространство суммируемых на $\Im_T$ функций, $\|u\|_{L_{2,1}(\Im_T)} = \int\limits_0^T(\int\limits_{\Im} u^2dx)^{\frac12}dt$); $\frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big) \equiv \sum\limits_{\iota,\kappa=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\iota}\big(a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_\kappa}\big)$.

Основная сложность при анализе такой начально-краевой задачи и доказательстве утверждений, аналогичных представленным в теоремах 2.1 и 3.1, состоит в установлении условий, гарантирующих выполнение утверждений леммы 2.1. В работе [5] указаны пути получения таких условий.

В заключение отметим, что результаты, представленные в работе, можно использовать при анализе задач оптимального управления дифференциальными системами с сетеподобными носителями [6, 11, 13].

References

[1] V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, A. A. Part, “Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **14**:1 (2019), 107–117.

[2] O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Nauka Publ., Moscow, 1973, 407 pp.

[3] A. P. Zhabko, A. I. Shindyapin, V. V. Provotorov, “Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:4 (2019), 457–471.

[4] V. V. Provotorov, V. I. Ryazhskikh, Yu. A. Gnilitskaya, “Unique weak solvability of nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in the netlike domain”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:3 (2017), 264–277.

[5] A. S. Volkova, V. V. Provotorov, “Generalized solutions and generalized eigenfunctions of boundary-value problems on a geometric graph”, *Russian Mathematics*, **58**:3 (2014), 1–13.

[6] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, “Synthesis of optimal boundary control of parabolic systems with delay and distributed parameters on the graph”, *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:2 (2017), 209–224.

[7] V. V. Provotorov, "Expansion of eigenfunctions of Sturm-Liouville problem on astar graph", *Russian Mathematics*, **3** (2008), 45–57.

[8] О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболических уравнений*, ГИТТЛ, М., 1953, 282 с. [O. A. Ladyzhenskaya, *A Mixed Problem for Hyperbolic Equations*, GITTL, M., 1953 (In Russian), 282 pp.]

[9] A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, O. R. Balaban, "Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph", *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **15**:2 (2019), 187–198.

[10] J.-L. Lions, *Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems*, Mir Publ., Moscow, 1972, 587 pp.

[11] V. V. Provotorov, E. N. Provotorova, "Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain", *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, **13**:4 (2017), 431–443.

[12] M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, "On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network", *Journal of Physics. Conference Series*, **1203** (2019), Article ID 012094.

[13] S. L. Podvalny, V. V. Provotorov, "Determining the starting function in the task of observing the parabolic system with distributed parameters on the graph", *Vestnik of Voronezh State Technical University*, **10**:6 (2014), 29–35.

Информация об авторах

Провоторов Вячеслав Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Жабко Алексей Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой управления. Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация. E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Провоторов Вячеслав Васильевич
E-mail: wwprov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.09.2020 г.
Поступила после рецензирования 09.11.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the authors

Vyacheslav V. Provotorov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Partial Differential Equations and Probability Theory Department. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: wwprov@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Alexei P. Zhabko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Management Department. St. Petersburg State University, St.-Petersburg, Russian Federation.
E-mail: zhabko.apmath.spbu@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6379-0682

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Vyacheslav V. Provotorov
E-mail: wwprov@mail.ru

Received 17.09.2020
Reviewed 09.11.2020
Accepted for press 05.03.2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76

УДК 517.956

Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка

Владимир Игоревич УСКОВ

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Solution of a problem for a system of third order partial differential equations

Vladimir I. USKOV

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных третьего порядка. Уравнениями и системами уравнений со старшей смешанной третьей производной описывается теплообмен в почве, осложненный движением почвенной влаги, квазистационарные процессы в двухкомпонентной полупроводной плазме и т. д. Система сводится к дифференциальному уравнению с вырожденным оператором при старшей производной по выделенной переменной в банаховом пространстве. Этот оператор обладает свойством иметь число 0 нормальным собственным числом, позволяющим расщеплять исходное уравнение на уравнения в подпространствах. Получены условия, при которых решение задачи существует, единственно; найдена аналитическая формула.

Ключевые слова: начально-краевая задача; система уравнений в частных производных третьего порядка; смешанная производная; 0 — нормальное собственное число; дифференциальное уравнение в банаховом пространстве; решение

Для цитирования: *Усков В.И.* Решение задачи для системы уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 68–76. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76.

Abstract. An initial-boundary value problem for a system of third-order partial differential equations is considered. Equations and systems of equations with the highest mixed third derivative describe heat exchange in the soil complicated by the movement of soil moisture, quasi-stationary processes in a two-component semiconductor plasma, etc. The system is reduced to a differential equation with a degenerate operator at the highest derivative with respect to the distinguished variable in a Banach space. This operator has the property of having 0 as a normal eigenvalue, which makes it possible to split the original equations into an equation in subspaces. The conditions are obtained under which a unique solution to the problem exists; the analytical formula is found.

Keywords: initial-boundary value problem; system of third order partial differential equations; mixed derivative; 0 as normal eigenvalue; differential equation in Banach space; solution

For citation: Uskov V.I. Resheniye zadachi dlya sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh tret'yego poryadka [Solution of a problem for a system of third order partial differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 68–76. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-68-76. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Исследуется задача:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\gamma^2\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}+\left(2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u_2}{\partial t}=B_{11}u_1(x,t)+B_{12}u_2(x,t)+f_1(x,t), \tag{0.1}$$

$$\left(2\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u_1}{\partial t}+\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\gamma^2\right)\frac{\partial u_2}{\partial t}=B_{21}u_1(x,t)+B_{22}u_2(x,t)+f_2(x,t), \tag{0.2}$$

$$\begin{aligned} &u_1(x,0)=g_1(x), \quad u_2(x,0)=g_2(x),\\ &g_1(0)=g_1(2\pi/\gamma), \quad g_2(0)=g_2(2\pi/\gamma), \end{aligned} \tag{0.3}$$

$$u_1(0,t)=u_1(2\pi/\gamma,t), \quad u_2(0,t)=u_2(2\pi/\gamma,t), \tag{0.4}$$

где заданы постоянные $\alpha,\beta,\gamma,\ \gamma>0,\ \gamma^2=-\alpha\beta>0;$ линейные стационарные операторы $B_{ij},\ i,j=1,2,$ действующие в пространстве $C^2(\mathfrak{X});$ достаточно гладкие функции $f_i(x,t),\ g_i(x),\ i=1,2;\ (x,t)\in\Pi=\mathfrak{X}\times\mathfrak{T},\ \mathfrak{X}=[0;2\pi/\gamma],\ \mathfrak{T}=[0;T].$

Под решением задачи подразумеваются функции $u_1(x,t),\ u_2(x,t)$

1) дважды непрерывно дифференцируемые по x при каждом $t\in\mathfrak{T}$,

2) единожды непрерывно дифференцируемые по t при каждом $x\in\mathfrak{X}$,

3) удовлетворяющие равенству $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}$ в Π,

4) удовлетворяющие (0.1)–(0.4) в Π.

Уравнениями и системами уравнений со старшей смешанной третьей производной описывается теплообмен в почве, осложненный движением почвенной влаги (уравнение Аллера) [1], квазистационарные процессы в двухкомпонентной полупроводной плазме [2] и т. д.

Задача записывается в векторном виде с квадратом вырожденного оператора при старшей производной по выделенной переменной t; этот оператор обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, 0-NEV) [3]. Данное свойство позволяет расщепить исходное уравнение на уравнения в подпространствах и решать эти уравнения.

Уравнение, не разрешенное относительно старшей производной (далее, УНОП), называется алгебро-дифференциальным, дескрипторным. Задачи для таких уравнений с различными видами вырожденных операторов изучаются в различных работах (см., например, [4–7]). УНОП в частных производных с выделенной производной относятся к уравнениям соболевского типа [8]. Решению задач для таких уравнений посвящены, например, работы [9, 10].

1. Решение линейного уравнения с вырожденным оператором

Рассмотрим уравнение

$$A^2 v = w, \tag{1.1}$$

где $A : E \to E$ — линейный оператор, E — банахово пространство, A является 0-NEV оператором, $v \in E \cap \operatorname{dom} A^2$ — искомый элемент, $w \in E$ — заданный элемент.

Пространство E раскладывается в прямую сумму

$$E = M \oplus N,$$

где N — корневое подпространство оператора A, а M — инвариантное подпространство, дополнительное к N. Рассматривается случай: $\dim \operatorname{Ker} A = n$, элементы ядра не имеют присоединенных элементов, т.е. корневое подпространство $N = \operatorname{Ker} A$. Обозначим Q, P — проекторы на M, N соответственно, $\tilde{A}$ — сужение оператора A на $M \cap \operatorname{dom} A^2$.

Для решения уравнения (1.1) разложим элементы v, w в суммы элементов в подпространствах

$$v = Qv + Pv, \tag{1.2}$$

$$w = Qw + Pw$$

и подставим их в это уравнение. Получим

$$A^2 Qv = Qw + Pw,$$

так как $A(Pv) = 0$. Условие $M \cap N = \{0\}$ и инвариантность M относительно A приводят к следующим двум уравнениям в подпространствах M и N, соответственно:

$$\tilde{A}^2 Qv = Qw,$$

$$Pw = 0. \tag{1.3}$$

Обратим первое уравнение и запишем его в виде

$$Qv = Hw, \tag{1.4}$$

где

$$H = (\tilde{A}^{-1})^2 Q. \tag{1.5}$$

Подставив (1.4) в (1.2), получим

$$v = Hw + Pv \quad \forall Pv \in \operatorname{Ker} A. \tag{1.6}$$

Верно и обратное: при выполнении (1.3) подстановка (1.2), (1.4) в уравнение (1.1) обращает его в тождество.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Уравнение* (1.1) *равносильно системе* (1.6), (1.3).

Теперь разложим элемент ядра по базису $e_1, \ e_2, \ \ldots, \ e_n$. В N вводится скалярное произведение так, чтобы

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij}. \tag{1.7}$$

Применение функционалов $< (\cdot), e_j >, \ j = 1, 2, \ldots, n,$ к элементу Pw в равенстве (1.3) позволяет переформулировать лемму 1.1 следующим образом.

