ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS

MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Том 26
№ 134
2021

ISSN 2686-9667
21134
9 772686 966000

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

Том 26, № 134, 2021

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России (распоряжение от 28 декабря 2018 г. № 90-р) по физико-математическим наукам

Индексируется Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ, Math-Net.Ru, ВИНИТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка»

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина» (ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133
Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редактор М.И. Филатова
Редакторы английских текстов: В.В. Клочихин, М.А. Сенина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Молчановой
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:
Вестник российских университетов. Математика. – 2021. – Т. 26, № 134. – 116 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134

Подписано в печать 22.06.2021. Дата выхода в свет 02.07.2021
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 14,5. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 21176. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation
Derzhavin Tambov State University

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal

Volume 26, no. 134, 2021

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order from December 28, 2018 no. 90-p)

Indexed in Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI, Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka"

CONTENTS

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
"Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences". ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
"Derzhavin Tambov State University"
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html; http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html
The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). Extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019
ПИ no. ФС77-76133
Subscription index in the catalogue of LLC "Ural-Press" is 83372

Editor M.I. Filatova
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Senina
Computer layout by T.Y. Molchanova
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:
Russian Universities Reports. Mathematics. – 2021. – Vol. 26, no. 134. – 116 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134

Podpisano v pechat' 22.06.2021. Data vykhoda v svet 02.07.2021
Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.
Pech. list 14,5. Usl. pech. list 13,5. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 21176. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region.
FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University"
Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House "Derzhavinskiy"
of FSBEI of HE "Derzhavin Tambov State University".
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-109-120
UDC 519.6

Numerical assessment of the spread dynamics of the new coronavirus infection SARS-CoV-2 using multicompartmental models with distributed parameters

Evgenii O. BURLAKOV[1,2] **, Feruzbek B. KAYUMOV**[2] **, Irina D. SEROVA**[2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] University of Tyumen
6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

Численная оценка динамики распространения новой коронавирусной инфекции SARS-CoV-2 с использованием многокомпонентных моделей с распределенными параметрами

Евгений Олегович БУРЛАКОВ[1,2] **, Ферузбек Бехзод угли КАЮМОВ**[2] **,**
Ирина Дмитриевна СЕРОВА[2]
[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
[2] ФГАОУ ВО «Тюменкий государственный университет»
625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

Abstract. We propose multicompartmental models of infectious diseases dynamics for numerical study of the spread parameters of the new coronavirus infection SARS-CoV-2, which take into account the delay effects associated with the presence of the latent period of the infection, as well as the possibility of an asymptomatic course of the disease. The dynamics of the spread of COVID-19 in the Russian Federation was investigated, using these models with distributed parameters that formalize the interactions of the models' compartments. The paper provides numerical estimates of the spread dynamics of the new coronavirus infection in various age groups of the population. We also investigate possible consequences of the mask regime and quarantine measures. We obtain an explicit estimate allowing to assess the necessary scope of these measures for the epidemy extinction.

Keywords: compartmental models of epidemics, distributed parameters, numerical solution, COVID-19 modelling

Mathematics Subject Classification: 65Z05, 92D30

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-04-60524).

For citation: Burlakov E.O., Kayumov F.B., Serova I.D. Chislennaya otsenka dinamiki rasprostraneniya novoy koronavirusnoy infektsii SARS-CoV-2 s ispol'zovaniyem mnogokomponentnykh modeley s raspredelennymi parametrami [Numerical assessment of the spread dynamics of the new coronavirus infection SARS-CoV-2 using multicompartmental models with distributed parameters]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 109–120. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-109-120.

Аннотация. В работе предлагаются многокомпонентные модели динамики инфекционных заболеваний для численного исследования параметров распространения новой коронавирусной инфекции SARS-CoV-2, учитывающие в том числе эффекты запаздывания, связанные с наличием латентного периода инфекции, а также возможность бессимптомного течения заболевания. На основании данных моделей исследуется динамика распространения COVID-19 в РФ с использованием распределенных констант, формализующих взаимодействия компонент в рамках моделей. В работе получены численные оценки динамики распространения новой коронавирусной инфекции в различных возрастных группах населения. Также исследуется влияние «масочного режима» и карантинных мероприятий. В последнем случае получается выражение, позволяющее оценить необходимый масштаб данных мер для затухания эпидемии.

Ключевые слова: компонентные модели эпидемических заболеваний, распределенные параметры, численное решение, моделирование эпидемии COVID-19

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 20-04-60524_Вирусы).

Для цитирования: *Бурлаков Е.О., Каюмов Ф.Б., Серова И.Д.* Численная оценка динамики распространения новой коронавирусной инфекции SARS-CoV-2 с использованием многокомпонентных моделей с распределенными параметрами // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 109–120. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-109-120. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

Since the seminal work of Kermack and McKendrick [1] compartmental models has been widely used in mathematical epidemiology studies (see e. g. the reviews [2, 3]). After the outbreak of the new coronavirus infection SARS-CoV-2 a new wave of interest to this modelling framework has arisen in the epidemics modelling community [4–17]. The results obtained using this framework depend crucially on the choice of the input parameters in the system of modeling equations, which characterize the fundamental interrelations between the model compartments (i.e. disease transmission rate, recovery and mortality rates, etc.). A review of the vast literature on the characteristics reveals significant variance in the values of the aforementioned fundamental parameters. For example, the transmission rate estimates vary in the interval from 0.08 to 0.37 (see [18–21]), and the latent period duration varies from 2 to 11 days (see [18, 19, 22]). In the present research we are aiming to capture the uncertainty in the parameters' values determination by collecting and interpreting the results of a series simulations based on compartmental models with randomly generated parameters that obey certain distributions. The interpretation of the numerical results obtained is probabilistic. Namely, we assess confidence intervals for the parameter values of interest.

We first focus on a relatively simple 7-compartmental model that takes into account the delay effects connected to the latent period of infection and the possibility of asymptomatic progression of the disease. Then we switch to a modification of this model that involves subdivisions of the initially suggested basic compartments. This allows to capture e. g. the effects connected to effects of using face masks, the effects of isolation and quarantine, and the age factors of the epidemic parameters.

The paper is organized as follows. In Section 2 the main modelling frameworks are introduced and described. Numerical results obtained using these models are presented in Section 3. Section 4 provides a summary of the main results. Verification of fundamental properties of the mathematical models used in the paper and technical calculations related to the assessment of the basic reproduction numbers are given in Appendix A and Appendix B, respectively.

1. Main results

The basic modelling framework of this research reads as follows:

$$\begin{array}{l}\dot{S}(t)=-\beta\frac{I(t)S(t)}{N}-r_{I_a}\beta\frac{I_a(t)S(t)}{N}-r_E\beta\frac{E(t)S(t)}{N},\\ \dot{E}_a(t)=\beta\frac{I(t)S(t)}{N}-\lambda_1 E_a(t),\\ \dot{E}(t)=r_E\beta\frac{E_2(t)S(t)}{N}+\lambda_a(1-p_a)E_a(t)-\lambda E(t),\\ \dot{I}_a(t)=r_{I_a}\beta\frac{I_a(t)S(t)}{N}+\lambda_a p_a E_a(t)-\gamma I_a(t),\\ \dot{I}(t)=\gamma I_a(t)+\lambda_2 E(t)-\gamma I(t),\\ \dot{R}(t)=\gamma(I+I_a),\\ N=S(t)+E_a(t)+E(t)+I_a(t)+I(t)+R(t).\end{array}\tag{1.1}$$

Here S are susceptible, E_a are exposed, infected, but not infectious, E are pre-symptomatic infected, I_a are infectious asymptomatic, I are symptomatic infected, R are recovered (and/or deceased), $\beta>0$ and $\gamma>0$ are the disease transmission and recovery rates, respectively, $0<r_{I_a}\leq 1$, $0<r_E\leq 1$ are the transmission modifiers for the interaction between the respective categories of the population, $\lambda_a>0$, $\lambda>0$, — are the transition rates for the respective categories of the population, p_a is the probability of asymptomatic infection.

Fundamental mathematical properties of the modelling framework (1.1) such as positive invariance of the solutions corresponding to non-negative initial conditions and the well-posedness of (1.1) are verified in Appendix A.

In our modelling we use normally distributed parameters with the following 3σ-intervals based on a review of the literature on the main characteristics of the disease.

Table 1

Parameters' distributions for the model (1.1)

Parameter	Meaning	3σ-Interval	References
β	Transmission rate	[0.08, 0.37]	[18–21], [23]
r_{I_a}	Infectiousness of asympt.	[0.5, 0.9]	[18, 24–26]
r_E	Infectiousness of pre-sympt.	[0.5, 0.85]	[18, 24, 25, 27, 28]
$1/\lambda_a$	Exposed period	[2, 6]	[18, 19, 22–24, 30]
$1/\lambda$	Pre-symptomatic period	[2, 5]	[18, 19, 24, 27–29]
p_a	Probab. of asympt. infection	[0.3, 0.65]	[24–26, 29]
$1/\gamma$	Infectious period	[4, 12]	[19, 23, 31–33]

Figure 1 demonstrates the dynamics of the new coronavirus disease in the Russian Federation.

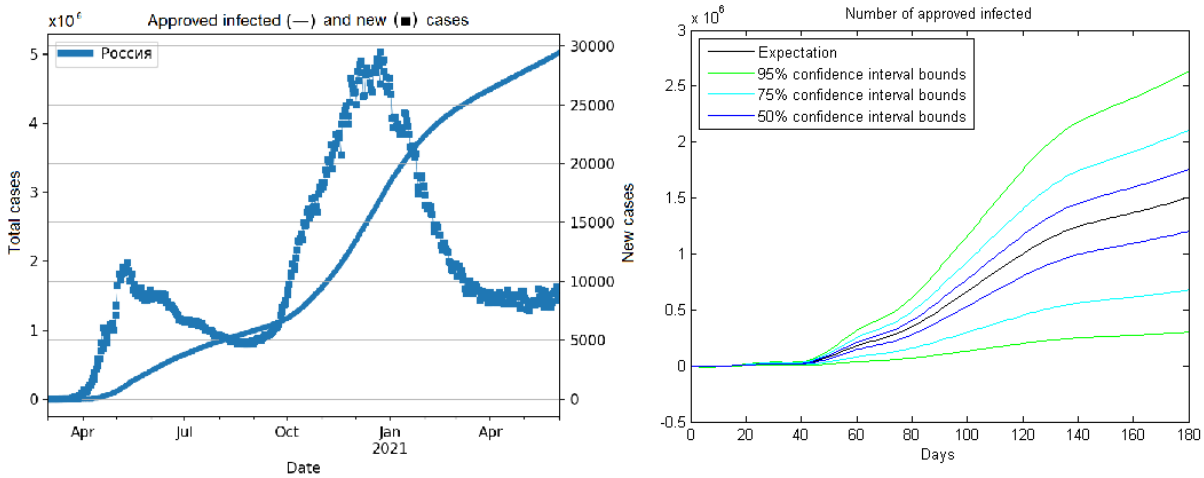


Figure 1. The initial stage of COVID-19 spread in the Russian Federation: according to Johns Hopkins Institute data (left) and according to the simulations based on the framework (1.1).

Figure 2 demonstrates the prognoses on the number of infected in the Russian Federation obtained by polynomial extrapolation of statistical data for the previous three months (left) and obtained by simulations based on the model (1.1) and the parameters with the characteristics presented in Table 1 (right).

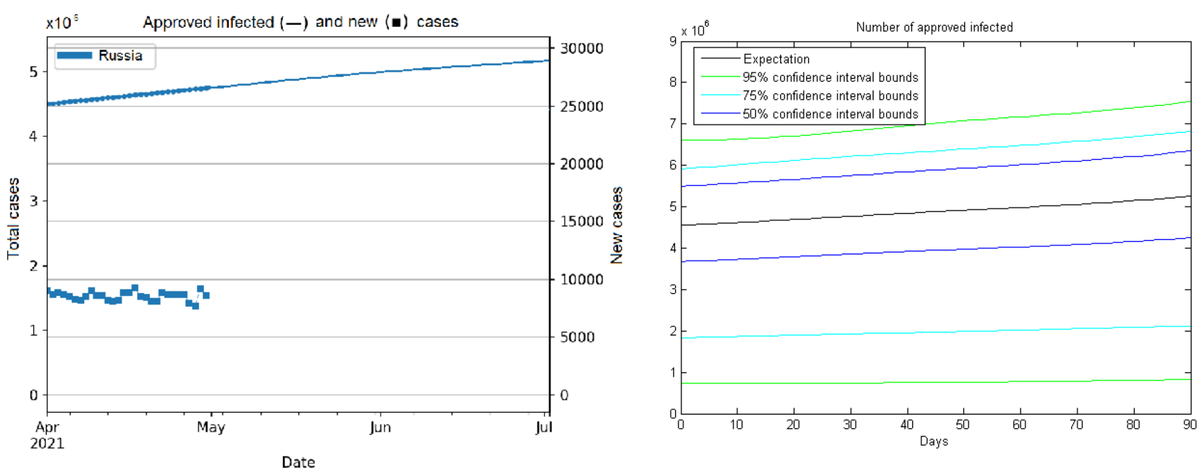


Figure 2. The prognoses on the number of infected in the Russian Federation obtained by polynomial extrapolation (indicated by thin line) of statistical data (indicated by bold line) for the preceding three months (left) and obtained by epy simulations based on the framework (1.1).

The assessment of the basic reproduction number R_0 of COVID-19 based on the model (1.1) and the parameters from Table 1 gives the following results. The expectation of R_0 equals to 2.13. The bounds of 50%, 75%, and 95% confidence intervals for R_0 are [2.02, 2.16], [1.89, 2.28], and [1.71, 2.46], respectively. The value $R_0 = \max\{\frac{r_E\beta}{\lambda}, \frac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta}\}$ is obtained using the new generation matrix method [34] (The calculation of R_0 is presented in Apendix B).

In order to study more issues connected to the spread of the new coronavirus disease, we introduce the following generalization of the model (1.1).

$$
\begin{aligned}
\dot{S}_1(t) &= -\beta_{11}\tfrac{I_1(t)S_1(t)}{N} - r_{I_a}\beta_{11}\tfrac{I_{a1}(t)S_1(t)}{N} - r_E\beta_{11}\tfrac{E_1(t)S_1(t)}{N} \\
&\quad -\beta_{12}\tfrac{I_2(t)S_1(t)}{N} - r_{I_a}\beta_{12}\tfrac{I_{a2}(t)S_1(t)}{N} - r_E\beta_{12}\tfrac{E_2(t)S_1(t)}{N}, \\
\dot{S}_2(t) &= -\beta_{22}\tfrac{I_2(t)S_2(t)}{N} - r_{I_a}\beta_{22}\tfrac{I_{a2}(t)S_2(t)}{N} - r_E\beta_{22}\tfrac{E_2(t)S_2(t)}{N} \\
&\quad -\beta_{21}\tfrac{I_1(t)S_2(t)}{N} - r_{I_a}\beta_{21}\tfrac{I_{a1}(t)S_2(t)}{N} - r_E\beta_{21}\tfrac{E_1(t)S_2(t)}{N}, \\
\dot{E}_{a1}(t) &= \beta_{11}\tfrac{I_1(t)S_1(t)}{N} + \beta_{12}\tfrac{I_2(t)S_1(t)}{N} - \lambda_a E_{a1}(t), \\
\dot{E}_1(t) &= r_E\beta_{11}\tfrac{E_1(t)S_1(t)}{N} + r_E\beta_{12}\tfrac{E_2(t)S_1(t)}{N} + \lambda_a(1-p_a)E_{a1}(t) - \lambda E_1(t), \\
\dot{E}_{a2}(t) &= \beta_{22}\tfrac{I_2(t)S_2(t)}{N} + \beta_{21}\tfrac{I_1(t)S_2(t)}{N} - \lambda_a E_{a2}(t), \\
\dot{E}_2(t) &= r_E\beta_{22}\tfrac{E_2(t)S_2(t)}{N} + r_E\beta_{21}\tfrac{E_1(t)S_2(t)}{N} + \lambda_a(1-p_a)E_{a2}(t) - \lambda E_2(t), \\
\dot{I}_{a1}(t) &= r_{I_a}\beta_{11}\tfrac{I_{a1}(t)S_1(t)}{N} + r_{I_a}\beta_{12}\tfrac{I_{a2}(t)S_1(t)}{N} + \lambda_a p_a E_{a1}(t) - \gamma_1 I_{a1}(t), \\
\dot{I}_{a2}(t) &= r_{I_a}\beta_{22}\tfrac{I_{a2}(t)S_2(t)}{N} + r_{I_a}\beta_{21}\tfrac{I_{a1}(t)S_2(t)}{N} + \lambda_a p_a E_{a2}(t) - \gamma_2 I_{a2}(t), \\
\dot{I}_1(t) &= \gamma_1 I_{a1}(t) + \lambda E_1(t) - \gamma_1 I_1(t), \\
\dot{I}_2(t) &= \gamma_2 I_{a2}(t) + \lambda E_2(t) - \gamma_2 I_2(t), \\
\dot{R}(t) &= \gamma_1(I_1(t) + I_{a1}(t)) + \gamma_2(I_2(t) + I_{a2}(t)), \\
N &= S_1(t)+E_{a1}(t)+E_1(t)+I_{a1}(t)+I_1(t)+S_2(t)+E_{a2}(t)+E_2(t)+I_{a2}(t)+I_2(t)+R(t).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Here the numbered compartments stand for subdivisions of the respective compartments of (1.1) separated with respect to certain properties that we address to below.

The first issue that we capture using the framework (1.2) is the difference of the new coronavirus disease parameters for different age groups. We divide the whole population into the subgroups of individuals aged below (indexed by "1") and above 65 years (indexed by "2"). In this setting we make the following assumptions on the parameters involved in (1.2): $\beta_{11} = \beta$, the values β_{12}, $\beta_{21} = \beta_{22}$, γ_1, and γ_2 are normally distributed with the 3σ-intervals $[0.08,\ 0.37]$, $[0.1,\ 0.46]$, $[0.07,\ 0.19]$, and $[0.11,\ 0.28]$, respectively. The transmission rates here are estimated based on the statistical data [19, 23], the values of γ_1 and γ_2 are estimated based on the recovery and mortality rates in the respective age categories [35–38]. The ratio $S_1(0)/S_2(0)$ is taken to be equal to $17/3$. The values of the rest parameters are chosen according to Table 1.

Figure 3 demonstrates the dynamics of the new coronavirus disease in the aforementioned age categories of the population.

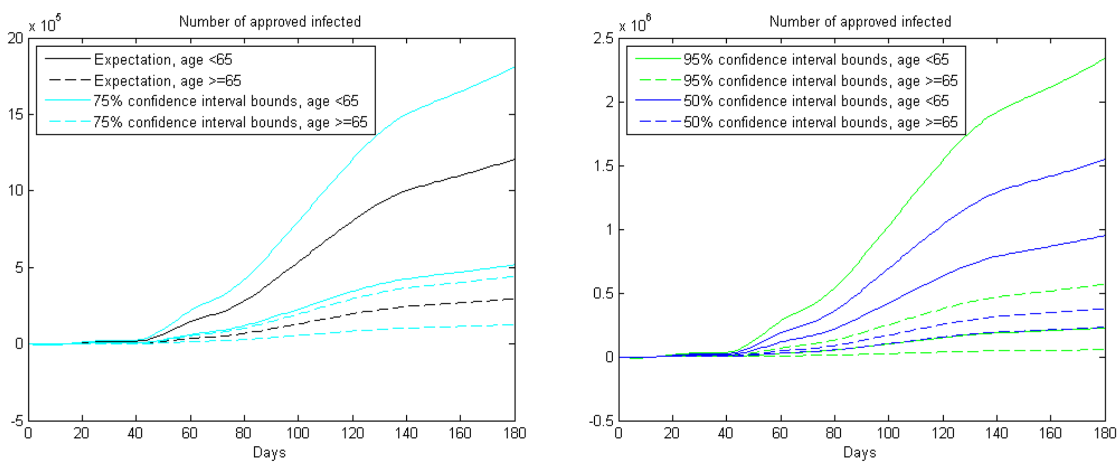


Figure 3. The initial stage of COVID-19 spread in the age categories of below (solid lines) and above (dashed lines) 65 years old according to the simulations based on the framework (1.2).

The second effect we model using the framework (1.2) are the consequences of face masks use by a subcategory of the whole population. We make a simplifying assumption of strict separation of the groups of individuals who do not use face masks (indexed by "1") and who always wear face masks during the contacts with others (indexed by "2"). Here we make the following assumptions on the parameters in (1.2): $\beta_{11} = \beta$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, the values of β_{12}, β_{21}, and β_{22} has normal distributions with the 3σ-intervals $[0.07,\ 0.32]$, $[0.05,\ 0.25]$, and $[0.04,\ 0.17]$, respectively (based on the statistical data [39–44]). The values of the rest parameters are the same as in the first modelling setting (see Table 1). Below we demonstrate the result of the face masks regime implementation starting from the 90th day from the disease outbreak with the ratio $S_1(90)/S_2(90) = 2/3$ (see Figure 4).

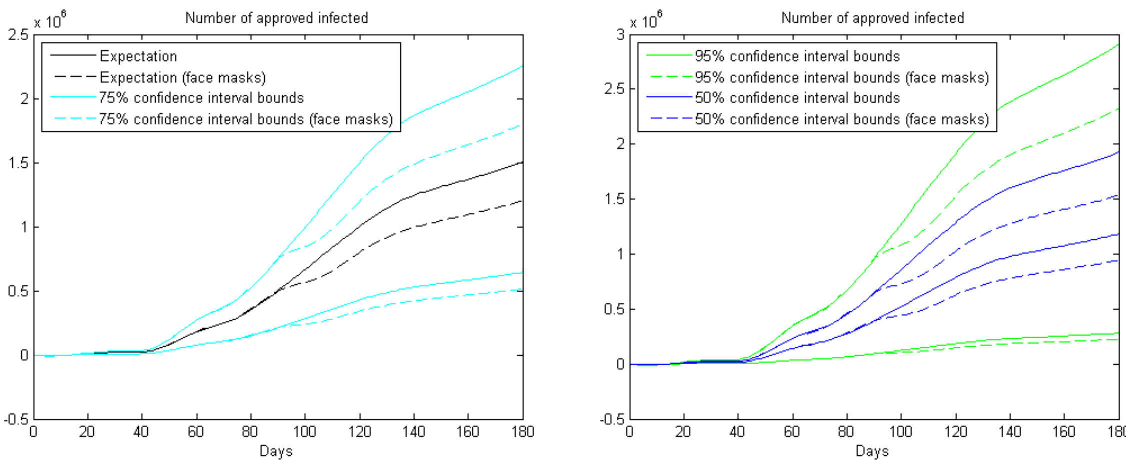


Figure 4. The results of the face masks regime implementation (dashed lines) at the 90th day from the outbreak of COVID-19 in the Russian Federation according to the simulations based on the framework (1.2).

The assessment of the basic reproduction number R_0 corresponding to the face masks regime gives the following results. The expectation of R_0 equals to 1.71. The bounds of 50%, 75%, and 95% confidence intervals for R_0 are [1.61, 1.79], [1.51, 1.83], and [1.37, 2.09], respectively.

Generally, the basic reproduction number value in the framework (1.2) can be found as

$$R_0 = \max\{\frac{N\beta_{22}r_{E_2} - S_1(0)\beta_{22}r_{E_2}}{N\lambda}; \frac{S_1(0)\beta_{11}r_{E_1}}{N\lambda}; \frac{N\beta_{22}r_{I_2} - S_1(0)\beta_{22}r_{I_2}}{N\gamma_2}; \frac{S_1(0)\beta_{11}r_{I_{a_1}}}{N\gamma_1}\}$$

by the same procedure as was implemented in the case of (1.1).

The third case we consider using the framework (1.2) concerns lockdown measures. We divide the population into the subgroups of non-isolated (indexed by "1") and isolated (indexed by "2") individuals. Here we make the following assumptions on the parameters involved in (1.2): $\beta_{11} = \beta$, $\beta_{12} = \beta_{21} = \beta/15$ (see [45, 46]), $\beta_{22} = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ (see Table 1).

Figure 5 demonstrates the result of the implementation of the lockdown regime with the ratio $S_1(90)/S_2(90) = 2$ starting from the 90th day since the disease outbreak (see Figure 2).

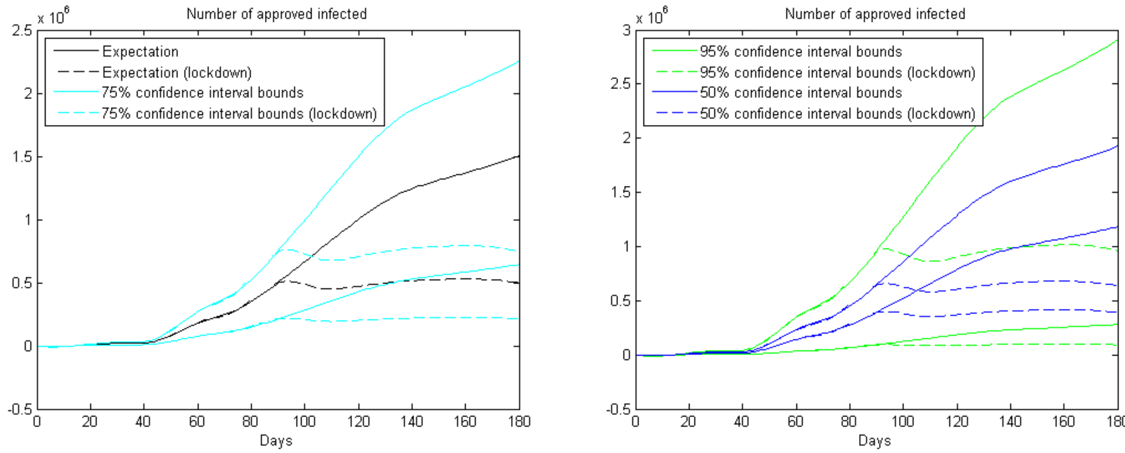


Figure 5. The results of the lockdown regime implementation (dashed lines) at the 90th day from the outbreak of COVID-19 in the Russian Federation according to the simulations based on the framework (1.2).

The assessment of the basic reproduction number R_0 corresponding to the lockdown regime gives the following results. The expectation of R_0 equals to 0.96. The bounds of 50%, 75%, and 95% confidence intervals for R_0 in this case are [0.92, 1.01], [0.88, 1.06], and [0.83, 1.1], respectively.

2. Conclusions

In this paper we investigated numerically the spread dynamics parameters of the new coronavirus disease in the Russian Federation. We employed the multi-compartmental epidemic models (1.1) and (1.2), which parameters were distributed according to the statistical data. We assessed the following additional features in our modelling based on the framework (1.2): the dynamics of the disease in different age groups and the effects of the face masks and the lockdown regimes on the COVID-19 spread. Interestingly, the obtained expression for the basic reproduction number in (1.2) can be used for direct assessment of the scope of the face masks or the lockdown measures required for the epidemy extinction.

Appendix A

Let us verify here the well-posedness property of (1.1). We first note that the vector-function $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ that corresponds to the right-hand side of the differential equaations of the system (1.1) obviously satisfies Caratheodori conditions, i.e. $f(\cdot)$ is continuous and for any $k > 0$, there exists some constant L_k such that $|f(X)| \le L_k$ for any $X \in \mathbb{R}^6$, $|X| \le k$. In addition, the structure of the system (1.1) and the a-priori boundedness of its solutions imply the validity of Lipschitz condition for the right-hand side of (1.1) with some positive constant. Let us now denote $g(X, u_0) = f(X)$, where $u_0 = (\beta, r_{I_a}, r_E, \lambda_a, \lambda, p_a, \gamma)$. It is straightforward to check that $g(X_i(\cdot), u_i) \to g(X_0(\cdot), u_0)$ in measure for any $u_i \to u_0$ and any continuous functions X_0, X_i $(i = 1, 2, \dots)$ such that $X_i(\cdot) \to X_0(\cdot)$ in measure. Applying Corollary 3 from [47], due to a-priori boundedness of solutions to (1.1), we obtain the well-posedness of (1.1) on any closed interval $[0, T]$ of time for any initial condition $X^0 = (S(0), E_a(0), E(0), I_a(0), I(0), R(0))$.

The proof of well-posedness of (1.2) is analogous.

In order to verify the positive invariance property, we address Lemma 2.1 in [48]. This statement guarantees the property needed provided that the gradient of the vector field generated by (1.1) estimated at any point of the boundary of the set $[0,\infty)^6$ is not oriented outside of this set. Obviously, the latter property takes place for the models (1.1) and (1.2).

Appendix B

We first assess the basic reproduction number for the model (1.1). Let us denote by $\mathfrak{F}$ the growth rate of infected individuals and by $\mathfrak{V}$ – the transition rate of infected to other compartments. The disease-free equilibrium is $x_0 = (S(0), 0, 0, 0, 0, 0)$. New infected arise in the compartments $E_a, E, I_a,$ so we have

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \beta\frac{I(t)S(t)}{N(t)} \\ r_E\beta\frac{E(t)S(t)}{N(t)} \\ r_{I_a}\beta\frac{I_a(t)S(t)}{N(t)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} \lambda_a E_a(t) \\ -\lambda_a(1-p_a)E_a(t) + \lambda E(t) \\ -\lambda_a p_a E_a(t) + \gamma I_a(t) \\ -\gamma I_a(t) - \lambda E(t) + \gamma I(t) \\ \beta\frac{I(t)S(t)}{N(t)} + r_{I_a}\beta\frac{I_a(t)S(t)}{N(t)} + r_E\beta\frac{E(t)S(t)}{N(t)} \\ -\gamma(I + I_a) \end{pmatrix}.$$

Let us approximate $S(0)$ by N. Let us find the matrices $F = [\frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_j}(x_0)]$, $V = [\frac{\partial \mathfrak{V}_i}{\partial x_j}(x_0)]$, where $1 \le i, j \le 4$.

We get

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_E\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{I_a}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_a(1-p_a) & \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda_a p_a & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\lambda & -\gamma & \gamma \end{pmatrix}.$$

The basic reproduction number R_0 can be found as $R_o = \rho(FV^{-1})$, where $\rho(FV^{-1})$ is the spectral radius of the matrix FV^{-1}.

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_E\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{I_a}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_a-1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{-p_a\beta-\beta+\gamma p_a}{\gamma(\gamma+\beta)} & 0 & \frac{1}{\gamma+\beta} & 0 \\ \frac{2p_a-1}{\gamma+\beta} & \frac{1}{\gamma+\beta} & \frac{1}{\gamma+\beta} & \frac{1}{\gamma+\beta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_E\beta(p_a-1)}{\lambda} & \frac{r_E\beta}{\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{r_{I_a}\beta(-p_a\beta-\beta+\gamma p_a)}{\gamma(\gamma+\beta)} & 0 & \frac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Next, we find the eigenvalues of FV^{-1}:

$$\begin{vmatrix} -\widetilde{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_E\beta(p_a-1)}{\lambda} & \frac{r_E\beta}{\lambda} - \widetilde{\lambda} & 0 & 0 \\ \frac{r_{I_a}\beta(-p_a\beta-\beta+\gamma p_a)}{\gamma(\gamma+\beta)} & 0 & \frac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta} - \widetilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\widetilde{\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

$$-\widetilde{\lambda}\cdot(\frac{r_E\beta}{\lambda}-\widetilde{\lambda})\cdot(\frac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta}-\widetilde{\lambda})\cdot(-\widetilde{\lambda})=0,$$

$$\begin{cases}\widetilde{\lambda}_{1,2}=0;\\ \widetilde{\lambda}_3=\dfrac{r_E\beta}{\lambda};\\ \widetilde{\lambda}_4=\dfrac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta}.\end{cases}$$

We therefore have

$$R_0=\max\{\frac{r_E\beta}{\lambda},\frac{r_{I_a}\beta}{\gamma+\beta}\}.$$

Proceeding in the same manner, we obtain the following expression for the basic reproduction number in (1.2):

$$R_0=\{\frac{N\beta_{22}r_{E_2}-S_1(0)\beta_{22}r_{E_2}}{N\lambda};\frac{S_1(0)\beta_{11}r_{E_1}}{N\lambda};\frac{N\beta_{22}r_{I_2}-S_1(0)\beta_{22}r_{I_2}}{N\gamma_2};\frac{S_1(0)\beta_{11}r_{I_{a_1}}}{N\gamma_1}\}.$$

References

[1] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics", *Proc. R. Soc. Lond. A*, **115**:772 (1927), 700–721.

[2] F. Brauer, "Compartmental Models in Epidemiology", *Mathematical Epidemiology*, **1945** (2008), 19–79.

[3] L. Tang, Y. Zhou, L. Wang, S. Purkayastha, L. Zhang, J. He, F. Wang, P. Song, "A Review of Multi-Compartment Infectious Disease Models", *International Statistical Review*, **88**:2 (2020), 462–513.

[4] M. Dashtbali, M. Mirzaie, "A compartmental model that predicts the effect of social distancing and vaccination on controlling COVID-19", *Sci Rep*, **11** (2021), 81–91.

[5] S. Sturniolo , W. Waites , T. Colbourn, D. Manheim, J. Panovska-Griffiths, "Testing, tracing and isolation in compartmental models", *PLOS Computational Biology*, 2021 (to appear).

[6] P. Hernandez , C. Pena, A. Ramos, J. J. Gomez–Cadenas, "A new formulation of compartmental epidemic modelling for arbitrary distributions of incubation and removal times", *PLOS ONE*, 2021 (to appear).

[7] A. Abou–Ismail, "Compartmental Models of the COVID-19 Pandemic for Physicians and Physician-Scientists", *SN Compr Clin Med*, 2020 (to appear).

[8] M. Vidyasagar, "Modelling a pandemic with asymptomatic patients, impact of lockdown and herd immunity, with applications to SARS-CoV-2", *Annu Rev Control*, **50** (2020), 432–447.

[9] K. Sharov, "Creating and applying SIR modified compartmental model for calculation of COVID-19 lockdown efficiency", *Chaos, Solitons and Fractals*, **141** (2020), 110295.

[10] A. Comunian, R. Gaburro, M. Giudici, "Inversion of a SIR-based model: A critical analysis about the application to COVID-19 epidemic", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **413**:19 (2020), 132674.

[11] T. Wang, Y. Wu, J.n Yiu–Nam Lau, Y. Yu, L. Liu, J. Li, K. Zhang, W. Tong, B. Jiang, "A four-compartment model for the COVID-19 infection–implications on infection kinetics, control measures, and lockdown exit strategies", *Precision Clinical Medicine*, **3**:2 (2020), 104–112.

[12] N. Wang, Y. Fu, H. Zhang, H. Shi, "An evaluation of mathematical models for the outbreak of COVID-19", *Precision Clinical Medicine*, **3**:2 (2020), 85–93.

[13] G. Battineni, N. Chintalapudi, F. Amenta, "SARS-CoV-2 epidemic calculation in Italy by SEIR compartmental models", *Applied Computing and Informatics*, 2020 (to appear).

[14] A. Abou–Ismail, “Compartmental Models of the COVID-19 Pandemic for Physicians and Physician-Scientists”, *SN Compr Clin Med*, 2020 (to appear).

[15] V. Clemente–Suarez, A. Hormeno–Holgado, M. Jimenez, J. Benitez–Agudelo, E. Navarro–Jimenez, N. Perez–Palencia, R. Maestre–Serrano, C. Laborde–Cardenas, JF. Tornero–Aguilera, “Dynamics of Population Immunity Due to the Herd Effect in the COVID-19 Pandemic”, *Vaccines (Basel)*, **8** (2020), 236.

[16] R. Fernandes, “Compartmental Epidemiological Models for Covid-19: Sources of Uncertainty, Goodness-of-Fit and Goodness-of-Projections”, *IEEE Latin America Transactions*, **19**:6 (2021), 1024–1032.

[17] A. Leontitsis, A. Senok, A. Alsheikh-Ali, Y. Al Nasser, T. Loney, A. Alshamsi, “SEAHIR: A Specialized Compartmental Model for COVID-19”, *Int J Environ Res Public Health*, **18**:5 (2021), 2667.

[18] C. Anastassopoulou, L. Russo, A. Tsakris, C. Siettos, “Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak”, *PLoS ONE*, **15**:3 (2020), e0230405.

[19] L. Zhang, J. Zhu, X. Wang, J. Yang, F. Liu Xiao, X.-K. Xu, “Characterizing COVID-19 Transmission: Incubation Period, Reproduction Rate, and Multiple-Generation Spreading”, *Frontiers in Physics*, **8** (2021), 588.

[20] B. Qifang et al, “Epidemiology and transmission of COVID-19 in 391 cases and 1286 of their close contacts in Shenzhen, China: a retrospective cohort study”, *The Lancet Infectious Diseases*, **20**:8 (2020), 911–919.

[21] EO. Romero-Severson, N. Hengartner, G. Meadors, R. Ke, “Change in global transmission rates of COVID-19 through”, *PLOS ONE*, **15**:8 (2020), e0236776.

[22] N. Zaki, EA. Mohamed, “The estimations of the COVID-19 incubation period: A scoping reviews of the literature”, *J Infect Public Health*, **14**:5 (2021), 638–646.

[23] YC. Seo, KE. Lee, HM. Lee, N. Jung, QA. Le, BJ. Mafwele, TH. Lee, DH. Kim, JW. Lee, “Estimation of Infection Rate and Predictions of Disease Spreading Based on Initial Individuals Infected With COVID-19”, *Frontiers in Physics*, **8** (2020), 311.

[24] GU. Kim, MJ. Kim, SH. Ra, J. Lee, S. Bae, J. Jung, et al., “Clinical characteristics of asymptomatic and symptomatic patients with mild COVID-19”, *Clin Microbiol Infect*, **26** (2020), 948.e1–948.e3.

[25] P. Oran Daniel, J. Topol Eric, “Prevalence of Asymptomatic SARS-CoV-2 Infection: A Narrative Review”, *Ann Intern Med*, **173** (2020), 362–367.

[26] AM. Pollock, J. Lancaster, “Asymptomatic transmission of covid-19”, *BMJ*, **371** (2020), m4851.

[27] M. K. Slifka, L. Gao, “Is presymptomatic spread a major contributor to COVID-19 transmission?”, *Nat Med*, **26** (2020), 1531–1533.

[28] MA. Johansson, TM. Quandelacy, S. Kada, et al., “SARS-CoV-2 Transmission From People Without COVID-19 Symptoms”, *JAMA Netw Open*, **4**:1 (2021), e2035057.