Лемма 1.2. *При выполнении* (1.7) *уравнение* (1.1) *равносильно системе* (1.6) *и соотношениям*

$$< Pw, e_j >= 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2. О матрично-дифференциальном операторе

Рассматривается линейный оператор

$$A = \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & \alpha \\ \beta & \dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom} \mathbb{A} = \{y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \ y_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), \ y_i(0) = y_i(2\pi/\gamma), \ i = 1, 2\},$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \{y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} : \ y_i(x) \in C(\mathfrak{X}), \ i = 1, 2\}. \tag{2.1}$$

В работе [11] установлено, что оператор $\mathbb{A}$ обладает свойством 0-NEV; при этом доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Элементы ядра оператора* $\mathbb{A}$ *не имеют присоединенных элементов.*

В силу леммы 2.1, корневое подпространство оператора $\mathbb{A}$ — это

$$N = \operatorname{Ker} \mathbb{A} = \{c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x), \ c_1, c_2 \in \mathbb{C}\},$$

$$e_1(x) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma x) \\ \dfrac{\gamma}{\alpha} \sin(\gamma x), \end{pmatrix}, \quad e_2(x) = \begin{pmatrix} \sin(\gamma x) \\ -\dfrac{\gamma}{\alpha} \cos(\gamma x) \end{pmatrix}.$$

Базис $\{e_1(x), e_2(x)\}$ ортонормируется (условие (1.7)) введением в N скалярного произведения

$$< \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{pmatrix} >= v_1(x) w_1(x) + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} v_2(x) w_2(x). \tag{2.2}$$

Проектор P равен

$$P(x) = \begin{pmatrix} J_1(x) & J_2(x) \\ \dfrac{\beta}{\alpha} J_2(x) & J_1(x) \end{pmatrix},$$

где

$$J_1(x)(\cdot)=\frac{\gamma}{2\pi}(\cos(\gamma x)J_{11}(\cdot)+\sin(\gamma x)J_{12}(\cdot)),\quad J_2(x)(\cdot)=-\frac{\alpha}{2\pi}(\sin(\gamma x)J_{11}(\cdot)-\cos(\gamma x)J_{12}(\cdot)),$$

$$J_{11}(\cdot)=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\gamma}}(\cdot)\cos(\gamma s)\,ds,\qquad J_{12}(\cdot)=\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\gamma}}(\cdot)\sin(\gamma s)\,ds. \tag{2.3}$$

Для дальнейших вычислений найдем квадрат оператора $\mathbb{A}$:

$$\mathbb{A}^2=\begin{pmatrix}\dfrac{d^2}{dx^2}-\gamma^2 & 2\alpha\dfrac{d}{dx}\\ 2\beta\dfrac{d}{dx} & \dfrac{d^2}{dx^2}-\gamma^2\end{pmatrix}.$$

Его область определения

$$\operatorname{dom}\mathbb{A}^2=\{y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}:\ y_i(x)\in C^2(\mathfrak{X}),\ y_i(0)=y_i(2\pi/\gamma),\ i=1,2\}.$$

В силу леммы 2.1, для определяемого формулой (1.5) оператора получим представление в виде матрицы

$$H=\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix},$$

с элементами

$$H_{11}(x)=J_3(x)-\frac{\gamma}{2\pi}J_4(x),\qquad H_{12}(x)=\frac{\gamma}{\beta}J_5(x)+\frac{\alpha}{2\pi}J_6(x),$$
$$H_{21}(x)=\frac{\beta}{\alpha}H_{12}(x),\qquad H_{22}(x)=H_{11}(x),$$

где

$$J_3(x)=\int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_s^{2\pi/\gamma}(\cdot)\cos(\gamma(x-s_1))\,ds_1\,ds,\quad J_4(x)=\int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_s^{2\pi/\gamma}(\cdot)\cos(\gamma(x-s_1))s\,ds_1\,ds,$$
$$J_5(x)=\int\limits_x^{2\pi/\gamma}\int\limits_s^{2\pi/\gamma}(\cdot)\sin(\gamma(x-s_1))\,ds_1\,ds,\quad J_6(x)=\int\limits_0^{2\pi/\gamma}\int\limits_s^{2\pi/\gamma}(\cdot)\sin(\gamma(x-s_1))s\,ds_1\,ds.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Операторы P, H ограничены.

3. Разрешение дифференциального уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$A^2\frac{du}{dt}=Bu(t)+F(t), \tag{3.1}$$

где $A, B: E\to E$ — замкнутые линейные стационарные операторы, $\overline{\operatorname{dom}A^2}=E$, $\overline{\operatorname{dom}B}=E$, A — 0-NEV оператор, $F(t)$ — заданная достаточно гладкая функция со значениями в E.

Рассматривается случай: $\dim \operatorname{Ker} A = n = 2$, элементы ядра не имеют присоединенных элементов.

В силу леммы 1.2 уравнение (3.1) равносильно системе

$$\frac{du}{dt} = H(Bu(t) + F(t)) + \sum_{i=1}^{2} c_i(t)e_i, \tag{3.2}$$

$$< P(Bu(t) + F(t)), e_j >= 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.3}$$

где $c_i(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, которые надлежит найти.

Условие 3.1. Функция $F(t)$ непрерывно дифференцируема.

Дифференцирование соотношений (3.3) и подстановка выражения (3.2) в эти соотношения при выполнении условия 3.1 приводят к системе относительно $c_i(t)$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i(t)d_{ij} = -K_j HBx(t) + F_j(t), \quad j = 1, 2, \tag{3.4}$$

в обозначениях

$$K_j =< PB(\cdot), e_j >, \quad F_j(t) = -K_j HF(t) - < PF'(t), e_j >, \quad d_{ij} = K_j e_i, \quad i, j = 1, 2.$$

Далее определим матрицу

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

и обозначим ее определитель через $\Delta = \det D$.

Условие 3.2.

$$\Delta \neq 0.$$

При выполнении условия 3.2 система (3.4) однозначно разрешима. Подстановка ее решения в уравнение (3.2) приводит к уравнению

$$\frac{du}{dt} = Ru(t) + \Phi(t) \tag{3.6}$$

в обозначениях

$$\begin{aligned}
&R(\cdot) = HB(\cdot) + \sum_{i=1}^{2} R_i(\cdot)e_i, && \Phi(t) = HF(t) + \sum_{i=1}^{2} \Phi_i(t)e_i, \\
&R_1(\cdot) = -\Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} K_1 HB(\cdot) & d_{21} \\ K_2 HB(\cdot) & d_{22}, \end{pmatrix}, && R_2(\cdot) = \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} K_1 HB(\cdot) & d_{11} \\ K_2 HB(\cdot) & d_{12} \end{pmatrix}, \\
&\Phi_1(t) = \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} F_1(t) & d_{21} \\ F_2(t) & d_{22} \end{pmatrix}, && \Phi_2(t) = -\Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} F_1(t) & d_{11} \\ F_2(t) & d_{12} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким образом получено следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия 3.1 и 3.2. Тогда уравнение* (3.1) *равносильно системе* (3.6), (3.7) *и* (3.3).

4. Решение задачи Коши для уравнения (3.1)

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (3.1) на $\mathfrak{T}$:

$$u(0) = u^0 \in E. \tag{4.1}$$

У с л о в и е 4.1. Операторы PB, HB ограничены.

У с л о в и е 4.2. Функции $PF'(t)$, $HF(t)$ ограничены.

При выполнении этих условий, применяя неравенство треугольника и неравенство Коши–Буняковского на элементах $v(x) \in E$ (формулы (3.7), (2.2), $\|e_i\| = 1$), получаем следующие оценки:

$$|K_j HBv(x)| \leqslant \|PB\|\|HB\|\|v\|, \;\; |R_j v(x)| \leqslant \mu_{j+2}\|PB\|\|HB\|\|v\|, \;\; |\Phi_j(t)| \leqslant \mu_j\mu_5, \;\; j = 1, 2,$$

в обозначениях

$$\begin{aligned}
&\mu_1 = |\Delta^{-1}|(|d_{21}| + |d_{22}|) > 0, \quad \mu_2 = |\Delta^{-1}|(|d_{11}| + |d_{12}|) > 0,\\
&\mu_3 = \mu_1\|PB\|\|HB\| > 0, \quad \mu_4 = \mu_2\|PB\|\|HB\| > 0,\\
&\mu_5 = \|PB\|\|HF(t)\| + \|PF'(t)\| > 0, \quad \mu_6 = \|HB\| + \mu_1 + \mu_2 > 0,
\end{aligned}$$

влекущие искомые оценки

$$\|Rv\| \leqslant \mu_6\|v\|, \quad \|\Phi(t)\| \leqslant \|HF(t)\| + \mu_5(\mu_1 + \mu_2).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Функционал R и функция $\Phi(t)$ ограничены.*

Применение лемм 3.1, 4.1 и результатов монографии [12] приводит к следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия 3.1, 3.2, 4.1, 4.2. Тогда решение задачи (3.1), (4.1) существует при выполнении условий*

$$< P(Bu^0 + F(0)), e_j >= 0, \quad j = 1, 2. \tag{4.2}$$

Это решение единственно и определяется формулой

$$u(t) = \exp(tR)u^0 + \int\limits_0^t \exp((t-\tau)R)\Phi(\tau)d\tau. \tag{4.3}$$

Оно обладает свойством

$$< P(Bu(t) + F(t)), e_j >\equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad t \in \mathfrak{T}.$$

5. Решение задачи (0.1)–(0.4)

Задачу (0.1)–(0.4) относительно искомой функции $u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}$, можно записать в виде задачи Коши (3.1), (4.1) с операторами $A^2 = \mathbb{A}^2$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, начальной функцией $u^0(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ и заданной функцией $f(x,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,t) \\ f_2(x,t) \end{pmatrix}$.

Применим к ней результаты, полученные выше.

Обозначим

$$\begin{aligned} &\varphi_{ij}^{(1)}(x) = B_{ij}(\cos(\gamma x)), && \varphi_{ij}^{(2)}(x) = B_{ij}(\sin(\gamma x)), \quad i,j = 1,2, \\ &\psi_{11}(x) = \frac{\gamma}{2\pi}\varphi_{11}^{(1)}(x) - \frac{\beta}{2\pi}\varphi_{12}^{(2)}(x), && \psi_{12}(x) = \frac{\alpha}{2\pi}\varphi_{21}^{(1)}(x) + \frac{\gamma}{2\pi}\varphi_{22}^{(2)}(x), \\ &\psi_{21}(x) = \frac{\gamma}{2\pi}\varphi_{11}^{(2)}(x) + \frac{\beta}{2\pi}\varphi_{12}^{(1)}(x), && \psi_{22}(x) = \frac{\alpha}{2\pi}\varphi_{21}^{(2)}(x) - \frac{\gamma}{2\pi}\varphi_{22}^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Определим матрицы

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & -J_{11} \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{21}(x) \\ \psi_{12}(x) & \psi_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где J_{ij}, $i,j = 1,2$, заданы формулами (2.3). Определим также матрицу D (см. (3.5)) соотношением

$$D(x) = \mathcal{J}\Psi(x). \tag{5.1}$$

Используя обозначения $h_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{2} B_{ij} g_j(x)$, $\quad \tilde{f}_i(x,t) = h_i(x) + f_i(x,t)$, $\quad i = 1,2$, запишем равенства (4.2) в виде

$$\int\limits_0^{2\pi/\gamma} \gamma \tilde{f}_1(s,0) \begin{pmatrix} \cos(\gamma s) \\ \sin(\gamma s) \end{pmatrix} + \alpha \tilde{f}_2(s,0) \begin{pmatrix} \sin(\gamma s) \\ -\cos(\gamma s) \end{pmatrix} ds = 0. \tag{5.2}$$

Таким образом получено следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Пусть определитель матрицы, определенной формулой* (5.1), *отличен от нуля. Пусть функции* $\varphi_{ij}^{(1)}(x)$, $\varphi_{ij}^{(2)}(x)$, $i,j = 1,2$, *непрерывны в* $\mathfrak{X}$, *функции* $f_1(x,t)$, $f_2(x,t)$ *непрерывны по* x *в* $\mathfrak{X}$ *и непрерывно дифференцируемы в* Π. *Тогда при выполнении условия* (5.2) *решение задачи* (0.1)–(0.4) *существует, единственно, определяется формулой* (4.3) *и удовлетворяет условию* (4.1).

References

[1] А. Ф. Чудновский, *Теплофизика почв*, Наука, М., 1976. [A. F. Chudnovskyy, *Teplofizika Pochv*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].

[2] В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, *Волны в магнитоактивной плазме*, Наука, М., 1975. [V. L. Ginzburg, A. A. Ruhadze, *Volny v Magnitoaktivnoj Plazme*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. T. Gohberg, M. G. Krein, *Vvedenie v Teoriyu Linejnyh Nesamosopryazhennyh Operatorov*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[4] В. Ф. Чистяков, А. А. Щеглова, *Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем*, Наука, Новосибирск, 2003. [V. F. Chistyakov, A. A.Shcheglova, *Izbrannye Glavy Teorii Algebro-Differencial'nyh Sistem*, Nauka Publ., Novosibirsk, 2003 (In Russian)].

[5] С. П. Зубова, "О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве", *Вестник Воронежского госуниверситета. Серия: Физика. Математика*, 2013, №2, 192–198. [S. P. Zubova, "On the solvability of the Cauchy problem for a descriptor pseudoregular equation in a Banach space", *Bulletin of the Voronezh State University. Series: Physics. Maths*, 2013, №2, 192–198 (In Russian)].

[6] Г. А. Свиридюк, В. Е. Фёдоров, "Полугруппы операторов с ядрами", *Вестник Челябинского госуниверситета*, 2002, №6, 42–70. [G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, "Semigroups of operators with kernels", *Bulletin of the Chelyabinsk State University*, 2002, №6, 42–70 (In Russian)].

[7] P. Kunkel, V. Mehrmann, *Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, European Mathematical Society, Germany, 2006.

[8] А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, А. Г. Свешников, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007. [A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, Yu, D. Pletner, A. G. Sveshnikov, *Linejnye i Nelinejnye Uravneniya Sobolevskogo Tipa*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].

[9] S. M. Wade, I. B. Paul, "A differentiation index for partial differential algebraic equations", *SIAM Journal of Scientific Computing*, **21**:6 (2000), 2295–2316.

[10] Нгуен Хак Диеп, В. Ф. Чистяков, "О моделировании с использованием дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных", *Вестник Южно-Уральского госуниверситета. Серия: Математическое моделирование и программирование*, **6**:1 (2013), 98–111. [Nguyen Khac Diep, V. F. Chistyakov, "Using Partial Differential Algebraic Equations in Modelling", *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **6**:1 (2013), 98–111 (In Russian)].

[11] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, В. И. Усков, "О свойствах вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора и их применение", *Проблемы математического анализа*, 2021, в печати. [S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, "On the degeneracy properties of some matrix differential operator and their application", *Problems of Mathematical Analysis*, 2021, In print (In Russian)].

[12] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krein, *Linejnye Differencial'nye Uravneniya v Banahovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторах

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Information about the authors

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 27.01.2021 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Received 27.01.2021
Reviewed 25.02.2021
Accepted for press 05.03.2021

Том 26, № 133 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104
УДК 519.6

Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems on families of measurable rectangles

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются сцепленные и максимальные сцепленные системы (МСС) на π-системах измеримых (в широком смысле) прямоугольников (π-система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Структуры в виде семейства измеримых прямоугольников используются в теории меры и теории вероятностей и приводят обычно к полуалгебре подмножеств декартова произведения. В настоящей работе пространства-сомножители предполагаются оснащенными π-системами с «нулем» и «единицей», что, в частности, может соответствовать стандартной измеримой структуре в виде полуалгебры, алгебры или σ-алгебры множеств. В общем случае семейство измеримых прямоугольников (измеримость отождествляется с принадлежностью к π-системе) само образует π-систему множества-произведения, что позволяет рассматривать МСС на данной π-системе (измеримых прямоугольников). Устанавливается следующее основное свойство: во всех рассматриваемых вариантах π-системы измеримых прямоугольников МСС на произведении исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях. При этом в случае бесконечного произведения, наряду с традиционным, рассматривается «ящичный» вариант, допускающий естественную аналогию с базой ящичной топологии. Для случая произведения двух широко понимаемых измеримых пространств установлено одно свойство гомеоморфности, касающееся оснащений топологиями стоуновского типа.

Ключевые слова: сцепленные системы; измеримые прямоугольники; π-система

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371_а).

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 77–104. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104.

Abstract. Linked and maximal linked systems (MLS) on π-systems of measurable (in the wide sense) rectangles are considered (π-system is a family of sets closed with respect to finite intersections). Structures in the form of measurable rectangles are used in measure theory and probability theory and usually lead to semi-algebra of subsets of cartesian product. In the present article, sets-factors are supposed to be equipped with π-systems with “zero” and “unit”. This, in particular, can correspond to a standard measurable structure in the form of semi-algebra, algebra, or σ-algebra of sets. In the general case, the family of measurable rectangles itself forms a π-system of set-product (the measurability is identified with belonging to a π-system) which allows to consider MLS on a given π-system (of measurable rectangles). The following principal property is established: for all considered variants of π-system of measurable rectangles, MLS on a product are exhausted by products of MLS on sets-factors. In addition, in the case of infinity product, along with traditional, the “box” variant allowing a natural analogy with the base of box topology is considered. For the case of product of two widely understood measurable spaces, one homeomorphism property concerning equipments by the Stone type topologies is established.

Keywords: linked systems; measurable rectangles; π-system

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00371_a).

For citation: Chentsov A.G. Maksimal’nyye stseplennyye sistemy na semeystvakh izmerimykh pryamougol’nikov [Maximal linked systems on families of measurable rectangles]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 77–104. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-77-104. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

При исследовании ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) оказалось полезным изучение более общих структур в виде так называемых максимальных сцепленных систем (МСС); см. [1–3] и др. Таким образом реализуется внешнее описание пространства у/ф; выясняется, в частности, что некоторые свойства у/ф являются на самом деле свойствами МСС (всякий у/ф есть МСС, но обратное, вообще говоря, неверно). Поэтому, следуя [1–3], мы анализируем свойства МСС. В этой связи напомним важные понятия суперрасширения топологического пространства (ТП) и суперкомпактности (см. [4–6]); отметим здесь же систематическое изложение в [7, гл. VII, § 4], а также обзор в [8, 5.11]. В [1–3] дано развитие некоторых положений [4–6] для случая МСС на π-системе [9, с. 14] с «нулем» и «единицей» (имеется в виду семейство подмножеств фиксированного множества, замкнутое относительно конечных пересечений и содержащее упомянутое множество и пустое множество). Отметим, что часть конструкций [1–3] первоначально была реализована для случая МСС на решетке множеств с «нулем» и «единицей». Обращение к π-системам позволяет, наряду с «топологическим направлением» (см. [4–8]), исследовать некоторые вопросы, касающиеся измеримых пространств (ИП), что определяет некоторую перспективу применения в теории меры. Один из таких вопросов связан с представлениями МСС на произведениях ИП. Такого рода произведения, применяемые в теории меры и теории вероятностей, на промежуточных этапах построения используют обычно семейства измеримых прямоугольников; эти семейства типично являются полуалгебрами множеств даже в случае «перемножения» стандартных ИП с σ-алгебрами множеств. Имея в виду соображения общности, связанные с применением π-систем (каждая полуалгебра множеств является π-системой), представляется логичным допущение об использовании прямоугольников, измеримых в широком смысле (полезно отметить, что топологии являются π-системами и, более того, решетками множеств с «нулем» и «единицей»).

Заметим, что в [10] подобные вопросы исследовались в связи с представлениями у/ф; изучение последних, в свою очередь, важно в связи с описанием нормированных конечно-аддитивных (0,1)-мер (отметим также в этой связи построения [11, гл. 10]). Поскольку у/ф являются МСС, представляется естественным распространение некоторых положений работы [10] на случай пространств, элементами которых являются МСС. Здесь имеется в виду как случай «обычного» произведения двух широко понимаемых ИП, так и вариант обобщенного декартова произведения (см. [12, гл. IV, § 5]). В этих построениях мы широко используем индексную форму записи отображений (см. [13, с. 11]), что особенно важно в случае обобщенных декартовых произведений; в этой связи см. также построения [14, гл. III], касающиеся случайных функций. Конструкции настоящей работы являются логическим продолжением построений [15, раздел 7]. Основное положение имеет здесь следующий смысл: МСС на произведении широко понимаемых ИП исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях. В заключительном разделе статьи мы дополняем положения [15, раздел 7] соответствующим утверждением о гомеоморфности для оснащений множеств МСС топологиями стоуновского типа.

1. Общие понятия и обозначения

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.). Через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то $\{x;y\}$ есть неупорядоченная пара этих объектов, т. е. множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон, содержащий z. Если u, v и w — объекты, то, как обычно, $\{u;v;w\} \triangleq \{u;v\} \cup \{w\}$. Множества являются объектами. С учетом этого используем следующее общее определение: если x и y — объекты, то $(x,y) \triangleq \{\{x\};\{x;y\}\}$ [12, с. 67] есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом x и вторым элементом y. Вообще, для каждой УП h через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы этой УП; они однозначно определяются условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Каждому множеству X сопоставляем семейство $\mathcal{P}(X)$ всех подмножеств (п/м) X; тогда $\mathcal{P}'(X) \triangleq \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ есть семейство всех непустых п/м X, а $\mathrm{Fin}(X)$ — семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X. Если $\mathcal{H}$ — семейство и S — множество, то полагаем, что

$$[\mathcal{H}](S) \triangleq \{H \in \mathcal{H} \mid S \subset H\}. \tag{1.1}$$

Для всяких двух множеств A и B через B^A обозначаем (см. [12, с. 77]) множество всех отображений, действующих из A в B; значения таких отображений и прообразы п/м B обозначаются традиционно. Если же $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$g^1(C) \triangleq \{g(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

есть образ множества C при действии g. Для отображений часто используем индексную форму записи (семейство с индексом, см. [13, с. 11]).

В дальнейшем, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\}$ и $\overline{1,m} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant m\}$ при $m \in \mathbb{N}$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами, для всякого множества (в частности, семейства) H вместо $H^{\overline{1,m}}$ используем более традиционное H^m для обозначения множества всех кортежей $(h_i)_{i\in\overline{1,m}} : \overline{1,m} \to H$ (то есть множества всех отображений из $\overline{1,m}$ в H).