[29] D. Buitrago-Garcia, D. Egli–Gany, MJ. Counotte, S. Hossmann, H. Imeri, A. M. Ipekci, G. Salanti, N. Low, “Occurrence and transmission potential of asymptomatic and presymptomatic SARS-CoV-2 infections: A living systematic review and meta-analysis”, *PLoS Med*, **17**:9 (2020), e1003346.

[30] K. Ejima, KS. Kim, C. Ludema, AI. Bento, S. Iwanami, Y. Fujita, H. Ohashi, Y. Koizumi, K. Watashi, K. Aihara, H. Nishiura, S. Iwami, “Estimation of the incubation period of COVID-19 using viral load data”, *Epidemics*, **35** (2021), 100454.

[31] A. W. Byrne, D. McEvoy, A. B. Collins, K. Hunt, M. Casey, A. Barber, F. Butler, J. Griffin, E. A. Lane, C. McAloon, K. O’Brien, P. Wall, K. A. Walsh, S. J. More, “Inferred duration of infectious period of SARS-CoV-2: rapid scoping review and analysis of available evidence for asymptomatic and symptomatic COVID-19 cases”, *BMJ Open*, **10**:8 (2020), e039856.

[32] L. Peng, F. Ji–Bo, L. Ke–Feng, L. Jie–Nan, W. Hong–Ling, L. Lei–Jie, C. Yan, Z. Yong–Li, L. She–Lan, T. An, T. Zhen–Dong, Y. Jian–Bo, “Transmission of COVID-19 in the terminal stages of the incubation period: A familial cluster”, *International Journal of Infectious Diseases*, **96** (2020), 452–453.

[33] G. Meyerowitz–Katz, L. Merone, “A systematic review and meta-analysis of published research data on COVID-19 infection fatality rates”, *International Journal of Infectious Diseases*, **101** (2020), 138–148.

[34] P. van den Driessche, J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission", *Mathematical Biosciences*, **180** (2002), 29–48.

[35] N. Islam, V. M. Shkolnikov, R. J. Acosta, I. Klimkin, I. Kawachi, R. A. Irizarry et al, "Excess deaths associated with covid-19 pandemic in 2020: age and sex disaggregated time series analysis in 29 high income countries", *BMJ: British Medical Journal*, **373** (2021), n1137.

[36] I. Voinsky, G. Baristaite, D. Gurwitz, "Effects of age and sex on recovery from COVID-19: Analysis of 5769 Israeli patients", *J. Infect*, **81**:2 (2020), e102-e103.

[37] L. Sigfrid, M. Cevik, E. Jesudason, et al, "What is the recovery rate and risk of long-term consequences following a diagnosis of COVID-19? A harmonised, global longitudinal observational study protocol", *BMJ Open*, **11** (2021), e043887.

[38] C. Bonanad, S. Garcia–Blas, F. Tarazona–Santabalbina, J. Sanchis, V. Bertomeu–Gonzalez, L. Facila, A. Ariza, J. Nunez, A. Cordero, "The Effect of Age on Mortality in Patients With COVID-19: A Meta-Analysis With 611,583 Subjects", *Journal of the American Medical Directors Association*, **21**:7 (2020), 915–918.

[39] L. Peeples, "Face masks: what the data say", *Nature*, **586** (2020), 186–189.

[40] J. Howard, A. Huang, Z. Li, Z. Tufekci, V. Zdimal, H-M. van der Westhuizen, A. von Delft, A. Price, L. Fridman, L-H. Tang, V. Tang, GL. Watson, CE. Bax, R. Shaikh, F. Questier, D. Hernandez, LF. Chu, CM. Ramirez, AW. Rimoin, "An evidence review of face masks against COVID-19", *Proceedings of the National Academy of Sciences Jan*, **118**:4 (2021), e2014564118.

[41] ME. Van Dyke, TM. Rogers, E. Pevzner, et al, "Trends in County-Level COVID-19 Incidence in Counties With and Without a Mask Mandate–Kansas, June 1-August 23, 2020", *MMWR Morb Mortal Wkly Rep*, **69**:47 (2020), 1777–1781.

[42] WC. Hill, MS. Hull, RI. MacCuspie, "Testing of Commercial Masks and Respirators and Cotton Mask Insert Materials using SARS-CoV-2 Virion-Sized Particulates: Comparison of Ideal Aerosol Filtration Efficiency versus Fitted Filtration Efficiency", *Nano Lett*, **20**:10 (2020), 7642–7647.

[43] M. A. Johansson, T. M. Quandelacy, S. Kada, et al, "SARS-CoV-2 Transmission From People Without COVID-19 Symptoms", *JAMA Netw Open*, **4**:1 (2021), e2035057.

[44] S. M. Moghadas, M. C. Fitzpatrick, P. Sah, et al, "The implications of silent transmission for the control of COVID-19 outbreaks", *Proc Natl Acad Sci USA*, **117**:30 (2020), 17513–17515.

[45] V. Alfano, S. Ercolano, "The Efficacy of Lockdown Against COVID-19: A Cross-Country Panel Analysis", *Appl Health Econ Health Policy*, **18**:4 (2020), 509–517.

[46] N. Haug, L. Geyrhofer, A. Londei et al, "Ranking the effectiveness of worldwide COVID-19 government interventions", *Nat Hum Behav*, **4** (2020), 1303–1312.

[47] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskii, "The continuous dependence of solutions to Volterra equations with locally contracting operators on parameters", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **54**:8 (2010), 12–23.

[48] H. Li, S. Guo, "Dynamics of a SIRC epidemiological model", *Electronic Journal of Differential Equations*, **2017**:121 (2017), 1–18.

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Research and Educational Center "Fundamental Mathematical Research", Derzhavin Tambov State University, Tambov; Researcher, University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, PhD, научный сотрудник научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; научный сотрудник, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7286-9456

Feruzbek B. Kayumov, Master Student, X-Bio Institute. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: f.kayumov97@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2219-9885

Irina D. Serova, Junior Researcher, X-Bio Institute. University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4224-1502

Каюмов Ферузбек Бехзод угли, студент магистратуры института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: f.kayumov97@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2219-9885

Ирина Дмитриевна Серова, младший научный сотрудник института X-Bio. Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: irinka_36@mail.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4224-1502

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
E. O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 16.03.2021
Reviewed 20.05.2021
Accepted for press 10.06.2021

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 16.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 20.05.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129
УДК 512.542

О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах

Юлия Владимировна ГОРБАТОВА
ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Брянский филиал)»
241007, Российская Федерация, г. Брянск, ул. Дуки, 61

On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups

Yuliya V. GORBATOVA
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch)
61 Duki St., Bryansk 241007, Russian Federation

Аннотация. Работа посвящена описанию структуры конечных ненильпотентных разрешимых групп, в которых любые две строго 2-максимальные или строго 3-максимальные подгруппы перестановочны. В частности, показано, что в разрешимой ненильпотентной группе G любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Также доказана эквивалентность строения ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными 3-максимальными подгруппами и с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами. Последний результат позволяет провести классификацию всех конечных разрешимых групп с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами, в работе описано 14 классов групп с указанным свойством. Также полученные результаты доказывают нильпотентность конечной разрешимой группы с перестановочными строго n-максимальными подгруппами в случае, если число простых делителей порядка этой группы строго превышает n для $n = 2, 3$.

Ключевые слова: разрешимая группа, n-максимальная подгруппа, строго n-максимальная подгруппа, нормальная подгруппа, нильпотентная группа, группа Шмидта

Для цитирования: *Горбатова Ю.В.* О перестановочных строго 2-максимальных и строго 3-максимальных подгруппах // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 121–129. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129.

Abstract. We describe the structure of finite solvable non-nilpotent groups in which every two strongly n-maximal subgroups are permutable ($n = 2, 3$). In particular, it is shown for a solvable non-nilpotent group G that any two strongly 2-maximal subgroups are permutable if and only if G is a Schmidt group with Abelian Sylow subgroups. We also prove the equivalence of the structure of non-nilpotent solvable groups with permutable 3-maximal subgroups and with permutable strongly 3-maximal subgroups. The last result allows us to classify all finite solvable groups with permutable strongly 3-maximal subgroups, and we describe 14 classes of groups with this property. The obtained results also prove the nilpotency of a finite solvable group with permutable strongly n-maximal subgroups if the number of prime divisors of the order of this group strictly exceeds n $(n = 2, 3)$.

Keywords: solvable group, n-maximal subgroup, strongly n-maximal subgroup, normal subgroup, nilpotent group, Schmidt group

Mathematics Subject Classification: 20E28

For citation: Gorbatova Yu.V. O perestanovochnykh strogo 2-maksimal'nykh i strogo 3-maksimal'nykh podgruppakh [On permutable strongly 2-maximal and strongly 3-maximal subgroups]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 121–129. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-121-129. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными.

На протяжении многих лет развития теории конечных групп исследователи обращались к вопросу влияния свойств n-максимальных подгрупп (при фиксированном n) на строение группы, что привело к появлению большого числа публикаций по теории обобщенно максимальных подгрупп. Наиболее ранние результаты в данном направлении представлены в работах Б. Хупперта [1] и Л. Редеи [2]. Первая из них посвящена описанию структуры групп с нормальными вторыми максимальными подгруппами. Во второй работе изучено строение неразрешимых групп с абелевыми вторыми максимальными подгруппами.

В последние два десятилетия получено множество новых результатов, связанных со вторыми и третьими максимальными подгруппами. В частности, развивая отмеченный выше результат Б. Хупперта, Ю. В. Луценко (Горбатова) и А. Н. Скиба в работе [3] описали строение ненильпотентных групп, все строго 2-максимальные подгруппы которых нормальны. Также в [3] получена классификация ненильпотентных групп, в которых все 2-максимальные подгруппы или все строго 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами. Основываясь на этих результатах, в работе [4] авторы описали точное строение групп с субнормальными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами. Этот результат получил продолжение в работе [5], в которой Ю. В. Горбатовой и М. Н. Коноваловой была решена задача полного описания групп с субнормальными строго 2-максимальными или строго 3-максимальными подгруппами. Отметим также работу [6], в которой получено строение ненильпотентных групп с перестановочными 2-максимальными или 3-максимальными подгруппами. В связи с последним результатом вполне естественной является задача описания ненильпотентных групп, в которых любые две строго 2-максимальные или любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны. Эта задача в классе разрешимых групп решена в настоящей работе. В частности, показана эквивалентность строения ненильпотентных разрешимых групп с перестановочными n-максимальными подгруппами и с перестановочными строго n-максимальными подгруппами ($n = 2, 3$).

1. Основные понятия и вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, используемые в работе.

О п р е д е л е н и е 1.1. Подгруппа H группы G *называется* 2-*максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) *группы* G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично определяются *третьи максимальные подгруппы*, *четвертые максимальные подгруппы* и далее.

О п р е д е л е н и е 1.2. Подгруппу H группы G называют *строго n-максимальной подгруппой,* если H является n-максимальной подгруппой в G, но не является n-максимальной подгруппой в любой собственной подгруппе группы G.

Подгруппа H группы G может являться n-максимальной в G, но при этом не быть строго n-максимальной. Например, в группе $SL(2,3)$ единственная подгруппа порядка 2 является 2-максимальной подгруппой, но не является строго 2-максимальной подгруппой.

О п р е д е л е н и е 1.3. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны.

Лемма 1.1. [6, лемма 2.3] *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 2-максимальные подгруппы группы G являются перестановочными;*

(2) *G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Теорема 1.1. [6, теорема 3.1] *Пусть G — ненильпотентная группа. Тогда любые две 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны в том и только в том случае, когда G является группой одного из следующих типов:*

I. *G — группа Шмидта одного из видов:*

(a) *G — группа с абелевыми силовскими подгруппами;*

(b) *$G=[P]Q$, где P изоморфна либо группе $M_3(p)$, либо группе кватернионов порядка 8;*

(c) *$G=[P]Q$, где $|P|>p^3$, $|\Phi(P)|=p$ и $\Phi(P)=\Phi^2(P)$, $\Phi^2(P)$ — пересечение всех 2-максимальных подгрупп из P;*

II. *G — бипримарная группа, не являющаяся группой Шмидта, одного из следующих видов:*

(1) *$G=[P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, Q — циклическая группа и $[P]\Phi(Q)$ — группа Шмидта;*

(2) *$G=([P]Q_1)\times C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $|C_q|=q$ и PQ_1 — группа Шмидта;*

(3) *$G=[P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, $|a|=|b|=q$, $P\langle a\rangle$ и $P\langle b\rangle$ — группы Шмидта;*

(4) *$G=[P]Q$, где $|P|=p$, $p>2$ и Q изоморфна группе кватернионов порядка 8;*

(5) *$G=([P]Q_1)C_q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G, $Q_1=\langle a\rangle$, $C_q=\langle b\rangle$, $|Q_1C_q|=q^\beta$, $|a|=q^{\beta-1}$ ($\beta\geq 3$), PQ_1 — группа Шмидта, $a^b=a^{1+q^{\beta-2}}$ и $[P,C_1]=1$ для всякой подгруппы C_1, изоморфной C_q;*

(6) *$G=[P]Q$, где $\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, обе группы $\Phi(P)Q$ и $G/\Phi(P)$ являются группами Шмидта, максимальная подгруппа из Q совпадает с $Z(G)$ и любые две 2-максимальные подгруппы из P перестановочны;*

(7) *G — подпрямое произведение двух различных изоморфных групп Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(8) *$G=[P_1\times C_p]Q$, где P_1 — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $|C_p|=p$, P_1Q — группа Шмидта, максимальная подгруппа из Q содержится в $Z(G)$ и $[C_p,Q]=1$;*

(9) *$G=[[P_1]Q]C_p$, где P_1 — минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $|Q|=q$, $|C_p|=p$, $N_G(Q)=[Q]C_p$ и P_1C_p — абелева группа;*

III. G — *группа, порядок которой имеет в точности три простых делителя* p, q, r, *и которая является группой одного из следующих видов:*

(i) $G = ([P]Q)R$, *где* P *и* R — *минимальные нормальные подгруппы группы* G, Q — *циклическая группа и* $F(G) = PR\Phi(Q)$;

(ii) $G = [R](P \times Q)$, *где* $|P| = p$, $|Q| = q$ *и* $R = F(G)$ — *минимальная нормальная подгруппа группы* G.

Лемма 1.2. *Пусть* $P = [H]C_p$, *где* H — *элементарная абелева* p*-группа,* $|C_p| = p$ *и любые две строго* 2*-максимальные подгруппы из* P *перестановочны. Тогда* P *является абелевой группой.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и группа P — контрпример минимального порядка. Если H не содержит $Z(P)$, то $P = HZ(P)$, и поэтому P является абелевой группой, что противоречит допущению. Следовательно, $Z(P) \leq H$. Тогда $Z(P) = Z_1 \times Z_2 \ldots \times Z_t$, где $|Z_i| = p$.

Так как H — элементарная абелева p-группа, то H/Z_1 также является элементарной абелевой p-группой и $P/Z_1 = [H/Z_1](C_pZ_1/Z_1)$, где $C_pZ_1/Z_1 \simeq C_p$. Кроме того, любые две строго 2-максимальные подгруппы из P/Z_1 перестановочны. Следовательно, для группы P/Z_1 выполняется условие леммы и, по индукции, факторгруппа P/Z_1 является абелевой. Полагая $Z_1 = Z(P)$ и применяя [7, теорема 5.1.9], получаем $|P| = p^3$. Так как $P = [H]C_p$ и подгруппы H и C_p порождаются элементами порядка p, то $P = \Omega_1(P) = \{g \in G \mid g^p = 1\}$. Но всякая подгруппа порядка p группы P является 2-максимальной подгруппой. Это означает, что P — абелева группа. Полученное противоречие доказывает лемму. □

2. Строение разрешимых ненильпотентных групп с перестановочными строго 2-максимальными подгруппами

Следующая теорема описывает разрешимые ненильпотентные группы с перестановочными строго 2-максимальными подгруппами.

Теорема 2.1. *Пусть* G — *разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две строго* 2*-максимальные подгруппы группы* G *перестановочны;*

(2) G *является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. (1) ⇒ (2). Допустим, что G — разрешимая ненильпотентная группа и любые две строго 2-максимальные подгруппы в G перестановочны.

Предположим вначале, что группа G имеет ненильпотентную максимальную подгруппу M. Пусть H — максимальная подгруппа в M. Если при этом H является строго 2-максимальной подгруппой в G, то ввиду условия, HH^x — подгруппа в G для всех $x \in G$. Тогда $H \leq HH^x \leq G$. Но, поскольку H — строго 2-максимальная подгруппа в G, то HH^x является максимальной подгруппой в G и H является максимальной подгруппой в HH^x. Таким образом, в разрешимой группе G есть две несопряженные максимальные подгруппы M и HH^x, и поэтому, ввиду [8, глава II, лемма 3.9], $G = MHH^x$. Тогда, согласно [9, лемма 1.43], $G = MHH^x = M(H^x)^{x^{-1}} = MH = M$, что невозможно. Таким образом, H не является строго 2-максимальной подгруппой в G. Это означает, что существует хотя бы один ряд подгрупп G_i группы G ($0 \leq i \leq n$) такой, что $H = G_r$

для $r \geq 3$ и группа G_i максимальна в G_{i-1}. Рассмотрим ряд наибольшей длины среди существующих:

$$1 = G_n < ... < H = G_r < ... < G_2 < G_1 < G_0 = G.$$

В данном ряду группа G_2 является строго 2-максимальной подгруппой в G. Тогда, ввиду условия теоремы, $G_2G_2^x \leq G$ для всех $x \in G$. Но, поскольку G_2 — строго 2-максимальная подгруппа в G, то $G_2G_2^x$ является максимальной подгруппой в G и $G_2G_2^x \neq G_1$. Таким образом, в разрешимой группе G есть две несопряженные максимальные подгруппы G_1 и $G_2G_2^x$, и поэтому, снова ввиду [8, глава II, лемма 3.9], $G = G_1G_2G_2^x$. Тогда, согласно [9, лемма 1.43], $G = G_1G_2G_2^x = G_1G_2^x = G_1(G_2^x)^{x^{-1}} = G_1G_2 = G_1$, что невозможно.

Полученные противоречия показывают, что в группе G каждая максимальная подгруппа нильпотентна. Тогда G является группой Шмидта и в силу [10, глава VI, теорема 26.1], $G = [P]Q$, где P — силовская p-подгруппа группы G и Q — циклическая q-подгруппа в G. Предположим, что $P' \neq 1$. Тогда в подгруппе $P'Q$ существует максимальная подгруппа T такая, что $|P'Q : T| = p$. В силу строения группы Шмидта, T является 2-максимальной подгруппой в G, причем T — строго 2-максимальная подгруппа в G. Из условия теоремы следует, что TT^x — подгруппа в G для любого $x \in G$. Согласно [8, глава VI, лемма 4.7], существует такой элемент $y \in TT^x$, что $Q^y = QQ^x$. Это влечет $Q = Q^x$ для любого $x \in G$, а значит подгруппа Q нормальна в G, что противоречит строению группы Шмидта. Следовательно, $P' = 1$, что означает абелевость силовской подгруппы P.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда в силу леммы 1.1, в группе G любые две 2-максимальные подгруппы перестановочны, в том числе, и любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны. □

Следствие 2.1. *Если в разрешимой группе G любые две строго 2-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 2$, то группа G нильпотентна.*

Следствие 2.2. *В том и только в том случае в ненильпотентной разрешимой группе G каждая строго 2-максимальная подгруппа нормальна, когда G — сверхразрешимая группа Шмидта.*

Следствие 2.3. *Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами;*

(2) *любые две 2-максимальные подгруппы из G перестановочны;*

(3) *любые две строго 2-максимальные подгруппы из G перестановочны.*

3. Строение разрешимых ненильпотентных групп с перестановочными строго 3-максимальными подгруппами

Следующая теорема позволяет усилить в разрешимом случае основной результат работы [6, теорема 3.1], заменив условие перестановочности всех 3-максимальных подгрупп на условие перестановочности только строго 3-максимальных подгрупп.

Теорема 3.1. *Пусть G — разрешимая ненильпотентная группа. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *любые две 3-максимальные подгруппы из G перестановочны;*

(2) *любые две строго 3-максимальные подгруппы из G перестановочны.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть верно условие (1) теоремы. Тогда в группе G перестановочны в том числе и любые две строго 3-максимальные подгруппы. Таким образом, верно условие (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть теперь выполняется условие (2) теоремы. Покажем, что в этом случае группа G удовлетворяет условию теоремы 1.1. Тем самым будет доказана справедливость условия (1) данной теоремы.

Так как G — разрешимая ненильпотентная группа, в которой любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны, то каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо удовлетворяет условию теоремы 2.1, т. е. является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. В силу разрешимости группы G согласно [10, глава VI, теорема 26.1], число различных простых делителей порядка группы G не превосходит трёх, т. е. $\pi(G) \leq 3$.

Дальнейшее доказательство теоремы можно получить методом, использовавшимся при доказательстве основного результата работы [6, теорема 3.1, с. 1259–1264], учитывая при этом теорему 2.1 данной работы. Опишем этапы этого метода и приведем доказательства некоторых из них.

I. Предполагаем вначале, что $G = [P]Q$ является группой Шмидта.

Если P — абелева группа, то G — группа типа I(a) в теореме 1.1.

Если P — неабелева группа, то, как показано в [6, с. 1260], G является группой одного из типов I(b–c) в теореме 1.1.

II. Далее предполагаем, что G — бипримарная группа, отличная от группы Шмидта, и в G существует нормальная силовская подгруппа, например, P.

Тогда $G = [P]Q$, где P и Q — силовские p-подгруппа и q-подгруппа в G. Так как каждая максимальная подгруппа группы G, отличная от нильпотентной, является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то легко заметить, что все подгруппы Шмидта группы G содержат либо силовскую p-подгруппу из G, либо силовскую q-подгруппу из G.

Предположим, что верен первый случай, т. е. все подгруппы Шмидта группы G содержат силовскую p-подгруппу из G. Тогда $G = [P]Q$, где P — минимальная нормальная подгруппа группы G в силу абелевости P и согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)].

Если Q — абелева циклическая подгруппа в G, то G — это группа типа II(1) в теореме 1.1.

Если Q — абелева нециклическая подгруппа в G, то, как показано в [6, с. 1260], G является группой одного из типов II(2–3) в теореме 1.1.

Рассмотрим случай, когда Q — неабелева группа с $|Q| = q^{\beta}$, $q = 2$ и $\beta = 3$. Тогда в силу [11, глава V, теорема 4.4] Q изоморфна либо группе кватернионов, либо диэдральной группе. Допустим, что верно последнее. Тогда $Q = [\langle a\rangle]\langle b\rangle$, где $|a| = 2^2$, $|b| = 2$, $a^b = a^{-1}$. В силу строения диэдральной группы, Q имеет ровно три максимальные подгруппы вида: $\langle a\rangle$, $\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$. Так как при этом P — минимальная нормальная подгруппа группы G, то максимальными подгруппами в G являются группы вида Q,

$P\langle a\rangle$, $P\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $P\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$. При этом, как показано выше, каждая максимальная подгруппа группы G либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. В силу своего строения группы $P\langle a^2\rangle\langle b\rangle$ и $P\langle a^2\rangle\langle ab\rangle$ не являются группами Шмидта, следовательно, они нильпотентны. Пусть P_1 — максимальная подгруппа из P. Тогда группы $P_1\langle b\rangle$ и $P_1\langle ab\rangle$ являются строго 3-максимальными подгруппами в G. По условию, они перестановочны, т. е. $(P_1\langle b\rangle)(P_1\langle ab\rangle) = (P_1\langle ab\rangle)(P_1\langle b\rangle)$. Следовательно, $\langle ab\rangle\langle b\rangle = \langle b\rangle\langle ab\rangle$ и поэтому $ab = ba$. Это влечет $a^b = a = a^{-1}$ и значит $a^2 = 1$, что противоречит строению диэдральной группы. Полученное противоречие показывает, что Q изоморфна группе кватернионов порядка 8. Тогда поскольку $q = 2$, согласно [10, глава VI, теорема 26.1(4)(6)] получаем, что $|P| = p$. Таким образом, G — группа типа II(4) в теореме 1.1.

Пусть теперь Q — неабелева группа с $|Q| = q^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$), причем q — нечётное простое число, либо $q = 2$ и $\beta > 3$. Тогда, как показано в [6, с. 1261], G является группой типа II(5) в теореме 1.1.

Напомним, что все подгруппы Шмидта группы G содержат либо силовскую p-подгруппу из G, либо силовскую q-подгруппу из G. Осталось рассмотреть случай, когда каждая подгруппа Шмидта группы G содержит силовскую q-подгруппу из G. В этом случае согласно [10, глава VI, теорема 26.1(3)] $Q = \langle a\rangle$ является циклической группой. Рассмотрим максимальную подгруппу $P\langle a^q\rangle$ группы G. В силу рассматриваемого случая, она не является группой Шмидта, а значит, она нильпотентна. Тогда $P\langle a^q\rangle = P \times \langle a^q\rangle = F(G)$, что означает $\langle a^q\rangle \leq Z(G)$.

Предположим вначале, что все максимальные подгруппы группы G, содержащие силовскую q-подгруппу из G, являются группами Шмидта. Пусть $M = P_1Q^x$ — произвольная максимальная подгруппа Шмидта группы G, где $P_1 < P$. В силу теоремы 2.1 и [10, глава VI, теорема 26.2(2)], P_1 является минимальной нормальной подгруппой в M.

Рассмотрим случай, когда P — неабелева группа. Это влечет $P' \subseteq \Phi(P) \neq 1$. Предположим, что $\Phi(P) \not\leq P_1$. Тогда $\Phi(P)P_1Q \leq G$. В силу максимальности P_1Q в G, либо $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, либо $\Phi(P)P_1Q = G$. Если $\Phi(P)P_1Q = P_1Q$, то $\Phi(P) \leq P_1$, что противоречит нашему допущению. Следовательно, $\Phi(P)P_1Q = G$. Это влечет $\Phi(P)P_1 = P$ и поэтому $P_1 = P$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\Phi(P) \leq P_1$, а так как P_1 — минимальная нормальная подгруппа в M, то $P_1 = \Phi(P)$. Поскольку G не является нильпотентной и $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$, то $G/\Phi(P)$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и при этом максимальная подгруппа группы Q совпадает с $Z(G)$. Пусть E_1 и E_2 — произвольные 2-максимальные подгруппы группы P. Покажем перестановочность E_1 и E_2. Очевидно, что $E_1\langle a^q\rangle$ и $E_2\langle a^q\rangle$ являются строго 3-максимальными подгруппами в G. Тогда по условию,

$$(E_1\langle a^q\rangle)(E_2\langle a^q\rangle) = (E_2\langle a^q\rangle)(E_1\langle a^q\rangle)$$

и значит $V = \langle a^q\rangle(E_1E_2)$ является подгруппой группы G. Согласно [8, глава VI, лемма 4.7], в группе V существует силовская p-подгруппа V_p, причем $V_p = E_1E_2$. Это влечет перестановочность подгрупп E_1 и E_2. Следовательно, G — группа типа II(6) в теореме 1.1.

Теперь рассмотрим случай, когда P — абелева группа. Предположим, что при этом $\Phi(P) \neq 1$. Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, можно показать, что $P_1 = \Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в G и $G/\Phi(P)$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Таким образом, G вновь является группой типа II(6) в теореме 1.1.

Пусть теперь $\Phi(P) = 1$. Это означает, что P является элементарной абелевой p-группой. Тогда, как показано в [6, с. 1262], в этом случае G является группой типа II(7) в теореме 1.1.

Предположим теперь, что не все максимальные подгруппы группы G, содержащие силовскую q-подгруппу из G, являются группами Шмидта. Это означает, что группа G имеет некоторую нильпотентную максимальную подгруппу $M = P_1 \times Q$, содержащую силовскую подгруппу Q из G ($P_1 < P$). В этом случае, как показано в работе [6, с. 1262], G является группой типа II(8) в теореме 1.1.

III. Далее предполагаем, что G — бипримарная группа, отличная от группы Шмидта, и G не имеет нормальных силовских подгрупп.

Обозначим через L нормальную подгруппу с индексом p группы G. Очевидно, что $Q \leq L$. Если предположить, что Q нормальна в L, то Q будет являться нормальной и в самой группе G, что противоречит рассматриваемому случаю. Таким образом, $L = [P_1]Q$ — группа Шмидта, что влечет цикличность Q. По теореме 2.1, P_1 — абелева и значит согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)], P_1 — минимальная нормальная подгруппа в L. Тогда P_1 является минимальной нормальной подгруппой и в самой группе G.

Допустим, что $N_G(Q)$ — нильпотентная подгруппа в G. Тогда в силу цикличности Q, имеем $Q \leq Z(N_G(Q))$. Тогда по [12, теорема 14.3.1] группа G имеет нормальное q-дополнение, что противоречит рассматриваемому случаю. Это означает, что $N_G(Q) = [Q]\langle b\rangle$ — группа Шмидта. В силу цикличности Q и согласно [10, глава VI, теорема 26.1(6)] имеем $|Q| = q$.

Заметим, что L и $N_G(Q)$ — максимальные подгруппы в G, что влечет $G = LN_G(Q)$. Но тогда $P_1\langle b\rangle$ является силовской p-подгруппой в G. Так как $|G : L| = p$, получаем $P_1 \cap \langle b\rangle = \langle b^p\rangle$. Очевидно, что подгруппа $Q\langle b^p\rangle$ нильпотентна, что означает $\langle b^p\rangle \leq C_{P_1}(Q)$. Напомним, что $[P_1]Q$ является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, и это согласно [10, глава VI, теорема 26.2(2)] влечет $C_{P_1}(Q) = 1$. Таким образом, $\langle b^p\rangle = 1$ и $|\langle b\rangle| = p$. Следовательно, подгруппа $P_1\langle b\rangle = [P_1]\langle b\rangle$ максимальна в G, причем P_1 — элементарная абелева p-группа. Ввиду условия теоремы, любые две строго 2-максимальные подгруппы из $P_1\langle b\rangle$ перестановочны и поэтому, в силу леммы 1.2, $P_1\langle b\rangle$ — абелева группа. Итак, G — группа типа II(9) в теореме 1.1.

IV. В конце предполагаем, что $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где $p \neq q \neq r$.

В этом случае, как показано в работе [6, с. 1263–1264], G является группой одного из типов III(i–ii) в теореме 1.1.

Итак, в случае, когда любые две строго 3-максимальные подгруппы группы G перестановочны, G является группой одного из типов I–III, описанных в теореме 1.1. А это в свою очередь означает, что любые две 3-максимальные подгруппы из G перестановочны. $\square$

Следствие 3.1. *Если в разрешимой группе G любые две строго 3-максимальные подгруппы перестановочны и $|\pi(G)| > 3$, то группа G нильпотентна.*

References

[1] B. Huppert, “Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen”, *Math. Z.*, **60**:1 (1954), 409–434.

[2] L. Rédei, “Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen”, *Acta Math.*, **84**:1 (1950), 129–153.

[3] Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “Конечные ненильпотентные группы с нормальными или S-квазинормальными n-максимальными подгруппами”, *Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины*, **52**:1 (2009), 134–138. [Yu. V. Lutsenko (Gorbatova), A. N. Skiba, “Finite nonnilpotent groups with normal or S-quasinormal n-maximal subgroups”, *Francisk Scorina Gomel State University Reports*, **52**:1 (2009), 134–138 (In Russian)].

[4] Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами”, *Математические заметки*, **91**:5 (2012), 730–740; англ. пер.:Yu. V. Lutsenko (Gorbatova), A. N. Skiba, “Finite groups with subnormal second or third maximal subgroups”, *Math. Notes*, **91**:5 (2012), 680–688.

[5] Ю. В. Горбатова, М. Н. Коновалова, “Конечные группы с субнормальными строго 2- или 3-максимальными подгруппами”, *Вестник Омского университета*, **24**:3 (2019), 4–11. [Yu. V. Gorbatova, M. N. Konovalova, “Finite groups with subnormal strongly 2- or 3-maximal subgroups”, *Omsk University Reports*, **24**:3 (2019), 4–11 (In Russian)].

[6] В. Го, Ю. В. Луценко (Горбатова), А. Н. Скиба, “О ненильпотентных группах, любые две 3-максимальные подгруппы которых перестановочны”, *Сибирский математический журнал*, **50**:6 (2009), 1255–1268; англ. пер.:W. Guo, Yu. V. Lutsenko, A. N. Skiba, “On nonnilpotent groups in which every two 3-maximal subgroups are permutable”, *Siberian Mathematical Journal*, **50**:6 (2009), 988–997.

[7] H. Kurzweil, B. Stellmacher, *The Theory of Finite Groups: an Introduction*, Springer-Verdag, New York–Berlin–Heidelberg, 2004.

[8] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verdag, New York–Berlin–Heidelberg, 1967.

[9] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Высшая школа, Минск, 2006. [V. S. Monahov, *Vvedenie v Teoriyu Konechnykh Grupp i ikh Klassov*, Vysshaya Shkola Publ., Minsk, 2006 (In Russian)].

[10] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Наука, М., 1978. [L. A. Shemetkov, *Formatsii Konechnykh Grupp*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].

[11] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, New York–Evanston–London, 1968.

[12] М. Холл, *Теория групп*, Наука, М., 1962. [M. Kholl, *Teoriya Grupp*, Nauka Publ., Moscow, 1962 (In Russian)].

Информация об авторе

Горбатова Юлия Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных и естественно-научных дисциплин. Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Брянский филиал), г. Брянск, Российская Федерация. E-mail: g.julia32@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6297-6664

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 03.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Yuliya V. Gorbatova, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Social-humanitarian and Natural-scientific Disciplines Department. Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Bryansk Branch), Bryansk, Russian Federation.
E-mail: g.julia32@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6297-6664

Received 07.04.2021
Reviewed 03.06.2021
Accepted for press 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142
УДК 517.952, 517.955

Условия разрешимости в аналитическом виде дескрипторной системы уравнений в частных производных

Абдулфтах Хосни МОХАМАД
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394036, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Solvability conditions in the analytical form of a descriptor system of partial differential equations

Abdulftah H. MOHAMAD
Voronezh State University
33 University Sq., Voronezh 394036, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается система дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных первого порядка в банаховом пространстве с постоянными вырожденными операторами в случае регулярного операторного пучка. В таком случае исходная система при некотором дополнительном условии расщепляется на вырожденные подсистемы в непересекающихся подпространствах для поиска проекций исходной неизвестной функции в подпространствах. Выявляются условия согласования для параметров систем. Построено решение рассматриваемой системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциально-алгебраические уравнения, фредгольмов оператор, дескрипторная система

Для цитирования: *Мохамад А.Х.* Условия разрешимости в аналитическом виде дескрипторной системы уравнений в частных производных // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 130–142. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142.

Abstract. A system of first-order partial differential-algebraic equations in a Banach space with constant degenerate operators in the case of a regular operator pencil is considered. In this case, under some additional condition, the original system splits into two subsystems in disjoint subspaces in order to search for the projections of the original unknown function in the subspaces. The matching conditions for the parameters of the systems are identified. A solution of the considered system of differential-algebraic equations is constructed.

Keywords: Banach space, differential-algebraic equations, Fredholm operator, descriptor system

Mathematics Subject Classification: 35F40

For citation: Mohamad A.H. Usloviya razreshimosti v analiticheskom vide deskriptornoy sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Solvability conditions in the analytical form of a descriptor system of partial differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 130–142. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-130-142. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается уравнение

$$A\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = B\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + Cu(t,x) + f(t,x), \tag{0.1}$$

где $A : E_1 \to E_2$, E_1, E_2 — банаховы пространства; A — замкнутый линейный фредгольмов оператор с нулевым индексом и с плотной в E_1 областью определения $domA$, $\overline{dom}A = E_1$; $B, C \in L(E_1, E_2)$, оператор B необратим; $(t,x) \in T \times X$, $T = [0, t_k]$, $X = [0, x_k]$; $f(t,x)$ — заданная достаточно гладкая вектор-функция со значениями в E_2; $u = u(t,x)$ искомая вектор-функция.

Такие уравнения называют *дифференциально-алгебраическими*, или *дескрипторными*, или уравнениями *Соболевского типа*, или уравнениями *не типа Коши–Ковалевской.* Дескрипторная система с оператором A, имеющим число 0 нормальным собственным числом, решена в работе [1]. Исследование уравнения (0.1) можно сопоставить с исследованием уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = Bz + f(t), \tag{0.2}$$

с необратимыми коэффициентами A, B, где A — замкнутый линейный оператор действующий в банаховом пространстве E, $B \in L(E,E)$, и с достаточно гладкой вектор-функцией $f(t)$; а решение задачи (0.1) — с решением $z = z(t)$ уравнения (0.2) при начальном условии

$$z(0) = z_0 \in domA. \tag{0.3}$$

Над изучением задачи (0.2), (0.3) активно работают известные школы С. Г. Крейна, С. П. Зубовой, А. Г. Руткаса, Н. А. Сидорова, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой, A. Favini. Достаточно полно результаты исследования этой задачи представлены в [2–7].

Дескрипторные системы нашли свое применение при моделировании движения самолетов [8], химических процессов [9], экономических систем [10]. Большое количество работ по дескрипторным системам также относится к теории электрических цепей [11].

В работе [12] проведено обоснование численного метода для решения системы (0.1) с постоянными матрицами коэффициентов с некоторыми граничными условиями.

Наша цель — получить условия, при которых система (0.1) с граничными условиями разрешима в аналитическом виде.

Если оператор пучок $A - \lambda B$, при λ достаточно малых по модулю, является регулярным, то есть оператор $A_\lambda = (A - \lambda B)^{-1}A : domA \to E_1$ имеет число 0 нормальным собственным числом [13], то E_1 разлагается в прямую сумму двух подпространств

$$E_1 = M \oplus N, \tag{0.4}$$

где N — корневое подпространство для A_λ, а M инвариантно относительно A_λ и такое, что сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет обратный оператор $(\tilde{A}_\lambda)^{-1}$.

Сформулируем известные свойства фредгольмовых операторов (см. [14]).

С в о й с т в о 0.1. Пространства E_1 и E_2 расщепляются в прямые суммы [3]

$$E_1 = KerA \oplus CoimA, \quad E_2 = ImA \oplus CokerA, \tag{0.5}$$

где $CoimA$ — прямое дополнение к ядру $KerA$ в E_1, $CokerA$ — дефектное подпространство, $dimKerA = dimCokerA < \infty$. Сужение $\tilde{A}$ оператора A на $CoimA \cap dom(A)$ имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}^{-1}$. Определим отвечающие разложениям (0.5) проекторы P_0 и Q_0 на $KerA$ и $CokerA$, соответственно, а также оператор $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q_0)$, называемый полуобратным, $A^- : ImA \to CoimA \cap dom(A)$. Здесь и далее через I обозначен единичный оператор в соответствующем пространстве.

С в о й с т в о 0.2. Уравнение

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap dom(A), \quad w \in E_2, \tag{0.6}$$

эквивалентно системе

$$Q_0 w = 0, \quad v = A^- w + P_0 v \quad \forall P_0 v \in KerA \cap dom(A).$$

Первое равенство в последней системе является условием корректности уравнения (0.6) (см. [3]).

Определим операторы

$$\begin{gathered} A_0 = A, \quad Q_0 = Q, \quad P_0 = P, \quad A_0^- = A^-, \quad T_0 = A_0^- B, \quad S_0 = Q_0 B, \\ A_j = S_{j-1} P_{j-1}, \quad S_j = Q_j S_{j-1} T_{j-1}, \quad T_j = T_{j-1} - A_j^- S_{j-1} T_{j-1} \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \end{gathered} \tag{0.7}$$

Операторы P_j и Q_j в (0.7) — это проекторы на $KerA_j$ и $CokerA_j$, отвечающие соответствующим разложениям, $A_j^- = \tilde{A}_j^{-1}(Q_{j-1} - Q_j)$ (см. [3]).

С в о й с т в о 0.3. Цепочки Жордана B-присоединенных элементов оператора A имеют максимальную длину $p < \infty$ тогда и только тогда, когда оператор A_p обратим (описание оператора A_p см. в работах [3, 15, 16]).

С в о й с т в о 0.4. Пучок $(A - \lambda B)$ регулярен в том и только том случае, когда существует $q \in \mathbb{N}$ такое, что оператор A_q обратим (см. [3]). Число p — есть минимальное из таких q. Число 0 является нормальным собственным числом оператора A_λ, при этом выполняется (0.4), где

$$M = \{y \in E_1 : \, S_i y = 0, \; i = 0, 1, \ldots, p - 1\}. \tag{0.8}$$

Сужение $\tilde{A}_\lambda$ оператора A_λ на M имеет ограниченный обратный оператор $\tilde{A}_\lambda^{-1}$:

$$\tilde{A}_\lambda^{-1} = I - \lambda T_p.$$

С в о й с т в о 0.5. B-присоединенные элементы v_i длины p определяются из соотношений (см. [3]):

$$Av_1 = 0, \quad Av_i = Bv_{i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{0.9}$$

$$S_r v_i = 0 \quad (r + i < p). \tag{0.10}$$

1. Расщепление уравнения

Воспользуемся очевидным равенством $B=\dfrac{1}{\lambda}(\lambda B - A + A)$. Умножение уравнения (0.1) слева на $(A-\lambda B)^{-1}$ приводит к уравнению

$$A_\lambda \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{A_\lambda - I}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x} + (A-\lambda B)^{-1}\big(Cu + f(t,x)\big). \tag{1.1}$$

Поскольку A_λ имеет число 0 нормальным собственным числом, вектор-функция $u(t,x)$, отвечающая разложению (0.4), принимает вид

$$u(t,x) = Qu + Pu, \tag{1.2}$$

где P — проектор на подпространство N, Q — проектор на M. Подстановка соотношения (1.2) в (1.1) дает:

$$\begin{aligned} &A_\lambda \frac{\partial (P+Q)u}{\partial t} \\ &= \frac{A_\lambda - I}{\lambda}\frac{\partial (P+Q)u}{\partial x} + (P+Q)(A-\lambda B)^{-1}C(P+Q)u + (P+Q)(A-\lambda B)^{-1}f(t,x). \end{aligned}$$

Поскольку подпространства N и M инвариантны относительно A_λ, получим, что все слагаемые расщепляются на уравнения в подпространстве M с искомой функцией $Qu(t,x)$ и в подпространстве N с искомой функцией $Pu(t,x)$, кроме слагаемого $(P+Q)(A-\lambda B)^{-1}C(P+Q)u$. Для того чтобы уравнение расщепилось на уравнения в подпространствах M и N, подставим $P(A-\lambda B)^{-1}CQ=\hat{0}$, т. е.

$$(A-\lambda B)^{-1}Cu = Q(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu) + P(A-\lambda B)^{-1}CPu, \tag{1.3}$$

где $Q(A-\lambda B)^{-1}C(Pu+Qu)\in M$, $P(A-\lambda B)^{-1}CPu \in N$. Итак, получим уравнение в подпространстве N

$$A_\lambda \frac{\partial Pu}{\partial t} = G\frac{\partial Pu}{\partial x} + P(A-\lambda B)^{-1}\big(CPu + f\big), \quad \text{где} \quad G = \frac{A_\lambda - P}{\lambda}, \tag{1.4}$$

и уравнение в подпространстве M

$$\tilde{A}_\lambda \frac{\partial Qu}{\partial t} = \frac{\tilde{A}_\lambda - Q}{\lambda}\frac{\partial Qu}{\partial x} + Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu + f\big). \tag{1.5}$$

2. Постановка задачи

Уравнение (0.1) расщепляется на уравнения (1.4), (1.5) в подпространствах N и M соответственно, при условии $P(A-\lambda B)^{-1}CQ=\hat{0}$, каждое из них решается с граничными условиями

$$Pu(t,0) = \psi(t) \in N, \tag{2.1}$$

$$Qu(0,x) = \phi(x) \in M. \tag{2.2}$$

Таким образом, уравнение (0.1) эквивалентно системе, состоящей из алгебраического уравнения (1.2) и двух дифференциальных уравнений (1.4), (1.5), в этом смысле уравнение (0.1) является алгебро-дифференциальным, дескрипторным. Теперь требуется найти решение в корневом подпространстве N, затем подставить его в уравнение дополнительного подпространства M.

3. Решение задачи в корневом подпространстве

Решение системы (1.4), (2.1) является решением в корневом подпространстве. Чтобы описать операторы в уравнении (1.4), примем $dimKerA = 1$. Эти операторы раскладываются на базису $\{v_i,\ i = 1, 2, \dots, p\}$:

$$Pu(t,x) = \sum_{i=1}^{p} c_i(t,x)v_i, \quad P\psi(t) = \sum_{i=1}^{p} \psi_i(t)v_i, \tag{3.1}$$

$$\tilde{C}(t,x,\lambda) = P(A-\lambda B)^{-1}CPu(t,x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j(t,x)v_i, \tag{3.2}$$

$$\text{где } \ a_{ij} = a_{ij}(\lambda) \in \mathbb{C}, \quad a_{ij} = 0 \quad \forall i > j,$$

$$(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = F(t,x,\lambda) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF, \quad QF \in M, \tag{3.3}$$

$$P(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t,x,\lambda)v_i, \tag{3.4}$$

$$A_\lambda v_i = -\sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k. \tag{3.5}$$

Используя соотношения (3.1)–(3.5), запишем уравнение (1.4) в виде

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial c_i}{\partial x} v_i = \sum_{i=2}^{p} \left(\frac{\partial c_i}{\partial t} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial c_i}{\partial x}\right) \sum_{k=1}^{i-1} \frac{1}{\lambda^{i-k}} v_k + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j v_i + \sum_{i=1}^{p} f_i v_i.$$

Сравнение в этом равенстве коэффициентов при v_i с одинаковыми индексами приводит к соотношениям

$$\frac{\partial c_p}{\partial x} = \lambda a_{pp} c_p + \lambda f_p, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \lambda a_{ii} c_i + \sum_{j=i+1}^{p} (\lambda a_{ij} - a_{i+1j})c_j + (\lambda f_i - f_{i+1}). \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Функции $\lambda f_p,\ \ \lambda f_i - f_{i+1},\ \ i = 1, \dots, p$ не зависят от λ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.4) имеем:

$$(A-\lambda B)^{-1}f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i v_i + QF,$$

где $QF = Q(A-\lambda B)^{-1}f(t,x)$. Отсюда

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(A-\lambda B)v_i + (A-\lambda B)QF.$$

Используя определение v_i, из (0.9) получаем:

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{p-1} (f_{i+1} - \lambda f_i)Bv_i - \lambda f_p B v_p + (A-\lambda B)QF,$$

откуда

$$AQF = f(t,x) + \lambda BQF - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)Bv_i + \lambda f_p Bv_p. \tag{3.8}$$

Согласно свойству 0.2 соотношение (3.8) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} Q_0 f + \lambda Q_0 BQF - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)Q_0 Bv_i + (\lambda f_p)Q_0 Bv_p = 0, \\ QF = A^- f + \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)A^- Bv_i + \lambda f_p A^- Bv_p + P_0(QF). \end{gathered} \tag{3.9}$$

В первом равенстве этой системы, в силу уравнения (0.8), выполнено

$$\lambda Q_0 BQF = \lambda S_0 QF = 0,$$

а в силу свойства 0.5 выполнено

$$Q_0 Bv_i = S_0 v_i = 0$$

при всех $i = 1, \dots, p-1$. Поэтому первое равенство принимает вид

$$Q_0 f + (\lambda f_p)Q_0 Bv_p = 0.$$

Поскольку $Q_0 f$ и $Q_0 Bv_p$ не зависят от λ, то и λf_p также не зависит от λ.

Во втором равенстве системы (3.9) $P_0(QF) = 0$, и поэтому это равенство принимает вид

$$QF = \lambda A^- B(QF) - \sum_{i=1}^{p-1}(f_{i+1} - \lambda f_i)A^- Bv_i + A^- f + \lambda f_p A^- Bv_p. \tag{3.10}$$

Применяя S_1 к обеим частям (3.10), в силу свойств 0.4, 0.5 получаем

$$0 = (\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_1 v_{p-1} + \lambda f_p A^- BS_1 v_p.$$

Слагаемые $\lambda f_p A^- BS_1 v_p$, $A^- BS_1 v_{p-1}$ в правой части полученного уравнения не зависят от λ, следовательно, $(\lambda f_{p-1} - f_p)$ не зависит от λ.

Применяя S_2 к обеим частям (3.10), в силу свойств 0.4, 0.5 получаем

$$0 = (\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_2 v_{p-1} + (\lambda f_{p-2} - f_{p-1})A^- BS_2 v_{p-2} + \lambda f_p A^- BS_2 v_p.$$

Так как $(\lambda f_{p-1} - f_p)$, λf_p не зависят от λ, то слагаемые $(\lambda f_{p-1} - f_p)A^- BS_2 v_{p-1}$ и $\lambda f_p A^- BS_2 v_p$ в правой части полученного уравнения не зависят от λ. Таким образом, $(\lambda f_{p-2} - f_{p-1})A^- BS_2 v_{p-2}$ не зависит от λ, а следовательно, $(\lambda f_{p-2} - f_{p-1})$ не зависит от λ.

Применяя к обеим частям (3.10) последовательно S_i, $i = 3, \dots, p-2$, и пользуясь свойствами 0.4, 0.5, получаем что элементы $(\lambda f_j - f_{j+1})$, $j = 1, \dots, p-3$, также не зависят от λ. □

В силу доказанного утверждения в представлении вектор-функции $P(A - \lambda B)^{-1} f(t,x)$ можно обозначать

$$\lambda f_p = \Phi_p(t,x), \quad \lambda f_i - f_{i+1} = \Phi_i(t,x), \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \tag{3.11}$$

Лемма 3.2. *Элементы* λa_{rr}, $(\lambda a_{ij} - a_{i+1j})$, $r = 1, 2, \ldots, p$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$, $j = i+1, i+2, \ldots, p$, *не зависят от* λ.

Доказательство. Запишем (1.3) в виде

$$Cu = (A - \lambda B)Q(A - \lambda B)^{-1}C(Pu + Qu) + (A - \lambda B)P(A - \lambda B)^{-1}CPu.$$

В силу (3.2) это уравнение эквивалентно уравнению

$$Cu = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}c_j(A - \lambda B)v_i + (A - \lambda B)d_M,$$

где $a_{ij} = 0$ при всех $i > j$, $d_M = Q(A - \lambda B)^{-1}Cu$, $u = Pu + Qu$. Согласно (0.9) запишем полученное уравнение в виде

$$A\Big(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij} - \lambda a_{i-1j})c_j v_i + d_M\Big) = Cu + \lambda a_{pp}c_p B v_p + \lambda B d_M. \tag{3.12}$$

В силу свойства 0.2, уравнение (3.12) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} Q_0 Cu + \lambda a_{pp}c_p Q_0 B v_p + \lambda Q_0 B d_M = 0, \\ \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij} - \lambda a_{i-1j})c_j v_i = A^{-}Cu + \lambda a_{pp}c_p A^{-}Bv_p - G_M, \end{gathered} \tag{3.13}$$

где $G_M = d_M - \lambda A^{-}Bd_M - P_0\big(\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij} - \lambda a_{i-1j})c_j v_i + d_M\big)$.

В первом уравнении системы (3.13) для последнего слагаемого левой части выполнено $Q_0 B d_M = S_0 d_M = 0$ (в силу свойства 0.4 подпространства M). А поскольку $Q_0 Cu$, $Q_0 B v_p$ не зависят от λ, то и λa_{pp} не зависит от λ.

В силу свойства 0.4 имеем $P_0 d_M = 0$. Поэтому

$$G_M = d_M - \lambda A^{-}Bd_M - P_0 \sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij} - \lambda a_{i-1j})c_j v_i.$$

Умножим это равенство слева A, получим

$$AG_M = (A - \lambda B)d_M.$$

Следовательно, $d_M = A_\lambda G_M$, и, в силу инвариантности подпространства M относительно A_λ, имеем $G_M \in M$. Теперь второе уравнение в системе (3.13) запишем в виде

$$\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{p}(a_{ij} - \lambda a_{i-1j})c_j v_i = -G_M + q(t,x), \tag{3.14}$$

где $q(t,x) = A^{-}Cu + \lambda a_{pp}c_p A^{-}Bv_p$ не зависит от λ. Подействуем на обе части уравнения (3.14) отображением S_0. С учетом свойства 0.5 получим

$$\big(-\lambda a_{p-1p-1}c_{p-1} + (a_{pp} - \lambda a_{p-1p})c_p\big)S_0 v_p = -S_0 G_M + S_0 q(t,x).$$

В силу свойства 0.4 $S_0 G_M = 0$. Далее, $S_0 q(t,x)$ и $S_0 v_p$ не зависят от λ, в результате элементы λa_{p-1p-1}, $(a_{pp} - \lambda a_{p-1p})$ также не зависят от λ.

При применении S_1 слева к обеим частям уравнения (3.14), с учетом свойств 0.4, 0.5 получим, что элементы λa_{p-2p-2}, $(a_{p-1p-1} - \lambda a_{p-2p-1})$, $(a_{p-1p} - \lambda a_{p-2p})$ не зависят от λ. Аналогично, при применении S_i, $i = 1, 2, \dots, p-2$, слева к обеим частям уравнения (3.14), с учетом свойств 0.4, 0.5 получим, что элементы $\lambda a_{p-i-1p-i-1}$, $(a_{p-ip-j} - \lambda a_{p-i-1p-j})$, $j = 0, 1, \dots, i$, не зависят от λ. □

Согласно лемме 3.2 можем обозначить

$$\lambda a_{rr} = \gamma_r, \quad (-\lambda a_{ij+1} + a_{i+1j+1}) = -\zeta_{ij+1}, \tag{3.15}$$

где γ_r, ζ_{ij+1} — это числа ($r = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, p-1$, $j = i, \dots, p-1$).

Из (3.11) и (3.15) следует, что система (3.6), (3.7) записывается в виде

$$\frac{\partial c_p}{\partial x} = \gamma_p c_p + \Phi_p, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial c_{i+1}}{\partial t} + \gamma_i c_i + \sum_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j + \Phi_i, \quad (i = 1, \dots, p-1). \tag{3.17}$$

Из (2.1), (3.1) при $x = 0$ получим

$$c_i(t, 0) = \psi_i(t) \quad (i = 1, \dots, p).$$

Поэтому решение уравнения (3.16) с условием $c_p(t,0) = \psi_p(t)$ имеет вид

$$c_p(t,x) = \int_0^x \exp\big(\gamma_p(x-\tau)\big)\Phi_p(t,\tau)d\tau + \exp(\gamma_p x)\psi_p(t), \tag{3.18}$$

Затем выражение (3.18) подставляется в уравнение (3.17) при $i = p-1$, чтобы получить $c_{p-1}(t,x)$. Этот процесс повторяется для $i = p-2, p-3, \dots, 1$, и таким образом, определяются все элементы $c_i(t,x)$.

Решение уравнения (3.17) с условием $c_i(t,0) = \psi_i(t)$ для $i = 1, \dots, p-1$, имеет вид

$$c_i(t,x) = \int_0^x \exp\big(\gamma_i(x-\tau)\big)\bigg(\frac{\partial c_{i+1}}{\partial t}(t,\tau) + z_i(t,\tau)\bigg)d\tau + \exp(\gamma_i x)\psi_i(t),$$

где $z_i(t,\tau) = \sum\limits_{j=i+1}^{p} \zeta_{ij} c_j(t,\tau) + \Phi_i(t,\tau)$.

Рассмотрим случай $dim Ker A = n > 1$. Согласно свойству 0.3 p — это максимальная длина цепочек B-присоединенных элементов для оператора A. Операторы

$$A_j : Ker A_{j-1} \to Coker A_{j-1}$$

являются конечномерными и задаются соответствующими квадратными матрицами, т. е. являются фредгольмовыми. Таким образом, выполнено

$$\begin{aligned} &Ker A_{j-1} = Coim A_j \oplus Ker A_j, \\ &Coker A_{j-1} = Im A_j \oplus Coker A_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Обозначим длину B-жордановой цепочки элемента из $CoimA_j$ через p_j, имеем

$$p_j < p_{j+1}.$$

Пусть $\{v_i^j\}$ — элементы B-жордановых цепочек к элементам v_1^j ядра оператора A, т. е. выполнены соотношения

$$Av_1^j = 0, \quad Av_i^j = Bv_{i-1}^j \quad (j = 2, \dots, p_j),$$

и уравнения $Az = Bv_{p_j}$ не разрешимы относительно z. Введем следующие обозначения: $N_j = \operatorname{lin}\{v_i^j\}$, N — прямая сумма подпространств N_j, P_j — проектор из N на N_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, $P = \sum_{j=1}^n P_j$. В силу (0.10) имеем

$$S_r v_i^j = 0, \quad r = 0, 1, \dots, p-1, \quad r + i < p.$$

Согласно соотношениям (3.1)–(3.4)

$$\begin{gathered} Pu(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} c_i^j(t,x) v_i^j, \quad P\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} \psi_i^j(t) v_i^j, \\ P(A - \lambda B)^{-1} f(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} f_i^j(t,x) v_i^j, \\ P(A - \lambda B)^{-1} CPu = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p_j} \sum_{k=1}^{p_j} a_{ik}^j c_k^j(t,x) v_i^j, \\ \text{где} \quad a_{ik}^j = 0 \quad \forall i > k, \quad a_{ik}^j = a_{ik}^j(\lambda) \in \mathbb{C}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Аналогично решается задача (1.4) с условием

$$c_i^j(t,0) = \psi_i^j(t), \quad i = 1, 2, \dots, p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

и ее решение имеет вид

$$c_{p_j}^j(t,x) = \int_0^x \exp\left(\gamma_{p_j}^j (x - \tau)\right) \Phi_{p_j}^j(t,\tau) d\tau + \exp(\gamma_{p_j}^j x) \psi_{p_j}^j(t), \quad j = 1, \dots, n \tag{3.20}$$

$$c_i^j(t,x) = \int_0^x \exp\left(\gamma_i^j (x - \tau)\right) \left(\frac{\partial c_{i+1}^j}{\partial t}(t,\tau) + z_i^j(t,\tau) \right) d\tau + \exp\left(\gamma_i^j x\right) \psi_i^j(t), \tag{3.21}$$

$$i = 1, \dots, p_j - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

причем выполнены соотношения

$$\begin{gathered} \lambda f_{p_j}^j = \Phi_{p_j}^j(t,x), \quad \lambda f_i^j - f_{i+1}^j = \Phi_i^j(t,x), \\ \lambda a_{rr}^j = \gamma_r^j, \quad (-\lambda a_{ik+1}^j + a_{i+1k+1}^j) = -\zeta_{ik+1}^j, \\ z_i^j(t,\tau) = \sum_{k=i+1}^{p_j} \zeta_{ik}^j c_k^j(t,\tau) + \Phi_i^j(t,\tau), \end{gathered}$$

где $\gamma_r^j, \zeta_{ik+1}^j \in \mathbb{C}$, $r = 1, \dots, p_j$, $i = 1, \dots, p_j - 1$, $k = i, \dots, p_j - 1$.

Итак, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть оператор* $P(A-\lambda B)^{-1}C$, *действующий на подпространство* N, *является верхним треугольным оператором,* $f(t,x)$ *непрерывно дифференцируема* $p-1$ *раз по* t *и* x, $\psi(t)$ *непрерывно дифференцируема* $p-1$ *раз. Тогда решение задачи* (1.4), (2.1) *существует, единственно, не зависит от* λ *и определяется из соотношений* (3.20), (3.21).

Пусть оператор $P(A-\lambda B)^{-1}C$ *действующий на подпространство* N *является верхним треугольным оператором, и* $f(t,x)$ *непрерывно дифференцируема* $p-1$ *раз по* t *и* x, *и* $\psi(t)$ *- непрерывно дифференцируема* $p-1$ *раз. Тогда решение задачи* (1.4), (2.1) *существует, единственно, не зависит от* λ *и определяется из соотношений* (3.20), (3.21).

З а м е ч а н и е 3.1. Условия гладкости функций $f(t,x)$ и $\psi(x)$ можно ослабить за счет того, что от разных их компонент в N требуется разная гладкость.

4. Решение задачи в дополнительном подпространстве M

Вследствие обратимости оператора A_λ на подпространстве M, уравнение (1.5) приводится к виду:

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t}=\frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x}+\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu+f(t,x)\big). \tag{4.1}$$

Так как $u(t,x)$ не зависит от λ и, в силу леммы 3.3, Pu не зависит от λ, из (1.2) следует, что решение Qu уравнения (1.5) в подпространстве M также не зависит от λ. Из свойств 0.3 и 0.4 получаем, что оператор $\dfrac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}=T_p$ в уравнении (4.1) не зависит от λ.

Лемма 4.1. *Оператор* $\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$ *не зависит от* λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В уравнении (4.1) слагаемые

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t},\quad \frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x}$$

не зависят от λ, поэтому в силу уравнения (4.1) вектор-функция

$$\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu(t,x)+f(t,x)\big)$$

не зависит от λ. Из того, что $Cu(t,x)$ и $f(t,x)$ не зависят от λ, следует что

$$\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}$$

также не зависит от λ. □

Согласно лемме 4.1 уравнение (4.1) может быть записано в виде

$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t}=\frac{Q-\tilde{A_\lambda}^{-1}}{\lambda}\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x}+h(t,x), \tag{4.2}$$

$$h(t,x)=\tilde{A_\lambda}^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}\big(Cu+f(t,x)\big).$$

Положим
$$\tilde{A}_\lambda^{-1} Q(A-\lambda B)^{-1}\big(CPu+f(t,x)\big)=\tilde{h}(t,x).$$
Уравнение (4.2) эквивалентно уравнению
$$\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial t}=T_p\frac{\partial Qu(t,x)}{\partial x}+\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQu(t,x)+\tilde{h}(t,x). \tag{4.3}$$
Заметим, что если операторы $\tilde{A}_\lambda^{-1}$ и $\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ коммутируют, то уравнение (4.3) разрешимо.

Лемма 4.2. *Если операторы $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ коммутируют, то коммутируют и операторы $\tilde{A}_\lambda^{-1}$, $\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся очевидным равенством
$$Q(A-\lambda B)^{-1}CQ=Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda\tilde{A}_\lambda^{-1}.$$
Из предположений доказываемой леммы следует
$$Q(A-\lambda B)^{-1}CQ=\tilde{A}_\lambda Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda^{-1}.$$
Умножив последнее уравнения на $(\tilde{A}_\lambda^{-1})^2$, получим
$$\tilde{A}_\lambda^{-1}\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQ=\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQ\tilde{A}_\lambda^{-1}.$$
□

Решение задачи в подпространстве M является решением уравнения (4.3) с условием (2.2). Введем переменные
$$\xi=t,\quad \eta=T_pt+xQ_1,$$
таким образом,
$$\frac{\partial Qu}{\partial t}=\frac{\partial Qu}{\partial \xi}+T_p\frac{\partial Qu}{\partial \eta},\quad \frac{\partial Qu}{\partial x}=\frac{\partial Qu}{\partial \eta}.$$
Используя приведенные соотношения в (4.3), получаем
$$\frac{\partial Qu}{\partial t}=HQu(t,D)+\tilde{h}(t,D),\quad D=\eta Q-T_pt,\quad H=\tilde{A}_\lambda^{-1}Q(A-\lambda B)^{-1}CQ,$$
откуда
$$Qu(t,x)=\exp(Ht)\phi(T_pt+xQ)+\int_0^t\exp\big(H(t-s)\big)\tilde{h}\big(s,T_p(t-s)+xQ\big)ds,$$
где
$$\phi(T_pt+xQ)=Qu(0,x).$$

Решение задачи (4.3), (2.2) опирается на спектральные свойства линейного ограниченного оператора (см. [17]). Пусть Γ — замкнутый спрямляемый контур, окружающий спектр оператора $xQ+(t-s)T_p$, $0\leqslant s\leqslant t$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.3. *При выполнении предположений леммы 4.2 решение $Qu(t,x)$ задачи (1.5), (2.2) с аналитическими вектор-функциями $\phi(x)$ и $\tilde{h}(t,x)$ существует. Решение имеет вид*

$$\begin{aligned} Qu(t,x) = &-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \exp(Ht)\big(tT_p + (x-\mu)Q\big)^{-1}\phi(\mu)\,d\mu \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_0^t \oint_{\Gamma} \exp\big(H(t-s)\big)\big((t-s)T_p + (x-\mu)Q\big)^{-1}\tilde{h}(s,\mu)\,ds\,d\mu. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из результатов, полученных в предыдущих пунктах, следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено $P(A-\lambda B)^{-1}CQ = 0$, операторы $Q(A-\lambda B)^{-1}CQ$ и $Q(A-\lambda B)^{-1}AQ$ коммутируют, оператор $P(A-\lambda B)^{-1}CP$ является верхним треугольным оператором, $\psi(t)$, $f(t,x)$ — аналитические вектор-функции по t, $\phi(x)$, $f(t,x)$ — аналитические вектор-функции по x. Тогда решение $u(t,x)$ уравнения (0.1) с условиями (2.1), (2.2) существует, единственно и определяется формулами (1.2), (3.19), (3.20), (3.21) и (4.4).*

References

[1] S. P. Zubova, A. H. Mohamad, “Analytical solution for descriptor system in partial differential equations”, *Computational Methods for Differential Equations (CMDE)*, **9**:2 (2021), 467–479.

[2] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2010. [F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, FIZMATLIT, M., 2010 (In Russian)].

[3] С. П. Зубова, К. И. Чернышов, “О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовым оператором при производной”, *Дифференциальные уравнения и их применение*, 1976, № 14, 21–39; англ. пер.:S. P. Zubova, K. I. Chernyshov, “On the linear differential equation with a Fredholm operator at a derivative”, *Differential Equations and Their Application*, 1976, № 14, 21–39 (In Russian).

[4] С. П. Зубова, *Свойства возмущённого фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной*, Воронеж, Воронежский гос. ун–т, 1991, 17 с. [S. P. Zubova, *Properties of the Perturbed Fredholm Operator. Solution of a Differential Equation with a Fredholm Operator at the Derivative*, Voronezh State University, 1991 (In Russian), 17 pp.]

[5] *Математическая энциклопедия.* Т. 3, ред. И. М. Виноградов, Советская энциклопедия, Москва, 1982, 592 с. [*Encyclopedia of Mathematics.* V. 3, ed. I. M. Vinogradov, Publishing House “Soviet Encyclopedia”, Moscow, 1982 (In Russian), 592 pp.]

[6] С. П. Зубова, “Решение однородной задачи Коши для уравнения с нетеровым оператором при производной”, *Доклады АН*, **428**:4 (2009), 444–446. [S. P. Zubova, “Solution of the homogeneous Cauchy problem for an equation with a Fredholm operator at the derivative”, *Reports of the Academy of Sciences*, **428**:4 (2009), 444–446 (In Russian)].

[7] С. П. Зубова, *Сингулярное возмущение линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Воронеж, 1973. [S. P. Zubova, *Singular Perturbation of Linear Differential Equations Unsolved with Respect to the Derivative*, diss. … cand. phys.-math. sciences, Voronezh, 1973 (In Russian)].

[8] B. L. Stevens, F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*, Wiley–Interscience, New York, 2004, 640 pp.

[9] A. Kumar, P. Daoutidis, “Feedback control of nonlinear differential-algebraic equation systems”, *American Institute of Chemical Engineers*, **41**:3 (2018), 619–636.

[10] D. G. Luenberger , A. Arbel, “Singular dynamic Leontief systems”, *Econometrica*, **45**:4 (1977), 991–995.

[11] M. Bodestedt, C. Tischendorf, "PDAE models of integrated circuits and index analysis", *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, **13**:1 (2007), 1–17.

[12] О. В. Бормотова, В. Ф. Чистяков, "О методах численного решения и исследования систем не типа Коши-Ковалевской", *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.*, **44**:8 (2004), 1380–1387; англ. пер.:O. V. Bormotova, V. F. Chistyakov, "On methods of numerical solution and study of systems not of the Cauchy-Kovalevskaya type", *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:8 (2004), 1306–1313.

[13] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. Ts. Gokhberg, M. G. Kerin, *Introduction to the Theory of Linear Non-self-Adjoint Operators*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[14] Ф. В. Аткинсон, "Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах", *Математический сборник*, **28(70)**:1 (1951), 3–14. [F. V. Atkinson, "Normal solvability of linear equations in normed spaces", *Mathematical Collection*, **28(70)**:1 (1951), 3–14 (In Russian)].

[15] А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков, "Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции", *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика*, 2013, №2, 134–140. [A. D. Baev, S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Solving problems for descriptor equations by the decomposition method", *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, **28(70)**:2 (2013), 134–140 (In Russian)].

[16] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции", *Вестник ИЖГТУ имени М. Т. Калашникова. Серия: математика*, 2015, №1(65), 120–122. [S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Solving the Cauchy problem for descriptor equation in case of two-step decomposition", *Bulletin of Kalashnikov ISTu. Series: Mathematics*, 2015, №1(65), 120–122 (In Russian)].

[17] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Kerin, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

Информация об авторе

Мохамад Абдулфтах Хосни, аспирант. Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1087-0512

Поступила в редакцию 09.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 01.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Abdulftah H. Mohamad, Post-Graduate Student. Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation. E-mail: abdulftah.hosni90@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1087-0512

Received 09.04.2021
Reviewed 01.06.2021
Accepted for press 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-143-150
UDC 517.988.63, 519.216.2

A counterexample to the stochastic version of the Brouwer fixed point theorem

Arcady PONOSOV
Norwegian University of Life Sciences
P.O. Box 5003, №-1432, Ås 5003, Norway

Контрпример к стохастической версии теоремы Брауэра о неподвижной точке

Аркадий ПОНОСОВ
Норвежский университет естественных наук
5003, Норвегия, г. Ос ПО 5003, №-1432

Abstract. It is shown that the stochastic counterpart of the classical fixed point theorem for continuous maps in a finite dimensional Euclidean space ("Brouwer's theorem") is not, in general, true. This result implies, in particular, that a careful choice of invariant sets in the stochastic version of Brouwer's theorem is necessary in the theory of stochastic nonlinear operators.

Keywords: local operators, convergence in probability, fixed points

Mathematics Subject Classification: 34A9, 34K50, 46N20

Acknowledgements: The work is partially supported by the grant #239070 of the Research Council of Norway.

For citation: Ponosov A. Kontrprimer k stokhasticheskoy versii teoremy Brauera o nepodvizhnoy tochke [A counterexample to the stochastic version of the Brouwer fixed point theorem]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 143–150. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-143-150.

Аннотация. Показано, что стохастический аналог классической теоремы о неподвижной точке для непрерывных отображений в конечномерном евклидовом пространстве («теорема Брауэра»), вообще говоря, неверен. Этот результат означает, в частности, что в теории стохастических нелинейных операторов необходим тщательный выбор инвариантных множеств в стохастической версии теоремы Брауэра.

Ключевые слова: локальные операторы, сходимость по вероятности, неподвижные точки

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта #239070 Исследовательского Совета Норвегии.

Для цитирования: *Поносов А.* Контрпример к стохастической версии теоремы Брауэра о неподвижной точке // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 143–150. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-143-150. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The classical Brouwer fixed point theorem says that if $V \subset R^n$ is closed, convex, bounded and nonempty, then any continuous operator $T: V \to V$ has at least one fixed point. This result is an important contribution to e. g. nonlinear functional analysis and its applications, where it is used to justify the fixed point theory for compact operators (Schauder's fixed point theorem) and their generalizations (Sadovskii's fixed point theorem [1] etc.). Existence problems in the theory of stochastic equations can also be formulated using the fixed point framework [2], [3]. However, there are several reasons why this framework cannot be based on Brouwer's theorem or its natural generalizations: the relevant spaces are not Banach, and even not locally convex, and the relevant operators are far from being compact. At the same time, stochastic operators possess some other generic properties, which may be of significance for the stochastic analysis [3].

In this paper, we describe the class of operators that typically stem from stochastic equations and discuss the assumptions on invariant sets that can be used in a potential fixed-point theorem for these operators. The main result of the paper gives a nontrivial counterexample of a closed, convex, bounded and nonempty subset, for which the stochastic Brouwer fixed point theorem, formulated for the above class of nonlinear operators, is not valid.

1. Local operators

Let $\mathcal{S} = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a complete probability space, which means that a probability measure P is defined on a σ-algebra $\mathcal{F}$ of subsets of a set Ω, and $\mathcal{F}$ contains all subsets of measure 0. Below, the abbreviation a.s. replaces the expression "almost surely", i. e. almost everywhere with respect to the measure P.

For a separable metric space X, the set $\mathcal{P}(X)$ consists of all equivalence classes $[x]$ of $\mathcal{F}$-measurable functions $x : \Omega \to X$, also called random points in X. Equipped with the topology of convergence in probability, $\mathcal{P}(X)$ becomes a complete topological vector space, which is not locally convex even if $X = R^n$.

Let $\Xi \subset \mathcal{P}(R^n)$. We say that two equivalence classes $[x], [y] \in \Xi$ coincide on a set $A \subset \Omega$, i. e. $[x]|_A = [y]|_A$, if $x(\omega) = y(\omega)$ for almost all $\omega \in A$ for some representatives $x \in [x]$ and $y \in [y]$. Evidently, this definition is independent of the choice of the representatives x and y.

D e f i n i t i o n 1.1. Let $\Xi \subset \mathcal{P}(X)$. An operator $h: \Xi \to \mathcal{P}(Y)$, where Y is another separable metric space, is called **local** if

$$[x]|_A = [y]|_A \text{ implies } h[x]|_A = h[y]|_A$$

for any $[x], [y] \in \Xi$ and $A \subset \Omega$.

Notice that any local operator h can be naturally (but not uniquely) extended from the set Ξ to the set of all representatives of the equivalence classes belonging to Ξ. Indeed, for $[x] \in \Xi$ we can put hx to be an arbitrary representative of the class $h[x]$. Clearly, such an operator is well-defined. For this extension, the property of locality reads as follows:

$$x(\omega) = y(\omega) \text{ for } \omega \in A \text{ a.s. implies } hx(\omega) = hy(\omega) \text{ for } \omega \in A \text{ a.s.}$$

Conversely, if h, defined as a local operator on the set of all representatives of the equivalence classes belonging to Ξ, is local, then it generates a unique local operator on the set Ξ because of the property $x_1, x_2 \in [x]$ implies $h(x_1) = h(x_2)$ a.s. Therefore, we will in many cases disregard the difference between the equivalence classes $[x]$ and their particular representatives x writing (somewhat unprecisely) $x \in \mathcal{P}(X)$ instead of $[x] \in \mathcal{P}(X)$.

A natural example of a local operator is given by the superposition operator

$$(h_f x)(\omega) = f(\omega, x(\omega)),$$

where $f : \Omega \times X \to Y$ is an $(\mathcal{F} \otimes Bor(X); Bor(Y))$-measurable function and $Bor(X)$ and $Bor(Y)$ are the σ-algebras of all Borel subsets of the spaces X and Y, respectively. Due to the above comment, the superposition operator can be regarded as a local operator on equivalence classes $h_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$.

It is well-known (see e. g. [4], [5]) that if $f : \Omega \times X \to Y$ is a Carathéodory function, i. e. $f(\cdot, x) \in \mathcal{P}(Y)$ for all $x \in X$ and $f(\omega, \cdot) : X \to Y$ is continuous for almost all $\omega \in \Omega$, then the superposition operator $h_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ is continuous in probability, i. e. with respect to the topologies of the spaces $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{P}(Y)$.

However, not any local and continuous operator can be represented as a superposition operator generated by a Carathéodory function. The most famous example is the Itô integral [6], [7]. Thus, the class of superposition operators generated by Carathéodory functions is too poor for the theory of stochastic equations. On the other hand, stochastic integrals, superposition operators, their compositions and limits possess the property of locality [8]. Therefore, it was stated in the paper [3] that local and continuous in probability operators constitute a suitable class for developing a fixed point theory for stochastic analysis. It was, in particular, shown in [3] that there exists a stochastic version of Schauder's fixed point theorem, which is valid for certain local and continuous in probability operators. In the later publication [8] it was demonstrated that this fixed point theorem can be successfully applied to various stochastic differential and integral equations.

The proof of the stochastic counterpart of Schauder's theorem was based in [3] on a fixed point theorem for local operators in the spaces of finite dimensional random points $\mathcal{P}(R^n)$. This "stochastic Brouwer fixed point theorem" was justified in [3] for special subsets of these spaces, which was sufficient for many applications. However, some subsets naturally arising, for instance, in Malliavin calculus [9] were not covered, so that the problem of describing more general classes of invariant subsets of $\mathcal{P}(R^n)$, for which the stochastic Brouwer theorem is valid, was still highly relevant for applications, but remained open.