Специальные семейства. Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$ и рассматриваем семейства из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, т. е. непустые семейства п/м $\mathbf{I}$. Тогда в виде

$$\pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \,|\, (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π-систем п/м $\mathbf{I}$ с «нулем» и «единицей». Полезный вариант π-системы доставляет полуалгебра множеств (см. [14, гл. I]). В этой связи при $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{(L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \,|\, (A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i)\&(L_p \cap L_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,n} \ \ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\},$$

получая множество всех разбиений A множествами из $\mathcal{L}$, имеющих «длину» n. Тогда

$$\Pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \,|\, \forall L \in \mathcal{L} \ \ \exists n \in \mathbb{N} : \ \Delta_n(\mathbf{I} \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\}$$

есть семейство всех полуалгебр п/м $\mathbf{I}$.

Сцепленность. Если $\mathfrak{X}$ — непустое семейство п/м $\mathbf{I}$, то полагаем, что

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}) \,|\, A \cap B \neq \varnothing \ \ \forall A \in \mathcal{X} \ \ \forall B \in \mathcal{X}\}, \tag{1.2}$$

получая семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$; тогда

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \,|\, \forall \mathcal{Y} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \ \ (\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}) \Longrightarrow (\mathcal{X} = \mathcal{Y})\} \tag{1.3}$$

есть семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$. Для всех наших последующих построений будет достаточен случай $\mathfrak{X} \in \pi[\mathbf{I}]$, которым мы и ограничимся в смысле реализации (1.2), (1.3). Отметим три существенных в дальнейшем свойства, фиксируя до конца раздела π-систему $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$. Так,

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[\mathbf{I}] \,|\, \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\}. \tag{1.4}$$

Кроме того, имеем (см. (1.1)) с очевидностью, что $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}] \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$

$$[\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E}. \tag{1.5}$$

Свойство (1.5) подобно аналогичному свойству фильтров. Отметим здесь же, что $\mathbf{I} \in \mathcal{E}$ $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbf{I}]$.

2. Сцепленные семейства на π-системах измеримых прямоугольников

Рассмотрим сначала применение (1.2)–(1.5) в простейшем случае произведения двух ИП, используя построения [15, раздел 7]. Итак, пусть (в настоящем разделе) E_1 и E_2 — непустые множества, $\mathcal{L}_1 \in \pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2 \in \pi[E_2]$. Если $\mathfrak{L}_1 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_1))$ и $\mathfrak{L}_2 \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_2))$, то полагаем, что

$$\mathfrak{L}_1\{\times\}\mathfrak{L}_2 \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2\}. \tag{2.1}$$

Элементы семейства (2.1) — суть $(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$-прямоугольники. Легко видеть, что (см. (2.1))

$$\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 = \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2\} \in \pi[E_1 \times E_2]. \tag{2.2}$$

Мы имеем три (широко понимаемых) ИП: $(E_1, \mathcal{L}_1)$, $(E_2, \mathcal{L}_2)$ и $(E_1 \times E_2, \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)$. Совсем кратко напомним основные положения [15, раздел 7]. Так,

$$\mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_1 \times E_2] \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]. \tag{2.3}$$

В частности, (2.3) применимо к МСС и, более того (см. [15, предложение 22]),

$$\mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]. \tag{2.4}$$

С другой стороны, в виде следствия [15, предложение 21] имеем, что

$$\begin{gathered}\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \ \ \exists \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \ \ \exists \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] : \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Из (2.4), (2.5) вытекает, что (см. [15, теорема 2]) справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \\ &\quad = \{\mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]\} \\ &\quad = \{\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} : \ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В этой связи отметим, что для сцепленных (не максимальных) систем аналог (2.5) (а, стало быть, и аналог (2.6)) уже может не иметь места.

Пример. Пусть $E_1 = \overline{1,3} = \{1; 2; 3\}$ и $E_2 = \overline{1,3} = \{1; 2; 3\}$, $\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}(E_1)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P}(E_2)$ и $\mathcal{E} \overset{\triangle}{=} \{E_1 \times \{2\}; \{2\} \times E_2; \{(2,2)\}\}$. Заметим, что $\{(2,2)\} = \{2\} \times \{2\}$. Легко видеть, что

$$\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_1 \times E_2]. \tag{2.7}$$

Допустим, что $\mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1]$ и $\mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]$ таковы, что $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$. Тогда $E_1 \times \{2\} \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ и $\{2\} \times E_2 \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$. Таким образом (см. [15, предложение 17]), $E_1 \in \mathcal{E}_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}_2$. Поэтому $E_1 \times E_2 \in \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ в силу (2.1). Следовательно, $E_1 \times E_2 \in \mathcal{E}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что наше предположение о существовании сцепленных семейств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ со свойством $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2$ неверно и на самом деле

$$\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle[E_1] \ \ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle[E_2]. \tag{2.8}$$

Итак, мы указали сцепленное семейство (2.7) со свойством (2.8). $\square$

Из сопоставления (2.6) и только что рассмотренного примера видно, какую важную роль играет максимальность сцепленных систем в вопросе представления в виде произведения. В следующем разделе мы рассмотрим аналогичные вопросы для общего случая ИП и МСС.

3. Некоторые общие свойства произведений широко понимаемых измеримых пространств

Всюду в дальнейшем будут, если не оговорено противное, фиксированы непустые множества X и $\mathbf{E}$, а также отображение $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем непустое п/м $\mathbf{E}$. Получаем, что

$$\mathbb{E} \triangleq \prod_{x\in X} E_x = \{f \in \mathbf{E}^X \mid f(x) \in E_x \ \forall x \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E}^X) \tag{3.1}$$

(здесь и ниже используется аксиома выбора). Кроме того, фиксируем в дальнейшем

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x]; \tag{3.2}$$

тогда $\mathcal{L}_t \in \pi[E_t]$ при $t \in X$. Ниже рассматриваются следующие два варианта оснащения $\mathbb{E}$ π-системами (см. [16, (6.4), (6.5)]):

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x : \ (H = \prod_{x\in X} L_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ L_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \in \pi[\mathbb{E}], \tag{3.3}$$

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \triangleq \{\prod_{x\in X} L_x : \ (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in \pi[\mathbb{E}]; \tag{3.4}$$

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{3.5}$$

Итак, получаем два варианта широко понимаемого понимаемого ИП:

$$(\mathbb{E}, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x), \quad (\mathbb{E}, \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x). \tag{3.6}$$

В настоящем разделе сосредоточимся на вопросах описания МСС для второго (в (3.6)) варианта, имея в виду построение аналога (2.6). Для этого нам потребуется распространить (3.4) на случай произведения произвольных непустых семейств, каждое из которых является подсемейством $\mathcal{P}(E_x)$, где $x \in X$. Итак, полагаем в дальнейшем, что

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \triangleq \{\prod_{x\in X} \Sigma_x : \ (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{E}_x\} \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)); \tag{3.7}$$

разумеется, в (3.7) мы всякий раз получаем семейство из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}^X))$. Теперь (3.4) является частным случаем (3.7). Более того (см. (3.7)), как легко проверить,

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E})) \ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)). \tag{3.8}$$

В частности, (3.8) может использоваться в случае, когда заданы (сцепленные) семейства $\mathcal{E}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x] \ \forall x \in X$.

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x]$, *то*

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}].$$

Доказательство является (в условиях аксиомы выбора) простым следствием свойства [16, (6.3)]. Здесь же отметим очевидное свойство: если выполнено $(A_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$ и $(B_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$, то

$$(\prod_{x\in X} A_x = \prod_{x\in X} B_x) \Longleftrightarrow (A_x = B_x \ \forall x \in X). \tag{3.9}$$

Из (3.9) вытекает, что $\forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \ \ \exists!(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)$:

$$H = \prod_{x\in X} \Sigma_x. \tag{3.10}$$

С учетом (3.10) корректно следующее общее определение: полагаем, что

$$\mathbf{P}: \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x) \tag{3.11}$$

определяется условиями: при $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x))\setminus\{\varnothing\}$ мультиотображение $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)$ таково, что

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}(H)(\chi). \tag{3.12}$$

Легко видеть, что $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ при $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$. Отметим, что

$$\mathbb{E} \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\prod_{x\in X} \Sigma_x \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x). \tag{3.13}$$

Поэтому (3.12) можно применять в случае, отмеченном в (3.13). Кроме того, имеем очевидное (см. (3.11), (3.12)) свойство

$$\mathbf{P}(H) \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.14}$$

Итак, на самом деле $\mathbf{P}: \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$. С учетом (3.10) имеем при $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ и $t \in X$ равенство

$$\Sigma_t = \mathbf{P}(\prod_{x\in X} \Sigma_x)(t). \tag{3.15}$$

В связи с (3.2) отметим следующие очевидные свойства:

$$\begin{gathered}(\prod_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \prod_{x\in X} \mathcal{P}(E_x))\&(\prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}) \subset \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x))\& \\ ((\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что (3.15) выполняется при $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$. Тогда

$$\prod_{x\in X} L_x \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \ \forall (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}).$$

С учетом (3.14) полагаем теперь при $\chi \in X$, что

$$\mathbf{P}_\chi : \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \mathcal{P}'(E_\chi) \tag{3.17}$$

определяется естественным правилом проектирования: если $H \in (\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$, то $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{P}'(E_\chi)$ имеет вид

$$\mathbf{P}_\chi(H) \overset{\triangle}{=} \mathbf{P}(H)(\chi). \tag{3.18}$$

Из (3.15) и (3.18) вытекает, что при $\chi \in X$ и $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} \Sigma_x) = \Sigma_\chi.$$

С учетом (3.16) получаем теперь следующее свойство:

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} L_x) = L_\chi \ \ \forall (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}) \ \forall \chi \in X. \tag{3.19}$$

Заметим, что определения (3.11), (3.12) и (3.17), (3.18) имеют общий характер и «не привязаны» к варианту (3.4) (построения произведения π-систем); это будет использовано в дальнейшем в связи с (3.3). С учетом (3.12) и (3.18) получаем, конечно, что

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}_\chi(H) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.20}$$

В (3.20) могут использоваться варианты, отмеченные в (3.16). Так, в частности,

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}_\chi(H) \ \ \forall H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.21}$$

Для отображений (3.17) и (3.18) используем стандартную операцию взятия образа. Так, при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\})$ и $\chi \in X$

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \overset{\triangle}{=} (\mathbf{P}_\chi)^1(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_\chi)). \tag{3.22}$$

Вместе с тем, $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\} \ \forall H \in (\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \forall \chi \in X$. Поэтому

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\}) \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}). \tag{3.23}$$

В связи с (3.23) отметим одно общее свойство: если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то

$$\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle[M] \subset \mathcal{P}(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}). \tag{3.24}$$

Свойство (3.24) позволяет использовать в (3.23) сцепленные подсемейства $\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$.