The following question is, therefore, discussed in the present paper: let Ξ be a closed, convex, bounded and nonempty subset of the set $\mathcal{P}(R^n)$ and $h : \Xi \to \Xi$ be a local and continuous in probability operator. For what subsets $\Xi \subset \mathcal{P}(R^n)$ the equation $hx = x$ has at least one solution? We give some examples of subsets, for which this stochastic Brouwer fixed point theorem holds true, but the central result of the paper states that it is, in general, false.

2. An example of a stochastic fixed point theorem

For some invariant subsets Ξ the answer to the above question is affirmative. To describe this class, let us consider a random subset $U : \omega \mapsto U(\omega)$ of R^n with the measurable graph $\operatorname{Gr} U \equiv \{(\omega, U(\omega)) \in \Omega \times R^n\} \in \mathcal{F} \otimes Bor(R^n)$. The set $\mathcal{P}(U)$ consists of all equivalence classes $[x]$ from $\mathcal{P}(R^n)$, for which there exists a representative $x' \in [x]$ such that $x'(\omega) \in U(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$. If $U(\omega) \subset R^n$ is a.s. bounded, closed or convex, then $\mathcal{P}(U)$ is respectively bounded, closed or convex in the space $\mathcal{P}(R^n)$. Recall that bounded subsets $\mathcal{B}$ of the space $\mathcal{P}(R^n)$ can be described as follows: for any $\varepsilon > 0$ there is $r > 0$ such that $P\{\omega \in \Omega : \ |x(\omega)| > r\} < \varepsilon$ for all $x \in \mathcal{B}$.

Theorem 2.1. *Suppose that $U : \Omega \to R^n$ is a closed, convex, bounded and nonempty random subset of R^n such that*

$$Gr U \in \mathcal{F} \otimes Bor(R^n).$$

Let $\Xi = \mathcal{P}(U)$ and $h : \ \Xi \to \Xi$ be a continuous and local operator. Then h has at least one fixed point in Ξ.

P r o o f. By the main result of the paper [5], there exists a Carathéodory function $f : \mathrm{Gr}\, U \to R^n$ such that $h = h_f$. Evidently, $f(\omega, \cdot)$ leaves the set $U(\omega)$ a.s. invariant. By the deterministic Brouwer fixed point theorem, the set $Fix(\omega)$ consisting of all fixed points $x_\omega \in U(\omega)$ of the map $f(\omega, \cdot) : \ U(\omega) \to U(\omega)$ is a.s. nonempty. On the other hand, the function $F(\omega, x) = f(\omega, x) - x$ is Carathéodory and hence $\mathcal{F} \otimes Bor(R^n)$-measurable [10]. Therefore,

$$\{(\omega, Fix(\omega)) : \ \omega \in \Omega\} = G^{-1}(0) \in \mathcal{F} \otimes Bor(R^n)$$

and by the measurable selection theorem [10] there exists a $\mathcal{F}$-measurable function $x(\omega) \in U(\omega)$, i. e. a random point $x \in \mathcal{P}(U)$, such that $x(\omega) \in Fix(\omega)$ a.s. By construction, $hx = h_f x = x$ a.s., so that the equivalence class of x is a fixed point of the operator h. □

R e m a r k 2.1. The most difficult part of the above proof is to justify the existence of a Carathéodory function f. This result is known as the generalized Nemytskii conjecture [5]. The conjecture itself says [11] that if a superposition operator $h_g : \mathcal{P}(R^n) \to \mathcal{P}(R^m)$ is continuous in probability, then g must satisfy the Carathéodory conditions. This conjecture is, unfortunately, not true in this formulation, but as it shown in [5], there always exists a Carathéodory function f such that $h_f = h_g$, and this result can be also extended to arbitrary local, continuous in probability operators and arbitrary separable metric spaces. The proof offered in [5] was based on projective approximations of metric spaces by topological T_0-spaces with finitely many points. An alternative proof for the simpler case of $Y = R^n$ and separable Banach spaces X can be found in the later publication [12]. This proof utilized special variational techniques.

R e m a r k 2.2. Theorem 2.1 can be extended to some more general convex, closed and bounded subsets of the space $\mathcal{P}(R^n)$ that are relevant for stochastic analysis, see the paper [3] for details. However, the theorem in the next section shows that the stochastic Brouwer fixed point theorem for local operators is, in general, not valid for arbitrary closed, convex, bounded and nonempty subsets consisting of random points in finite dimensional spaces.

3. The counterexample

The proof of the main result of this section is based on a technical lemma.

Lemma 3.1. *Let*

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\Omega^1 \times \Omega^2, \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2, P^{(1)} \otimes P^{(2)})$$

be the product of two complete probability spaces and let $\Delta \in \mathcal{F}^1 \otimes \mathcal{F}^2$ have the property $P^{(2)}(\Delta(\omega^1))$ and $P^{(1)}(\Delta(\omega^2))$ is 0 or 1 for almost all $\omega^1 \in \Omega^1$ and $\omega^2 \in \Omega^2$, respectively.

Then $(P^{(1)} \otimes P^{(2)})(\Delta) = 0$ or 1.

Here $\Delta(\omega^1) = \{\omega^2 \in \Omega^2 : \ (\omega^1, \omega^2) \in \Delta\}$ and $\Delta(\omega^2) = \{\omega^1 \in \Omega^1 : \ (\omega^1, \omega^2) \in \Delta\}$.

P r o o f. Denoting $P = P^{(1)} \otimes P^{(2)}$ we define

$$\Delta_1 = \{\omega^1 \in \Omega^1 : \ P^{(2)}(\Delta(\omega^1)) > 0\} \in \mathcal{F}_1 \ \text{ and } \ \Delta_2 = \{\omega^2 \in \Omega^2 : \ P^{(1)}(\Delta(\omega^2)) > 0\} \in \mathcal{F}_2.$$

Then by the assumptions,

$$\Delta_1 = \{\omega^1 \in \Omega^1 : \ P^{(2)}(\Delta(\omega^1)) = 1\} \ \text{ and } \ \Delta_2 = \{\omega^2 \in \Omega^2 : \ P^{(1)}(\Delta(\omega^2)) = 1\}$$

and by Fubini's theorem $P\Delta = \int_{\Delta_1} P^{(2)}(\Delta(\omega^1))dP^{(1)} = P^{(1)}(\Delta_1)$, and similarly, $P\Delta = P^{(2)}(\Delta_2)$. On the other hand,

$$P(\Delta-(\Delta_1\times\Delta_2)) = P(\Delta-((\Delta_1\times\Omega_2)\cup(\Omega_1\times\Delta_2))) \le P(\Delta-(\Delta_1\times\Omega_2))+P(\Delta-(\Omega_1\times\Delta_2)) = 0,$$

so that $P(\Delta) \le P(\Delta_1 \times \Delta_2) = P(\Delta_1)P(\Delta_2) = (P(\Delta))^2$. Hence $P(\Delta) = 0$ or 1. □

Theorem 3.1. *There exists a closed, convex, bounded and nonempty subset Ξ of the space $\mathcal{P}(R^2)$ and a local and continuous in probability operator $h : \ \Xi \to \Xi$ such that the equation $hx = x$ has no solutions.*

P r o o f. The proof of the theorem consists of two parts. In the first part, we define the set Ξ and describe its properties, while the operator h will be constructed in the second part.

Part 1. Let $\mathbf{C}$ be the set of all complex numbers, $D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < a\}$, where $a = \pi^{-0.5}$, so that the area of the circle is 1. Define $\Omega_k = \prod_{i=1}^k D_i$ and $\Omega^k = \prod_{i=k+1}^\infty D_i$, where $D_i = D$ ($i \ge 1$), $P_k = \bigotimes_{i=1}^k \mu_i$ and $P^k = \bigotimes_{i=k+1}^\infty \mu_i$, where μ_i is the Lebesgue measure on D_i. For brevity, we denote

$$\Omega = \Omega^0 = \prod_{i=1}^\infty D_i, \quad P = P^0 = \bigotimes_{i=1}^\infty \mu_i$$

and let $\mathcal{F}$ be the completion of the Borel σ-algebra on Ω with respect to P. This gives a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

We will construct Ξ as a subset of the space $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, which can be identified with the space $\mathcal{P}(R^2)$.

Let E be the expectation, i. e. the integral with respect to the measure P. Consider the set $L^2 \subset \mathcal{P}(\mathbf{C})$ consisting of all square-integrable complex functions. The topology in L^2 is induced by the inner product $\langle x, y\rangle = Ex\bar{y}$. The set Ξ is defined to consist of all functions $x \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ that a.s. take their values in the closure $\bar{D}$ of the set D and satisfy the following property: for every $k \in N$ and every $z^k \in \Omega^k$ the function $x(\cdot, z^k)$ is holomorphic on Ω_k. We shall prove three following properties of the set Ξ:

1. Ξ is a closed, convex, bounded and nonempty subset of $\mathcal{P}(\mathbf{C})$;
2. Ξ is noncompact;
3. if $x, y \in \Xi$, then $P\{x = y\} = 0$ or 1.

Proof of Property (1). The set Ξ is by construction convex and bounded in $\mathcal{P}(\mathbf{C})$, the function $x(\omega) = x(z_1, z^1) = z_1$ ($z_1 \in \Omega_1$, $z^1 \in \Omega^1$) belongs to Ξ, so that $\Xi \ne \emptyset$. Let us prove that Ξ is closed in $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. Pick a sequence $\{x_n\} \subset \Xi$, $x_n \to x$ in probability. Using an appropriate subsequence we may assume, without loss of generality, that $x_n(\omega) \to x(\omega)$ on a set A of full measure ($PA = 1$). Let $k \in N$ be an arbitrary number. Let $A(z^k) = \{z_k \in \Omega_k : \ (z_k, z^k) \in A\}$. By Fubini's theorem, the set $\hat{\Omega}^k$, which consists of all $z^k \in \Omega^k$ such that $P_kA(z^k) = 1$, has measure 1. Taking an arbitrary $z^k \in \hat{\Omega}^k$, let us consider the k-dimensional torus $\Gamma_\rho = \prod_{i=1}^k \gamma_{\rho_i}$, where $\rho = (\rho_1, ..., \rho_k)$, $\rho_i < a$ and $\gamma_{\rho_i} = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| = \rho_i\}$. Let ν be the Lebesgue measure on Γ_ρ. Using again Fubini's theorem yields a set of $\rho \in [0,a) \times ... \times [0,a)$ of full Lebesgue measure, where $\nu\Gamma_\rho = \nu(\Gamma_\rho \cap A(z^k))$. In particular, there exists a sequence $\rho^m \to (a, ..., a)$ such that

$$\nu(\Gamma_{\rho^m}) = \nu(\Gamma_{\rho^m} \cap A(z^k)). \tag{3.1}$$

By construction, $x_n(\cdot, z^k) \to x(\cdot, z^k)$ ν-almost everywhere on each Γ_{ρ^m}.

Consider the integral

$$(2\pi i)^{-k} \int_{\Gamma_{\rho^m}} x(\xi_1, .., , \xi_k, z^k) \prod_{i=1}^k (\xi_i - \eta_i) d\xi \equiv \varphi_m(\eta_1, ..., \eta_k). \tag{3.2}$$

The integral exists for any $z_k = (\eta_1, ..., \eta_k)$ where $|\eta_i| < \rho_i^m$ ($i = 1, ..., k$, $m \in N$) and $\rho^m = (\rho_1^m, ..., \rho_k^m)$, as the integrand is bounded and measurable. By Hartogs' theorem [13], the functions $\varphi_m(\eta_1, ..., \eta_k)$ ($m \in N$) are holomorphic, i. e. complex differentiable, at these points, because they are holomorphic in each variable z_i:

$$\begin{gathered}
\tfrac{1}{\delta\eta_i} \left(\varphi_m(\eta_1, ..., \eta_i + \delta\eta_i, ..., \eta_k) - \varphi_m(\eta_1, ..., \eta_i, ..., \eta_k)\right) \\
= \int_{\Gamma_{\rho^m}} y(\xi_1, ..., \xi_k, \eta_1, ..., \eta_k) \left((\xi_i - \eta_i - \delta\eta_i)^{-1} - (\xi_i - \eta_i)^{-1}\right) d\xi \\
= \int_{\gamma_{\rho_i^m}} \left((\xi_i - \eta_i - \delta\eta_i)^{-1} - (\xi_i - \eta_i)^{-1}\right) d\xi_i \int_{\prod_{j\neq i} \gamma_{\rho_j^m}} y(\xi_1, ..., \xi_k, \eta_1, ..., \eta_k) d\xi_1 .... d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} ... d\xi_k \ , \\
\leq C \max_{s \in \gamma_{\rho_i^m}} \tfrac{|\delta\eta_i|}{|s - \eta_i - \delta\eta_i||s - \eta_i|} = o(|\delta\eta_i|),
\end{gathered}$$

for small $|\delta\eta_i|$ satisfying $|\eta_i + \delta\eta_i| \leq b < \rho_i^m$. Here

$$y(\xi_1, ..., \xi_k, \eta_1, ..., \eta_k) = x(\xi_1, .., , \xi_k, z^k) \prod_{j\neq i} (\xi_j - \eta_j)$$

is a bounded function on Γ_{ρ^m}.

On the other hand, for every $z^k \in \hat{\Omega}^k$ the functions $x_n(\cdot, z^k)$ are holomorphic, so that applying the multivariate Cauchy formula and the Lebesgue convergence theorem yield

$$\begin{gathered}
x_n(z_k, z^k) = (2\pi i)^{-k} \int_{\Gamma_{\rho^m}} x_n(\xi_1, .., , \xi_k, z^k) \prod_{i=1}^k (\xi_i - \eta_i) d\xi \equiv \varphi_m(\eta_1, ..., \eta_k) \\
\to (2\pi i)^{-k} \int_{\Gamma_{\rho^m}} x(\xi_1, .., , \xi_k, z^k) \prod_{i=1}^k (\xi_i - \eta_i) d\xi \equiv \varphi_m(\eta_1, ..., \eta_k) = \varphi_m(z_k) \quad \text{as} \quad n \to \infty
\end{gathered}$$

for each $m \in N$ and each $z_k = (\eta_1, ..., \eta_k)$ ($|\eta_i| < \rho_i^m$ ($i = 1, ..., k$). Therefore, $x(z_k, z^k) = \varphi_m(z_k)$ for almost all $z_k \in W_k^m \equiv \{(\eta_1, ..., \eta_k) : \ |\eta_i| < \rho_i^m, i = 1, ..., k$ and all $z^k \in \hat{\Omega}^k$, so that $x(\cdot, z^k)$ is holomorphic on any open set W_k^m and hence on the set Ω_k, because by construction, $\bigcap_{m=1}^\infty W_k^m = \Omega_k$. As $k \in N$ is arbitrary, we have proven that $x \in \Xi$, so that Ξ is closed in $\mathcal{P}(\mathbf{C})$.

Proof of Property (2). Consider the functions $x_k(\omega) = x(z_k, z^k) = x(\eta_1, ..., \eta_k, z^k) = \eta_k$ (here $z_k = (\eta_1, ..., \eta_k)$). Clearly, $x_k \in \Xi$. On the other hand, $\langle x_k, x_l \rangle = E\eta_k \bar{\eta}_l = \int_{D_k} \eta_k d\mu_k \int_{D_k} \bar{\eta}_l d\mu_l = 0$ if $k \neq l$, because

$$\int_{D_k} \eta_k d\mu_k = \int_D (u + iv) du dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^2 (\cos\theta + i \sin\theta) dr = 0.$$

On the other hand, for all $k \in N$

$$\langle x_k, x_k\rangle = E\eta_k\bar{\eta}_k = \int_D (u^2+v^2)dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = (2\pi)^{-1},$$

so that $\|x_k - x_l\|_{L^2} = \pi^{-1}$, $k \neq l$ and the sequence $\{x_k\}$ is not compact in the L^2-topology of the set Ξ. But $|x| \leq a$ a.s. for all $x \in \Xi$. Therefore, the L^2-topology and the topology of $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ are equivalent on Ξ, so that Ξ is not compact in the latter topology as well.

Proof of Property (3). It is sufficient to check that for any $x \in \Xi$, the measure of the set $\Gamma = \{\omega \in \Omega : \ x(\omega) = 0\}$ is either 0 or 1. Assume, on the contrary, that $0 < P\Gamma < 1$. By definition of the measure P as the product of linear Lebesgue measures, there always exist $k \in N$ and a Borel subset $B \subset \Omega_k$ such that $\Gamma \subset B \subset \Omega_k$ up to a 0-measure set and $P(B \times \Omega_k - \Gamma) < \frac{1}{2}P\Gamma$. Let $y = xI_{\Omega - B} \in \Xi$. By construction, $\{\omega \in \Omega : \ y(\omega) = 0\} = B \subset \Omega_k$ up to a 0-measure set and $0 < P(B) < 1$. Without loss of generality we may assume that y is holomorphic in z_k. In particular, y is holomorphic in each η_i on the set $D_i = D$, where $z_k = (\eta_1, ..., \eta_k)$. Therefore the Lebesgue measure of the set $\{\eta_i : \ z_k \in B\}$ is either 0 or 1 for any $(\eta_1, ..., \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, ..., \eta_k) \in \prod_{j\neq i} D_i$.

Now, Property (3) follows from the induction argument and Lemma 3.1.

To conclude the first part of the proof, let us notice that any map defined on Ξ will be local due to property (3). Hence any continuous map $h: \ \Xi \to \Xi$ without a fixed point would satisfy all the assumptions of Theorem 3.1. This map will be constructed in

Part 2. Let us consider the polygonal chain P connecting the consecutive points $x_n \in \Xi$, which where defined in the course of the proof of Property (2). The set $\mathcal{C}$ is the union of the line segments $I_n \equiv [x_n, x_{n+1}] = \{y \in \Xi : \ y = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1}, \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Assume that a sequence $\{y_\nu\} \subset \mathcal{C}$ converges to some $y \in \Xi$. As it has been mentioned, this is, in fact, the L^2-convergence, i. e. $E|y_\nu - y|^2 \to 0$ if $\nu \to \infty$. We claim that there exists $n \in N$ such that $y_\nu \in I_n$ for sufficiently large ν. To prove it we notice that if $m > n$ and $u = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1} \in I_n$ and $v = \beta x_m + (1-\beta)x_{m+1} \in I_m$ for some $\alpha, \beta \in [0,1]$, then

$$\begin{gathered} E|u-v|^2 = (2\pi)^{-1}\left(\alpha^2+\beta^2+(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2\right) \geq (2\pi)^{-1} \ \text{ if } \ m-n \geq 2, \\ E|u-v|^2 = (2\pi)^{-1}\left(\alpha^2+\beta^2+(1-\alpha-\beta)^2 \geq \pi^{-1}\right) \ \text{ if } \ m-n = 1, \end{gathered}$$

due to orthogonality of x_n and the equality $E|x_n|^2 = (2\pi)^{-1}$. Therefore, if for some $\nu_0 \in N$ we have $E|y_\nu - y_{\nu_0}|^2 < \pi^{-1}$ for all $\nu \geq \nu_0$ and $y_{\nu_0} \in I_n$, then $y_\nu \in I_n$ as well for all $\nu \geq \nu_0$.

As each I_n compact, it implies that $y \in \mathcal{C}$, so that $\mathcal{C}$ is a closed subset of Ξ. On the other hand, the map $\eta: \mathcal{C} \to [0,\infty)$ defined on each I_n by $\eta(\alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1}) = n - \alpha$ is a bijection, because $I_n \cap I_m = \emptyset$ if $|m-n| \geq 2$ and $I_n \cap I_{n+1} = x_n$ for all $n \in N$. Let $y_\nu \to y$ in $\mathcal{C}$. Then there exists n such that $y_\nu = \alpha_\nu x_n + (1-\alpha_\nu)x_{n+1}$ for sufficiently large ν and $y = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1}$, where $\alpha = \lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$. Therefore, $\eta(y_\nu) = n - \alpha_\nu$ converges to $\eta(y) = n - \alpha$. Conversely, if $\eta(y_\nu)$ converges to $\eta(y) \in I_n$, then $\eta(y_\nu) \in I_n$ for sufficiently large ν. Therefore, $\eta(y_\nu) = n - \alpha_\nu$ and $\eta(y) = n - \alpha$, so that $\alpha = \lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$ and hence $y_\nu = \alpha_\nu x_n + (1-\alpha_\nu)x_{n+1} \to y = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n+1}$ as $\nu \to \infty$. We have proven that $\eta: \ \mathcal{C} \to [0,\infty)$ is a bijective homeomorphism.

The continuous map $h_0 : \ x \mapsto x+1$ on $[0,\infty)$ has no fixed points. Topologically, the set $[0,\infty)$ is an absolute retract [14]. As its homeomorphic image $\mathcal{C}$ is closed in the metric space Ξ, there exists a retraction $\tau: \ \Xi \to \mathcal{C}$, i. e. a continuous map, for which $\tau(x) = x$ for all $x \in \mathcal{C}$. Put $h = \eta^{-1} h_0 \eta \tau : \Xi \to \mathcal{C} \subset \Xi$. This map is continuous in the L^2-topology and hence in the topology of the space $\mathcal{P}(\mathbf{C})$. On the other hand, if $hx = x$, then $x \in \mathcal{C}$, so that $h_0(\eta(x)) = \eta(x)$, where $\eta(x) \in [0, \infty)$, which cannot be the case. Therefore, the continuous operator $h: \ \Xi \to \Xi$ has no fixed points. $\square$

4. Conclusion

We have constructed a closed, convex, bounded and nonempty subset Ξ of the space $\mathcal{P}(R^2)$ and a local and continuous in probability operator $h: \ \Xi \to \Xi$, which has no fixed points. This provides a counterexample to what we called "the stochastic Brouwer fixed point theorem". The result means that a careful description of invariant subsets is needed in this theorem.

References

[1] B. N. Sadovskii, "A fixed-point principle", *Funct. Anal. Appl.*, **1**:2 (1967), 151–153.

[2] J. Jacod, J. Memin, "Existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving semimartingales", *Stochastics*, **4** (1981), 317–337.

[3] A. Ponosov, "Fixed point method in the theory of stochastic differential equations", *Soviet Math. Doklady*, **37**:2 (1988), 426–429.

[4] J. Appell, P. P. Zabreiko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, 311 pp.

[5] A. Ponosov, "On the Nemytskii conjecture", *Soviet Math. Doklady*, **34**:1 (1987), 231–233.

[6] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Publishing ltd., Chichester, 1997, 366 pp.

[7] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2013, 379 pp.

[8] A. Ponosov, "Local operators and stochastic differential equations", *Functional Differential Equations*, **4**:1–2 (1997), 73–89.

[9] G. Di Nunno, B. Øksendal, F. Proske, *Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance*, Universitext, Springer–Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2009, 418 pp.

[10] D. H. Wagner, "Survey of measurable selection theorems", *SIAM J. Control and Optimization*, **15**:5 (1977), 859–903.

[11] I. V. Shragin, "Abstract Nemytskii operators are locally defined operators", *Soviet Math. Doklady*, **17**:2 (1976), 354–357.

[12] A. Ponosov, E. Stepanov, "Atomic operators, random dynamical systems and invariant measures", *St. Petersburg Math. J.*, **26** (2015), 607–642.

[13] S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables: Second Edition*. V. 340, AMS Chelsea Publishing, Providence, 1992.

[14] Hu Sze-Tsen, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965, 234 pp.

Information about the author

Arcady V. Ponosov, Doctor of Natural Sciences, Professor of the Institute of Mathematics. Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway.
E-mail: arkadi@nmbu.no
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5018-6577

Received 01.04.2021
Reviewed 03.06.2021
Accepted for press 10.06.2021

Информация об авторе

Поносов Аркадий, доктор естественных наук, профессор Института Математики. Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия. E-mail: arkadi@nmbu.no
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5018-6577

Поступила в редакцию 01.04.2021
Поступила после рецензирования 03.06.2021
Принята к публикации 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-151-171

УДК 517.9

Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23

Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Nizhnii Novgorod State University

23 Gagarin Ave., Nizhnii Novgorod 603950, Russian Federation

Аннотация. Статья посвящена регуляризации классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с операторным (поточечным фазовым) ограничением-равенством в финальный момент времени. Задача содержит распределенное, начальное и граничное управления, причем множество ее допустимых управлений не предполагается ограниченным. В случае частного вида квадратичного функционала качества задачу естественно трактовать как обратную задачу финального наблюдения по нахождению возмущающего воздействия, вызвавшего данное наблюдение. Главное предназначение регуляризованных КУО — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существовании МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями КУО и сохраняют их общую структуру; 4) «преодолевают» некорректность КУО, являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач и составляют теоретическую основу для устойчивого решения современных содержательных некорректных оптимизационных и обратных задач.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, обратная задача, параболическое уравнение, операторное ограничение, граничное управление, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 19-07-00782_а, № 20-01-00199_а, № 20-52-00030 Бел_а).

Для цитирования: *Сумин М.И.* Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач

// Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 151–171. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-151-171.

Abstract. The paper is devoted to the regularization of the classical optimality conditions (COC) — the Lagrange principle and the Pontryagin maximum principle in a convex optimal control problem for a parabolic equation with an operator (pointwise state) equality-constraint at the final time. The problem contains distributed, initial and boundary controls, and the set of its admissible controls is not assumed to be bounded. In the case of a specific form of the quadratic quality functional, it is natural to interpret the problem as the inverse problem of the final observation to find the perturbing effect that caused this observation. The main purpose of regularized COCs is stable generation of minimizing approximate solutions (MAS) in the sense of J. Warga. Regularized COCs are: 1) formulated as existence theorems of the MASs in the original problem with a simultaneous constructive representation of specific MASs; 2) expressed in terms of regular classical Lagrange and Hamilton–Pontryagin functions; 3) are sequential generalizations of the COCs and retain the general structure of the latter; 4) "overcome" the ill-posedness of the COCs, are regularizing algorithms for solving optimization problems, and form the theoretical basis for the stable solving modern meaningful ill-posed optimization and inverse problems.

Keywords: convex optimal control, inverse problem, parabolic equation, operator constraint, boundary control, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization

Mathematics Subject Classification: 49K20, 49N60, 49N15, 47A52

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-00782_a, 20-01-00199_a, 20-52-00030 Bel_a).

For citation: Sumin M.I. Printsip Lagranzha i ego regulyarizatsiya kak teoreticheskaya osnova ustoychivogo resheniya zadach optimal'nogo upravleniya i obratnykh zadach [Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 151–171. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-151-171. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Работа посвящена регуляризации классических условий оптимальности (КУО) — принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) в выпуклой задаче оптимального управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством в финальный момент времени. Задача содержит распределенное, начальное и граничное управления, причем множество ее допустимых управлений не предполагается ограниченным. В случае частного вида квадратичного функционала качества ее естественно трактовать как обратную задачу финального наблюдения по нахождению возмущающего воздействия, вызвавшего данное наблюдение. Задачи оптимального управления с операторными ограничениями-равенствами являются в огромном числе случаев типичными некорректными задачами. К свойствам некорректности таких задач относятся несуществование их решений и решений двойственных к ним задач, а также неустойчивость решений как по аргументу, так и по функции (см., например, [1, гл. 9]). Естественно, свойства некорректности в полной мере наследуют и соответствующие КУО. Говоря о некорректности КУО, в первую очередь мы имеем здесь в виду такие ее проявления как их возможные неустойчивость и невыполнимость, примеры которых и соответствующие комментарии можно найти в [2–4]. Кроме того, примеры такой некорректности КУО, относящиеся непосредственно к рассматриваемой в работе задаче оптимального управления, можно найти ниже в разделе 3.

Анализ различных примеров задач условной оптимизации, оптимального управления приводит к естественному выводу о том, что свойства их некорректности, а также некорректности соответствующих КУО заложены в самой природе этих задач. Поэтому, если возникает потребность «привлекать» КУО непосредственно к решению современных содержательных оптимизационных задач, то и «относиться» к ним необходимо, в соответствии с традициями теории некорректных задач [5] как к математическим объектам с выраженными свойствами некорректности. В этом случае возникает естественная необходимость регуляризации КУО, то есть создания их «неких аналогов», в отсутствие точного задания исходных данных, «преодолевающих» указанные свойства некорректности. В данной работе мы ставим во главу угла именно эту необходимость, предполагающую регуляризацию КУО и естественным образом объединяющую два направления математической теории: 1. КУО в задачах условной оптимизации и оптимального управления; 2. Регуляризация некорректных задач. В ней продолжается линия работы [4], в которой также рассматривалась регуляризации КУО в задаче оптимального управления с операторным ограничением-равенством, но в случае сосредоточенной управляемой системы. Заметим здесь же, что при условии ограниченности множества допустимых элементов (управлений, возмущений) аналогичная регуляризация ПЛ и ПМП для управляемого параболического уравнения была рассмотрена в [6].

Как и в [2–4, 7], центральными понятиями в работе являются понятие обобщенной минимизирующей последовательности — минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [8] (в теории математического программирования подобные обобщенные (минимизирующие) последовательности, удовлетворяющие ограничениям задачи «в пределе», известны также под названием обобщенных (оптимальных) планов [9]) и жестко с ним связанное понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма [4, 7] (см. определение 1.1). Последнее, так же, как и в [4, 7], «встраивается» в получаемые регуляризованные ПЛ и ПМП. Заметим, что широко используемое в оптимизации понятие обобщенной минимизирующей последовательности органично сочетает в себе учет как запросов строгой математической оптимизационной теории [8, гл. IV–VIII], [9], так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи и при приближении значений функционала цели к ее (обобщенной) нижней грани [8, гл. III]. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существовании МПР в исходной задаче с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями КУО и сохраняют их общую структуру; 4) «преодолевают» некорректность КУО и являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач. Такая трансформация–регуляризация КУО основана, по аналогии с [4, 7], на использовании двух параметров регуляризации, первый из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, второй же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи, не являющемуся, вообще говоря, сильно выпуклым. Подчеркнем одновременно, что в случае сильной выпуклости целевого функционала второй регуляризирующий параметр является излишним и его следует считать равным нулю, подробности см. в разделе 4. Отметим также, что применяемое здесь понятие МПР-образующего алгоритма [4, 7] можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между двумя привычными понятиями регуляризирующих алгоритмов первого (сходимость нижних граней, см. определение 1 [1, гл. 9, § 2, с. 802]) и второго (сходимость по аргументу, см. определение 1 [1, гл. 9, § 6, с. 837, 838]) типа, применяемых в [1, гл. 9] (см. также [4,7]).

1. Постановка задачи

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^1$, $V \subseteq \mathbb{R}^1$, $W \subseteq \mathbb{R}^1$ — выпуклые замкнутые множества, $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$, $S \equiv \partial\Omega$, $S_T \equiv \{(x,t) : x \in S,\ t \in (0,T)\}$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_1 \equiv \{u \in L_2(Q_T) : u(x,t) \in U$ п. в. на $Q_T\}$, $\mathcal{D}_2 \equiv \{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in V$ п. в. на $\Omega\}$, $\mathcal{D}_3 \equiv \{w \in L_2(S_T) : w(x,t) \in W$ п. в. на $S_T\}$, $\mathcal{D} \subseteq L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T) \equiv \mathcal{H}$, u, v, w — управляющие функции. Норму в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ с элементами $\pi \equiv (u,v,w)$ обозначим через $\|\pi\|_{\mathcal{H}} \equiv \|\pi\|$.

Рассмотрим выпуклую задачу условной минимизации (вообще говоря, не сильно выпуклого функционала) с операторным (поточечным фазовым в финальный момент времени) ограничением-равенством

$$(OC) \qquad f(\pi) \to \min,\ \ g(\pi)(x) \equiv G_1(x)z[\pi](x,T) + G_2(x) = 0 \text{ при п. в. } x \in \Omega,\ \ \pi \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H},$$

где непрерывный выпуклый функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ и аффинный оператор $g : \mathcal{D} \to L_2(\Omega)$ задаются равенствами

$$f(\pi) \equiv \langle A_1(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(Q_T)} + \langle A_2(\cdot)z[\pi](\cdot,T), z[\pi](\cdot,T)\rangle_{L_2(\Omega)}$$
$$+\langle A_3(\cdot,\cdot)z[\pi](\cdot,\cdot), z[\pi](\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)} + \langle B_1(\cdot,\cdot)u(\cdot,\cdot), u(\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(Q_T)}$$
$$+\langle B_2(\cdot)v(\cdot), v(\cdot)\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle B_3(\cdot,\cdot)w(\cdot,\cdot), w(\cdot,\cdot)\rangle_{L_2(S_T)},\ \ g(\pi) \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T) + G_2(\cdot).$$

Здесь и ниже $z[\pi]$ — соответствующее тройке π решение класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ [10, гл. III] третьей начально-краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$\begin{gathered} z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + u(x,t) = 0, \\ z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = w(x,t), \quad (x,t) \in S_T. \end{gathered} \tag{1.1}$$

В (1.1), как и в [10], $\frac{\partial z(x,t)}{\partial \mathcal{N}} \equiv a_{i,j}(x,t)z_{x_j}(x,t)\cos\alpha_i(x,t)$, $\alpha_i(x,t)$ — угол, образованный внешней нормалью к S с осью x_i.

Замечание 1.1. Целевой функционал задачи (OC) имеет квадратичный вид. Это позволяет заметно сократить получение регуляризованных ПЛ и ПМП. Однако, излагаемый ниже подход может быть применен и к задачам с целевыми функционалами более «общего выпуклого» вида.

Ниже нам потребуются следующие условия на исходные данные оптимизационной задачи (OC) :

а) функции $A_1 : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $A_2 : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $A_3 : S_T \to \mathbb{R}^1$, $B_1 : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $B_2 : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $B_3 : S_T \to \mathbb{R}^1$, $G_1 : \Omega \to \mathbb{R}^1$, $G_2 : \Omega \to \mathbb{R}^1$ измеримы по Лебегу;

б) выполняются неравенства

$$0 \le A_1(x,t),\ B_1(x,t) \le L \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T,\ \ 0 \le A_2(x),\ B_2(x) \le L \text{ при п. в. } x \in \Omega,$$

$$0 \le A_3(x,t),\ B_3(x,t) \le L \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,\ \ G_i \in L_\infty(\Omega),\ \ i = 1,2,$$

где L — некоторая положительная постоянная;

в) функции $a_{i,j}$, $a : Q_T \to \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\sigma : S_T \to \mathbb{R}^1$ измеримы в смысле Лебега;

г) справедливы оценки

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall (x,t) \in Q_T, \quad \nu, \mu > 0;$$

д) справедливы оценки

$$|a(x,t)| \leq K \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T, \quad |\sigma(x,t)| \leq K \text{ при п. в. } (x,t) \in S_T,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная;

е) граница S является кусочно-гладкой.

З а м е ч а н и е 1.2. Отметим, что фазовое ограничение-равенство

$$g(\pi) \equiv g(\pi)(\cdot) \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot, T) + G_2(\cdot) = 0$$

понимается как равенство почти всюду в $\Omega : G_1(x)z[\pi](x,T) + G_2(x)$ при п. в. $x \in \Omega$. Так как $z[\pi] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ и $G_1, G_2 \in L_\infty(\Omega)$, оно, очевидно, эквивалентно равенству в $L_2(\Omega)$. Поэтому в качестве пространства образов оператора $g(\cdot)$ ниже выбрано пространство $L_2(\Omega)$. Возможные неустойчивость и невыполнимость КУО [3] в подобных ситуациях характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (OC) в случае такого выбора пространства образов.

Пусть F — множество всевозможных наборов исходных данных

$$\mathsf{f} \equiv \left\{A_i,\, B_i,\, i = 1,2,3,\, G_i,\, i = 1,2,\, a_{i,j},\, i = 1,\ldots,n,\, j = 1,\ldots,n,\, a,\, \sigma\right\},$$

для каждого из которых выполняются условия а), б), в), г), д), е) с независящими от набора постоянными L, K. Определим наборы невозмущенных f^0 и возмущенных f^δ исходных данных, соответственно:

$$\mathsf{f}^0 \equiv \{A_i^0,\, B_i^0,\; i = 1,2,3,\; G_i^0,\; i = 1,2,\; a_{i,j}^0,\; i = 1,\ldots,n,\; j = 1,\ldots,n,\; a^0,\; \sigma^0\}$$

и

$$\mathsf{f}^\delta \equiv \{A_i^\delta,\, B_i^\delta,\; i = 1,2,3,\; G_i^\delta,\; i = 1,2,\; a_{i,j}^\delta,\; i = 1,\ldots,n,\; j = 1,\ldots,n,\; a^\delta,\; \sigma^\delta\},$$

$\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки

$$\begin{gathered} \|A_1^\delta - A_1^0\|_{\infty,Q_T},\, \|A_2^\delta - A_2^0\|_{\infty,\Omega},\, \|A_3^\delta - A_3^0\|_{\infty,S_T} \leq \delta, \\ \|B_1^\delta - B_1^0\|_{\infty,Q_T},\, \|B_2^\delta - B_2^0\|_{\infty,\Omega},\, \|B_3^\delta - B_3^0\|_{\infty,S_T} \leq \delta, \;\; \|G_i^\delta - G_i^0\|_{\infty,\Omega} \leq \delta, \quad i = 1,2, \\ \|a_{i,j}^\delta - a_{i,j}^0\|_{\infty,Q_T} \leq \delta, \quad \|a^\delta - a^0\|_{\infty,Q_T},\, \|\sigma^\delta - \sigma^0\|_{\infty,S_T} \leq \delta. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Обозначим задачу (OC), решение $z[\pi]$, функционал f, оператор g, соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (OC^δ), $z^\delta[\pi]$, f^δ, g^δ, соответственно. Решения задачи (OC^0) будем обозначать через π^0, а всю совокупность таких решений через Π^0. Введем также обозначение: $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{\pi \in \mathcal{D} : \|g^\delta(\pi)\| \equiv \|g^\delta(\pi)\|_{L_2(\Omega)} \leq \epsilon\}$ $\epsilon \geq 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$. Определим значение $\beta : L_2(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (OC^0)

$$\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon, \quad \beta_\epsilon \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(\pi), \quad \beta_\epsilon \equiv +\infty, \quad \text{если } \mathcal{D}^{0,\epsilon} = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{\pi \in \mathcal{D}^0} f^0(\pi)$ — классическое значение задачи.

Центральным для нас будет, как уже сказано во введении, понятие минимизирующего приближенного решения (МПР) в смысле Дж. Варги [8] в задаче (OC^0), то есть последовательности элементов $\pi^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$f^0(\pi^i) \le \beta + \delta^i, \quad \pi^i \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^i} \tag{1.3}$$

для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$.

В общей ситуации задачи (OC^0) при условии ее разрешимости мы формально не можем исключать строгого неравенства $\beta < \beta_0$. Различные достаточные условия выполнимости равенства $\beta = \beta_0$ в задачах выпуклого программирования общего вида в банаховых пространствах можно найти в [9, гл. 3]. Однако, далее мы будем в зависимости от ситуации (свойств исходных данных) конструировать для задачи (OC^0), строго говоря, не только МПР в указанном выше смысле (1.3), а и минимизирующие последовательности $\pi^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям

$$f^0(\pi^k) \le \beta_0 + \gamma^k = f^0(\pi^0) + \gamma^k, \quad \pi^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}, \quad \gamma^k, \quad \epsilon^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{1.4}$$

которые будем называть МПР в смысле (1.4) и которые, очевидно, заведомо являются МПР в указанном выше смысле (1.3) в случае $\beta = \beta_0$. Введем важное для всех последующих построений

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.) при $\delta = \delta^k$, элемент $\pi^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-образующим в задаче (OC^0), если последовательность π^{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть МПР в этой задаче.

Если МПР в задаче (OC^0) понимается в смысле (1.4), то будем говорить, соответственно, и об МПР-образующем операторе в задаче (OC^0) в смысле (1.4).

2. Вспомогательные результаты

В силу условий в), г), д), е) теорема существования обобщенного решения третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения с дивергентной главной частью [11] (см. также [10, гл. III, § 5]) обеспечивает разрешимость прямой задачи (1.1) в классе $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любой тройки $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{H}$ и любого $T > 0$, а также необходимые оценки.

Лемма 2.1. *Если выполняются условия в), г), д), е), то для любой тройки $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ существует единственное решение $z[\pi]$ класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ задачи (1.1) и имеет место оценка*

$$|z[\pi]|_{Q_T} + \|z[\pi]\|_{2,S_T} \le C_T(\|u\|_{2,Q_T} + \|v\|_{2,\Omega} + \|w\|_{2,S_T}) \tag{2.1}$$

(напомним, что, как и в [10], $|\,z[\pi]\,|_{Q_T} \equiv \max_{0 \le t \le T} \|z(\cdot,t)\|_{2,\Omega} + \|z_x\|_{2,Q_T}$ — норма в банаховом пространстве $V_2^{1,0}(Q_T)$), где постоянная C_T не зависит от $\pi \in L_2(Q_T) \times L_2(\Omega) \times L_2(S_T)$ и набора исходных данных $\mathsf{f} \in \mathsf{F}$. Кроме того, пусть $\mathsf{f}, \mathsf{f}^\dagger \in \mathsf{F}$ — два произвольных набора

исходных данных, $z[\cdot]$, $z^\dagger[\cdot]$ — соответствующие им решения задачи (1.1). Тогда, если выполняются условия в), г), д), е), то для любых двух троек π^1, $\pi \in \mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
&|z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]|_{Q_T} + \|z^\dagger[\pi^1] - z[\pi]\|_{2,S_T} \\
&\leq C_T(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|z_{x_j}[\pi]\|_{2,Q_T}\|a^\dagger_{i,j} - a_{i,j}\|_{\infty,Q_T} + \|z[\pi]\|_{2,Q_T}\|a^\dagger - a\|_{\infty,Q_T} \\
&+\|u^1 - u\|_{2,Q_T} + \|v^1 - v\|_{2,\Omega} + \|w^1 - w\|_{2,S_T} + \|z[\pi]\|_{2,S_T}\|\sigma^\dagger - \sigma\|_{\infty,S_T}),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где C_T не зависит от наборов исходных данных $\mathsf{f}, \mathsf{f}^\dagger \in \mathsf{F}$ и троек управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w)$, $\pi^1 \equiv (u^1,v^1,w^1) \in \mathcal{H}$.

Помимо прямой задачи (1.1) ниже при получении регуляризованного ПМП существенную роль будет играть и сопряженная с ней задача

$$
\begin{gathered}
-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a(x,t)\eta + \chi(x,t) = 0; \\
\eta(x,T) = \psi(x), \ \ x \in \Omega; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = \omega(x,t), \ \ (x,t) \in S_T
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

с $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$, решение которой обозначим через $\eta[\chi,\psi,\omega]$.

Так как сопряженная краевая задача (2.3) стандартной заменой времени приводится к более привычному виду начально-краевой задачи (1.1) (с начальным условием при $t = 0$), то можно считать, что следствием первого утверждения леммы 2.1 является следующая

Лемма 2.2. *Пусть выполняются условия в), г), д), е). Тогда имеет место однозначная разрешимость в $V_2^{1,0}(Q_T)$ для любых функций $\chi \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\omega \in L_2(S_T)$ при любом $T > 0$ сопряженной (к (1.1)) задачи (2.3).*

Далее сформулируем лемму о так называемом интегральном представлении линейного непрерывного функционала на пространстве решений третьей начально-краевой задачи для линейного параболического уравнения. Она используется при вычислении первых вариаций функционалов в задачах оптимального управления, связанных с указанной начально-краевой задачей. Ее доказательство см. в [12, лемма 3].

Лемма 2.3. *Пусть задана третья краевая задача*

$$
\begin{gathered}
z_t - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}(x,t)z_{x_j}) + a(x,t)z + f(x,t) = 0; \\
z(0,x) = \psi(x), \ \ x \in \Omega; \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)z = \chi(x,t), \ \ (x,t) \in S_T,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

с коэффициентами $a_{i,j}$, a, σ, удовлетворяющими условиям в), г), д), е) и с $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(\Omega)$, $\chi \in L_2(S_T)$. Тогда, если функция $z \in V_2^{1,0}(Q_T)$ есть решение задачи (2.4), то для любых $d \in L_2(\Omega)$, $c \in L_2(Q_T)$, $g \in L_2(S_T)$ имеет место равенство

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_T} c(x,t)z(x,t)\,dxdt - \int_\Omega d(x)z(x,T)\,dx - \int_{S_T} g(s,t)z(s,t)\,dsdt \\
&= \int_{Q_T} f(x,t)\eta(x,t)\,dxdt - \int_\Omega \psi(x)\eta(x,0)\,dx - \int_{S_T} \chi(s,t)\eta(s,t)\,dsdt,
\end{aligned}
$$

где функция $\eta \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *— единственное обобщенное решение сопряженной задачи*

$$-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}(x,t)\eta_{x_i}) + a(x,t)\eta + c(x,t) = 0;$$

$$\eta(x,T) = d(x),\ \ x \in \Omega; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma(x,t)\eta = g(x,t),\ \ (x,t) \in S_T.$$

3. Задача оптимального управления как задача выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством, некорректность ПЛ

Перепишем задачу (OC^0) и возмущенные задачи (OC^δ) в форме задачи выпуклого программирования с операторным ограничением-равенством. Пусть выполняются условия а), б), в), г), д), е). При любом наборе исходных данных f значение оператора $g : \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$ на каждом элементе π является суммой элементов $A[\pi] \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T)$ и $G_2(\cdot)$, где оператор $A : \mathcal{H} \to L_2(\Omega)$ задаваемый равенством $A[\pi] \equiv A\pi \equiv G_1(\cdot)z[\pi](\cdot,T)$ в силу линейности начально-краевой задачи (1.1) и оценки (2.1) является линейным ограниченным. Так как функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ является одновременно непрерывным и выпуклым, то мы с формальной точки зрения можем переписать задачу (OC^0) в форме невозмущенной задачи выпуклого программирования

$$(\widetilde{P}^0) \qquad f^0(\pi) \to \min, \quad A^0\pi = h^0 \equiv -G_2^0(\cdot), \quad \pi \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}.$$

С учетом приближенного задания исходных данных мы имеем формально вместо задачи $(\widetilde{P}^0)$ семейство задач, зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ

$$(\widetilde{P}^\delta) \qquad f^\delta(\pi) \to \inf, \quad A^\delta\pi = h^\delta \equiv -G_2^\delta(\cdot), \quad \pi \in \mathcal{D}.$$

Получим в силу оценок (1.) оценки отклонения возмущенных исходных данных $\{f^\delta,\ A^\delta,\ h^\delta\}$ от невозмущенных исходных данных $\{f^0,\ A^0,\ h^0\}$ задачи $(\widetilde{P}^0)$. С этой целью нам потребуются оценки леммы 2.1 отклонения решений начально-краевой задачи (1.1) при возмущении ее коэффициентов и управлений.

В силу оценок (1.) и оценок (2.1), (2.2) леммы 2.1 можем записать

$$\|z^\delta[\pi](\cdot,T) - z^0[\pi](\cdot,T)\|_{2,\Omega} \le \widetilde{C}_T\delta\|\pi\|_{\mathcal{H}}, \tag{3.1}$$

где, как и выше, постоянная $\widetilde{C}_T$ не зависит от набора исходных данных f^δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{H}$.

Из оценок (2.1), (2.2), (3.1), в свою очередь, следуют оценки для отклонения функционалов (в случае условий а), б), в), г), д), е))

$$|f^\delta(\pi) - f^0(\pi)| \le C\delta(1 + \|\pi\|^2) \ \ \forall\, \pi \in \mathcal{D}$$

и линейных ограниченных операторов, действующих из пространства $\mathcal{H}$ в пространство $L_2(\Omega)$, а также элементов h^δ, h^0

$$\|A^\delta\pi - A^0\pi\| \le C\delta(1 + \|\pi\|) \ \ \forall\, \pi \in \mathcal{H}, \quad \|h^\delta - h^0\| \le C\delta,$$

в которых постоянную $C > 0$ следует считать независящей от δ и тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u,v,w)$. Одновременно, выполняется и неравенство

$$|f^\delta(\pi_1) - f^\delta(\pi_2)| \le L_M\|\pi_1 - \pi_2\|_{\mathcal{H}} \ \ \forall\, \pi_1,\, \pi_2 \in \mathcal{D} \cap S_M,$$

где $L_M > 0$ — некоторая не зависящая от $\delta \in [0, \delta_0]$ и $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{D} \cap S_M$ постоянная, $S_M \equiv \{\pi \in \mathcal{H} : \|\pi\|_{\mathcal{H}} \leq M\}$.

О некорректности ПЛ. Далее в данном разделе покажем, что оставаясь в рамках привычного классического ПЛ (см., например, [13, § 3.2], [14, теорема 2.1], [15, теорема 1.1]), теория которого жестко связана с точным заданием исходных данных оптимизационной задачи, у нас «не очень много шансов» получить, непосредственно опираясь лишь на составляющие его соотношения, «приемлемые» приближенные решения задачи выпуклого программирования $(\widetilde{P}^0)$, а, вместе с тем, и исходной задачи оптимального управления (OC^0) с операторным ограничением-равенством.

С этой целью рассматриваем далее в данном разделе зависящую от параметра в ограничении-равенстве «простейшую» выпуклую задачу на условный экстремум

$$(P_p) \qquad \|z\|^2 \to \inf, \quad Az = h + p, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $p \in H$ — параметр, $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Решения задачи (P_p) в случае их существования будем обозначать через z_p^0.

Обозначим: $\mathcal{D}_p^\epsilon \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|Az - h - p\| \leq \epsilon\}$, $\epsilon \geq 0$. Определим классическую функцию значений задачи (P_p) формулой $\beta_0(p) = \inf_{z \in \mathcal{D}_p^0} \|z\|^2 \ \forall\, p \in H$. Определим также обобщенную функцию значений $\beta : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ посредством соотношений

$$\beta(p) \equiv \beta_{+0}(p) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}_p^\epsilon} \|z\|^2, \quad \beta_\epsilon(p) \equiv +\infty, \quad \text{если} \ \ \mathcal{D}_p^\epsilon = \emptyset.$$

Так как $\|\cdot\|^2$ — сильно выпуклый функционал, то справедливо следующее утверждение (см. леммы 1.1, 1.2, 1.3 в [15]).

Лемма 3.1. *Функции значений $\beta_0, \beta : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ совпадают, являясь полунепрерывными снизу и выпуклыми.*

Введем функцию Лагранжа

$$L_p(z, \mu_0, \lambda) \equiv \mu_0 \|z\|^2 + \langle \lambda, Az - h - p \rangle \rangle, \quad L_p(z, 1, \lambda) \equiv L_p(z, \lambda), \quad z \in \mathcal{D}, \quad \mu_0 \geq 0, \quad \lambda \in H.$$

Напомним, что вектором Куна–Таккера задачи (P_p) называется элемент $\lambda^* \in H$, для которого $\|z_p^0\|^2 \leq L_p(z, \lambda^*) \ \forall\, z \in \mathcal{D}$. С учетом леммы 3.1 справедливо следующее утверждение (см. [14, теорема 2.1], [15, теорема 1.1], а также замечания 1.1, 1.2 к теореме 1.1 в [15])

Теорема 3.1. [Параметрический ПЛ в недифференциальной форме] *Пусть $p \in H$ такая точка, что $\beta(p) < +\infty$. Тогда:*

1. *Если $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0 \equiv \{z \in \mathcal{D} : Az - h - p = 0\}$ — оптимальный элемент в задаче (P_p), то есть $\|z_p^0\|^2 = \beta(p)$, и $\zeta \in \partial\beta(p)$, где $\partial\beta(p)$ — субдифференциал в смысле выпуклого анализа, то для множителя Лагранжа $\lambda \in H$, $\lambda = -\zeta$, при $\mu_0 = 1$ выполняется соотношение*

$$L_p(z_p^0, \mu_0, \lambda) \leq L_p(z, \mu_0, \lambda) \ \forall\, z \in \mathcal{D} \tag{3.2}$$

и при этом $-\zeta = \lambda$ — вектор Куна–Таккера задачи (P_p).

И, наоборот, если $\tilde z \in \mathcal{D}_p^0$ *такой элемент, что при некоторых* $\mu_0 > 0$, $\lambda \in H$ *выполняется соотношение* (3.2) *с заменой* z_p^0 *на* $\tilde z$, *то этот элемент оптимален в задаче* (P_p), *то есть* $\tilde z = z_p^0$, *элемент* λ/μ_0 *является вектором Куна–Таккера для нее и одновременно* $-\lambda/\mu_0 \in \partial\beta(p)$.

2. *Если* $z_p^0 \in \mathcal{D}_p^0$ *— оптимальный элемент в задаче* (P_p), $p \in \partial\, dom\beta$ *и* $\zeta \in \partial^\infty\beta(p)$, $\zeta \neq 0$, *где* $\partial^\infty\beta(p)$ *— сингулярный (асимптотический) субдифференциал (см., например, [16]), определяемый формулой*

$$\partial^\infty\beta(p) \equiv \{\lambda \in H : \, (\lambda, 0) \in N_{epi\,\beta}(p, \beta(p))\},$$

то для множителя Лагранжа $\lambda \in H$, $\lambda = -\zeta$, *соотношение* (3.2) *выполняются при* $\mu_0 = 0$.

И, наоборот, если $\tilde z \in \mathcal{D}_p^0$ *— такой элемент, что при* $\mu_0 = 0$ *и некотором* $\lambda \in H$, $\lambda \neq 0$, *выполняется соотношение* (3.2) *с заменой* z_p^0 *на* $\tilde z$, *то* $p \in \partial\, dom\,\beta$ *и одновременно* $-\lambda \in \partial^\infty\beta(p)$.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим задачу (P_p) с $H = Z$, $h = 0$

$$(\tilde P_p) \qquad \|z\|^2 \to \min, \quad Az = p, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $A : Z \to Z$ — линейный непрерывный инъективный оператор с инъективным сопряженным A^*. В этом случае, с учетом равенства $(A^*)^* = A$, имеют место равенства $\overline{R(A)} = Z$, $\overline{R(A^*)} = Z$ (см. [17, теорема 3.1]).

3.1.1. ***Неустойчивость ПЛ.*** При анализе примера 1 в [3] был доказан следующий факт. Пусть $p \in Z$ — любой такой элемент, для которого: 1) задача $(\tilde P_p)$ разрешима (очевидно, единственным образом); 2) это решение z_p^0 удовлетворяет при некотором $\lambda \in Z$ регулярному ПЛ в недифференциальной форме $L_p(z_p^0, \lambda) \le L_p(z, \lambda)$ $\forall z \in \mathcal{D}$ (см. (3.2)); 3) существуют слабо, но не сильно, сходящиеся в Z к z_p^0 последовательности $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$ (очевидно, такие последовательности заведомо существуют, если $\mathcal{D} = Z$), причем для всех таких последовательностей имеет место сильная сходимость $Az^k \to Az_p^0 = p$, $k \to \infty$ (очевидно, последнее заведомо так, если оператор A — вполне непрерывный). Тогда можно утверждать, что существуют такие $p^k \to p$, $k \to \infty$, для которых в аппроксимирующих (при $p = p^k$) задачах $(\tilde P_{p^k})$ справедливо утверждение регулярного ПЛ такого же, как и в случае невозмущенной задачи $(\tilde P_p)$, но для которых одновременно оптимальные «аппроксимирующие» элементы, то есть решения задачи $(\tilde P_p)$ при $p = p^k$, не сходятся к решению невозмущенной задачи как по аргументу, так и по функции.

3.1.2. ***Невыполнимость ПЛ.*** Положим в задаче $(\tilde P_p)$: $\mathcal{D} \equiv Z$. Предположим также, что оператор A таков, что $R(A^*) \neq Z$ (последнее заведомо так, если оператор A — вполне непрерывный [18, с. 225, теорема 1]). Пусть при сделанных предположениях $\bar z \in Z \setminus R(A^*)$ — произвольный элемент. Тогда ПЛ в задаче $(\tilde P_p)$ при $p = A\bar z$ не выполняется. Предположим, что это не так. Тогда в соответствии с ПЛ теоремы 3.1 (см. также ПЛ для гладких задач с равенствами [13, с. 253, 254]) существует невырожденная пара множителей $(\mu_0, \lambda) \in \mathbb{R}^1_+ \times Z$ такая, что $2\mu_0\bar z + A^*\lambda = 0$. В этом случае при $\mu_0 = 0$ получаем $\lambda = 0$ в силу инъективности A^*, а при $\mu_0 = 1$, соответственно, противоречивое равенство $\bar z = -1/2A^*\lambda$ в силу неравенства $R(A^*) \neq Z$, что и доказывает невыполнимость ПЛ в задаче $(\tilde P_{A\bar z})$.

Пример 3.2. Рассмотрим далее классическую двумерную обратную задачу финального наблюдения по нахождению начальной функции $v \in \mathcal{D} \subseteq L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $S \equiv \partial\Omega$, в третьей начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности ($x \equiv (x_1, x_2)$)

$$z_t - z_{x_1} - z_{x_2} = 0; \quad z(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial z}{\partial \mathcal{N}} + z = 0, \quad (x,t) \in S_T \equiv \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.3}$$

которую можно трактовать также как задачу оптимального управления с фазовым ограничением типа равенства в финальный момент времени по нахождению начального управления-возмущения в начально-краевой задаче (3.3)

$$(IP) \qquad \int_\Omega v^2(x)\,dx \to \inf, \quad z[v](\cdot,T) = p \in L_2(\Omega), \quad v \in \mathcal{D} \subseteq L_2(\Omega).$$

Здесь $z[v]$ — обобщенное решение [10, гл. III] начально-краевой задачи (3.3), соответствующее управлению $v \in \mathcal{D} \subseteq L_2(\Omega)$. Задача (IP) является частным случаем задачи $(\tilde{P}_p)$ из примера 3.1 с $Z = L_2(\Omega)$ и с линейными непрерывными инъективными (инъективность может быть установлена, например, на основе результатов [19, § 2]) операторами $A, A^* : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $A[v](\cdot) \equiv z[v](\cdot,T)$, $A[v] \equiv Av$, $A^*[\lambda](\cdot) \equiv \eta[\lambda](\cdot,0)$, $A^*[\lambda] \equiv A^*\lambda$, $\eta[\lambda]$ — соответствующее элементу $\lambda \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение сопряженной третьей краевой задачи

$$\eta_t + \eta_{x_1} + \eta_{x_2} = 0; \quad \eta(x,T) = \lambda(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \eta = 0, \quad (x,t) \in S_T \equiv \partial\Omega \times (0,T).$$

3.2.1. ***Неустойчивость ПЛ и ПМП.*** Положим в задаче $(IP) : p = 0$, $\mathcal{D} \equiv \{v \in L_2(\Omega) : v(x) \in [-1,1]$ при п. в. $x \in \Omega\}$. В этом случае решением задачи является $v^0(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$, причем, очевидно, существуют последовательности $v^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $v^k \to v^0 = 0$, $k \to \infty$ слабо в $L_2(\Omega)$, но не сильно, причем для всех таких последовательностей имеет место предельное соотношение $Av^k \to p = 0$, $k \to \infty$ (последнее имеет место в силу «равномерной гельдеровости» в этом случае обобщенных решений $z[v^k]$ в цилиндре $\{(x,t) : (x,t) \in \Omega_\epsilon \times [\epsilon, T]\}$ при любом достаточно малом $\epsilon > 0$, Ω_ϵ — подобласть области Ω, отстоящая на положительное расстояние ϵ от границы S, являющихся одновременно равномерно ограниченными на $\Omega \times (0,T)$, см., например, [10, гл. III, теорема 10.1], а также [11, теорема 1]).

Так как выпуклая полунепрерывная снизу функция значений задачи (IP) субдифференцируема при $p = 0$, как достигающая в этой точке минимального значения, то это оптимальное управление удовлетворяет при $p = 0$ и при некотором $\lambda \in L_2(\Omega)$ регулярному ПЛ (см. теорему 3.1)

$$L_p(v^0, \lambda) \le L_p(v, \lambda) \ \ \forall v \in \mathcal{D}, \quad L_p(v,\lambda) \equiv \|v\|^2 + \langle \lambda, Av - p \rangle, \quad v \in \mathcal{D},$$

эквивалентному регулярному ПМП

$$-(v^0(x))^2 - \eta[\lambda](x,0)v^0(x) = \max_{v \in [-1,1]} \{-v^2 - \eta[\lambda](x,0)v\} \quad \text{при п. в. } x \in \Omega.$$

Таким образом, проверена выполнимость всех условий 1)–3) примера 3.1, случай 3.1.1, и значит относительно оптимального элемента v^0 задачи (IP) можно сделать вывод: существуют такие $p^k \to 0$, $k \to \infty$, для которых в аппроксимирующих задачах (IP) при

$p = p^k$ справедливы утверждения регулярных ПЛ и ПМП, аналогичных сформулированным выше для задачи (IP) при $p = 0$, но, одновременно, оптимальные «аппроксимирующие» управления не сходятся к решению невозмущенной задачи (IP) как по аргументу, так и по функции.

3.2.2. ***Невыполнимость ПЛ.*** Положим далее: $\mathcal{D} \equiv L_2(\Omega)$. Очевидно, в этом случае $\overline{R(A^*)} = L_2(\Omega)$, но $R(A^*) \neq L_2(\Omega)$ (последнее неравенство имеет место в силу «заглаженности» решений краевых задач, см., например, [10, гл. III, теорема 8.1]). Пусть $\bar{v} \in L_2(\Omega) \setminus R(A^*)$ — произвольный элемент. Тогда, как показано в примере 3.1, случай 3.1.2, ПЛ в задаче (IP) при $p = z[\bar{v}]$ не выполняется.

4. Регуляризованные ПЛ в задаче оптимального управления

Вернемся к сведенной выше к задаче выпуклого программирования $(\widetilde{P}^0)$ исходной задаче оптимального управления (OC^0) с возможно неограниченным множеством $\mathcal{D}$, для которой выполняются условия а), б), в), г), д), е). Представляется естественным рассмотреть два отдельных случая задачи (OC^0), каждый из которых представляет самостоятельный интерес: 1. Целевой функционал f^0 является сильно выпуклым; 2. Целевой функционал f^0 является выпуклым. Рассмотрим последовательно оба этих случая, опираясь на результаты работ [4, 7, 14]. Следуя этому плану, введем, прежде всего, необходимые обозначения. Определим, во-первых, функцию Лагранжа в задаче оптимального управления (OC^δ)

$$
\begin{gathered}
L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) \equiv f^\delta(\pi) + \varepsilon\|\pi\|^2 + \langle \lambda, A^\delta\pi - h^\delta - p\rangle \\
= \int_{Q_T} A_1^\delta(x,t)(z^\delta[\pi](x,t))^2 dxdt + \int_\Omega A_2^\delta(x)(z^\delta[\pi](x,T))^2 dx + \int_{S_T} A_3^\delta(s,t)(z^\delta[\pi](s,t))^2 dsdt \\
+ \int_{Q_T} B_1^\delta(x,t)(u(x,t))^2 dxdt + \int_\Omega B_2^\delta(x)(v(x))^2 dx + \int_{S_T} B_3^\delta(s,t)(w(s,t))^2 dsdt + \varepsilon\|\pi\|^2 \\
+ \int_\Omega \lambda(x)(G_1^\delta(x) z^\delta[\pi](x,T) + G_2^\delta(x)) dx, \quad \pi \in \mathcal{D}, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \quad \varepsilon \geq 0, \\
L^{\delta,0}(\pi,\lambda) \equiv L^\delta(\pi,\lambda), \quad L^{0,0}(\pi,\lambda) \equiv L^0(\pi,\lambda).
\end{gathered}
$$

Введем также обозначение $\pi^{\delta,\varepsilon}[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) : \pi \in \mathcal{D}\}$. Определим, во-вторых, двойственную задачу

$$
\begin{gathered}
V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(\pi,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \\
V^\delta(\lambda) \equiv V^{\delta,0}(\lambda) \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}} L^{\delta,0}(\pi,\lambda) \equiv \inf_{\pi\in\mathcal{D}} L^\delta(\pi,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \quad V^{0,0}(\lambda) \equiv V^0(\lambda).
\end{gathered}
$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha,\varepsilon} \in L_2(\Omega)$, $\alpha > 0$, решение регуляризованной двойственной задачи

$$
V^{\delta,\varepsilon}(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2 \to \max, \quad \lambda \in L_2(\Omega), \quad \lambda^{\delta,\alpha,0} \equiv \lambda^{\delta,\alpha}.
$$

В общей ситуации задачи выпуклого программирования регуляризация ПЛ [4, 7] подразумевает использование двух регуляризирующих параметров, один из которых «отвечает» за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Если целевой функционал является сильно выпуклым, то второй параметр регуляризации ε (в целевом функционале исходной задачи) является излишним и его можно считать равным нулю.

4.1. Регуляризация ПЛ в случае сильно выпуклого целевого функционала. Задача $(\widetilde{P}^\delta)$ в случае сильно выпуклого целевого функционала представляет собою частный случай задачи выпуклого программирования $(P^\delta_{p,r})$ работы [14] (см. раздел 3.1 указанной работы, с учетом того, что в данной работе параметры p, r отсутствуют). Здесь в качестве гильбертова пространства Z выступает пространство $\mathcal{H}$ и отсутствуют ограничения-неравенства. Поэтому для получения анонсированных регуляризованных КУО в задаче (OC^0) необходимо далее «расшифровать» утверждения теорем 3.1, 4.2 из [14] в терминах исходной задачи (OC^0). Заметим одновременно, что особый интерес представляет важный частный случай задачи $(\widetilde{P}^0)$ с функционалом $f^0(\cdot)$ в виде $f^0(\pi) \equiv \|\pi\|^2$, так как такие функционалы возникают прежде всего при рассмотрении обратных задач, подобных задаче в разделе 5.

Пусть $\alpha(\delta) > 0$ при $\delta \in (0, \delta_0]$ и выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{4.1}$$

«Расшифровка» теорем 3.1 (см. ниже замечание 4.1) и 4.2 из [14] в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC^0) в случае сильно выпуклого целевого функционала задачи оптимального управления, когда, напомним, $\varepsilon = 0$.

Теорема 4.1. [Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления] *Пусть задача (OC^0) разрешима, выполняется условие согласования (4.1) и $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, — произвольная фиксированная последовательность. Тогда оператор $R(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.) при $\delta = \delta^k$, тройку $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \pi^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}]$, является МПР-образующим в задаче (OC^0) (см. определение (1.1)). Если же сильно выпуклый функционал f^0 является и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$, то справедливо и предельное соотношение*

$$\|\pi^{\delta^k}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}] - \pi^0\| \to 0, \ \delta^k \to 0, \ k \to \infty. \tag{4.2}$$

З а м е ч а н и е 4.1. В формулировке теоремы 3.1 в [14] были пропущены некоторые полученные при ее доказательстве слагаемые. В формулировке теоремы 1 в [4] все указанные слагаемые восстановлены. Здесь речь идет о слагаемых: $\psi(\delta)$ (см. неравенства (3.23), (3.26) в [14]) — в выражении для $\psi_1(\delta)$ в формуле, соответствующей (2.15) в [4]; $C\delta(2 + L)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.16) в [4]; $C\delta(1 + L^2)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.17) в [4]. Теорема 4.1 сформулирована уже с учетом указанных коррекций.

Теорема 4.2. [Регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления в случае сильно выпуклого целевого функционала] *Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, — произвольная фиксированная последовательность. Пусть также выполняется условие согласования (4.1).*

Для того, чтобы в задаче (OC^0) существовало ограниченное МПР (и, следовательно, слабо сходилось к решению задачи π^0), необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, и выполняются включения

$$\pi^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \quad \gamma^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.3}$$

для некоторой последовательности положительных чисел γ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ (*она играет роль последовательности* ϵ^k, $k = 1, 2, \ldots$ *из определения МПР*) *и предельное соотношение*

$$\langle \lambda^k, G_1^{\delta^k}(\cdot) z^{\delta^k}[\pi^{\delta^k}[\lambda^k]](\cdot, T) + G_2^{\delta^k}(\cdot) \rangle \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.4}$$

а последовательность $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *была ограничена.*

Более того, последовательность $\pi^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *является искомым МПР. Другими словами, оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.) *при* $\delta = \delta^k$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = \pi^{\delta^k}[\lambda^k]$, *является МПР-образующим* (*см. определение 1.1*), *а последовательность* $\pi^{\delta^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots,$ *слабо сходится к решению задачи* (OC^0). *Если же сильно выпуклый функционал* f^0 *является и субдифференцируемым* (*в смысле выпуклого анализа*) *в точках* $\mathcal{D}$, *то указанную выше слабую сходимость следует считать сильной, то есть в этом случае имеет место предельное соотношение* (4.2).

Одновременно с предельным соотношением $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и соотношениями* (4.3), (4.4), *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k) \to \sup_{\lambda \in L_2(\Omega)} V^0(\lambda) = f^0(\pi^0).$$

В качестве конкретной последовательности $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \ldots,$ *о которой идет речь в теореме 4.1.*

4.2. Регуляризация ПЛ в случае выпуклого целевого функционала. Для получения анонсированных регуляризованных КУО в задаче (OC^0) в случае выпуклого целевого функционала необходимо далее «расшифровать» утверждения теорем 2, 3 из [7] в терминах исходной задачи (OC^0). Пусть помимо условия согласования (4.1) выполняется и еще одно подобное условие

$$\frac{\delta}{\varepsilon(\delta)} \to 0, \quad \varepsilon(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{4.5}$$

Предположим также, что величина F равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничивает снизу на $\mathcal{D}$ функционал f^δ:

$$f^\delta(\pi) \geq F \quad \forall\, \pi \in \mathcal{D}, \quad \delta \in [0, \delta_0]. \tag{4.6}$$

«Расшифровка» теоремы 2 и теоремы 3 из [7] приводит, соответственно, к следующим теоремам в терминах исходной задачи (OC^0).

Теорема 4.3. [Регуляризирующий двойственный алгоритм в задаче оптимального управления] *Пусть* $\Pi^0 \neq \emptyset$ *и выполняются условия согласования* (4.1), (4.5), $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, — *произвольная фиксированная последовательность. Пусть также выполняется условие* (4.6) *ограниченности снизу целевого функционала. Тогда оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.) *при* $\delta = \delta^k$, *тройку* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \pi^{\delta^k, \varepsilon(\delta^k)}[\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon(\delta^k)}]$, *является МПР-образующим в задаче* (OC^0) *в смысле* (1.4) (*см. определение 1.1*).

Теорема 4.4. [Регуляризованный ПЛ в задаче оптимального управления в случае $\beta = \beta_0$] *Пусть выполняются условия согласования* (4.1), (4.5), $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $\delta^k \to 0$, $k \to \infty$, *— произвольная фиксированная последовательность*, $\varepsilon^k \equiv \varepsilon(\delta^k)$. *Пусть выполняется равенство* $\beta = \beta_0$, *а также условие* (4.6) *ограниченности снизу целевого функционала. Тогда:*

1. *Для того, чтобы в задаче* (OC^0) *существовало ограниченное МПР (или, что эквивалентно, оптимальный элемент) необходимо, чтобы существовала последовательность* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, *такая, что* $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения*

$$\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}^{\delta^k, \gamma^k}, \quad \gamma^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.7}$$

и предельное соотношение

$$\langle \lambda^k, G_1^{\delta^k}(\cdot) z^{\delta^k}[\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]](\cdot, T) + G_2^{\delta^k}(\cdot) \rangle \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.8}$$

а последовательность $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является (возможно неограниченным) МПР. Другими словами, оператор, задаваемый равенством*

$$R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = \pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k], \tag{4.9}$$

является МПР-образующим (см. определение 1.1), причем каждая слабая предельная точка последовательности $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *в случае ее ограниченности есть решение задачи* (OC^0). *В качестве конкретной последовательности* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon(\delta^k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, *о которой идет речь в теореме 4.3.*

2. *И, наоборот, для того, чтобы в задаче* (OC^0) *существовало ограниченное МПР (а значит и оптимальный элемент) достаточно, чтобы существовали последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* ε^k, $k = 1, 2, \ldots$ *и последовательность* $\lambda^k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $\delta^k \|\lambda^k\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения* (4.7) *и предельное соотношение* (4.8), *причем, последовательность* $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$ *является ограниченной. В этом случае задаваемый равенством* (4.9) *оператор является МПР-образующим (см. определение 1.1), причем каждая слабая предельная точка последовательности* $\pi^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *есть решение задачи* (OC^0).

5. Регуляризация ПМП в обратной задаче финального наблюдения

Переходим к формулировке и обоснованию регуляризованного ПМП в задаче (OC^0) с сильно выпуклым целевым функционалом. Центральную роль здесь играет задача минимизации функции Лагранжа

$$L^\delta(\pi, \lambda) \to \min, \quad \pi \in \mathcal{D}, \tag{5.1}$$

единственным решением которой является тройка $\pi^\delta[\lambda] \in \mathcal{D}$. Получим поточечный ПМП по всем трем компонентам (u, v, w) для тройки $\pi^\delta[\lambda]$ в важном частном случае задачи (OC^0), когда ее функционал имеет вид

$$f^0(\pi) = \|\pi\|^2 \equiv \|\pi\|^2_{\mathcal{H}} = \|u\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v\|^2_{L_2(\Omega)} + \|w\|^2_{L_2(S_T)}, \tag{5.2}$$

то есть $A_1(\cdot,\cdot) = 0$, $A_2(\cdot) = 0$, $A_3(\cdot,\cdot) = 0$, $B_1(\cdot,\cdot) = 1$, $B_2(\cdot) = 1$, $B_3(\cdot,\cdot) = 1$, что соответствует тому, что мы рассматриваем классическую обратную задачу по нахождению минимальной по норме тройки управляющих параметров $\pi \equiv (u, v, w)$ по наблюдению решения начально–краевой задачи в финальный момент времени.

При получении ПМП в задаче (5.1) нам потребуется игольчатое варьирование граничного управления w и одновременно понятие точки Лебега суммируемой функции, задаваемой на боковой поверхности S_T. Напомним, прежде всего, что понимается под точкой Лебега суммируемой функции, заданной на поверхности S_T. Так как в соответствии с условием е) граница S области Ω является липшицевой (она является кусочно-гладкой), то можно утверждать, что существует конечный набор измеримых в смысле $(n-1)$-мерной меры, индуцированной на S, множеств S_r, $r = 1, 2, \ldots, e$, и функций ω_r, $r = 1, 2, \ldots, e$, таких, что, во-первых, $\bigcup\limits_{r=1}^{e} S_r = S$, $\operatorname{int} S_k \cap \operatorname{int} S_l = \emptyset$, если $k \neq l$, и, во-вторых, функции $\omega_r : \overbrace{(-P, P) \times \ldots \times (-P, P)}^{n-1} \to \mathbb{R}^1$ являются липшицевыми и для некоторой координатной системы $(x'_r, x_{r,n}) \equiv (x_{r,1}, \ldots, x_{r,n-1},\ x_{r,n})$ имеет место равенство $\operatorname{int} S_r = \{(x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in \overbrace{(-P, P) \times \ldots \times (-P, P)}^{n-1}\}$. Зафиксируем точку $x_0 \in \operatorname{int} S_r$ для некоторого $1 \leq r \leq e$ и организуем для данного достаточно малого $\epsilon > 0$ множество

$$S_\epsilon(x_0) \equiv \{x = (x'_r, \omega(x'_r)) : x'_r \in B_\epsilon(x'_{0r}) \subset \overbrace{(0,1) \times \ldots \times (0,1)}^{n-1}\}, \tag{5.3}$$

где $B_\epsilon(x'_{0r})$ — шар радиуса ϵ с центром в точке x'_{0r} пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Определим также множество $S_T^\epsilon(x_0, t_0) \equiv \{S_\epsilon(x_0) \times (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)\}$. Справедлива следующая лемма, доказательство которой можно найти, например, в [20, лемма 7.2].

Лемма 5.1. *Пусть задана функция $f \in L_1(S_T)$. Тогда существует измеримое в смысле индуцированной на S_T n-мерной меры μ_T множество $\mathcal{L}$, $\mu_T(\mathcal{L}) = \mu_T(S_T)$, такое, что для каждой точки $(x_0, t_0) \in \mathcal{L}$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\mu_T(S_T^\epsilon(x_0, t_0))} \int_{S_T^\epsilon(x_0, t_0)} |f(x,t) - f(x_0, t_0)| \mu_T(dsdt) = 0.$$

Указанные в сформулированной лемме точки (x_0, t_0) из множества $\mathcal{L}$ мы и называем точками Лебега функций из $L_1(S_T)$.

Введем стандартные обозначения: $H_1(u, \eta) \equiv -u\eta - u^2$, $H_2(u, \eta) \equiv v\eta - v^2$, $H_3(w, \eta) \equiv w\eta - w^2$. Докажем следующую лемму, выражающую собою поточечный ПМП в задаче минимизации функции Лагранжа в случае функционала качества частного вида (5.2).