П р е д л о ж е н и е 3.2. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle[\mathbb{E}]$ *и* $\chi \in X$, *то*

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link}\rangle[E_\chi].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{T} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle[\mathbb{E}]$ и $\chi \in X$, получая, в частности, что

$$\mathcal{T} \subset (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \subset \mathcal{L}_\chi$, а потому

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}_\chi),$$

где $\mathcal{L}_\chi \in \pi[E_\chi]$. Выберем произвольно $\Gamma_1 \in \mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T})$ и $\Gamma_2 \in \mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T})$. Тогда (см. (3.23)) по определению операции взятия образа для некоторых $\mathbb{T}_1 \in \mathcal{T}$ и $\mathbb{T}_2 \in \mathcal{T}$

$$(\Gamma_1 = \mathbf{P}_\chi(\mathbb{T}_1))\&(\Gamma_2 = \mathbf{P}_\chi(\mathbb{T}_2)). \tag{3.25}$$

В частности, $\mathbb{T}_1 \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\mathbb{T}_2 \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. Поэтому для некоторых

$$((\mathbb{T}^{(1)}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}))\&((\mathbb{T}^{(2)}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}))$$

реализуются следующие равенства

$$(\mathbb{T}_1 = \prod_{x \in X} \mathbb{T}^{(1)}_x)\&(\mathbb{T}_2 = \prod_{x \in X} \mathbb{T}^{(2)}_x). \tag{3.26}$$

В силу (3.19), (3.25) и (3.26) получаем, что $\Gamma_1 = \mathbb{T}^{(1)}_\chi$ и $\Gamma_2 = \mathbb{T}^{(2)}_\chi$. В силу сцепленности $\mathcal{T}$ имеем, однако, что $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 \neq \varnothing$, а потому (см. (3.26)) $\mathbb{T}^{(1)}_x \cap \mathbb{T}^{(2)}_x \neq \varnothing \ \forall x \in X$. В частности, получаем, что

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \mathbb{T}^{(1)}_\chi \cap \mathbb{T}^{(2)}_\chi \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор Γ_1 и Γ_2 был произвольным, установлено свойство

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link}\rangle[E_\chi],$$

что и требовалось доказать. □

С учетом предложений 3.1 и 3.2 получаем, что при $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle[\mathbb{E}]$

$$(\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}))_{\chi \in X} \in \prod_{\chi \in X} \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link}\rangle[E_\chi],$$

а потому согласно предложению 3.1 определено сцепленное семейство

$$\bigodot_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{3.27}$$

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle[\mathbb{E}]$, *то непременно*

$$\mathcal{E} \subset \bigodot_{x \in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}). \tag{3.28}$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]$. Тогда, в частности,

$$\mathcal{E} \in \mathcal{P}'((\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}).$$

Кроме того, имеем (3.27), где

$$\bigodot_{x \in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}) = \{\prod_{x \in X} \Sigma_x : (\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E})\} \tag{3.29}$$

в силу (3.7). Выберем произвольно $T \in \mathcal{E}$, получая, в частности, что $T \in (\bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. С учетом (3.21) имеем

$$T = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(T). \tag{3.30}$$

Тогда согласно (3.22) $\mathbf{P}_\chi(T) \in \mathbf{P}_\chi^1(\mathcal{E})$ при $\chi \in X$. Как следствие

$$(\mathbf{P}_x(T))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E})$$

и согласно (3.29), (3.30) получаем следующее свойство

$$T \in \bigodot_{x \in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}).$$

Поскольку T выбиралось произвольно, требуемое свойство (3.28) установлено. □

Отметим очевидное свойство:

$$\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x]. \tag{3.31}$$

В силу (3.31) предложение 3.1 и (3.27) могут использоваться в случае произведения МСС.

Предложение 3.4. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, *то непременно*

$$\mathcal{E} = \bigodot_{x \in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}).$$

Доказательство получается комбинацией (1.3), (3.27) и предложения 3.3.

Предложение 3.5. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ *и* $t \in X$, *то*

$$\mathbf{P}_t^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_t - \mathrm{link}\rangle_0[E_t]. \tag{3.32}$$

Доказательство. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ и $t \in X$. Используем предложение 3.2: $\mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})$ — сцепленное подсемейство $\mathcal{L}_t$, где $\mathcal{L}_t \in \pi[E_t]$. Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}_t$ и при этом

$$\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E}). \tag{3.33}$$

Введем в рассмотрение отображение $(M_x^*)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ посредством следующего правила:

$$(M_t^* \triangleq \mathbb{L})\&(M_x^* \triangleq E_x \ \forall x \in X \setminus \{t\}).$$

Ясно, что $(M_x^*)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$ и

$$\prod_{x\in X} M_x^* \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{3.34}$$

С учетом (1.4) и (3.34) получаем импликацию

$$((\prod_{x\in X} M_x^*) \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (\prod_{x\in X} M_x^* \in \mathcal{E}). \tag{3.35}$$

Пусть $\Sigma^* \in \mathcal{E}$. Тогда, в частности, имеем, что

$$\Sigma^* \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Используя (3.17), получаем, что $\mathbf{P}_\chi(\Sigma^*) \in \mathcal{P}'(E_\chi)$ $\forall \chi \in X$. Более того,

$$(\mathbf{P}_x(\Sigma^*))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}). \tag{3.36}$$

При этом, как легко видеть, справедливо равенство (см. (3.21))

$$\Sigma^* = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\Sigma^*).$$

Как следствие получаем равенство

$$(\prod_{x\in X} M_x^*) \cap \Sigma^* = \prod_{\chi\in X}(M_\chi^* \cap \mathbf{P}_\chi(\Sigma^*)). \tag{3.37}$$

Отметим, что (см. (3.22)) $\mathbf{P}_t(\Sigma^*) \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})$, а тогда в силу (3.33)

$$M_t^* \cap \mathbf{P}_t(\Sigma^*) = \mathbb{L} \cap \mathbf{P}_t(\Sigma^*) \neq \varnothing.$$

С другой стороны, в силу (3.36) при $x \in X \setminus \{t\}$ имеем, что

$$M_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Sigma^*) = E_x \cap \mathbf{P}_x(\Sigma^*) = \mathbf{P}_x(\Sigma^*) \neq \varnothing.$$

Получили, что $M_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Sigma^*) \neq \varnothing$ $\forall x \in X$. Из (3.37) имеем теперь (с использованием аксиомы выбора), что

$$(\prod_{x\in X} M_x^*) \cap \Sigma^* \neq \varnothing.$$

Поскольку Σ^* было выбрано произвольно, установлено свойство

$$(\prod_{x\in X} M_x^*) \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В силу (3.35) получаем, как следствие, включение $\prod\limits_{x\in X} M_x^* \in \mathcal{E}$, а тогда

$$\mathbb{L} = M_t^* = \mathbf{P}_t(\prod_{x\in X} M_x^*) \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})$$

при условии (3.33). Итак, установлена следующая импликация:

$$(\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (\mathbb{L} \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})).$$

Поскольку выбор $\mathbb{L} \in \mathcal{L}_t$ был произвольным, получили, что $\forall L \in \mathcal{L}_t$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (L \in \mathbf{P}_t^1(\mathcal{E})).$$

С учетом (1.4) и предложения 3.2 получаем требуемое положение (3.32). □

Из предложений 3.4 и 3.5 следует, в частности, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \ \ \exists (\mathcal{S}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] : \ \mathcal{E} = \bigodot_{x \in X} \mathcal{S}_x. \tag{3.38}$$

Действительно, из предложения 3.5 вытекает, что

$$(\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]; \tag{3.39}$$

теперь для проверки (3.38) достаточно учесть (1.3), (3.7) и (3.39).

П р е д л о ж е н и е 3.6. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то*

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{3.40}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. Тогда в силу (3.31) и предложения 3.1 имеем с очевидностью, что

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{3.41}$$

Выберем произвольно $\mathbb{L} \in \bigodot\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x$. С учетом (3.4) подберем $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x$ со свойством

$$\mathbb{L} = \prod_{x \in X} \Lambda_x. \tag{3.42}$$

Допустим теперь, что $\mathbb{L}$ обладает свойством

$$\mathbb{L} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{3.43}$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая при этом $\Lambda_u \in \mathcal{L}_u$. Тогда в силу (1.4) имеем импликацию

$$(\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u) \Longrightarrow (\Lambda_u \in \mathcal{E}_u) \tag{3.44}$$

(действительно, $\mathcal{E}_u$ есть МСС). Проверим истинность посылки в (3.44). Пусть $T \in \mathcal{E}_u$. Тогда, в частности, $T \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$. Введем в рассмотрение отображение $\varphi_u(T) \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ по следующему правилу:

$$(\varphi_u(T)(u) \triangleq T) \& (\varphi_u(T)(x) \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}).$$

Легко видеть (см. раздел 1), что в этом случае $\varphi_u(T) \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ и определено множество

$$\prod_{x\in X} \varphi_u(T)(x) = \{f \in \mathbf{E}^X | f(s) \in \varphi_u(T)(s) \;\; \forall s \in X\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E}^X).$$

При этом, конечно, имеет место следующее свойство:

$$\prod_{x\in X} \varphi_u(T)(x) \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x.$$

Далее, в силу (3.42) и (3.43) имеем, что

$$\mathbb{L} \cap (\prod_{x\in X} \varphi_u(T)(x)) = \prod_{x\in X} (\Lambda_x \cap \varphi_u(T)(x)) \neq \varnothing.$$

Это означает, что $\Lambda_x \cap \varphi_u(T)(x) \neq \varnothing \;\; \forall x \in X$. В частности,

$$\Lambda_u \cap T = \Lambda_u \cap \varphi_u(T)(u) \neq \varnothing.$$

Поскольку выбор T был произвольным, установлено, что

$$\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \;\; \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u. \tag{3.45}$$

Из (3.44) и (3.45) получаем, что $\Lambda_u \in \mathcal{E}_u$. Итак, установлено, что

$$\Lambda_x \in \mathcal{E}_x \;\; \forall x \in X.$$

Как следствие получаем с очевидностью, что (см. (3.7), (3.42))

$$\mathbb{L} = \prod_{x\in X} \Lambda_x \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x$$

при условии (3.43). Поскольку выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, установлено, что $\forall L \in \bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \; \forall \Sigma \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (L \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x).$$

С учетом (1.4) и (3.41) получаем требуемое свойство (3.40). □

Теорема 3.1. *Справедливо равенство*

$$\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x : \; (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}.$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией (3.38) и предложения 3.6.

Итак, в случае «ящичной» π-системы (3.4) (здесь отмечена аналогия с базой ящичной топологии на декартовом произведении множеств; см. [17, с. 198]) МСС на произведении исходных π-систем исчерпываются произведениями МСС на пространствах-сомножителях.