Лемма 5.2. *Пусть выполняются условия а), б), в), г), д), е), а множества управляющих параметров U, V, W есть выпуклые замкнутые множества на числовой оси. Тройка управлений $\pi^\delta[\lambda] \equiv (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta[\lambda])$, являющаяся решением задачи (5.1) в случае функционала качества частного вида (5.2) удовлетворяет при $\pi \equiv (u, v, w) = \pi^\delta[\lambda]$ соотношениям*

$$\begin{gathered}
\max_{r \in U} H_1(x, t, r, \eta^\delta[\lambda](x,t)) = H_1(x, t, u(x,t), \eta^\delta[\lambda](x,t)) \ \text{ при п. в. } (x,t) \in Q_T, \\
\max_{r \in V} H_2(x, r, \eta^\delta[\lambda](x,0)) = H_2(x, v(x), \eta^\delta[\lambda](x,0)) \ \text{ при п. в. } x \in \Omega, \\
\max_{r \in W} H_3(s, t, r, \eta^\delta[\lambda](s,t)) = H_3(s, t, w(s,t), \eta^\delta[\lambda](s,t)) \ \text{ при п. в. } (s,t) \in S_T,
\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\eta^\delta[\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ *— решение сопряженной задачи*

$$
\begin{gathered}
-\eta_t - \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i,j}^\delta(x,t)\eta_{x_i}) + a^\delta(x,t)\eta = 0; \\
\eta(x,T) = -\lambda(x)G_1^\delta(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(x,t)\eta = 0, \quad (x,t) \in S_T.
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

И, обратно, в силу выпуклости задачи любой элемент $\pi \equiv (u,v,w) \in \mathcal{D}$, *удовлетворяющий вместе с некоторой* $\lambda \in H = L_2(\Omega)$ *соотношениям* (5.4), *доставляет минимум в задаче* (5.1) *в случае функционала качества частного вида* (5.2), *то есть* $\pi = \pi^\delta[\lambda]$.

Доказательство. Доказываем сначала необходимость. С этой целью применим формулу леммы 2.3 для интегрального представления приращения функционала $L^\delta(\cdot,\lambda)$ для пары управляющих троек $\pi = (u,v,w)$ и $\pi^\delta[\lambda] = (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta[\lambda])$. Можем записать, с учетом обозначения $\Delta z^\delta \equiv z^\delta[\pi] - z^\delta[\pi^\delta[\lambda]]$,

$$
\begin{gathered}
\Delta z_t^\delta - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}^\delta(x,t)\Delta z_{x_j}^\delta) + a^\delta(x,t)\Delta z^\delta + u(x,t) - u^\delta[\lambda](x,t) = 0; \\
\Delta z^\delta(x,0) = v(x) - v^\delta[\lambda](x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \Delta z^\delta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\Delta z^\delta = w(s,t) - w^\delta[\lambda](s,t), \quad (s,t) \in S_T.
\end{gathered}
$$

Кроме того, можем записать также

$$
\begin{aligned}
L^\delta(\pi,\lambda) - L^\delta(\pi^\delta[\lambda],\lambda) &= \int_{Q_T}[(u(x,t))^2 - (u^\delta[\lambda](x,t))^2]dxdt + \int_\Omega [(v(x))^2 - (v^\delta[\lambda](x))^2]dx \\
&+ \int_{S_T}[(w(s,t))^2 - (w^\delta[\lambda](s,t))^2]dsdt + \int_\Omega \lambda(x)G_1^\delta(x)(z^\delta[\pi](x,T) - z^\delta[\pi^\delta[\lambda]](x,T))dx.
\end{aligned}
$$

Тогда, применяя лемму 2.3 получаем

$$
\begin{gathered}
L^\delta(\pi,\lambda) - L^\delta(\pi^\delta[\lambda],\lambda) \\
= \int_{Q_T}(u(x,t) - u^\delta[\lambda](x,t))\eta^\delta[\lambda](x,t)dxdt - \int_\Omega (v(x) - v^\delta[\lambda](x))\eta^\delta[\lambda](x,0)dx \\
- \int_{S_T}(w(s,t) - w^\delta[\lambda](s,t))\eta^\delta[\lambda](s,t)dsdt + \int_{Q_T}[(u(x,t))^2 - (u^\delta[\lambda](x,t))^2]dxdt \\
+ \int_\Omega [(v(x))^2 - (v^\delta[\lambda](x))^2]dx + \int_{S_T}[(w(s,t))^2 - (w^\delta[\lambda](s,t))^2]dsdt,
\end{gathered}
\tag{5.6}
$$

где $\eta^\delta[\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение сопряженной задачи (5.5), которое в рассматриваемом частном случае, как можно заметить, не зависит от тройки $\pi \equiv (u,v,w)$.

Используем далее игольчатые вариации управлений $u^\delta[\lambda]$, $v^\delta[\lambda]$, $w^\delta[\lambda]$, определив их следующим образом. Пусть $U^* \subset \mathbb{R}^1$, $V^* \subset \mathbb{R}^1$, $W^* \subset \mathbb{R}^1$ — счетные всюду плотные подмножества множеств U, V, W. Определим вариацию $\pi_\epsilon^\delta[\lambda] \in \mathcal{D}$, $0 \le \epsilon \le \epsilon_0 \le 1$, тройки $\pi^\delta[\lambda]$

$$
\begin{gathered}
u_\epsilon^\delta[\lambda](x,t) \equiv \begin{cases} u^\delta[\lambda](x,t), & (x,t) \in Q_T \setminus Q_{\bar{x},\bar{t}}^\epsilon, \\ \bar{u} \in U^*, & (x,t) \in Q_{\bar{x},\bar{t}}^\epsilon, \end{cases} \qquad v_\epsilon^\delta[\lambda](x) \equiv \begin{cases} v^\delta[\lambda](x), & x \in \Omega \setminus \Omega_{\bar{y}}^\epsilon, \\ \bar{v} \in V^*, & x \in \Omega_{\bar{y}}^\epsilon, \end{cases} \\
w_\epsilon^\delta[\lambda](s,t) \equiv \begin{cases} w^\delta[\lambda](s,t), & \text{если } (s,t) \in S_T \setminus S_T^\epsilon(\bar{s},\bar{t}); \\ \bar{w} \in W^*, & \text{если } (s,t) \in S_T^\epsilon(\bar{s},\bar{t}), \end{cases}
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

где $Q^\epsilon_{\bar{x},\bar{t}} \equiv \big\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x}_i - \epsilon < x_i \le \bar{x}_i,\ i = 1,\dots,n,\ \bar{t} - \epsilon < t \le \bar{t}\big\}$, $\Omega^\epsilon_{\bar{y}} \equiv \big\{x \in \mathbb{R}^n : \bar{y}_i - \epsilon^{\frac{n+1}{n}} < x_i \le \bar{y}_i - \epsilon^{\frac{n+1}{n}},\ i = 1,\dots,n\big\}$, $\bar{x} \equiv (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$, $\bar{y} \equiv (\bar{y}_1,\dots,\bar{y}_n)$, множество $S^\epsilon_T(\bar{s},\bar{t})$ определяется равенством (5.3).

Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия на точки $(\bar{x},\bar{t})$, $\bar{y}$, $(\bar{s},\bar{t})$, участвующие в определении вариации $\pi^\delta_\epsilon[\lambda]$:

1) точка $(\bar{x},\bar{t})$ является точкой Лебега [21, гл. I, § 1, п. 1.7] функций

$$(u' - u^\delta[\lambda](x,t))\eta^\delta[\lambda](x,t), \quad [(u')^2 - (u^\delta[\lambda](x,t))^2], \quad (x,t) \in Q_T, \quad u' \in U^*;$$

2) точка $\bar{y}$ является точкой Лебега [21, гл. I, § 1, п. 1.7] функций

$$(v' - v^\delta[\lambda](x))\eta^\delta[\lambda](x,0) + [(v')^2 - (v^\delta[\lambda](x))^2], \quad x \in \Omega, \quad v' \in V^*,$$

3) точка $(\bar{s},\bar{t})$ является точкой Лебега (см. лемму 5.1) функций

$$(w' - w^\delta[\lambda](s,t))\eta^\delta[\lambda](s,t),\ [(w')^2 - (w^\delta[\lambda](s,t))^2], \ \ (s,t) \in S_T, \ \ w' \in W^*,$$

где $\eta^\delta[\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение краевой сопряженной задачи (5.5). Очевидно, в силу классической теоремы о точках Лебега, такой выбор точек $(\bar{x},\bar{t})$, $\bar{y}$ возможен, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar{x},\bar{t})$, $\bar{y}$ совпадает соответственно с лебеговой мерой цилиндра Q_T и лебеговой мерой области Ω. Одновременно, благодаря лемме 5.1, такой выбор возможен и в случае точек $(\bar{s},\bar{t})$, причем лебегова мера множества всех таких точек $(\bar{s},\bar{t})$ совпадает с лебеговой мерой боковой поверхности S_T.

Подсчитаем сначала первую вариацию $\lim\limits_{\epsilon\to 0}(1/(\epsilon^{n+1}))(L^\delta(\pi^\delta_\epsilon[\lambda],\lambda) - L^\delta(\pi^\delta[\lambda],\lambda))$ функционала Лагранжа в случае $\pi^\delta_\epsilon[\lambda] = (u^\delta_\epsilon[\lambda], v^\delta_\epsilon[\lambda], w^\delta[\lambda])$. Можем записать в силу равенства (5.6) и организации вариации $\pi^\delta_\epsilon[\lambda] = (u^\delta_\epsilon[\lambda], v^\delta_\epsilon[\lambda], w^\delta[\lambda])$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}(L^\delta(\pi^\delta_\epsilon[\lambda],\lambda) - L^\delta(\pi^\delta[\lambda],\lambda))$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int_{Q^\epsilon_{\bar{x},\bar{t}}}(\bar{u} - u^\delta[\lambda](x,t))\eta^\delta[\lambda](x,t)dxdt - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int_{\Omega^\epsilon_{\bar{y}}}(\bar{v} - v^\delta[\lambda](x))\eta^\delta[\lambda](x,0)dx$$
$$+\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int_{Q^\epsilon_{\bar{x},\bar{t}}}[\bar{u}^2 - (u^\delta[\lambda](x,t))^2]dxdt + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^{n+1}}\int_{\Omega^\epsilon_{\bar{y}}}[\bar{v}^2 - (v^\delta[\lambda](x))^2]dx$$
$$= (\bar{u} - u^\delta[\lambda](\bar{x},\bar{t}))\eta^\delta[\lambda](\bar{x},\bar{t}) - (\bar{v} - v^\delta[\lambda](\bar{y}))\eta^\delta[\lambda](\bar{y},0) + \bar{u}^2 - (u^\delta[\lambda](\bar{x},\bar{t}))^2 + \bar{v}^2 - (v^\delta[\lambda](\bar{y}))^2 \ge 0$$
$$\forall\, \bar{u} \in U^* \text{ при п. в. } (\bar{x},\bar{t}) \in Q_T, \ \ \forall\, \bar{v} \in V^* \text{ при п. в. } \bar{y} \in \Omega,$$

откуда выводим первые два соотношения максимума в (5.4).

Далее, вычисляем также первую вариацию функционала Лагранжа, но уже в случае $\pi^\delta_\epsilon[\lambda] = (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta_\epsilon[\lambda])$, то есть $w^\delta[\lambda]$ варьируется по третьей формуле (5.7). В этом случае можем записать, опять с учетом равенства (5.6), при $\pi^\delta_\epsilon[\lambda] = (u^\delta[\lambda], v^\delta[\lambda], w^\delta_\epsilon[\lambda])$, а также с учетом определения $w^\delta_\epsilon[\lambda]$ и леммы 5.1,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\mu_T(S^\epsilon_T(\bar{x},\bar{t}))}(L^\delta(\pi^\delta_\epsilon[\lambda],\lambda) - L^\delta(\pi^\delta[\lambda],\lambda))$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\mu_T(S^\epsilon_T(\bar{x},\bar{t}))}\Big(\int_{S^\epsilon_T(\bar{x},\bar{t})}(\bar{w} - w^\delta[\lambda](s,t))\eta^\delta[\lambda](s,t)dsdt + \int_{S^\epsilon_T(\bar{x},\bar{t})}[\bar{w}^2 - (w^\delta[\lambda](s,t))^2]dsdt\Big)$$
$$= (\bar{w} - w^\delta[\lambda](\bar{s},\bar{t}))\eta^\delta[\lambda](\bar{s},\bar{t}) + \bar{w}^2 - (w^\delta[\lambda](\bar{s},\bar{t}))^2 \ge 0 \ \forall\, \bar{w} \in W^* \text{ при п. в. } (\bar{s},\bar{t}) \in S_T.$$

Из последнего неравенства вытекает третье соотношение максимума в (5.4). Необходимость доказана.

Доказываем далее достаточность. Пусть выполняются соотношения (5.4) для некоторой тройки $\pi \equiv (u, v, w) \in \mathcal{D}$ и некоторого $\lambda \in H = L_2(\Omega)$. Тогда можем записать для произвольного $\pi' \equiv (u', v', w') \in \mathcal{D}$

$$L^\delta(\pi', \lambda) - L^\delta(\pi, \lambda) = \int_{Q_T} [(u'(x,t))^2 - (u(x,t))^2] dxdt + \int_\Omega [(v'(x))^2 - (v(x))^2] dx$$
$$+ \int_{S_T} [(w'(s,t))^2 - (w(s,t))^2] dsdt + \int_\Omega \lambda(x) G_1^\delta(x)(z^\delta[\pi'](x,T) - z^\delta[\pi](x,T)) dx.$$

Можем также записать, с учетом обозначения $\Delta z^\delta \equiv z^\delta[\pi'] - z^\delta[\pi]$,

$$\Delta z_t^\delta - \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i,j}^\delta(x,t)\Delta z_{x_j}^\delta) + a^\delta(x,t)\Delta z^\delta + u'(x,t) - u(x,t) = 0;$$
$$\Delta z^\delta(x,0) = v'(x) - v(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \Delta z^\delta}{\partial \mathcal{N}} + \sigma^\delta(s,t)\Delta z^\delta = w'(s,t) - w(s,t), \quad (s,t) \in S_T.$$

Тогда, применяя, как и выше при доказательстве необходимости, лемму 2.3 получаем

$$L^\delta(\pi', \lambda) - L^\delta(\pi, \lambda) = \int_{Q_T} \big(u'(x,t) - u(x,t)\big)\eta^\delta[\lambda](x,t) dxdt - \int_\Omega \big(v'(x) - v(x)\big)\eta^\delta[\lambda](x,0) dx$$
$$- \int_{S_T} \big(w'(s,t) - w(s,t)\big)\eta^\delta[\lambda](s,t) dsdt + \int_{Q_T} \big[(u'(x,t))^2 - (u(x,t))^2\big] dxdt \tag{5.8}$$
$$+ \int_\Omega \big[(v'(x))^2 - (v(x))^2\big] dx + \int_{S_T} \big[(w'(s,t))^2 - (w(s,t))^2\big] dsdt,$$

где $\eta^\delta[\lambda] \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — обобщенное решение сопряженной задачи (5.5). Замечая теперь, что в силу соотношений (5.4) выражение в правой части неравенства (5.) неотрицательно при всех $\pi' \in \mathcal{D}$, получаем неравенство $L^\delta(\pi', \lambda) - L^\delta(\pi, \lambda) \geq 0 \ \ \forall \pi' \in \mathcal{D}$, то есть $\pi = \pi^\delta[\lambda]$. Лемма 5.2 доказана.

После доказательства ПМП леммы 5.2, для простейшей задачи оптимального управления (5.1) мы можем переформулировать полученный выше регуляризованный ПЛ теоремы 4.2 для задачи (OC^0) в форме регуляризованного ПМП в том случае, когда ее функционал имеет частный вид (5.2). С целью указанной переформулировки, прежде всего, обозначим через $\Pi_m^\delta[\lambda]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП леммы 5.2 в задаче (5.1). Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^0(\cdot) = \|\cdot\|^2$, это множество состоит из одного элемента: $\Pi_m^\delta[\lambda] \equiv \pi_m^\delta[\lambda]$ и справедливо равенство (при соответствующих оговоренных выше условиях) $\pi_m^\delta[\lambda] = \pi^\delta[\lambda]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 4.2 и леммы 5.2 является следующий регуляризованный ПМП в задаче оптимального управления (OC^0) в случае ее функционала качества частного вида (5.2), для которой в этом случае справедливо равенство $\beta = \beta_0$.

Теорема 5.1. [Регуляризованный ПМП в обратной задаче финального наблюдения] *Пусть функционал цели задачи (OC^0) имеет частный вид (5.2) и выполняются условия а), б), в), г), д), е). Тогда все утверждения теоремы 4.2 остаются справедливыми и в том случае, если в них $\pi^{\delta^k}[\lambda^k]$ заменяется везде на $\pi_m^{\delta^k}[\lambda^k]$, причем, так как $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ — субдифференцируемый функционал, то $\|\pi_m^{\delta^k}[\lambda^k] - \pi^0\|_{\mathcal{H}} \to 0, \ \ k \to \infty$.*

References

[1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: в 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Metody Optimizatsii: v 2-kh. kn.*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[2] М. И. Сумин, "Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:4(124) (2018), 757–772. [M. I. Sumin, "Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:4(124) (2018), 757–772 (In Russian)].

[3] М. И. Сумин, "Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, "Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 279–296 (In Russian)].

[4] М. И. Сумин, "О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления", Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, "On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**, 2020, 252–269 (In Russian)].

[5] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986. [A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington–New York, 1977 (In Russian)].

[6] М. И. Сумин, "Регуляризация принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального граничного управлении для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством", Тр. ИММ УрО РАН, **27**, 2021, 221–237. [M. I. Sumin, "Regularization of the Pontryagin maximum principle in the convex optimal control problem for parabolic equation with a boundary control and with an operator equality-constraint", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **27**, 2021, 221–237 (In Russian)].

[7] М. И. Сумин, "О регуляризации принципа Лагранжа и построении обобщенных минимизирующих последовательностей в выпуклых задачах условной оптимизации", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 410–428. [M. I. Sumin, "On the regularization of the Lagrange principle and on the construction of the generalized minimizing sequences in convex constrained optimization problems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 410–428 (In Russian)].

[8] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. пер.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press Publ., New York, 1972.

[9] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Teoriya Dvoistvennosti v Matematicheskom Programmirovanii i ee Prilozheniya*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].

[10] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.:O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, AMS, Providence, 1968.

[11] В. И. Плотников, "Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений", *Докл. АН СССР*, **165**:1 (1965), 33–35; англ. пер.:V. I. Plotnikov, "Uniqueness and existence theorems and apriori properties of generalized solutions", *Sov. Math., Dokl.*, **6** (1965), 1405–1407.

[12] М. И. Сумин, "Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:11 (2004), 2001–2019; англ. пер.:M. I. Sumin, "A regularized gradient dual method for the inverse problem of a final observation for a parabolic equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:11 (2004), 1903–1921.

[13] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press Publ., New York, 1987.

[14] М. И. Сумин, "Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, "Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space", *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[15] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].

[16] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis.* V. 2, CRM Proceedings and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.

[17] С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1971; англ. пер.:S. G. Krein, *Linear Equations in Banach Spaces*, Birkhaüser, Boston–Basel–Stuttgart, 1982.

[18] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Funktsional‘nyi Analiz*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[19] В. И. Плотников, “Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. математическая*, **32**:4 (1968), 743–755; англ. пер.:V. I. Plotnikov, “An energy inequality and the overdeterminacy property of a system of eigenfunctions”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:4 (1968), 695–707.

[20] E. Casas, “Pontryagin’s principle for state-constrained boundary control problems of semilinear parabolic equations”, *SIAM J. Control Optim.*, **35** (1997), 1297–1327.

[21] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975. [O. V. Besov, V. P. Il’in, S. M. Nikol’skii, *Integral Representations of Functions and Imbedding Theorems.* V. I, II, Halsted Press; John Wiley and Sons, Washington, D.C.; New York–Toronto, Ont.–London, 1978, 1979].

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов; профессор, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov; Professor, Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, Russian Federation. E-mail: m.sumin@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 26.05.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Received 17.03.2021
Reviewed 26.05.2021
Accepted for press 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181
УДК 517.928+517.956

Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части

Владимир Игоревич УСКОВ
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова»
394087, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8

Study of rigidity of a first-order algebro-differential system with perturbation in the right-hand side

Vladimir I. USKOV
Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov
8 Timiryazeva St., Voronezh 394087, Russian Federation

Аннотация. Исследуется жесткость динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка с необратимым оператором при старшей производной. Система возмущена операторной добавкой порядка второй степени малого параметра. Определяются условия, при которых система робастна относительно этих возмущений и условия, при которых влияние возмущений значительно, для чего выводится уравнение ветвления. С помощью него устанавливается вид функций погранслоя. В качестве примера исследуется начально-краевая задача для системы уравнений в частных производных со смешанной второй частной производной, встречающейся при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и т. д.

Ключевые слова: жесткость, динамическая система, дифференциальное уравнение первого порядка, сингулярное возмущение, малый параметр, 0-нормальное собственное число, функция погранслоя, уравнение ветвления

Для цитирования: *Усков В.И.* Исследование жесткости алгебро-дифференциальной системы первого порядка с возмущением в правой части // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 172–181. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181.

Abstract. The rigidity of a dynamical system described by a first-order differential equation with an irreversible operator at the highest derivative is investigated. The system is perturbed by an operator addition of the order of the second power of a small parameter. Conditions under which the system is robust with respect to these disturbances are determined as well as conditions under which the influence of disturbances is significant. For this, the bifurcation equation is derived. It is used to set the type of boundary layer functions. As an example, we investigate the initial boundary value problem for a system of partial differential equations with a mixed second partial derivative which occurs in the study of the processes of sorption and desorption of gases, drying processes, etc.

Keywords: rigidity, dynamical system, first-order differential equation, singular perturbation, small parameter, 0-normal eigenvalue, boundary layer function, bifurcation equation

Mathematics Subject Classification: 34D05, 35A24, 35B20

For citation: Uskov V.I. Issledovaniye zhestkosti algebro-differentsial'noy sistemy pervogo poryadka s vozmushcheniyem v pravoy chasti [Study of rigidity of a first-order differential

system with perturbation in the right-hand side]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 172–181.
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-172-181. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Рассматривается задача Коши для динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$A\frac{du}{dt} = (B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)u(t,\varepsilon), \tag{0.1}$$

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0(\varepsilon), \tag{0.2}$$

где A, B, C, D — замкнутые линейные операторы, действующие в банаховом пространстве $E(\mathbb{R})$, $\overline{\operatorname{dom} A} = E$, $\overline{\operatorname{dom} B} = E$, $\overline{\operatorname{dom} C} = E$, $\overline{\operatorname{dom} D} = E$; $u(t,\varepsilon) \in E$ — искомая функция; $u^0(\varepsilon) \in E$ — голоморфная в окрестности точки $\varepsilon = 0$ функция; $t \in \mathfrak{T} = [t_0; t_{max}]$; $\varepsilon \in \mathcal{E} = (0; \varepsilon_0)$ — малый параметр.

Оператор A обладает свойством иметь 0 нормальным собственным числом (далее, 0-NEV-свойством).

Уравнение (0.1) с вырожденным оператором при старшей производной называется *алгебро-дифференциальным.* Динамическая система, описываемая этим уравнением, не является жесткой. Одним из важнейших свойств таких динамических систем является свойство чувствительности системы даже к незначительным возмущениям параметров.

Возмущениями, вызываемыми наличием малого параметра при операторных коэффициентах, занимались многие авторы: М. М. Вайнберг и В. А. Треногин (см. [1]), С. Г. Крейн (см. [2]) и С. П. Зубова и К. И. Чернышов (см. [3]). Жесткость динамической системы вида (0.1) с фредгольмовым оператором A, имеющим одномерное ядро, с более простой правой частью $(B + \varepsilon C)$ изучена в работе [4], а в работе [5] построено асимптотическое разложение решения по степеням параметра ε.

Возможно следующее поведение решения $u(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

a) Равномерная сходимость на $\mathfrak{T}$ решения $u(t,\varepsilon)$ задачи Коши (0.1), (0.2) к решению $\bar{u}(t)$ предельной задачи Коши:

$$A\frac{d\bar{u}}{dt} = B\bar{u}(t),$$
$$\bar{u}(t_0) = \bar{u}^0.$$

Это означает, что система жесткая (робастна по отношению к возмущению $\varepsilon C + \varepsilon^2 D$), т. е. изменение параметра ε мало меняет само решение.

Определение 0.1. Ограниченная функция $v(t,\varepsilon)$ называется функцией погранслоя вблизи точки $t = t_0$, если $v(t,\varepsilon)$ равномерно (по норме в банаховом пространстве E) стремится к 0 на $[t'; t_{max}]$ при каждом $t' \in (t_0; t_{max})$ и не стремится равномерно к 0 на $\mathfrak{T}$.

Данное определение функции погранслоя обобщает определение, приведенное в работе [6] в случае $t_0 = 0$.

b) Явление погранслоя вблизи точки $t = t_0$:

$$u(t,\varepsilon) = \bar{u}(t) + v(t,\varepsilon),$$

где $v(t,\varepsilon)$ — функция погранслоя вблизи $t = t_0$. Этот случай возникает, когда вблизи (в пограничном слое $(t_0; t')$) начальной точки решение сильно изменяется.

Остальные случаи:

c) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|u(t,\varepsilon)\| = \infty$ или

d) предел $u(t,\varepsilon)$ не существует.

Это критические случаи, когда малое изменение параметра приводит к такому сильному изменению решения в пограничном слое, что может разрушить систему.

Явление погранслоя имеет место при выполнении некоторых *условий регулярности вырождения*. В работе [7] в качестве примера исследуется динамическая модель Леонтьева выпуска валовой продукции. Невыполнение условий регулярности вырождения влечет за собой расхождение между планируемым объемом производства ($\varepsilon = 0$) и полученным на практике.

Цель данной работы — исследовать жесткость динамической системы (0.1), (0.2) и определить, при каких условиях на операторные коэффициенты уравнения имеют место случаи a)–d) поведения решения. Для этого в работе получено уравнение ветвления, позволяющее определить вид функций погранслоя.

В качестве примера рассматривается система уравнений в частных производных со старшей смешанной второй частной производной. Такие уравнения встречаются при изучении процессов сорбции и десорбции газов, процессов сушки и т. д. (см. [8]). Для ее исследования вводится матрично-дифференциальный оператор первого порядка. В работе [9] доказано, что он обладает 0-NEV-свойством. С применением этого свойства устанавливается, что при некоторых условиях на числовые коэффициенты система является жесткой.

1. Необходимые сведения

Пусть $A: E\to E$ — линейный оператор, обладающий 0-NEV-свойством. Это свойство влечет разложение $E = M\oplus N$, где N — корневое подпространство, элементов e_i, отвечающих нулевому собственному числу, а M — инвариантное подпространство и такое, что сужение $\tilde{A}$ оператора A на M имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$ (см. [10]).

Рассматривается частный случай оператора A, обладающего двумерным ядром ($n = 2$) без присоединенных элементов к элементам ядра, т. е. $N = \operatorname{Ker} A$. В подпространстве N вводится скалярное произведение $<,>$ так, что

$$< e_i, e_j >= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i\neq j,\\ 1, & \text{если} \quad i = j.\end{cases}$$

Элемент ядра z раскладывается по базису e_1, e_2:

$$z = c_1e_1 + c_2e_2. \tag{1.1}$$

Пусть P — проектор на N, Q — проектор на M. Вводится полуобратный оператор $H = \tilde{A}^{-1}Q : M\to M$.

Имеет место следующее утверждение, доказанное в работе [7].

Лемма 1.1. *Линейное уравнение*

$$Av = w, \quad v\in \operatorname{dom} A, \quad w\in E,$$

равносильно системе

$$v = Hw + z \quad \textit{для любого} \quad z\in \operatorname{Ker} A,$$

$$< Pw, e_j >= 0, \quad j = 1, 2.$$

Далее, вводится определитель-функция

$$F(x,y) = \det \begin{pmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{21}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{pmatrix},$$

где все функции f_{ij} достаточно гладкие. Обозначим

$$F_{i_1 i_2}(x,y) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{i_1+i_2} f_{11}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} & \dfrac{\partial^{i_1+i_2} f_{12}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2}} \\ \dfrac{\partial^{m-i_1+n-i_2} f_{21}}{\partial x^{m-i_1} \partial y^{n-i_2}} & \dfrac{\partial^{m-i_1+n-i_2} f_{22}}{\partial x^{m-i_1} \partial y^{n-i_2}} \end{pmatrix}, \quad C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Имеет место следующее утверждение о дифференцировании определитель-функции.

Теорема 1.1. *Частная производная определитель-функции вычисляется по формуле*

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{i_1,i_2=0}^{m,n} C_m^{i_1} C_n^{i_2} F_{i_1 i_2}(x,y).$$

Это утверждение достаточно очевидно доказывается методом математической индукции по m, n.

Далее, введем определитель-функцию

$$G(x,y) = \det \begin{pmatrix} g_{11}(x,y) & g_{12}(x,y) \\ g_{21}(x,y) & g_{22}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где g_{ij} — многочлены по степеням x, y с постоянными коэффициентами γ_{ij}^{rs}, т. е.

$$g_{ij}(x,y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \gamma_{ij}^{rs} x^r y^s.$$

Из теоремы 1.1 получаем следующее утверждение

Следствие 1.1. *Функция* (1.2) *является суммой ряда Маклорена*

$$G(x,y) = \sum_{r,s=0}^{\infty} G_{rs} x^r y^s$$

с коэффициентами

$$G_{rs} = \sum_{i_1,i_2=0}^{r,s} \det \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{i_1 i_2} & \gamma_{12}^{i_1 i_2} \\ \gamma_{21}^{r-i_1,s-i_2} & \gamma_{22}^{r-i_1,s-i_2} \end{pmatrix}.$$

2. Уравнение ветвления

Для вывода уравнения ветвления сделаем подстановку

$$u(t,\varepsilon) = \exp((t-t_0)/\lambda) v(\varepsilon)$$

в (0.1), где $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ — числа, достаточно малые по модулю, отличные от нуля, $v(\varepsilon)$ — равномерно ограниченная функция и $v(\varepsilon) \neq 0$. Эта подстановка приводит к спектральному уравнению

$$Av(\varepsilon) = \lambda(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D) v(\varepsilon).$$

В силу леммы 1.1 оно равносильно системе

$$\bigl(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigr)v(\varepsilon) = z, \quad z \neq 0, \tag{2.1}$$

$$< P(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)v(\varepsilon), e_j >= 0, \quad j = 1, 2. \tag{2.2}$$

Пусть в дальнейшем выполнены следующие условия.

У с л о в и е 2.1. Операторы PB, PC, PD, HB, HC, HD ограничены.

У с л о в и е 2.2. Числа λ таковы, что при каждом $\varepsilon \in \mathcal{E}$ выполнено

$$0 < \|\lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\| < 1.$$

Тогда оператор $\bigl(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigr)$ обратим; выразив $v(\varepsilon)$ из (2.1) и подставив в (2.2), получим систему

$$< R(\lambda, \varepsilon)z, e_j >= 0, \quad j = 1, 2, \tag{2.3}$$

где

$$R(\lambda, \varepsilon) = P(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigl(I - \lambda H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigr)^{-1}.$$

Представив оператор $\bigl(H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigr)^n$ в виде

$$\bigl(H(B + \varepsilon C + \varepsilon^2 D)\bigr)^n = \sum_{s=0}^{2n} \varepsilon^s H_s^{(n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

запишем оператор $R(\lambda, \varepsilon)$ в виде ряда

$$R(\lambda, \varepsilon) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \lambda^j \varepsilon^i R_{ji}$$

в обозначениях

$$R_{00} = PB, \quad R_{01} = PC, \quad R_{02} = PD, \quad R_{0j} = 0, \quad j = 3, 4, \ldots,$$
$$R_{j0} = PBH_0^{(j)}, \quad R_{j1} = PBH_1^{(j)} + PCH_0^{(j)},$$
$$R_{ji} = PBH_i^{(j)} + PCH_{i-1}^{(j)} + PDH_{i-2}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad i = 2, 3, \ldots, 2j,$$
$$R_{j,2j+1} = PCH_{2j}^{(j)} + PDH_{2j-1}^{(j)}, \quad R_{j,2j+2} = PDH_{2j}^{(j)},$$
$$R_{ji} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, \quad i = 2j + 3, 2j + 4, \ldots .$$

Подстановка разложения (1.1) для z в равенства (2.3) приводит к системе

$$c_1 < R(\lambda, \varepsilon)e_1, e_j > +c_2 < R(\lambda, \varepsilon)e_2, e_j >= 0, \quad j = 1, 2.$$

Определитель $\Delta = \Delta(\lambda, \varepsilon)$ этой системы равен 0, так как иное влечет равенства $c_1 = c_2 = 0$, а значит, $z = 0$, что противоречит (2.1). Таким образом, получаем уравнение

$$\Delta(\lambda,\varepsilon)=\det\begin{pmatrix}< R(\lambda,\varepsilon)e_1,e_1 > & < R(\lambda,\varepsilon)e_2,e_1 >\\ < R(\lambda,\varepsilon)e_1,e_2 > & < R(\lambda,\varepsilon)e_2,e_2 >\end{pmatrix}=0,$$

являющееся искомым уравнением ветвления. Разложив выражение $\Delta(\lambda,\varepsilon)$ с применением следствия 1.1, перепишем это уравнение в виде:

$$\Delta(\lambda,\varepsilon)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Delta_{rs}\lambda^r\varepsilon^s=0 \tag{2.4}$$

в обозначениях

$$\Delta_{rs}=\sum_{i_1,i_2=0}^{r,s}\det\begin{pmatrix}d_{11}^{i_1i_2} & d_{12}^{i_1i_2}\\ d_{21}^{r-i_1,s-i_2} & d_{22}^{r-i_1,s-i_2}\end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где

$$d_{rs}^{ji}=< R_{ji}e_r,e_s > . \tag{2.6}$$

3. Решение уравнения ветвления

Рассмотрим уравнение ветвления (2.4)–(2.6). Для его решения применяется диаграмма Ньютона (см. [11]). Возможны следующие случаи.

Случай 1. $\Delta_{00}\neq 0$.

В этом случае имеет место асимптотическое представление $\Delta(\lambda,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$

$$\Delta(\lambda,\varepsilon)=\Delta_{00}+O(\varepsilon),$$

где $O(\varepsilon)$ вмещает в себя нормы ограниченных, в силу условия 2.1, операторов. Тогда диаграмма Ньютона вырождается в точку, что означает случай а) поведения решения.

Далее, пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 3.1. Справедливо неравенство

$$\Delta_{10}\neq 0.$$

Случай 2. Существует такое натуральное число s, что $\Delta_{0i}=0$, $i=0,1,\ldots,s-1$, $\Delta_{0s}\neq 0$.

В этом случае имеет место асимптотическое представление $\Delta(\lambda,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\Delta(\lambda,\varepsilon)=\varepsilon^s\Delta_{0s}+O(\varepsilon^{s+1})+\lambda\Delta_{10}+o(\lambda).$$

В обозначении $\mu=\dfrac{\Delta_{0s}}{\Delta_{10}}$ по диаграмме Ньютона (см. рис. 1) решение уравнения ветвления равно $\lambda=-\mu\varepsilon^s$.

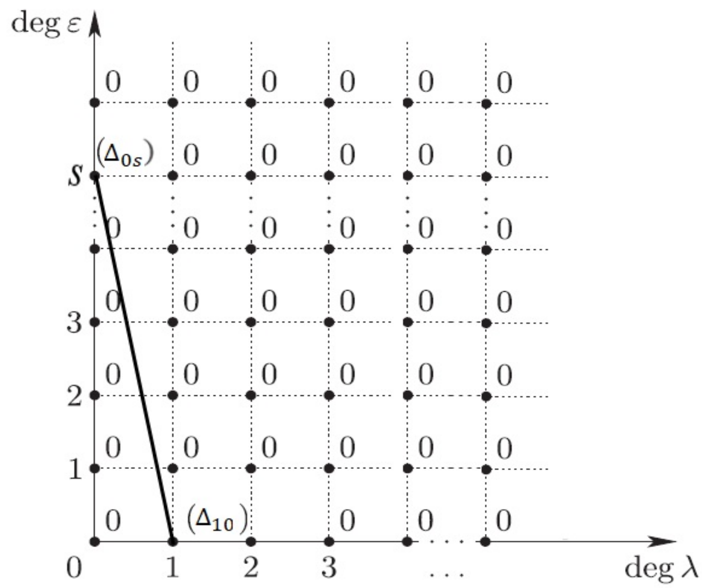


Рис. 1. Диаграмма Ньютона

Подстановка в (2.1) приводит к следующему результату о поведении решения при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия 2.1, 2.2. Пусть* $\Delta_{00} \neq 0$. *Тогда имеет место случай a).*

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия 2.1, 2.2, 3.1 и пусть существует такое натуральное число* s, *что* $\Delta_{0i} = 0$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$, $\Delta_{0s} \neq 0$. *Тогда:*

1. Если $\mu > 0$, *то выполнен случай b), и функции погранслоя имеют переменную* $\tau = (t - t_0)/\varepsilon^s$.

2. Если $\mu < 0$, *то имеет место случай c).*

4. Пример

Исследуем жесткость динамической системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - a\frac{\partial u_2}{\partial t} = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \varepsilon c_{11}u_1 + \varepsilon c_{12}u_2 + \varepsilon^2\delta_{11}u_1 + \varepsilon^2\delta_{12}u_2, \\ &\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} + a\frac{\partial u_1}{\partial t} = b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \varepsilon c_{21}u_1 + \varepsilon c_{22}u_2 + \varepsilon^2\delta_{21}u_1 + \varepsilon^2\delta_{22}u_2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &u_1(x, t_0, \varepsilon) = g_1(x, \varepsilon), \quad u_2(x, t_0, \varepsilon) = g_2(x, \varepsilon), \\ &u_1(0, t, \varepsilon) = u_1(2\pi/a, t, \varepsilon), \quad u_2(0, t, \varepsilon) = u_2(2\pi/a, t, \varepsilon), \\ &g_1(0, \varepsilon) = g_1(2\pi/a, \varepsilon), \quad g_2(0, \varepsilon) = g_2(2\pi/a, \varepsilon), \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $a, b_{ij}, c_{ij}, \delta_{ij}$ — заданные вещественные постоянные, $a > 0$; $u_i = u_i(t, \varepsilon)$ — искомые достаточно гладкие функции, $g_i(x, \varepsilon)$ — голоморфные в окрестности точки $\varepsilon = 0$, $i, j = 1, 2$; $x \in \mathfrak{X}$; $t \in \mathfrak{T}$; $\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Под решением задачи (4.1), (4.2) подразумеваются функции $u_i = u_i(x, t, \varepsilon)$ при каждом $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$:

1) непрерывно дифференцируемые по x при каждом $t \in \mathfrak{T}$ и непрерывно дифференцируемые по t при каждом $x \in \mathfrak{X}$;

2) удовлетворяющие условию $\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t} \equiv \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t \partial x}$ при каждых $x, t \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$;

3) удовлетворяющие (4.1), (4.2) при каждых $x, t \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}$.

Для исследования этой задачи введем оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -a \\ a & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom} \mathcal{A} = \left\{ u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} : \ u_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), \ u_i(0) = u_i(2\pi/a), \ i = 1, 2 \right\},$$

действующий в банаховом пространстве

$$E = \left\{ u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} : \ u_i(x) \in C^1(\mathfrak{X}), \ i = 1, 2 \right\}.$$

Для этого оператора построим подпространство $N = \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{c_1 e_1(x) + c_2 e_2(x)\}$, $e_1(x) = \begin{pmatrix} \cos ax \\ -\sin ax \end{pmatrix}$, $e_2(x) = \begin{pmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix}$, и определим проектор на N формулой

$$\mathcal{P} = \frac{a}{2\pi} \begin{pmatrix} \int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s)) ds & \int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s)) ds \\ -\int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s)) ds & \int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s)) ds \end{pmatrix}.$$

Тогда полуобратный оператор запишется в виде

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ij}), \quad i, j = 1, 2,$$

$$\mathcal{H}_{11} = -\int\limits_x^{2\pi/a} (\cdot) \cos(a(x-s))\, ds + \frac{a}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) s \cos(a(x-s))\, ds,$$

$$\mathcal{H}_{12} = -\int\limits_x^{2\pi/a} (\cdot) \sin(a(x-s))\, ds + \frac{a}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi/a} (\cdot) s \sin(a(x-s))\, ds,$$

$$\mathcal{H}_{21} = -\mathcal{H}_{12}, \quad \mathcal{H}_{22} = \mathcal{H}_{11}.$$

Задача (4.1), (4.2) сводится к задаче вида (0.1), (0.2) с операторами $A = \mathcal{A}$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$, $D = (\delta_{ij})$, $i, j = 1, 2$, искомой вектор-функцией $u(x,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} u_1(x,t,\varepsilon) \\ u_2(x,t,\varepsilon) \end{pmatrix}$, начальной вектор-функцией $u^0(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} g_1(x,\varepsilon) \\ g_2(x,\varepsilon) \end{pmatrix}$.

Пусть выполнено следующее условие.

У с л о в и е 4.1. Имеет место неравенство $b_{12} \neq b_{21}$ и выполнено хотя бы одно из неравенств: $b_{11} \neq b_{22}$ или $b_{12} \neq -b_{21}$.

Вычисления по формулам (2.5), (2.6) показывают, что

$$\Delta_{00} = \frac{(b_{11}+b_{22})^2 + (b_{21}-b_{12})^2}{4},$$
$$\Delta_{01} = \frac{(b_{11}+b_{22})(c_{11}+c_{22}) + (b_{21}-b_{12})(c_{21}-c_{12})}{2},$$
$$\Delta_{02} = \frac{(c_{11}+c_{22})^2 + (c_{21}-c_{12})^2}{4} + \frac{(b_{11}+b_{22})(\delta_{11}+\delta_{22}) + (b_{21}-b_{12})(b_{21}-b_{12})}{2},$$
$$\Delta_{10} = \frac{(b_{21}-b_{12})\big((b_{11}-b_{22})^2 + (b_{12}+b_{21})^2\big)}{8a}.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия 4.1 имеем $\Delta_{00} \neq 0$ и $\Delta_{10} \neq 0$. Поскольку все операторы в условии 2.1 ограничены (P, H ограничены как интегральные, B, C, D — как числовые), и выполнены условия 2.2, 3.1, то теорема 3.1 влечет результат: *динамическая система* (4.1), (4.2) *жесткая.*

References

[1] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969. [M. M. Wajnberg, V. A. Trenogin, *Teoriya Vetvleniya Reshenij Nelinejnyh Uravnenij*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[2] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Krejn, *Linejnye Differencial'Nye Uravneniya v Banahovom Prostranstve*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].

[3] С. П. Зубова, К. И. Чернышов, "О линейном дифференциальном уравнении с фредгольмовским оператором при производной", *Дифференциальные уравнения и их применение*, 1976, № 14, 21–39. [S. P. Zubova, K. I. Chernyshov, "On a linear differential equation with a Fredholm operator at the derivative", *Differential Equations and Their Applications*, 1976, № 14, 21–39 (In Russian)].

[4] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, "Исследование жесткости дескрипторной динамической системы в банаховом пространстве", *Проблемы математического анализа*, 2015, № 79, 127–132; англ. пер.:S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, "A study of the rigidity of descriptor dynamical systems in a Banach space", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **208**:1 (2015), 119–124.

[5] С. П. Зубова, В. И. Усков, "Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай", *Математические заметки*, **103**:3 (2018), 393–404; англ. пер.:S. P. Zubova, V. I. Uskov, "Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Equation with a Small Parameter in a Banach Space. The Regular Case", *Mathematical Notes*, **103**:3 (2018), 395–404.

[6] С. П. Зубова, "О роли возмущений в задаче Коши для уравнения с фредгольмовым оператором при производной", *Доклады Академии наук*, **454**:4 (2014), 383–386; англ. пер.:S. P. Zubova, "The role of perturbations in the Cauchy problem for equations with a Fredholm operator multiplying the derivative", *Doklady Mathematics*, **89** (2014), 72–75.

[7] В. И. Усков, "Явление погранслоя в дескрипторном уравнении первого порядка с малым параметром в правой части", *Проблемы математического анализа*, 2020, № 104, 157–162; англ. пер.:V. I. Uskov, "Boundary layer phenomenon for a first order descriptor equation with small parameter on the right-hand side", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, **250**:1 (2020), 175–181.

[8] А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий, Я. Л. Забежинский, "Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала", *Журнал физической химии*, **20**:10 (1946), 1113–1126. [A. N. Tikhonov, A. A. Zhukhovitsky, Ya. L. Zabezhinsky, "Absorption of gas from air flow by a layer of granular material", *Journal of Physical Chemistry*, **20**:10 (1946), 1113–1126 (In Russian)].

[9] С. П. Зубова, Е. В. Раецкая, В. И. Усков, “Свойства вырожденности некоторого матричного дифференциального оператора и их применение”, *Проблемы математического анализа*, 2021, № 109, 97–108; англ. пер.:S. P. Zubova, E. V. Raetskaya, V. I. Uskov, “Degeneracy property of a matrix-differential operator and applications”, *Journal of Mathematical Sciences*, **255**:5 (2021), 640–652.

[10] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Наука, М., 1965. [I. C. Gohberg, M. G. Krejn, *Vvedenie v Teoriyu Linejnyh Nesamosopryazhennyh Operatorov*, Nauka Publ., Moscow, 1965 (In Russian)].

[11] Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций*, Либроком, М., 2009. [N. G. Chebotarev, *Teoriya Algebraicheskikh Funktsiy*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].

Информация об авторе

Усков Владимир Игоревич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математики. Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Поступила в редакцию 26.03.2021 г.
Поступила после рецензирования 17.05.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Vladimir I. Uskov, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Mathematics Department. Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation. E-mail: vum1@yandex.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3542-9662

Received 26.03.2021
Reviewed 17.05.2021
Accepted for press 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215
УДК 519.6

Максимальные сцепленные системы на произведениях широко понимаемых измеримых пространств

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ
ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук
620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»
620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems on products of widely understood measurable spaces

Aleksandr G. CHENTSOV
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются максимальные сцепленные системы (МСС) множеств на широко понимаемых измеримых пространствах (ИП), получаемых каждое посредством оснащения непустого множества π-системой его подмножеств с «нулем» и «единицей» (π-система — непустое семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Исследуются конструкции произведения упомянутых ИП, связываемые с двумя вариантами измеримых (в широком смысле) прямоугольников. Семейства МСС на каждом из множеств, участвующих в построении произведения оснащаются топологиями стоуновского типа. Исследуется связь получающихся топологических пространств, реализуемых, соответственно, в ящичном и тихоновском вариантах, и соответствующего (каждому варианту) топологического пространства стоуновского типа на множестве МСС с измеримой структурой в виде π-системы измеримых прямоугольников. Получены свойства уплотняемости (для «ящичного» варианта) и гомеоморфности (в случае использования тихоновского произведения) для получающихся топологических пространств.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, тихоновское произведение, ящичная топология

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371_а).

Для цитирования: *Ченцов А.Г.* Максимальные сцепленные системы на произведениях широко понимаемых измеримых пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 182–215. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215.

Abstract. Maximal linked systems (MLS) of sets on widely understood measurable spaces (MS) are considered; in addition, every such MS is realized by equipment of a nonempty set with a π-system of its subsets with «zero» and «unit» (π-system is a nonempty family of sets closed with respect to finite intersections). Constructions of the MS product connected with two variants of measurable (in wide sense) rectangles are investigated. Families of MLS are equipped with topologies of the Stone type. The connection of product of above-mentioned topologies considered for box and Tychonoff variants and the corresponding (to every variant) topology of the Stone type on the MLS set for the MS product is studied. The properties of condensation and homeomorphism for resulting variants of topological equipment are obtained.

Keywords: maximal linked system, Tychonoff product, box-topology

Mathematics Subject Classification: 54A10, 54B05

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00371_a).

For citation: Chentsov A.G. Maksimal'nyye stseplennyye sistemy na proizvedeniyakh shiroko ponimayemykh izmerimykh prostranstv [Maximal linked systems on products of widely understood measurable spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 182–215. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

При исследовании ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) весьма полезным оказывается изучение более общих структур, реализуемых в классе максимальных сцепленных систем (МСС). При этом само ИП получается посредством оснащения непустого множества π-системой [1, с. 14] его подмножеств (п/м), определяемой в виде непустого семейства множеств, замкнутого относительно конечных пересечений; мы рассматриваем далее только π-системы с «нулем» и «единицей» (пустое и объемлющее множества). Определяя сцепленность традиционно (см. [2–4], [5, гл. VII, § 4], а также [6, 5.11]), мы рассматриваем сцепленные подсемейства π-системы и среди них выделяем максимальные, которые и называем МСС. Среди МСС содержатся у/ф π-системы, но возможны и МСС, которые у/ф не являются (собственные МСС). Множество у/ф и множество МСС (на данной π-системе) допускают оснащение парой сравнимых топологий, отвечающих содержательно схемам Волмэна и Стоуна. Реализуются два битопологических пространства, причем пространство у/ф может рассматриваться как подпространство пространства МСС (см. [7–12] и др.). Пространство МСС с топологией волмэновского типа суперкомпактно (см. [8, 9]). В настоящем исследовании, однако, используется только топология стоуновского типа и мы ограничимся сейчас обсуждением этой топологии.

Для теории и приложений важна операция, связанная с построением произведения ИП (см., например, [13, гл. III]), на первом и ключевом этапе которой реализуются измеримые прямоугольники. Имея в виду этот этап, само понятие измеримости (прямоугольников) может быть обобщено: мы рассматриваем произведение π-систем; при таком подходе мы можем с единых позиций рассматривать измеримые в традиционном смысле (см. [13, гл. III]) и открытые (в случае произведения ТП) прямоугольники. В общем случае в виде произведения π-систем пространств-сомножителей реализуется π-система множества-произведения, на которой определяются МСС, которые исчерпываются [14] произведениями МСС на пространствах-сомножителях; простейший вариант данного положения см. в [15, § 7]. Более общие варианты соответствуют [16, (6.4),(6.5)], где используется аппарат обобщенных декартовых произведений [17, гл. IV, § 6]. Аналоги данных построений применялись в [18], где исследовались бесконечные, вообще говоря, произведения у/ф, что делает естественным аналогичное исследование в случае МСС. Возникает вопрос о соотношении естественных топологических структур: произведения «стоуновских» топологий на пространствах-сомножителях и «стоуновской» топологии на пространстве-произведении. Рассмотрим, в частности, вариант, когда в первом случае реализуется ящичное пространство, а, точнее, обобщенное декартово произведение с ящичной топологией [19, с. 148]. Множество-произведение оснащаем топологией стоуновского типа. Показано, что естественное отображение, сопоставляющее параметризованному семейству МСС на пространствах-сомножителях соответствующую МСС на π-системе обобщенного декартова произведения, является уплотнением [19, с. 382], т. е. непрерывной биекцией.

Второй вариант, рассматриваемый в работе, отвечает случаю, когда используется тихоновское произведение «стоуновских» пространств. В этом случае конструкция, подобная идейно вышеупомянутой схеме, приводит к гомеоморфизму (имеется в виду ситуация, когда π-система на обобщенном декартовом произведении конструируется по аналогии с канонической базой тихоновского произведения).

1. Общие обозначения и определения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначаем (см. [17, с. 16]) их неупорядоченную пару, т. е. множество, содержащее в виде своих элементов x, y и не содержащее никаких других элементов. Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z;z\}$ имеем синглетон (одноэлементное множество), содержащий z: $z \in \{z\}$. Множества являются объектами. С учетом этого для любых двух объектов g и h, следуя [17, с. 67], полагаем, что $(g,h) \triangleq \{\{g\};\{g;h\}\}$, получая упорядоченную пару с первым элементом g и вторым элементом h. Для любых трех объектов x, y и z полагаем, как обычно, $\{x;y;z\} \triangleq \{x;y\} \cup \{z\}$; в соответствии с этим для любых трех множеств A, B и C полагается, что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех п/м H и полагаем, что $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$; наконец, через $\mathrm{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H. Если $\mathbb{M}$ — множество, а $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\, \mathbb{M} \setminus M :\ M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след $\mathcal{A}|_B \triangleq \{\, A \cap B :\ A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ данного семейства на B. Непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$, определяемые в [8, раздел 2] (семейства всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$).

Если A и B — множества, то (см. [17, гл. II, § 6]) через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B; при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ полагаем $g^1(C) \triangleq \{\, g(x) :\ x \in C\}$ (образ множества C при действии g); ясно, что $g^1(C) \in \mathcal{P}(B)$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; если $n \in \mathbb{N}$, то $\overline{1,n} \triangleq \{\, k \in \mathbb{N} | k \leqslant n\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ не являются множествами, далее для любых множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,k}}$ используем H^k для обозначения множества всех отображений из $\overline{1,k}$ в H; итак, H^k — множество всех кортежей в H, имеющих «длину» k. Если $\mathcal{H}$ — семейство и $k \in \mathbb{N}$, то в виде $(H_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathcal{H}^k$ реализуется кортеж множеств. Если T — произвольное множество, то полагаем, что

$$(\mathrm{Fam})[T] \triangleq \{\, \mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T)) | T \in \mathcal{T}\}; \tag{1.1}$$

элементы $(\mathrm{Fam})[T]$ (1.1) — суть семейства п/м T с «единицей» (множество T) и только они. Условимся о некоторых специальных обозначениях, связанных с обобщенными декартовыми произведениями, фиксируя для краткости непустые множества X и Y, а также (множественнозначное) отображение $(Y_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$. Тогда

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{Y}_x \triangleq \{\, \prod_{x\in X} \mathbb{Y}_x : \ (\mathbb{Y}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{Y}_x\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\prod_{x\in X} Y_x)) \ \ \forall (\mathcal{Y}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y_x)). \tag{1.2}$$

Элементы семейств (1.2) именуем в настоящем исследовании прямоугольниками. Полагаем также с учетом (1.1), что

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \mathcal{F}_x \triangleq \{\, H \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} Y_x) | \exists (\mathbb{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{F}_x : \ (H = \prod_{x\in X} \mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \\ \mathbb{F}_s = Y_s \ \forall s \in X \setminus K)\} \ \ \forall (\mathcal{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathrm{Fam})[Y_x].\end{gathered} \tag{1.3}$$

В дальнейшем множество X фиксируется, а Y и $(Y_x)_{x\in X}$ будут варьироваться.

Если $\mathcal{H}$ — семейство, а S — множество, то полагаем, что $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{\, H \in \mathcal{H} | S \subset H\}$.

2. Сцепленные системы на широко понимаемом измеримом пространстве

Введем в рассмотрение π-системы [1, с. 14], фиксируя в настоящем разделе непустое множество E. В виде

$$\pi[E] \triangleq \{\, \mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) | (\varnothing \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (\, A \cap B \in \mathcal{L} \ \ \forall A \in \mathcal{L} \ \forall B \in \mathcal{L})\} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех π-систем п/м E с «нулем» и «единицей»; $\mathcal{P}(E) \in \pi[E]$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то пару $(E, \mathcal{L})$ рассматриваем как (широко понимаемое) измеримое пространство (ИП). Заметим, что $\pi[E] \subset (\mathrm{Fam})[E]$. Алгебры и полуалгебры п/м E, топологии на E и семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП) с «единицей» E являются π-системами из семейства (2.1). Сейчас укажем только, что

$$(\mathrm{top})[E] \triangleq \{\, \tau \in \pi[E] | \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in \pi[E] | \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau)\} \in \mathcal{P}'(\pi[E])$$

есть семейство всех топологий на E. Отметим, что обозначения $(\mathrm{BAS})[E]$ и $(\mathrm{p-BAS})[E]$ соответствуют [9, раздел 2] (семейства всех открытых баз и предбаз топологий на E соответственно); при этом $\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[E] \ \forall \beta \in (\mathrm{BAS})[E]$. Кроме того, $\{\cap\}_\sharp(\kappa) \in (\mathrm{BAS})[E] \ \forall \kappa \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[E]$. В итоге

$$\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\kappa)) \in (\mathrm{top})[E] \ \ \forall \kappa \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[E].$$

Если $\tau \in (\mathrm{top})[E]$, то $(\tau-\mathrm{BAS})_0[E] \triangleq \{\, \beta \in (\mathrm{BAS})[E] | \tau = \{\cup\}(\beta)\}$ и, кроме того,

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[E;\tau] \triangleq \{\, \kappa \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[E] | \{\cap\}_\sharp(\kappa) \in (\tau-\mathrm{BAS})_0[E]\}.$$

Сцепленность. Если $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то имеем в виде

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) | \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \} \tag{2.2}$$

семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, называемых также сцепленными системами (на $\mathcal{L}$), а в виде

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E] | \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E] \ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S}) \} \tag{2.3}$$

семейство всех МСС на $\mathcal{L}$. Общие свойства семейств (2.2), (2.3) см. в [20]. Для всех наших последующих целей достаточен случай $\mathcal{L} \in \pi[E]$, которым мы и ограничиваемся в дальнейшем. Итак, полагаем до конца настоящего и в следующем разделе, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E] | \ \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}) \}. \tag{2.4}$$

Далее отметим следующее очевидное свойство: $[\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E} \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. Наконец, $E \in \mathcal{E} \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]$.

3. Топология стоуновского типа на множестве максимальных сцепленных систем

В настоящем разделе фиксируем непустое множество E и π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда в виде (2.4) имеем непустое множество (см. [8–11]). Следуя [8, раздел 4], введем при $L \in \mathcal{L}$ множество

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|L] &\triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] | L \in \mathcal{E} \} \\ &= \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] | L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \} \end{aligned} \tag{3.1}$$

(см. [8, предложение 6.2]). С учетом [8, (4.9)] получаем следующее непустое семейство:

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|L] : \ L \in \mathcal{L} \} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]] \tag{3.2}$$

(заметим, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle^0 [E|E] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$), а, точнее, открытую предбазу. Тогда $\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]$ и при этом

$$\mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]]. \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \subset \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle$. Напомним, что

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E], \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle) \tag{3.4}$$

есть нульмерное T_2-пространство (см. [8, раздел 6]). При этом, конечно, имеем (см.(3.3)) свойство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0 [\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle_0 [E]; \mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle], \tag{3.5}$$

т. е. ТП (3.4) порождается предбазой (3.2). В дальнейшем ИП $(E, \mathcal{L})$ будет конкретизироваться, исходя из потребностей соответствующих рассуждений.

4. Ящичное произведение π-систем

Всюду в дальнейшем фиксируем непустые множества X и $\mathbf{E}$, а также отображение $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$; итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем непустое п/м $\mathbf{E}$. Получаем (с использованием аксиомы выбора), что

$$\mathbb{E} \triangleq \prod_{x\in X} E_x = \{\, f \in \mathbf{E}^X | f(x) \in E_x \ \ \forall x \in X\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E}^X).$$

Множество $\mathbb{E}$ рассматриваем в качестве «единицы» пространства-произведения. Наконец, фиксируем далее

$$(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x];$$

итак, $\mathcal{L}_x \in \pi[E_x]\ \forall x \in X$. С учетом (1.2) получаем (см. [16, (6.5)]), что

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x = \{\, \prod_{x\in X} L_x :\ (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in \pi[\mathbb{E}]; \tag{4.1}$$

назовем π-систему (4.1) ящичным произведением π-систем $\mathcal{L}_x$, $x \in X$. Напомним, что (см. (1.2); [14, предложение 3.6]) при $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x = \{\, \prod_{x\in X} \Sigma_x :\ (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{E}_x\} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.2}$$

Более того, согласно [14, теорема 3.1] имеем следующее равенство

$$\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\, \bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x :\ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}. \tag{4.3}$$

Заметим, что $\prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ есть непустое множество и отображение

$$\mathbf{f} \triangleq (\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x)_{(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]^{\prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]} \tag{4.4}$$

является сюръекцией. Для дальнейшего существенны положения [14, раздел 3], которые сейчас напомним совсем кратко. Так (см. [14, (3.11), (3.12)]) на непустом семействе $(\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$ определен оператор

$$\mathbf{P} :\ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x) \tag{4.5}$$

посредством следующего правила: если $H \in (\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$, то множественнозначное отображение $\mathbf{P}(H) \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ таково, что

$$H = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}(H)(\chi). \tag{4.6}$$

Если $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$, то $\prod\limits_{x\in X} \Sigma_x \in (\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$ и при $\kappa \in X$

$$\Sigma_\kappa = \mathbf{P}(\prod_{x\in X} \Sigma_x)(\kappa). \tag{4.7}$$

В связи с (4.6), (4.7) напомним [14, (3.16), (3.17)]. Введем в рассмотрение операторы [14, (3.17), (3.18)]. Итак, при $\chi \in X$ полагаем, что

$$\mathbf{P}_\chi : \ (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\} \longrightarrow \mathcal{P}'(E_\chi) \tag{4.8}$$

определяется следующим правилом: если $H \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\}$, то

$$\mathbf{P}_\chi(H) \triangleq \mathbf{P}(H)(\chi).$$

Легко видеть, что при $\chi \in X$ и $(\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{P}'(E_x)$ непременно

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} \Sigma_x) = \Sigma_\chi.$$

Тогда, в частности, имеем при $\chi \in X$ и $(L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} L_x) = L_\chi. \tag{4.9}$$

Напомним свойства [14, (3.20), (3.21)]. Сейчас отметим только одно очевидное следствие:

$$\Lambda = \prod_{\chi\in X} \mathbf{P}_\chi(\Lambda) \ \ \forall \Lambda \in (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}. \tag{4.10}$$

В этой связи укажем одно очевидное общее свойство: если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то

$$\langle \mathcal{M} - \text{link}\rangle[M] \subset \mathcal{P}(\mathcal{M} \setminus \{\varnothing\}).$$

С учетом (4.8) получаем, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x\in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\varnothing\})$ и $\chi \in X$

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \triangleq (\mathbf{P}_\chi)^1(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_\chi)). \tag{4.11}$$

Свойства (4.10), (4.11) существенны в дальнейшем. Легко видеть, что (см. (4.11); [14, (3.16)])

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}) \ \ \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}).$$

Для наших целей существенно то, что (см. [14, предложение 3.5])

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link}\rangle_0[E_\chi] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \ \forall \chi \in X. \tag{4.12}$$

В свою очередь, из (4.12) вытекает (см. (4.2)), что

$$(\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}))_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{4.13}$$

Заметим, что в силу (4.2) и (4.13) корректно следующее построение: если $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link}\rangle_0[E_x]$, то

$$(\mathbf{P}^1_\chi(\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x))_{\chi\in X} \in \prod_{\chi\in X} \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link}\rangle_0[E_\chi].$$

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то справедливо равенство*

$$(\mathcal{E}_x)_{x\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigodot_{x\in X} \mathcal{E}_x))_{\chi\in X}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем параметризованное семейство

$$(\mathcal{T}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]. \tag{4.14}$$

Тогда, как легко видеть, определено множество-произведение

$$\prod_{x\in X} \mathcal{T}_x = \{\ (L_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X | L_\chi \in \mathcal{T}_\chi \ \ \forall \chi \in X\}$$

и при этом справедливо следующее равенство:

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x = \{\ \prod_{x\in X} L_x :\ (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x\}.$$

Заметим, что $\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{T}_x \in \langle \bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ и, в частности,

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x \subset (\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Учтем тот легкопроверяемый факт, что $\forall (A_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})\ \forall (B_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$

$$(\prod_{x\in X} A_x = \prod_{x\in X} B_x) \Longrightarrow ((A_x)_{x\in X} = (B_x)_{x\in X}). \tag{4.15}$$

Здесь же отметим, что в силу (4.9) при $(L_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$

$$(\mathbf{P}_\chi(\prod_{x\in X} L_x))_{\chi\in X} = (L_x)_{x\in X}. \tag{4.16}$$

Кроме того, $\mathcal{T}_\kappa \in \langle \mathcal{L}_\kappa - \mathrm{link}\rangle_0[E_\kappa]$ и, следовательно, $\mathcal{T}_\kappa \subset \mathcal{L}_\kappa \setminus \{\varnothing\}$ при $\kappa \in X$. Поэтому $\prod\limits_{x\in X} \mathcal{T}_x \subset \prod\limits_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$ и (4.16) справедливо при $(L_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{T}_x$. Кроме того, определено отображение

$$(\mathbf{P}^1_\chi(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x))_{\chi\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x].$$

Отметим в связи с (4.15) следующую очевидную эквиваленцию

$$((\mathcal{T}_x)_{x\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x))_{\chi\in X}) \Longleftrightarrow (\mathcal{T}_\kappa = \mathbf{P}^1_\kappa(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x)\ \ \forall \kappa \in X). \tag{4.17}$$

Выберем произвольно $u \in X$. Тогда $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$, где согласно (4.9)

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x\in X} \Sigma_x) = \Sigma_u \ \ \forall (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}). \tag{4.18}$$

Выберем произвольно $\mathbb{T} \in \mathcal{T}_u$, после чего введем в рассмотрение отображение $(T_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$ по правилу

$$(T_u \triangleq \mathbb{T})\&(T_x \triangleq E_x \quad \forall x \in X \setminus \{u\})$$

(учитываем очевидное свойство $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{L}_u \setminus \{\varnothing\}$). Ясно, что $(T_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x$ (см. раздел 2), а потому

$$\prod_{x\in X} T_x \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x. \tag{4.19}$$

Ясно также, что $(T_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$, а тогда в силу (4.18)

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x\in X} T_x) = T_u = \mathbb{T}, \tag{4.20}$$

где согласно (4.19) имеет место свойство

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x\in X} T_x) \in \mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x)$$

по определению образа множества. Поэтому с учетом (4.20) получаем включение

$$\mathbb{T} \in \mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x).$$

Таким образом, установлено (поскольку выбор $\mathbb{T}$ был произвольным) следующее вложение:

$$\mathcal{T}_u \subset \mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x). \tag{4.21}$$

Пусть $\Lambda \in \mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x)$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{P}'(E_u)$ и

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega),$$

где $\Omega \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x$. При этом для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x$ реализуется равенство

$$\Omega = \prod_{x\in X} \Omega_x, \tag{4.22}$$

где $\Omega_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}$ при $x \in X$. Тогда $(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\})$. Но в этом случае (см. (4.18), (4.22))

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega) = \mathbf{P}_u(\prod_{x\in X} \Omega_x) = \Omega_u \in \mathcal{T}_u \tag{4.23}$$

по выбору $(\Omega_x)_{x\in X}$. Итак, установлено (см. (4.23)) свойство

$$\mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x) \subset \mathcal{T}_u,$$

чем и завершается (см. (4.21)) проверка равенства

$$\mathcal{T}_u = \mathbf{P}_u^1(\bigodot_{x\in X} \mathcal{T}_x).$$

Поскольку выбор $u \in X$ был произвольным, установлено (см. (4.17)) требуемое равенство

$$(\mathcal{T}_x)_{x\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigodot_{x\in X}\mathcal{T}_x))_{\chi\in X}.$$

Коль скоро и выбор (4.14) был произвольным, предложение полностью доказано. □

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Если* $(L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{L}_x$, *то справедливо равенство*

$$\{(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] | \prod_{x\in X} L_x \in \bigodot_{x\in X}\mathcal{E}_x\} = \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x].$$

Доказательство следует из определений.

Возвращаясь к (4.4), отметим теперь следующее

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если* $(L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{L}_x$, *то*

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\prod_{x\in X} L_x]) = \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x]. \tag{4.24}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{L}_x$. Напомним, что (см. (4.1)) $\prod_{x\in X} L_x \in \bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x$ и при этом (см. (3.1))

$$\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\prod_{x\in X} L_x] = \{\,\mathcal{E} \in \langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] | \prod_{x\in X} L_x \in \mathcal{E}\}. \tag{4.25}$$

Далее, в силу предложения 4.2 имеем следующую цепочку равенств

$$\Omega \triangleq \{\,(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] | \prod_{x\in X} L_x \in \bigodot_{x\in X}\mathcal{E}_x\} = \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x]. \tag{4.26}$$

Пусть $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \mathbf{f}^{-1}(\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\prod_{x\in X} L_x])$. Тогда $\mathcal{U}_\chi \in \langle\mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle_0[E_\chi]$ при $\chi \in X$ и определена (см. (4.2)) МСС

$$\bigodot_{x\in X}\mathcal{U}_x = \{\,\prod_{x\in X}\Sigma_x :\ (\Sigma_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{U}_x\} \in \langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}].$$

При этом $\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x\in X}) = \bigodot_{x\in X}\mathcal{U}_x \in \langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\prod_{x\in X} L_x]$. Тогда (см. (4.25))

$$\prod_{x\in X} L_x \in \bigodot_{x\in X}\mathcal{U}_x,$$

а потому согласно (4.26) $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \Omega$ и, следовательно, имеем включение

$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x].$$

Итак, установлено следующее свойство:

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\prod_{x\in X} L_x]) \subset \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x]. \tag{4.27}$$

Выберем произвольно отображение $(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x]$. Тогда

$$(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]. \tag{4.28}$$

При этом согласно (3.1) $L_x \in \mathcal{V}_x \quad \forall x \in X$. Отметим, что определено произведение семейств

$$\prod_{x\in X} \mathcal{V}_x = \{(\Sigma_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X | \Sigma_\chi \in \mathcal{V}_\chi \quad \forall \chi \in X\}.$$

Поэтому $(L_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{V}_x$, откуда следует (см. (4.2), (4.28)), что

$$\prod_{x\in X} L_x \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{V}_x, \tag{4.29}$$

где $\bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{V}_x \in \langle \bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$. Теперь из (3.1) и (4.29) получаем, что

$$\mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x\in X}) = \bigodot_{x\in X} \mathcal{V}_x \in \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}| \prod_{x\in X} L_x].$$

Последнее означает, что $(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}| \prod\limits_{x\in X} L_x])$, чем и завершается проверка вложения

$$\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x] \subset \mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}| \prod_{x\in X} L_x]).$$

С учетом (4.27) получаем требуемое равенство (4.24). □

Отметим, что (см. (3.2)) определено следующее множество-произведение

$$\prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] = \{ \, (\mathbb{H}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X | \, \mathbb{H}_\chi \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_\chi; \mathcal{L}_\chi] \quad \forall \chi \in X\}. \tag{4.30}$$

С учетом (4.30) получаем при $(\mathbb{H}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$, что определено также

$$\prod_{x\in X} \mathbb{H}_x = \{ \, (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X | \, \mathcal{E}_\chi \in \mathbb{H}_\chi \quad \forall \chi \in X\}.$$

Тогда в соответствии с (1.2) имеем следующее семейство

$$\bigodot_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] = \{ \, \prod_{x\in X} \mathbb{H}_x : \; (\mathbb{H}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])), \tag{4.31}$$

т. е. (4.31) есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])$. С другой стороны, в соответствии с (3.2) определена предбаза

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x] = \{ \, \langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|L] : \; L \in \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in (\mathrm{p-BAS})[\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]]. \tag{4.32}$$

Из предложения 4.3 и (4.32) вытекает, что справедливо следующее свойство

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \bigodot_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \quad \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x]. \tag{4.33}$$

5. Связь ящичной топологии и топологии стоуновского типа на обобщенном декартовом произведении

Мы располагаем системой ТП $(\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x], \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle),\ x \in X,$ и ТП

$$(\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E}| \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle).$$

Упомянутой системе можно сопоставить ящичную топологию [19] на обобщенном декартовом произведении. Совсем кратко охарактеризуем ее структуру. Итак,

$$(\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}(\mathrm{top})[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]]. \tag{5.1}$$

С учетом этого определено семейство-произведение

$$\prod_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle = \{\ (\mathbb{G}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X|\mathbb{G}_\chi \in \mathbb{T}_*\langle E_\chi|\mathcal{L}_\chi\rangle\ \ \forall \chi \in X\}.$$

В этой связи отметим также, что при $(\mathbb{G}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$ определено

$$\prod_{x\in X}\mathbb{G}_x = \{\ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X|\mathcal{E}_\chi \in \mathbb{G}_\chi\ \ \forall \chi \in X\}.$$

Наконец, следуя (1.2), получаем открытую базу

$$\bigodot_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle = \{\ \prod_{x\in X}\mathbb{G}_x :\ (\mathbb{G}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle\} \in (\mathrm{BAS})[\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]] \tag{5.2}$$

(см. (5.1) и определение канонической базы ящичной топологии в [19, с.148]). Тогда (см. (5.1), (5.2))

$$\mathbf{t}_\odot \triangleq \{\cup\}(\bigodot_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle) \in (\mathrm{top})[\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]] \tag{5.3}$$

есть ящичная топология, отвечающая семейству «стоуновских» топологий пространств-сомножителей. Мы получили ящичное пространство

$$(\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x], \mathbf{t}_\odot) \tag{5.4}$$

а также «стоуновское» ТП, отвечающее ящичному произведению π-систем, т. е.

$$(\langle \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E}| \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle). \tag{5.5}$$

Напомним в этой связи, что (см. [8, (6.1)]) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$ при $x \in X$. Поэтому (см. (5.3)), как легко видеть,

$$\bigodot_{x\in X}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \subset \bigodot_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \subset \mathbf{t}_\odot. \tag{5.6}$$

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Отображение* $\mathbf{f}$ (4.4) *непрерывно в смысле топологий* $\mathbf{t}_{\odot}$ *и* $\mathbb{T}_*\langle\mathbb{E}|\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x\rangle$.

Д о к а з т е л ь с т в о. Согласно (3.5) и (4.1) имеем свойство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E};\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x]\in(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}];\mathbb{T}_*\langle\mathbb{E}|\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x\rangle]. \tag{5.7}$$

Далее, из (4.33) и (5.6) вытекает следующее свойство

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H})\in\mathbf{t}_{\odot}\ \ \forall\mathbb{H}\in\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E};\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x]. \tag{5.8}$$

Из (5.7) и (5.8) вытекает (см. [21, предложение 1.4.1]) требуемое свойство непрерывности. □

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Отображение* $\mathbf{f}$ (4.4) *является биекцией множества* $\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ *на* $\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним сначала, что $\mathbf{f}$ – сюръекция $\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ на $\langle\bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$; см. (4.3), (4.4). Проверим свойство инъективности, фиксируя $(\mathcal{U}_x)_{x\in X}\in\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ и $(\mathcal{V}_x)_{x\in X}\in\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, со свойством

$$\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x\in X})=\mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x\in X}). \tag{5.9}$$

Иными словами (см. (4.4), (5.9)), справедливо следующее равенство:

$$\bigodot_{x\in X}\mathcal{U}_x=\bigodot_{x\in X}\mathcal{V}_x.$$

Тогда в силу предложения 4.1 реализуется цепочка равенств

$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X}=(\mathbf{P}^1_{\chi}(\bigodot_{x\in X}\mathcal{U}_x))_{\chi\in X}=(\mathbf{P}^1_{\chi}(\bigodot_{x\in X}\mathcal{V}_x))_{\chi\in X}=(\mathcal{V}_x)_{x\in X}. \tag{5.10}$$

Итак (см. (5.9), (5.10)), истинна следующая импликация

$$(\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x\in X})=\mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x\in X}))\Longrightarrow((\mathcal{U}_x)_{x\in X}=(\mathcal{V}_x)_{x\in X}).$$

Требуемая инъективность, а, стало быть, и биективность $\mathbf{f}$ (4.4) установлены. □

Напомним, что уплотнением ТП (T_1,τ_1) на ТП (T_2,τ_2) называется всякая непрерывная биекция первого ТП на второе (см. [19, с. 382], [21, с.329]).

Теорема 5.1. *Отображение* $\mathbf{f}$ (4.4) *есть уплотнение ТП* (5.4) *на ТП* (5.5).

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 5.1 и 5.2.

Итак, ящичное произведение ТП стоуновского типа уплотняется на ТП стоуновского типа, где измеримая структура задается ящичным произведением π-систем.