4. Максимальные сцепленные системы на обобщенном декартовом произведении широко понимаемых измеримых пространств

Рассмотрим первое в (3.6) ИП, определяемое π-системой (3.3). Здесь мы также распространяем (3.3) на более общий случай. В этой связи условимся о некоторых общих обозначениях. Если $\mathbb{H}$ — непустое множество, то

$$(\mathrm{Fam})[\mathbb{H}] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H})) \,|\, \mathbb{H} \in \mathcal{H}\},$$

получая непустое подсемейство $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ (заметим, что при $\mathcal{H} \in (\mathrm{Fam})[\mathbb{H}]$ объединение всех множеств из $\mathcal{H}$ совпадает с $\mathbb{H}$); $\pi[\mathbb{H}] \subset (\mathrm{Fam})[\mathbb{H}]$. В случае, связанном с (3.1), имеем, что

$$\prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x] = \{(\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \,|\, \mathcal{F}_t \in (\mathrm{Fam})[E_t]\ \forall t \in X\}. \tag{4.1}$$

При этом, конечно, у нас $\pi[E_x] \subset (\mathrm{Fam})[E_x]\ \ \forall x \in X$. Поэтому (см. (4.1))

$$\prod_{x\in X}\Pi[E_x] \subset \prod_{x\in X}\pi[E_x] \subset \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]. \tag{4.2}$$

Тогда, как обычно (см. [14, раздел III.3]), полагаем, обобщая (3.3), что

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X}\mathcal{F}_x \overset{\triangle}{=} \\ \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (\mathbb{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{F}_x : (H = \prod_{x\in X}\mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \mathbb{F}_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\} \\ \forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x];\end{gathered} \tag{4.3}$$

в дальнейшем мы следуем (4.3). Полезно отметить, что (см. (4.2))

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{S}_x \in \Pi[\mathbb{E}]\ \ \forall (\mathcal{S}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\Pi[E_x]$$

(данное свойство устанавливается подобно [14, предложение III.3.1]). Если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то $\langle \mathcal{M} - \mathrm{link}\rangle_0[M] \subset (\mathrm{Fam})[M]$ (см. раздел 1). Как следствие получаем, что

$$\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]. \tag{4.4}$$

Поэтому (см. (4.3), (4.4)) определено, в частности, произведение МСС:

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) | \exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{E}_x :\ (H = \prod_{x\in X}\Sigma_x) \& (\ \exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ \Sigma_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{E}))\ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x].\end{gathered} \tag{4.5}$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то*

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. С учетом (3.1) и (4.5) отметим, что $\mathbb{E} \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$. Итак,

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E})).$$

При этом $\mathcal{E}_t \in \langle \mathcal{L}_t - \mathrm{link}\rangle_0[E_t]\ \forall t \in X$. Тогда, в частности, $\mathcal{E}_t \subset \mathcal{L}_t$ при $t \in X$. С учетом (3.3) и (4.5) получаем, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \mathcal{P}'(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x). \tag{4.7}$$

Выберем произвольно $\Gamma' \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ и $\Gamma'' \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$. С учетом (4.5) подберем $(\Gamma'_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ со свойствами

$$(\Gamma' = \prod_{x\in X} \Gamma'_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Gamma'_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.8}$$

Кроме того, подберем (см. (4.5)) $(\Gamma''_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$ со свойствами

$$(\Gamma'' = \prod_{x\in X} \Gamma''_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Gamma''_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.9}$$

Из (4.8), (4.9) вытекает, что справедливо равенство

$$\Gamma' \cap \Gamma'' = \prod_{x\in X} (\Gamma'_x \cap \Gamma''_x). \tag{4.10}$$

По выбору $(\Gamma'_x)_{x\in X}$ и $(\Gamma''_x)_{x\in X}$ имеем, что $\Gamma'_t \cap \Gamma''_t \neq \varnothing$ при $t \in X$. Тогда в силу (4.10) получаем (с использованием аксиомы выбора), что $\Gamma' \cap \Gamma'' \neq \varnothing$. Поскольку выбор Γ' и Γ'' был произвольным, получаем (см. (4.7)) свойство сцепленности $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{E}_x$:

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[\mathbb{E}]. \tag{4.11}$$

Выберем произвольно множество $\Lambda \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$, для которого

$$\Lambda \cap \Sigma \neq \varnothing\ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.12}$$

По выбору Λ имеем для некоторого отображения $(\Lambda_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x$ свойство

$$(\Lambda = \prod_{x\in X} \Lambda_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Lambda_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.13}$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая семейство $\mathcal{E}_u \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle_0[E_u]$. При этом, конечно, $\Lambda_u \in \mathcal{L}_u$, а потому (см. (1.4))

$$(\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing\ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u) \Longrightarrow (\Lambda_u \in \mathcal{E}_u). \tag{4.14}$$

Пусть $N \in \mathcal{E}_u$. Введем в рассмотрение отображение $(N_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ по следующему правилу

$$(N_u \triangleq N) \& (N_x \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}). \tag{4.15}$$

Тогда (см. раздел 1) $N_x \in \mathcal{E}_x \ \forall x \in X$, причем $\exists K \in \mathrm{Fin}(X): \ N_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K$. Как легко видеть,

$$\mathbf{N} \triangleq \prod_{x \in X} N_x \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.16}$$

Из (4.12) и (4.16) вытекает, что $\Lambda \cap \mathbf{N} \neq \varnothing$, а потому (см. (4.13), (4.16))

$$\prod_{x \in X} (\Lambda_x \cap N_x) = (\prod_{x \in X} \Lambda_x) \cap (\prod_{x \in X} N_x) \neq \varnothing.$$

Последнее означает, что $\Lambda_x \cap N_x \neq \varnothing$ при $x \in X$. В частности (см. (4.15)),

$$\Lambda_u \cap N = \Lambda_u \cap N_u \neq \varnothing.$$

Поскольку N выбиралось произвольно, установлено, что $\Lambda_u \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}_u$. С учетом (4.14) получаем, что $\Lambda_u \in \mathcal{E}_u$. Коль скоро и u выбиралось произвольно, установлено, что $\Lambda_x \in \mathcal{E}_x \ \ \forall x \in X$. Итак,

$$(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.17}$$

Из (4.13) и (4.17) вытекает при условии (4.12), что (см. (4.3)) $\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x$. Итак, истинна импликация

$$(\Lambda \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

Поскольку Λ выбиралось произвольно, получаем, что $\forall L \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \Longrightarrow (L \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

С учетом (1.4) и (4.11) получаем требуемое свойство (4.6). $\square$

Напомним очевидное следствие определений:

$$(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.18}$$

Поэтому (см. (3.11), (4.18)) у нас определено $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)$ при $H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$. В силу (3.12) и (4.18)

$$H = \prod_{x \in X} \mathbf{P}(H)(x) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.19}$$

Разумеется (см. (4.19)), получаем с очевидностью свойство

$$\mathbf{P}(H) \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Далее, с учетом (3.17) и (4.18) имеем, что

$$\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{P}'(E_\chi) \ \ \forall H \in (\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \ \forall \chi \in X;$$

в этой связи см. (3.18). С учетом (3.18) и (4.18) при $H \in (\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\chi \in X$ имеем равенство $\mathbf{P}_\chi(H) = \mathbf{P}(H)(\chi)$. Используя (4.19), получаем следующее полезное следствие: при $H \in (\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$

$$H = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(H). \tag{4.20}$$

Отметим здесь же очевидное свойство: при $H \in (\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ и $\chi \in X$ имеет место $\mathbf{P}_\chi(H) \in \mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\}$. Если же $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\})$ и $\chi \in X$, то $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\})$; см. (3.23). В частности, при

$$\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$$

непременно $\mathcal{E} \subset (\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$, а потому определено семейство $\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\varnothing\})$ при $\chi \in X$.

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $\mathcal{T} \in \langle \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ *и* $u \in X$, *то*

$$\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle_0[E_u]. \tag{4.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{T} \in \langle \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, а также $u \in X$. Тогда определено $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\})$. Поскольку $\mathcal{T} \neq \varnothing$, имеем $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}_u)$. Отметим (см. (4.20)), что

$$H = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(H) \ \ \forall H \in \mathcal{T}. \tag{4.22}$$

Покажем, что $\mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$ — сцепленное семейство. Действительно, пусть $\Gamma \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$ и $\Lambda \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T})$. Тогда для некоторых множеств $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{T}$ и $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{T}$ имеем равенства

$$(\Gamma = \mathbf{P}_u(\tilde{\Gamma}))\&(\Lambda = \mathbf{P}_u(\tilde{\Lambda})) \tag{4.23}$$

(при этом $\Gamma \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$ и $\Lambda \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$). Заметим, что в силу (4.22)

$$(\tilde{\Gamma} = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}))\&(\tilde{\Lambda} = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})). \tag{4.24}$$

В силу сцепленности $\mathcal{T}$ получаем, что $\tilde{\Gamma} \cap \tilde{\Lambda} \neq \varnothing$, а тогда (см. (4.24))

$$\prod_{x\in X} (\mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}) \cap \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})) = (\prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma})) \cap (\prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda})) \neq \varnothing.$$

В этом случае $\mathbf{P}_x(\tilde{\Gamma}) \cap \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda}) \neq \varnothing \ \ \forall x \in X$. В частности, имеем с учетом (4.23), что $\Gamma \cap \Lambda \neq \varnothing$. Итак, получаем, что

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma_1 \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}) \ \ \forall \Sigma_2 \in \mathbf{P}^1_u(\mathcal{T}).$$

В итоге получаем требуемое свойство сцепленности:

$$\mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}) \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link}\rangle[E_u]. \tag{4.25}$$

Выберем произвольно множество $\mathbb{M} \in \mathcal{L}_u,$ для которого

$$\mathbb{M} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}). \tag{4.26}$$

Ясно, что (см. (4.26)) $\mathbb{M} \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$ и, в частности, $\mathbb{M} \in \mathcal{P}'(E_u).$ Введем в рассмотрение отображение

$$(\mathbb{M}_x^*)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X,$$

для которого $\mathbb{M}_u^* \triangleq \mathbb{M}$ и $\mathbb{M}_x^* \triangleq E_x \ \ \forall x \in X \setminus \{u\}.$ Ясно, что

$$(\mathbb{M}_x^*)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}).$$

Поскольку $\{u\} \in \mathrm{Fin}(X),$ получаем свойство

$$\tilde{\mathbb{M}} \triangleq \prod_{x \in X} \mathbb{M}_x^* \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x. \tag{4.27}$$

В силу максимальности $\mathcal{T}$ имеем следующую импликацию

$$(\tilde{\mathbb{M}} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{T}) \Longrightarrow (\tilde{\mathbb{M}} \in \mathcal{T}). \tag{4.28}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathcal{T}.$ Тогда, в частности, имеем, что

$$\Omega \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Поэтому при $x \in X$ определено множество $\mathbf{P}_x(\Omega) \in \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}.$ В частности, $\mathbf{P}_u(\Omega) \in \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}.$ С учетом (4.20) имеем равенство

$$\Omega = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\Omega).$$

Тогда с учетом (4.27) получаем следующее равенство

$$\tilde{\mathbb{M}} \cap \Omega = \prod_{x \in X} (\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega)). \tag{4.29}$$

При этом (см. (3.22)) $\mathbf{P}_u(\Omega) \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})$ по выбору $\Omega,$ а тогда в силу (4.26)

$$\mathbb{M}_u^* \cap \mathbf{P}_u(\Omega) = \mathbb{M} \cap \mathbf{P}_u(\Omega) \neq \varnothing. \tag{4.30}$$

Если же $x \in X \setminus \{u\},$ то $\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega) = E_x \cap \mathbf{P}_x(\Omega) = \mathbf{P}_x(\Omega) \neq \varnothing.$ В итоге (см. (4.30)) $\mathbb{M}_x^* \cap \mathbf{P}_x(\Omega) \neq \varnothing \ \forall x \in X.$ Из (4.29) имеем, что $\tilde{\mathbb{M}} \cap \Omega \neq \varnothing$ (используем аксиому выбора). Поскольку выбор Ω был произвольным, установлено, что $\tilde{\mathbb{M}} \cap \Sigma \neq \varnothing \quad \forall \Sigma \in \mathcal{T}.$ В силу (4.28) $\tilde{\mathbb{M}} \in \mathcal{T},$ а тогда $\mathbf{P}_u(\tilde{\mathbb{M}}) \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T}),$ где (см. (3.15))

$$\mathbf{P}_u(\tilde{\mathbb{M}}) = \mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} \mathbb{M}_x^*) = \mathbb{M}_u^* = \mathbb{M}.$$

Итак, $\mathbb{M} \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})$ при условии (4.26), т. е. истинна импликация

$$(\mathbb{M} \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})) \Longrightarrow (\mathbb{M} \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})).$$

Коль скоро и выбор $\mathbb{M}$ был произвольным, установлено, что $\forall L \in \mathcal{L}_u$

$$(L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})) \Longrightarrow (L \in \mathbf{P}_u^1(\mathcal{T})).$$

С учетом (1.4) и (4.25) получаем требуемое свойство (4.21). □

Из предложения 4.2 следует, что

$$(\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}))_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.31}$$

С учетом (4.3) и (4.4) получаем теперь (см. (4.31)), что определено

$$\bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{E})) \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}].$$

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$, *то непременно справедливо равенство*

$$\mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}). \tag{4.32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$. Тогда согласно (4.31) имеем, что

$$\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X$$

(см. предложение 4.2). В силу (4.5) и предложения 4.1 имеем, что

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}) = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) | \exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}) : \ (H = \prod_{x\in X} \Sigma_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ \Sigma_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}].\end{gathered} \tag{4.33}$$

Поэтому (см. (1.3), (4.33)) получаем импликацию

$$(\mathcal{E} \subset \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E})) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}_x^1(\mathcal{E})). \tag{4.34}$$

Выберем произвольно $\Omega \in \mathcal{E}$. Тогда по выбору $\mathcal{E}$ имеем, в частности, что (см. (1.2), (1.4))

$$\Omega \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x.$$

Поэтому для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x$ имеем

$$(\Omega = \prod_{x\in X} \Omega_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \Omega_s = E_s \ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{4.35}$$

С учетом сцепленности $\mathcal{E}$ получаем, что $\Omega \neq \varnothing$, а тогда (см. (4.35)) $\Omega_x \neq \varnothing$ при $x \in X$. Поэтому

$$(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}), \tag{4.36}$$

а тогда (см. (3.19), (4.36)) получаем, что

$$\mathbf{P}_\chi(\Omega) = \mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} \Omega_x) = \Omega_\chi \ \ \forall \chi \in X. \tag{4.37}$$

С учетом сцепленности семейства $\mathcal{E}$ имеем (см. (3.5), (3.16)), что $\Omega \in (\bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$, где

$$(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\} \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\},$$

а тогда согласно (3.22) получаем, что

$$\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) = (\mathbf{P}_x)^1(\mathcal{E}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_x)) \ \ \forall x \in X.$$

С другой стороны, по выбору Ω имеем свойство

$$\mathbf{P}_x(\Omega) \in \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in X. \tag{4.38}$$

С учетом (4.37) и (4.38) получаем, что

$$\Omega_x \in \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in X. \tag{4.39}$$

В свою очередь, из (4.39) имеем с очевидностью включение

$$(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}),$$

и при этом реализуются свойства (4.35). Получили в итоге, что $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ и, кроме того,

$$\exists (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}) : \ (\Omega = \prod_{x\in X} \Sigma_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \Sigma_s = E_s \ \ \forall s \in X \setminus K).$$

Из (4.5) и (4.31) получаем, как следствие, что $\Omega \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E})$. Тем самым установлено, что

$$\mathcal{E} \subset \bigotimes_{x\in X} \mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}). \tag{4.40}$$

Из (4.34) и (4.40) вытекает требуемое свойство (4.32). □

Из (4.31) и предложения 4.2 вытекает, что

$$\forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \ \ \exists (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] : \ \mathcal{E} = \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x. \tag{4.41}$$

Теорема 4.1. *Справедливо равенство*

$$\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x : \ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}.$$

Доказательство сводится к очевидной комбинации (4.41) и предложения 4.1. Мы получили аналог теоремы 3.1 для варианта π-системы измеримых в широком смысле прямоугольников, определяемого в (3.3).

5. Добавление: одно свойство гомеоморфности

В настоящем разделе мы вернемся к построениям [15] (см. также раздел 2), фиксируя непустые множества E_1 и E_2, а также π-системы $\mathcal{L}_1 \in \pi[E_1]$ и $\mathcal{L}_2 \in \pi[E_2]$. Следуем обозначениям раздела 2 (см., в частности, (2.1), (2.2)). Рассматриваем далее топологии стоуновского типа на множествах $\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1]$, $\langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ и $\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$. Наша цель здесь состоит в том, чтобы дополнить (2.6) соответствующим положением о гомеоморфности. Нам потребуются при этом некоторые представления из [1–3, 15, 16]. Прежде всего введем ряд общих обозначений.

Для любого множества S через $(\mathrm{top})[S]$ обозначаем семейство всех топологий на S:

$$(\mathrm{top})[S] \triangleq \{\tau \in \pi[S] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}.$$

Если E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то полагаем, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] | L \in \mathcal{E}\} \ \ \forall L \in \mathcal{L}; \tag{5.1}$$

кроме того, введем в рассмотрение семейство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \triangleq \{\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|\Lambda] : \Lambda \in \mathcal{L}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E])), \tag{5.2}$$

являющееся (открытой) предбазой топологии стоуновского типа

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]], \tag{5.3}$$

определяемой в [1, (6.1)] на множестве всех МСС на $\mathcal{L}$ (в связи с [1, (6.1)] напомним операции над семействами в [1, раздел 2]). Напомним (2.4)–(2.6). Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Если* $A \in \mathcal{L}_1$ *и* $B \in \mathcal{L}_2$, *то*

$$\begin{aligned}&\{z \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] |\ A \times B \in \mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z)\}\\ &= \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B].\end{aligned}$$

Доказательство следует из определений (см. (2.1), (5.1)). С учетом (2.6) введем в рассмотрение отображение

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &\triangleq (\mathrm{pr}_1(z)\{\times\}\mathrm{pr}_2(z))_{z \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]}\\ &\in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]^{\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

Итак, $\mathbf{f} : \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2] \longrightarrow \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$ таково, что

$$\mathbf{f}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_1\{\times\}\mathcal{E}_2 \ \ \forall \mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1]\ \forall \mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2].$$

Напомним, что (см. (2.2)) $A \times B \in \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2$ при $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Если* $A \in \mathcal{L}_1$ *и* $B \in \mathcal{L}_2$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B]) = \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B].$$

Доказательство легко извлекается из (2.4), (5.4) и предложения 5.1. Как следствие получаем (см. (5.2)), что

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2] \ \ \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2;\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]. \tag{5.5}$$

В связи с (5.5) отметим использование следующего расширительно понимаемого аналога (2.1):

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1] \times \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2]\}. \tag{5.6}$$

Заметим, что аналоги (5.6) потребуются и при введении оснащения множества $\langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ стандартным произведением топологий стоуновского типа. В этой связи напомним, что топология

$$\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \in (\mathrm{top})[\langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]], \tag{5.7}$$

отвечающая упомянутому произведению, порождается (открытой) базой

$$\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_1(z) \times \mathrm{pr}_2(z) : \ z \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \times \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle\}, \tag{5.8}$$

где также используется расширительное толкование (2.1).

П р е д л о ж е н и е 5.3. *Отображение* $\mathbf{f}$ (5.4) *непрерывно в смысле топологий* $\mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$ *и* $\mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1] \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \ \text{ и } \ \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2] \subset \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle,$$

а потому (см. (5.6), (5.8))

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2] \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.9}$$

Из (5.5), (5.9) получаем, что

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle \ \ \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2;\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]. \tag{5.10}$$

Поскольку (см. (5.2), (5.3)) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1 \times E_2;\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]$ есть открытая предбаза, порождающая топологию $\mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$, (5.10) означает, что $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение (см. [18, предложение 1.4.1]). $\square$

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *является биекцией множества* $\langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$ *на* $\langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в силу (2.6) и (5.4) отображение $\mathbf{f}$ сюръективно:

$$\mathbf{f}^1(\langle\mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]) = \langle\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]. \tag{5.11}$$

Для проверки инъективности введем в рассмотрение отображения

$$(\varphi_1 \in (\mathcal{L}_1 \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)\setminus\{\varnothing\}})\&(\varphi_2 \in (\mathcal{L}_2 \setminus \{\varnothing\})^{(\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2)\setminus\{\varnothing\}}),$$

определяемые в [15, (7.3),(7.4)] при очевидных переобозначениях (имеются в виду замены

$$X \to E_1,\ Y \to E_2,\ \mathcal{X} \to \mathcal{L}_1,\ \mathcal{Y} \to \mathcal{L}_2,$$

где $X, Y, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ соответствуют [15, раздел 7]). Важно, что

$$S = \varphi_1(S) \times \varphi_2(S) \ \ \forall S \in (\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2) \setminus \{\varnothing\}.$$

При этом, как легко проверить с учетом определений [15, раздел 7], имеет место следующее свойство образов семейств при действии φ_1 и φ_2 : если $\mathcal{A} \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1]$ и $\mathcal{B} \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$, то (см. (2.6)) $\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B} \in \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]$, где

$$\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2] \subset \mathcal{P}((\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2) \setminus \{\varnothing\}),$$

и при этом справедливы следующие два равенства:

$$((\varphi_1)^1(\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) = \mathcal{A})\&((\varphi_2)^1(\mathcal{A}\{\times\}\mathcal{B}) = \mathcal{B}). \tag{5.12}$$

Пусть выбраны произвольно

$$(\alpha \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2])\&(\beta \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]),$$

для которых справедливо равенство

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta). \tag{5.13}$$

Тогда определены сцепленные семейства (а, точнее, МСС)

$$\begin{gathered}(\mathfrak{U}_1 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\alpha) \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1])\&(\mathfrak{U}_2 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\alpha) \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2])\&\\ \&(\mathfrak{V}_1 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(\beta) \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1])\&(\mathfrak{V}_2 \overset{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(\beta) \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]).\end{gathered} \tag{5.14}$$

При этом в силу (5.4) и (5.14) $\alpha = (\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$, $\beta = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2)$, $\mathbf{f}(\alpha) = \mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2$, $\mathbf{f}(\beta) = \mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2$. Получили (см. (5.13)) равенство

$$\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2. \tag{5.15}$$

С учетом (5.12) и (5.15) получаем теперь цепочки равенств

$$\begin{gathered}(\mathfrak{U}_1 = (\varphi_1)^1(\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2) = (\varphi_1)^1(\mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2) = \mathfrak{V}_1)\&\\ \&(\mathfrak{U}_2 = (\varphi_2)^1(\mathfrak{U}_1\{\times\}\mathfrak{U}_2) = (\varphi_2)^1(\mathfrak{V}_1\{\times\}\mathfrak{V}_2) = \mathfrak{V}_2).\end{gathered} \tag{5.16}$$

Из (5.16) вытекает (при условии (5.13)), что $\alpha = \beta$. Итак, установлена импликация

$$(\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta)) \Longrightarrow (\alpha = \beta). \tag{5.17}$$

Поскольку выбор α и β был произвольным, из (5.17) следует инъективность $\mathbf{f}$ и, с учетом (5.11), получаем требуемое свойство биективности. □

П р е д л о ж е н и е 5.5. *Если $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$, то справедливо равенство*

$$\mathbf{f}^1(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B]) = \langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B].$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{L}_1$ и $B \in \mathcal{L}_2$. Тогда

$$\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B] \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]) \qquad (5.18)$$

(см. (5.1)). Отметим (см. предложение 5.4), что

$$\mathbf{f}^1(\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H})) = \mathbb{H} \ \ \forall \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]). \qquad (5.19)$$

При этом $A \times B \in \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2$, а потому согласно (5.1)

$$\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B] \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2]).$$

Из (5.18), (5.19) и предложения 5.2 получаем, что

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B] &= \mathbf{f}^1(\mathbf{f}^{-1}(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1 \times E_2|A \times B])) \\ &= \mathbf{f}^1(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle^0[E_1|A] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle^0[E_2|B]),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Предложение 5.6. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *открыто: при* $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle.$$

Доказательство. В силу предложения 5.4 имеем при $m \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{H}_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2])^m$

$$\mathbf{f}^1\Big(\bigcap_{i=1}^{m} \mathbb{H}_i\Big) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{f}^1(\mathbb{H}_i). \qquad (5.20)$$

Фиксируем $\mathbb{G} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$. Выберем произвольно $\mathcal{E} \in \mathbf{f}^1(\mathbb{G})$. Поэтому для некоторого $\eta \in \mathbb{G}$ имеем равенство $\mathcal{E} = \mathbf{f}(\eta)$. Тогда, в частности,

$$\eta \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2].$$

При этом $\mathfrak{U} \triangleq \mathrm{pr}_1(\eta) \in \langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1]$ и $\mathfrak{V} \triangleq \mathrm{pr}_2(\eta) \in \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2]$; тогда $\eta = (\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$. Можно указать (см. (5.7), (5.8)) $\mathbb{M} \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle\{\times\}\mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle$, для которого

$$(\eta \in \mathbb{M})\&(\mathbb{M} \subset \mathbb{G}). \qquad (5.21)$$

С учетом (5.8) можно указать

$$(\Gamma' \in \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle)\&(\Gamma'' \in \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle,$$

для которых реализуется следующее равенство:

$$\mathbb{M} = \Gamma' \times \Gamma''. \qquad (5.22)$$

При этом, конечно, получаем очевидные включения

$$(\mathfrak{U} \in \Gamma')\&(\mathfrak{V} \in \Gamma'').$$

Таким образом, множества Γ' и Γ'' являются (открытыми) окрестностями МСС $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ соответственно. Поэтому (см. [19, (2.6.3)]) можно указать

$$p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N},\ (\tilde{U}_i)_{i\in\overline{1,p}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]^p,\ (\tilde{V}_j)_{j\in\overline{1,q}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2]^q,$$

для которых имеют место следующие свойства:

$$(\mathfrak{U} \in \bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i)\&(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i \subset \Gamma')\&(\mathfrak{V} \in \bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)\&(\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j \subset \Gamma''). \tag{5.23}$$

Здесь учитывается отмеченная в начале раздела связь семейств (5.2) и (5.3). При этом согласно (5.2) и предложению 5.5 при $\mathbb{A} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]$ и $\mathbb{B} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2]$

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1\times E_2;\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2]$$

(в самом деле, $\mathbb{A}\times\mathbb{B} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_1;\mathcal{L}_1]\{\times\}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_2;\mathcal{L}_2]$), а тогда, в частности,

$$\mathbf{f}^1(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1\times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.24}$$

Отметим здесь же, что, как легко видеть, справедливо равенство

$$(\bigcap_{i=1}^{p}\tilde{U}_i)\times(\bigcap_{j=1}^{q}\tilde{V}_j) = \bigcap_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}(\tilde{U}_i\times\tilde{V}_j).$$

Как следствие получаем очевидное равенство:

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p}\tilde{U}_i)\times(\bigcap_{j=1}^{q}\tilde{V}_j)) = \mathbf{f}^1(\bigcap_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}(\tilde{U}_i\times\tilde{V}_j)).$$

С учетом (5.20) имеем теперь следующее представление:

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p}\tilde{U}_i)\times(\bigcap_{j=1}^{q}\tilde{V}_j)) = \bigcap_{i=1}^{p}\bigcap_{j=1}^{q}\mathbf{f}^1(\tilde{U}_i\times\tilde{V}_j). \tag{5.25}$$

Вместе с тем в силу (5.24) имеем по выбору $\tilde{U}_1,\ldots,\tilde{U}_p$ и $\tilde{V}_1,\ldots,\tilde{V}_q$, что

$$\mathbf{f}^1(\tilde{U}_i\times\tilde{V}_j) \in \mathbb{T}_*\langle E_1\times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle\ \ \forall i\in\overline{1,p}\ \forall j\in\overline{1,q}. \tag{5.26}$$

Из (5.25), (5.26) получаем по аксиомам топологии свойство

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p}\tilde{U}_i)\times(\bigcap_{j=1}^{q}\tilde{V}_j)) \in \mathbb{T}_*\langle E_1\times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle. \tag{5.27}$$

В силу (5.23) получаем, в частности, что справедливо

$$(\mathfrak{U}\in\tilde{U}_i\ \ \forall i\in\overline{1,p})\&(\mathfrak{V}\in\tilde{V}_j\ \ \forall j\in\overline{1,q}).$$

Поэтому $\eta = (\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \in \tilde{U}_i\times\tilde{V}_j\ \ \forall i\in\overline{1,p}\ \ \forall j\in\overline{1,q}$. Как следствие по выбору η получаем, что

$$\mathcal{E} = \mathbf{f}(\eta) \in \mathbf{f}^1(\tilde{U}_i\times\tilde{V}_j)\ \ \forall i\in\overline{1,p}\ \ \forall j\in\overline{1,q}. \tag{5.28}$$

Из (5.25) и (5.28) получаем очевидное включение

$$\mathcal{E} \in \mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)). \tag{5.29}$$

Тогда в силу (5.27), (5.29) имеем, что

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle : \ \mathcal{E} \in \mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)). \tag{5.30}$$

Иными словами, (5.27) есть открытая окрестность МСС $\mathcal{E}$. Покажем, что она содержится в множестве $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$. Действительно, в силу (5.21), (5.22)

$$\Gamma' \times \Gamma'' \subset \mathbb{G}. \tag{5.31}$$

Из (5.23) и (5.31) имеем теперь, что справедливо свойство

$$(\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j) \subset \mathbb{G}. \tag{5.32}$$

В свою очередь, из (5.32) вытекает следующее вложение

$$\mathbf{f}^1((\bigcap_{i=1}^{p} \tilde{U}_i) \times (\bigcap_{j=1}^{q} \tilde{V}_j)) \subset \mathbf{f}^1(\mathbb{G}). \tag{5.33}$$

Из (5.30) и (5.33) получаем, что $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ есть окрестность $\mathcal{E}$ в смысле [20, гл. I]. Поскольку $\mathcal{E}$ выбиралось произвольно, получили, что $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ является окрестностью (в смысле [20, гл. I]) каждой своей точки. Поэтому (см. [20, гл. I, § 1, предложение 1]) множество $\mathbf{f}^1(\mathbb{G})$ открыто: $\mathbf{f}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2 | \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle$. □

Теорема 5.1. *Отображение* $\mathbf{f}$, *заданное соотношением* (5.4), *есть гомеоморфизм ТП* $(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle)$ *на ТП* $(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложений 5.3–5.5 получаем, что $\mathbf{f}$ есть открытая (и непрерывная) биекция, что и означает требуемое свойство гомеоморфности данного отображения (см. [21, предложение 3.12]). □

Итак, установлена гомеоморфность ТП:

$$(\langle \mathcal{L}_1 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1] \times \langle \mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1|\mathcal{L}_1\rangle \otimes \mathbb{T}_*\langle E_2|\mathcal{L}_2\rangle),$$
$$(\langle \mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2 - \mathrm{link}\rangle_0[E_1 \times E_2], \mathbb{T}_*\langle E_1 \times E_2|\mathcal{L}_1\{\times\}\mathcal{L}_2\rangle).$$

References

[1] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[2] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:3 (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:3 (2017), 365–388 (In Russian)].

[3] А. Г. Ченцов, "Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, "Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].

[4] J. de Groot, "Superextensions and supercompactness", *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium "Extension Theory of Topological Structures and its Applications" (Berlin, 1969), Proceedings of the Symposium, VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.

[5] J. van Mill, "Supercompactness and Wallman spaces", *Mathematical Centre Tracts*. V. 85, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.

[6] M. Strok, A. Szymanski, "Compact metric spaces have binary subbases", *Fund. Math*, **89**:1 (1975), 81–91.

[7] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *General Topology. Basic Constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]

[8] А. В. Архангельский, "Компактность", *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel'skii, "Compactness", *General topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].

[9] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryaev, *Theory of Stochastic Processes*, Fizmatlit, M., 2005 (In Russian), 402 pp.]

[10] А. Г. Ченцов, "К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств", Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 307–319; англ. пер.: *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **284**:suppl. 1 (2014), 65–78.

[11] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры, II*, Уральский государственный технический университет – УПИ, Екатеринбург, 2010, 541 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory, II*, Ural State Technical University - UPI, Yekaterinburg, 2010 (In Russian), 541 pp.]

[12] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]

[13] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Science, Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]

[14] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 309 с. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 309 pp.]

[15] А. Г. Ченцов, "Фильтры и сцепленные семейства множеств", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 444–467. [A. G. Chentsov, "Filters and linked families of sets", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 444–467 (In Russian)].

[16] А. Г. Ченцов, "О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа", *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, "On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

[17] В. И. Богачев, *Слабая сходимость мер*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2016, 396 с. [V. I. Bogachev, *Weak Convergence of Measures*, Institute for Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2016 (In Russian), 396 pp.]

[18] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 751 с. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 751 pp.]

[19] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht–Boston–London, 2002, 408 с.

[20] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 272 с. [N. Burbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 272 pp.]

[21] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979, 336 с. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian), 336 pp.]

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 03.12.2020 г.
Поступила после рецензирования 10.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Received 03.12.2020
Reviewed 10.02.2021
Accepted for press 05.03.2021