6. Стандартный вариант произведения пространств стоуновского типа

В последующих построениях используем (1.3), учитывая при этом, что для всякого множества Z имеет место $\pi[Z] \subset (\mathrm{Fam})[Z]$. Тогда, в частности, $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]$ и, как следствие, имеем (см. [16, (6.4)])

$$\begin{aligned}\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x = \{\, \mathbb{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \,|\, \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathcal{L}_x :\\ (\mathbb{L} = \prod_{x\in X} L_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ L_s = E_s\ \forall s \in X \setminus K)\} \in \pi[\mathbb{E}].\end{aligned} \tag{6.1}$$

Отметим, кстати, что справедливо следующее очевидное свойство:

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x\in X}\mathcal{L}_x.$$

Второе важное для нас обстоятельство состоит в том, что (см. [14, (4.4)])

$$\prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \prod_{x\in X}(\mathrm{Fam})[E_x]. \tag{6.2}$$

С учетом (1.3) и (6.2) имеем свойство [14, (4.5)]; более того,

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]\ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]. \tag{6.3}$$

Наконец, в силу [14, теорема 4.1] справедливо следующее равенство:

$$\langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] = \{\, \bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x :\ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\}; \tag{6.4}$$

в дальнейшем (6.3) и (6.4) используем без дополнительных пояснений. Напомним (4.5), (4.8), учитывая, что согласно (4.10)

$$\Lambda = \prod_{\chi\in X}\mathbf{P}_\chi(\Lambda)\ \ \forall \Lambda \in (\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}.$$

Следуем соглашению (4.11). В этой связи напомним, что согласно [14, предложение 4.2]

$$\mathbf{P}^1_\chi(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle_0[E_\chi]\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]\ \ \forall \chi \in X. \tag{6.5}$$

Таким образом (см. (6.5), [14, (4.33)]), реализуется следующее свойство

$$(\mathbf{P}^1_x(\mathcal{E}))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{6.6}$$

Будем рассматривать (6.3) и (6.6) в естественной совокупности, получая

П р е д л о ж е н и е 6.1. *Если* $(\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$, *то*

$$(\mathcal{E}_x)_{x\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}_x))_{\chi\in X}. \tag{6.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x]$, получая в силу (6.3), что

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [\mathbb{E}].$$

Поэтому (см. (6.6)) определено следующее отображение

$$(\mathbf{P}^1_\chi(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x))_{\chi \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x].$$

При этом $\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{E}_x \subset (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$; см. [14, (3.24)]. Кроме того, напомним свойство [14, (4.21)]. Получаем, что при $\tilde{\Lambda} \in \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{E}_x$

$$\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda}). \tag{6.8}$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая свойство $\mathcal{L}_u \in \pi[M_u]$, где $M_u \neq \varnothing$. Имеем при этом включение $\mathcal{E}_u \in \langle \mathcal{L}_u - \mathrm{link} \rangle_0 [E_u]$. Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{E}_u$, а $(T_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ определяется правилом

$$(T_u \triangleq \mathbb{T}) \& (T_x \triangleq E_x \quad \forall x \in X \setminus \{u\}). \tag{6.9}$$

При этом $T_x \in \mathcal{E}_x \quad \forall x \in X$. С учетом (1.3) и (6.9) получаем, что

$$\prod_{x \in X} T_x \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x. \tag{6.10}$$

При этом, конечно, $T_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}$ при $x \in X$. С учетом (6.8) и (6.10) имеем равенство

$$\prod_{x \in X} T_x = \prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x). \tag{6.11}$$

Далее, $\prod\limits_{x \in X} T_x \in (\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ согласно (6.10), а потому (см. (6.8), (6.10))

$$\prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x) = \prod_{x \in X} T_x \neq \varnothing,$$

что означает справедливость следующего свойства: $\mathbf{P}_\chi(\prod\limits_{x \in X} T_x) \neq \varnothing \quad \forall \chi \in X$. Из (6.11) получаем в итоге (см. [14, (3.9)]), что $T_\chi = \mathbf{P}_\chi(\prod\limits_{x \in X} T_x)$ при $\chi \in X$ и, в частности (см. (6.9)), $\mathbb{T} = \mathbf{P}_u(\prod\limits_{x \in X} T_x)$, где согласно (6.10)

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} T_x) \in \mathbf{P}^1_u(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

Стало быть, $\mathbb{T} \in \mathbf{P}^1_u(\bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{E}_x)$. Поскольку выбор $\mathbb{T}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{E}_u \subset \mathbf{P}^1_u(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x). \tag{6.12}$$

Выберем произвольно $\Lambda \in \mathbf{P}^1_u(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x)$, после чего подберем $\Omega \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x$, для которого

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega). \tag{6.13}$$

По выбору Ω имеем согласно (1.3), что $\Omega \subset \mathbb{E}$ и для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{E}_x$

$$(\Omega = \prod_{x\in X} \Omega_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Omega_s = E_s\ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{6.14}$$

Тогда $\Omega_x \in \mathcal{E}_x\ \ \forall x \in X$. В частности, имеем, что $\Omega_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}$ при $x \in X$. Согласно (6.8) и (6.14)

$$\prod_{x\in X} \Omega_x = \Omega = \prod_{x\in X} \mathbf{P}_x(\Omega), \tag{6.15}$$

где $\Omega \in (\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\varnothing\}$ (см. [14, (3.24)]). Тогда из (6.15) следует, во первых, что

$$(\Omega_x \neq \varnothing)\&(\mathbf{P}_x(\Omega) \neq \varnothing)$$

при $x \in X$, и во-вторых, согласно [14, (3.9)]

$$\Omega_\chi = \mathbf{P}_\chi(\Omega)\ \ \forall \chi \in X.$$

В частности (см. (6.13)), $\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega) = \Omega_u$, где $\Omega_u \in \mathcal{E}_u$. Поэтому $\Lambda \in \mathcal{E}_u$, чем и завершается проверка свойства $\mathbf{P}^1_u(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x) \subset \mathcal{E}_u$. С учетом (6.12) имеем равенство

$$\mathcal{E}_u = \mathbf{P}^1_u(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x).$$

Поскольку выбор $u \in X$ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{E}_\chi = \mathbf{P}^1_\chi(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x)\ \ \forall \chi \in X.$$

Как следствие получаем требуемое равенство (6.7). □

Заметим, что с учетом (6.3) определяется отображение

$$\mathbf{g}:\ \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \longrightarrow \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] \tag{6.16}$$

посредством следующего правила: $\forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$

$$\mathbf{g}((\mathcal{E}_x)_{x\in X}) \triangleq \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x. \tag{6.17}$$

Согласно (3.2) и (6.1) определена открытая предбаза

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x] = \{\ \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|L]:\ L \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\} \in (\mathrm{p-BAS})[\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]]. \tag{6.18}$$

С другой стороны, при $x \in X$ имеем что $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E_x; \mathcal{L}_x] \in (\mathrm{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]]$ (в самом деле, $\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|E_x] \in \hat{\mathfrak{C}}^*_0[E_x; \mathcal{L}_x]$). При этом согласно (1.3)

$$\begin{gathered}\bigotimes_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}^*_0[E_x; \mathcal{L}_x] = \{\ \mathbb{C} \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]) | \exists (\mathbb{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}^*_0[E_x; \mathcal{L}_x]: \\ (\mathbb{C} = \prod_{x\in X} \mathbb{F}_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \mathbb{F}_s = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle_0[E_s]\ \ \forall s \in X \setminus K)\}.\end{gathered} \tag{6.19}$$

П р е д л о ж е н и е 6.2. *Если* $\mathbf{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x]$, *то*

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) \in \bigotimes_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]. \tag{6.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathbf{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x]$. Тогда в силу (6.18) для некоторого $\Lambda \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x$ справедливо равенство

$$\mathbf{H} = \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda]. \tag{6.21}$$

Поэтому согласно (6.1) $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ и для некоторого отображения

$$(\Lambda_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x$$

имеют место следующие свойства

$$(\Lambda = \prod_{x\in X} \Lambda_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Lambda_s = E_s\ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{6.22}$$

При этом, конечно, $\Lambda_x \in \mathcal{L}_x$ при $x \in X$. Пусть (см. (6.22)) $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X)$ таково, что

$$\Lambda_s = E_s\ \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{6.23}$$

Рассмотрим теперь множества $\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x]$ при $x \in X$. Тогда при $x \in X \setminus \mathbb{K}$ в силу (6.23)

$$\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]. \tag{6.24}$$

Далее, заметим, что $\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$ при $x \in X$ согласно (3.2). Тогда получаем, что

$$(\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x])_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x].$$

Итак (см. (6.24), (6.16)), получаем, что

$$\begin{gathered}(\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x])_{x\in X} \in \\ \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]:\ \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle^0[E_s|\Lambda_s] = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle_0[E_s]\ \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}.\end{gathered} \tag{6.25}$$

Отметим, что при $x \in X$ реализуется следующая цепочка вложений

$$\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x] \subset \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})).$$

Поэтому, как легко видеть, имеет место

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &\triangleq \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x] \\ &= \{(\eta_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \,|\, \eta_s \in \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle^0[E_s|\Lambda_s]\ \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]).\end{aligned} \tag{6.26}$$

Тогда из (6.19), (6.25) и (6.26) вытекает следующее включение

$$\mathbb{L} \in \bigotimes_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]. \tag{6.27}$$

Сравним множества $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$ и $\mathbb{L}$. Пусть $\mathfrak{H} \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$. Тогда, в частности, выполнено $\mathfrak{H} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. Это означает, что $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_x)_{x\in X}$, где $\mathfrak{H}_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle_0[E_\chi]$ при $\chi \in X$,

$$\mathbf{g}((\mathfrak{H}_x)_{x\in X}) = \mathbf{g}(\mathfrak{H}) \in \mathbf{H}. \tag{6.28}$$

Но $\mathbf{g}((\mathfrak{H}_x)_{x\in X}) = \bigotimes\limits_{x\in X} \mathfrak{H}_x$. С учетом (6.21) и (6.28) получаем теперь, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathfrak{H}_x \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda]. \tag{6.29}$$

Тогда в силу (3.3) получаем, что $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathfrak{H}_x \in \langle \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$ и при этом $\Lambda \in \bigotimes\limits_{x\in X} \mathfrak{H}_x$. С учетом (1.3) получаем теперь, что для некоторого отображения $(\tilde{\mathbb{F}}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathfrak{H}_x$ справедливо следующее равенство

$$\Lambda = \prod_{x\in X} \tilde{\mathbb{F}}_x. \tag{6.30}$$

Из (6.22) и (6.30) следует, в свою очередь, равенство

$$\prod_{x\in X} \Lambda_x = \prod_{x\in X} \tilde{\mathbb{F}}_x. \tag{6.31}$$

В силу (6.29) получаем, что имеет место свойство непустоты:

$$\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda] \neq \varnothing,$$

а тогда $\Lambda \neq \varnothing$ и, стало быть (см. (6.22)), $\Lambda_\chi \neq \varnothing$ при $\chi \in X$. Кроме того, из (6.30) вытекает, что

$$\prod_{x\in X} \tilde{\mathbb{F}}_x \neq \varnothing,$$

а тогда $\tilde{\mathbb{F}}_\chi \neq \varnothing$ при $\chi \in X$. Заметим, что $\Lambda_x \subset \mathbf{E}\ \forall x \in X$. Поэтому $(\Lambda_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Далее, при $x \in X$ имеем также включение $\tilde{\mathbb{F}}_x \in \mathfrak{H}_x$, где $\mathfrak{H}_x \subset \mathcal{L}_x \setminus \{\varnothing\}$; поэтому $\tilde{\mathbb{F}}_x \neq \varnothing$ и $\tilde{\mathbb{F}}_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$. В итоге $(\tilde{\mathbb{F}}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Тогда в силу (4.15), (6.31) и [14, (3.9)] получаем, что при $x \in X$ справедливо равенство $\Lambda_x = \tilde{\mathbb{F}}_x$ и, стало быть (см. (3.1)), $\mathfrak{H}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\Lambda_x]$. Следовательно, согласно (6.26) $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_x)_{x\in X} \in \mathbb{L}$. Итак, установлено, что

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) \subset \mathbb{L}. \tag{6.32}$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{L}$. Тогда $\lambda = (\lambda_x)_{x\in X}$, где

$$\lambda_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle^0[E_\chi|\Lambda_\chi]\ \ \forall \chi \in X. \tag{6.33}$$

При этом $\lambda \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X$. Из (6.33) следует, что при $x \in X$ непременно $\lambda_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ и, кроме того, $\Lambda_x \in \lambda_x$. Тогда

$$\begin{gathered}\mathbf{g}(\lambda) = \bigotimes_{x\in X} \lambda_x = \{\mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) | \exists (\mathbb{F}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \lambda_x : \\ (\mathbb{H} = \prod_{x\in X} \mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) :\ \mathbb{F}_\chi = E_\chi\ \forall \chi \in X \setminus K)\}.\end{gathered} \tag{6.34}$$

Согласно (6.33) $\Lambda_x \in \lambda_x$ при $x \in X$. С учетом (6.22) и (6.23) получаем, что отображение $(\Lambda_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \lambda_x$ таково, что

$$(\Lambda = \prod_{x\in X} \Lambda_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \Lambda_s = E_s\ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{6.35}$$

Из (6.22), (6.34) и (6.35) вытекает, что $\Lambda \in \mathbf{g}(\lambda)$. При этом $\mathbf{g}(\lambda) \in \langle \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$. С учетом (3.1) имеем теперь свойство

$$\mathbf{g}(\lambda) \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda],$$

а потому (см. (6.21)) $\mathbf{g}(\lambda) \in \mathbf{H}$ и, следовательно, $\lambda \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$. Итак, $\mathbb{L} \subset \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$, а тогда (см. (6.32)) $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) = \mathbb{L}$. С учетом (6.27) получаем (6.20). □

Напомним, что (см. (3.3)) при $x \in X$ справедливо свойство

$$\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]] \tag{6.36}$$

и согласно (3.5) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$; ясно также, что $\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \in (\mathrm{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]]$, где $\varnothing \neq \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))$. Тогда имеем, в частности, что

$$(\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X \tag{6.37}$$

может использоваться в качестве $(Y_x)_{x\in X}$ в (1.3) (в качестве Y используем $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))$). Поэтому определено отображение

$$(\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} (\mathrm{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]].$$

Как следствие определено (см. (1.3)) следующее семейство:

$$\begin{aligned}\bigotimes_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle = \{\mathbb{H} \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]) | \exists (\mathbb{B}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle :\\ (\mathbb{H} = \prod_{x\in X} \mathbb{B}_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle_0[E_s]\ \ \forall s \in X \setminus K)\}.\end{aligned} \tag{6.38}$$

З а м е ч а н и е 6.1. Обозначение $\bigotimes\limits_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$ часто используется для тихоновского произведения топологий. В настоящем изложении, имея в виду роль конструкций на основе измеримых в широком смысле прямоугольников, мы упомянутому правилу не следуем и оперируем с (6.38) как с семейством открытых прямоугольников. Данная особенность в обозначениях существенна для дальнейшего.

З а м е ч а н и е 6.2. Отметим одну полезную интерпретацию (6.38), связанную с π-системами. Действительно, из (6.36) следует, в частности, что

$$\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \in \pi[\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]]\ \ \forall x \in X.$$

При этом справедливо (6.37)). Тогда (см. [16, (6.4)]) определена следующая π-система:

$$\bigotimes_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \in \pi[\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]].$$

С учетом последнего замечания имеем, конечно, известное [21, 2.3.1] свойство

$$\bigotimes_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle\in(\mathrm{BAS})[\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]]. \tag{6.39}$$

В свою очередь, (6.39) позволяет ввести нужную топологию. Здесь, однако, мы имеем известную конструкцию тихоновского произведения (см., например, [21, раздел 2.3]). А именно,

$$\mathbf{t}_\otimes\triangleq\{\cup\}(\bigotimes_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle)\in(\mathrm{top})[\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x]]. \tag{6.40}$$

Таким образом, мы получили в виде

$$(\prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x],\mathbf{t}_\otimes) \tag{6.41}$$

тихоновское произведение ТП $(\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x],\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle)$, $x\in X$. Отметим, что

$$\bigotimes_{x\in X}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]\subset\bigotimes_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle\subset\mathbf{t}_\otimes. \tag{6.42}$$

З а м е ч а н и е 6.3. В целях полноты изложения проверим первое вложение в (6.42). Действительно, при $x\in X$ имеем (см. (3.5), (6.37))

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]\subset\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle\subset\mathcal{P}(\langle\mathcal{L}_x-\mathrm{link}\rangle_0[E_x])\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))). \tag{6.43}$$

Как следствие получаем, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))$ при $x\in X$. Иными словами,

$$(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x])_{x\in X}\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^X,$$

а тогда (с учетом аксиомы выбора) получаем следующее представление

$$\prod_{x\in X}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]=\{\ (\mathbb{H}_x)_{x\in X}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X|\mathbb{H}_t\in\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_t;\mathcal{L}_t]\ \forall t\in X\}\neq\varnothing. \tag{6.44}$$

С другой стороны, в силу (6.43) имеем, что $\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle\in\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))$ при $x\in X$. Тогда

$$\prod_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle=\{\ (\mathbb{G}_x)_{x\in X}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X|\mathbb{G}_t\in\mathbb{T}_*\langle E_t|\mathcal{L}_t\rangle\ \ \forall t\in X\}\neq\varnothing. \tag{6.45}$$

С учетом (6.43), (6.44) и (6.45) получаем, что

$$\prod_{x\in X}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]\subset\prod_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle. \tag{6.46}$$

Теперь из (6.19), (6.38) и (6.46) получаем требуемое свойство $\bigotimes_{x\in X}\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]\subset\bigotimes_{x\in X}\mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$.

Из (6.42) и предложения 6.2 вытекает, что справедливо следующее положение:

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})\in\mathbf{t}_\otimes\ \ \forall\mathbf{H}\in\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E};\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x]. \tag{6.47}$$

Напомним также, что согласно (3.3) и (6.1) определена топология стоуновского типа

$$\mathbb{T}_*\langle\mathbb{E}|\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x\rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E};\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x])) \in (\mathrm{top})[\langle\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]]. \tag{6.48}$$

При этом, конечно, имеем согласно (3.5) и (6.1) свойство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E};\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}];\mathbb{T}_*\langle\mathbb{E}|\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x\rangle]. \tag{6.49}$$

Из (6.47)–(6.49) вытекает (см. [21, предложение 1.4.1]) следующее

П р е д л о ж е н и е 6.3. *В виде* $\mathbf{g}$ (6.16) *реализуется непрерывное отображение ТП* (6.41) *на ТП*

$$(\langle\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_*\langle\mathbb{E}|\bigotimes_{x\in X}\mathcal{L}_x\rangle). \tag{6.50}$$

П р е д л о ж е н и е 6.4. *Отображение* $\mathbf{g}$ (6.16) *является биекцией множества* $\prod\limits_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ *на* $\langle\bigotimes\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (6.4) и (6.17) вытекает, что отображение $\mathbf{g}$ сюръективно. Пусть

$$((\mathcal{E}'_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])\&((\mathcal{E}''_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])$$

таковы, что справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{g}((\mathcal{E}'_x)_{x\in X}) = \mathbf{g}((\mathcal{E}''_x)_{x\in X}). \tag{6.51}$$

Из (6.17) и (6.51) вытекает с очевидностью, что

$$\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}'_x = \bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}''_x. \tag{6.52}$$

Тогда, как видно из (6.6), (6.52) и предложения 6.1,

$$(\mathcal{E}'_x)_{x\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}'_x))_{\chi\in X} = (\mathbf{P}^1_\chi(\bigotimes_{x\in X}\mathcal{E}''_x))_{\chi\in X} = (\mathcal{E}''_x)_{x\in X}. \tag{6.53}$$

Итак (см. (6.51), (6.53)), истинна следующая импликация

$$(\mathbf{g}((\mathcal{E}'_x)_{x\in X}) = \mathbf{g}((\mathcal{E}''_x)_{x\in X})) \Longrightarrow ((\mathcal{E}'_x)_{x\in X} = (\mathcal{E}''_x)_{x\in X}). \tag{6.54}$$

Поскольку $(\mathcal{E}'_x)_{x\in X}$ и $(\mathcal{E}''_x)_{x\in X}$ выбирались произвольно, установлена (см. (6.54)) требуемая инъективность, а, стало быть, и биективность $\mathbf{g}$. □

С учетом предложений 6.3 и 6.4 получаем, конечно, что $\mathbf{g}$ (6.16) есть уплотнение ТП (6.41) на ТП (6.50); получен аналог теоремы 5.1. Однако, в данном случае упомянутое свойство допускает усиление.

Заметим, что при $x \in X$ и $L \in \mathcal{L}_x$ имеет место

$$\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L] \subset \langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})),$$

а тогда $\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L] \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$. Поэтому при $(L_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X}\mathcal{L}_x$ имеем, что

$$(\langle\mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|L_x])_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X.$$

П р е д л о ж е н и е 6.5. *Если* $\mathbb{H} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$, *то* $\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbb{H} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$. Тогда (см. (6.19))

$$\mathbb{H} \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x])$$

и для некоторого отображения

$$(\mathbb{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \tag{6.55}$$

справедливо равенство $\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x$ и для некоторого $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X)$ имеет место

$$\mathbb{F}_s = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link} \rangle_0 [E_s] \ \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{6.56}$$

Из (6.55) следует, что $\mathbb{F}_x \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$ при $x \in X$; как следствие имеем (с использованием аксиомы выбора) для некоторого отображения $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$ систему равенств

$$\mathbb{F}_\chi = \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link} \rangle^0 [E_\chi | \Lambda_\chi] \ \ \forall \chi \in X. \tag{6.57}$$

В этом случае получаем следующее очевидное равенство:

$$\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \Lambda_x].$$

При этом $\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x] \ \ \forall x \in X \setminus \mathbb{K}$. С учетом этого введем $(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$ по правилу

$$(\tilde{\Lambda}_x \triangleq \Lambda_x \ \ \forall x \in \mathbb{K}) \& (\tilde{\Lambda}_x \triangleq E_x \ \forall x \in X \setminus \mathbb{K}). \tag{6.58}$$

Тогда в силу (6.56) и (6.58) получаем при $x \in X \setminus \mathbb{K}$, что

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \tilde{\Lambda}_x]. \tag{6.59}$$

С другой стороны, из (6.57) и (6.58) вытекает, что

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \tilde{\Lambda}_x] \ \ \forall x \in \mathbb{K}.$$

С учетом (6.59) получаем теперь следующее свойство:

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \tilde{\Lambda}_x] \ \ \forall x \in X. \tag{6.60}$$

Из (6.60) вытекает, что справедливо очевидное равенство

$$(\mathbb{F}_x)_{x \in X} = (\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [E_x | \tilde{\Lambda}_x])_{x \in X}.$$

Заметим, что $\tilde{\Lambda}_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$ при $x \in X$. Поэтому получаем, что

$$\tilde{\Lambda} \triangleq \prod_{x \in X} \tilde{\Lambda}_x \subset \mathbb{E} \subset \mathbf{E}^X. \tag{6.61}$$

Получили, в частности, что $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$. Далее, из (6.58) следует, что (см. (6.61))

$$\exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x : \ (\tilde{\Lambda} = \prod_{x\in X} L_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ L_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \tag{6.62}$$

Из (6.1) и (6.62) вытекает очевидное включение

$$\tilde{\Lambda} \in \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{6.63}$$

Тогда в силу (3.1), (3.2) и (6.63) имеем следующее равенство:

$$\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}] = \{\, \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}] | \tilde{\Lambda} \in \mathcal{E}\} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x]. \tag{6.64}$$

Вернемся к (6.16). Тогда по выбору $\mathbb{H}$ получаем равенство

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) = \{\, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x : \ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathbb{H}\}. \tag{6.65}$$

Сравним множества (6.64) и (6.65). Пусть $\mathcal{U} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{H})$. Тогда (см. (6.16)), в частности,

$$\mathcal{U} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]. \tag{6.66}$$

При этом по выбору $\mathcal{U}$ имеем (см. (6.65)) для некоторого отображения

$$(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \mathbb{H} \tag{6.67}$$

следующее равенство

$$\mathcal{U} = \bigotimes_{x\in X} \mathcal{U}_x. \tag{6.68}$$

Учтем представление $\mathbb{H}$, связанное с (6.55). Тогда (см. (6.67)) $(\mathcal{U}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_x$, что означает справедливость свойства $\mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_x \ \ \forall x \in X$. С учетом (6.60) получаем теперь, что

$$\mathcal{U}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\tilde{\Lambda}_x] \ \ \forall x \in X. \tag{6.69}$$

Поэтому при $x \in X$ имеем, что $\mathcal{U}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$ и при этом $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{U}_x$. Отметим, что, в частности, $\mathcal{U}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x))$ при $x \in X$. Согласно (1.3) и (6.68)

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) |\, \exists (B_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{U}_x : \\ (H = \prod_{x\in X} B_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ B_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\}. \end{aligned} \tag{6.70}$$

Тогда для $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ мы имеем требуемое в (6.70) представление. В самом деле, в силу (6.69) $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{U}_x$ при $x \in X$. Это означает, что $(\tilde{\Lambda}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{U}_x$. С учетом (6.58) и (6.61) получаем теперь, что

$$(\tilde{\Lambda}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{U}_x : \ (\tilde{\Lambda} = \prod_{x\in X} \tilde{\Lambda}_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \tilde{\Lambda}_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K).$$

С учетом (6.70) имеем, что $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{U}$. Теперь получаем (см. (3.1), (6.66)), что

$$\mathcal{U} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}].$$

Итак, установлено, что

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \subset \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}]. \tag{6.71}$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \langle \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle^0 [\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}]$. Тогда, в частности, имеем, что

$$\mathcal{V} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [\mathbb{E}], \tag{6.72}$$

и при этом справедливо следующее включение:

$$\tilde{\Lambda} \in \mathcal{V}. \tag{6.73}$$

С учетом (6.4) и (6.72) получаем, что для некоторого отображения

$$(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x]$$

реализуется равенство $\mathcal{V} = \bigotimes\limits_{x \in X} \mathcal{V}_x$. Из (6.17) вытекает теперь, что

$$\mathcal{V} = \mathbf{g}((\mathcal{V}_x)_{x \in X}). \tag{6.74}$$

При этом согласно (1.3) имеем из (6.74), что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{ H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \,|\, \exists (B_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{V}_x : \\ (H = \prod_{x \in X} B_x) \& (\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ B_s = E_s \ \ \forall s \in X \setminus K) \}. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Поэтому (см. (6.73), (6.75)) для некоторого отображения $(V_x)_{x \in X} \in \prod\limits_{x \in X} \mathcal{V}_x$ реализуются следующие свойства:

$$(\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} V_x) \& (\ \exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ V_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \tag{6.76}$$

Тогда $V_x \in \mathcal{V}_x \ \forall x \in X$. В силу сцепленности $\mathcal{V}_x$, $x \in X$, имеем, что $V_s \neq \varnothing$ при $s \in X$. Кроме того, $V_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$ при $x \in X$. В итоге

$$(V_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X. \tag{6.77}$$

Тогда (см. (6.76), (6.77); учитываем аксиому выбора) имеем $\tilde{\Lambda} \neq \varnothing$, а потому согласно (6.61) $\tilde{\Lambda}_x \neq \varnothing$ при $x \in X$. В итоге

$$(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X. \tag{6.78}$$

Наконец, из (6.61) и (6.76) имеем следующее равенство

$$\prod_{x \in X} \tilde{\Lambda}_x = \prod_{x \in X} V_x.$$

Тогда (см. (6.77), (6.78), [14, (3.9)]) получаем, что $\tilde{\Lambda}_x = V_x \ \ \forall x \in X$. Поэтому $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{V}_x$ $\forall x \in X$. В этом случае

$$\mathcal{V}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\tilde{\Lambda}_x] \ \ \forall x \in X.$$

Иными словами, справедливо следующее очевидное включение:

$$(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|\tilde{\Lambda}_x].$$

С учетом (6.60) получаем теперь, что $(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{F}_x$, а потому $(\mathcal{V}_x)_{x\in X} \in \mathbb{H}$. Как следствие (см. (6.74)) $\mathcal{V} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{H})$. Итак, установлено, что

$$\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}] \subset \mathbf{g}^1(\mathbb{H}).$$

С учетом (6.71) получаем следующее равенство

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) = \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}],$$

а тогда в силу (6.64) получаем требуемое свойство $\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x]$. $\square$

7. Об одном свойстве гомеоморфности

Конструкции настоящего раздела продолжают построения предыдущего. Мы рассмотрим сначала вопрос об открытости (6.16) как отображения ТП (6.41) на ТП (6.50).

П р е д л о ж е н и е 7.1. *Отображение* $\mathbf{g}$ (6.16) *открыто, то есть* $\mathbf{g}$ *непрерывно и, кроме того, имеет место свойство: если* $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$, *то* $\mathbf{g}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E}| \bigotimes\limits_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего напомним, что отображение $\mathbf{g}$ непрерывно (см. предложение 6.3). Фиксируем $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$ и рассмотрим множество

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^1(\mathbb{G}) &= \{\, \mathbf{g}((\mathcal{E}_x)_{x\in X}) : \ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathbb{G}\} \\ &= \{\, \bigotimes_{x\in X} \mathcal{E}_x : \ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathbb{G}\} \in \mathcal{P}(\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]).\end{aligned} \tag{7.1}$$

Выберем произвольно $\mathcal{E} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{G})$. Тогда получаем, что

$$\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[\mathbb{E}]$$

и, в частности, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E}))$. По выбору $\mathcal{E}$ имеем, что для некоторого $(\eta_x)_{x\in X} \in \mathbb{G}$

$$\mathcal{E} = \mathbf{g}((\eta_x)_{x\in X}) = \bigotimes_{x\in X} \eta_x. \tag{7.2}$$

При этом, конечно, $(\eta_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]$. Отметим, что в силу (6.40) для некоторого множества

$$\mathbf{B} \in \bigotimes_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle \tag{7.3}$$

имеют место следующие свойства:

$$((\eta_x)_{x\in X} \in \mathbf{B})\&(\mathbf{B} \subset \mathbb{G}). \tag{7.4}$$

Тогда (см. (6.38), (7.3)) получаем, что $\mathbf{B} \in \mathcal{P}(\prod\limits_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x])$ и для некоторого отображения $(\mathbb{B}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle$

$$(\mathbf{B} = \prod_{x\in X} \mathbb{B}_x)\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X):\ \mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle_0[E_s]\ \ \forall s \in X \setminus K). \tag{7.5}$$

Из (7.4) и (7.5) имеем, что $(\eta_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathbb{B}_x$. Поэтому $\eta_x \in \mathbb{B}_x\ \ \forall x \in X$. Следовательно, при $x \in X$ имеем, что

$$\mathbb{B}_x \in \mathbb{T}_*\langle E_x|\mathcal{L}_x\rangle :\ \eta_x \in \mathbb{B}_x. \tag{7.6}$$

С учетом (7.5) выберем и зафиксируем множество $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X)$, для которого

$$\mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \mathrm{link}\rangle_0[E_s]\ \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{7.7}$$

Используя (3.3) и (7.6) получаем, что при $x \in X$ непременно имеет место свойство

$$\exists \mathbf{H} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]):\ (\eta_x \in \mathbf{H})\&(\mathbf{H} \subset \mathbb{B}_x).$$

Данное свойство может быть переписано в следующем виде: $\forall x \in X$

$$\mathcal{H}_x \overset{\triangle}{=} \{\ \mathbf{H} \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x])|(\eta_x \in \mathbf{H})\&(\mathbf{H} \subset \mathbb{B}_x)\} \in \mathcal{P}'(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x])). \tag{7.8}$$

С учетом (7.8) (и аксиомы выбора) имеем непустое множество $\prod\limits_{x\in X} \mathcal{H}_x$. Используя упомянутое свойство непустоты, выберем $(\mathbb{H}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \mathcal{H}_x$. Тогда (см. (7.8))

$$\mathbb{H}_x \in \{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x])\ \ \forall x \in X;$$

кроме того, с учетом (7.8) имеем следующее свойство: $\forall x \in X$

$$(\eta_x \in \mathbb{H}_x)\&(\mathbb{H}_x \subset \mathbb{B}_x). \tag{7.9}$$

При этом, конечно, получаем, что $\forall x \in X\ \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x])$:

$$\mathbb{H}_x = \bigcap_{S\in\mathcal{K}} S. \tag{7.10}$$

С учетом конечности множества $\mathbb{K}$ подберем (см. [22, (1.4.4)]) $n \in \mathbb{N}$ и инъективное отображение $(\kappa_i)_{i\in\overline{1,n}} \in X^n$, для которых

$$\mathbb{K} = \{\ \kappa_i :\ i \in \overline{1,n}\}. \tag{7.11}$$

Тогда, в частности, имеем из (7.9), что $\forall j \in \overline{1,n}$

$$(\eta_{\kappa_j} \in \mathbb{H}_{\kappa_j})\&(\mathbb{H}_{\kappa_j} \subset \mathbb{B}_{\kappa_j}). \tag{7.12}$$

В свою очередь, из (7.10) и (7.11) вытекает, что $\forall j \in \overline{1,n}\ \ \exists \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j};\mathcal{L}_{\kappa_j}])$:

$$\mathbb{H}_{\kappa_j} = \bigcap_{S\in\mathcal{K}} S. \tag{7.13}$$

С учетом этого выберем $(\mathcal{K}_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_i};\mathcal{L}_{\kappa_i}])$ со свойством, определяемым в (7.13):

$$\mathbb{H}_{\kappa_j} = \bigcap_{S\in\mathcal{K}_j} S \quad \forall j \in \overline{1,n}. \tag{7.14}$$

Тогда в виде $\mathbf{K} \triangleq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$ реализуется непустое конечное множество. Полезно заметить, что при $x \in X$ согласно (3.2)

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \subset \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))).$$

Поэтому $\mathcal{K}_j \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j};\mathcal{L}_{\kappa_j}] \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $j \in \overline{1,n}$. Тогда

$$\mathcal{K}_j \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))) \ \ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{7.15}$$

Как следствие получаем следующее свойство конечности:

$$\mathbf{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n). \tag{7.16}$$

Пусть (см. (7.16)) $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и $(Z_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{n}}} \in (\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n)^{\mathbf{n}}$ таковы, что

$$\mathbf{K} = \{\, Z_l :\ l \in \overline{1,\mathbf{n}}\}. \tag{7.17}$$

Итак, $Z_l \in \mathbf{K}\ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Кроме того, $\forall \mathbb{S} \in \mathbf{K}\ \ \exists l \in \overline{1,\mathbf{n}} :\ \mathbb{S} = Z_l$. Отметим также, что при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $j \in \overline{1,n}$

$$Z_l(j) \in \mathcal{K}_j; \tag{7.18}$$

здесь мы напомним, что $Z_l :\ \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$, причем

$$Z_l(j) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j};\mathcal{L}_{\kappa_j}] \ \ \forall j \in \overline{1,n}. \tag{7.19}$$

Мы учитываем, что $\mathcal{K}_j \in \mathrm{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j};\mathcal{L}_{\kappa_j}])$ и, в частности,

$$\mathcal{K}_j \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j};\mathcal{L}_{\kappa_j}] \tag{7.20}$$

при $j \in \overline{1,n}$. Тогда (7.19) получается комбинацией (7.18) и (7.20). Напомним здесь же, что при $x \in X$ непременно

$$\langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle^0[E_x|E_x] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x].$$

Заметим, что (см. [22, (1.4.4)]) наряду с (7.11) истинно также, что $\forall i_1 \in \overline{1,n}\ \ \forall i_2 \in \overline{1,n}$

$$(\kappa_{i_1} = \kappa_{i_2}) \Longrightarrow (i_1 = i_2). \tag{7.21}$$

Если $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$, то введем в рассмотрение (см. (7.19)) отображение

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \tag{7.22}$$

по следующему правилу, использующему (7.11) и (7.21):

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)} \triangleq \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X \setminus \mathbb{K})\&(\mathbb{Z}_{\kappa_j}^{(l)} \triangleq Z_l(j) \ \ \forall j \in \overline{1,n}). \tag{7.23}$$

Итак, при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$ в связи с (7.22) и (7.23) отметим, что $\mathbb{Z}_x^{(l)} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $x \in X \setminus \mathbb{K}$; кроме того, из (7.19) вытекает (см. (3.1), (3.2)), что $\mathbb{Z}_{\kappa_j}^{(l)} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $j \in \overline{1,n}$. С учетом (7.11) и (7.12) получаем теперь, что при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x\in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X. \tag{7.24}$$

Вместе с тем, при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$ и $x \in X$ в силу (7.22) $\mathbb{Z}_x^{(l)} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x]$, а потому согласно (3.1) и (3.2)

$$\mathbb{Z}_x^{(l)} \subset \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}\, \forall x \in X. \tag{7.25}$$

Тогда согласно (7.24) и (7.25) получаем, в частности, что при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$\mathcal{Z}_l \triangleq \prod_{x\in X} \mathbb{Z}_x^{(l)} = \{\ (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X | \mathcal{E}_\chi \in \mathbb{Z}_\chi^{(l)} \ \ \forall \chi \in X\}. \tag{7.26}$$

Из (7.25) и (7.26) вытекает, что $\mathcal{E}_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \mathrm{link}\rangle_0[E_\chi] \ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}} \ \ \forall (\mathcal{E}_x)_{x\in X} \in \mathcal{Z}_l \ \ \forall \chi \in X$. Тогда (см. (7.26)) получаем, что

$$\mathcal{Z}_l \subset \prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{7.27}$$

Отметим теперь, что согласно (7.22) и (7.26) у нас при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] : \ \mathcal{Z}_l = \prod_{x\in X} \mathbb{Z}_x^{(l)}. \tag{7.28}$$

При этом $\mathbb{K} \in \mathrm{Fin}(X)$ таково, что (см. (7.23)) при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$\mathbb{Z}_x^{(l)} = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{7.29}$$

Поэтому (см. (7.28), (7.29)) при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$ имеем, что

$$\begin{gathered}(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] : \\ (\mathcal{Z}_l = \prod_{x\in X} \mathbb{Z}_x^{(l)})\&(\exists K \in \mathrm{Fin}(X) : \ \mathbb{Z}_x^{(l)} = \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X \setminus K).\end{gathered} \tag{7.30}$$

Учтем (6.19) и (7.27). Тогда в силу (7.30) получаем следующее свойство:

$$\mathcal{Z}_l \in \bigotimes_{x\in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x;\mathcal{L}_x] \ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}. \tag{7.31}$$

Напомним (7.6) и (7.12). Отметим также, что по выбору $(\eta_x)_{x\in X}$ имеем

$$\eta_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x] \ \ \forall x \in X. \tag{7.32}$$

Тогда (см. (7.23), (7.32)) получаем, что справедливо свойство

$$\eta_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \ \ \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}\, \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{7.33}$$

Пусть теперь $r \in \overline{1,n}$. Тогда $\kappa_r \in \mathbb{K}$. Рассмотрим множества $Z_l(r) \in \mathcal{K}_r$, $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Согласно (7.14)

$$\mathbb{H}_{\kappa_r} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}_r} S, \tag{7.34}$$

причем (см. (7.12)) $\eta_{\kappa_r} \in \mathbb{H}_{\kappa_r}$. С учетом (7.34) получаем, что

$$\eta_{\kappa_r} \in S \;\; \forall S \in \mathcal{K}_r. \tag{7.35}$$

Согласно (7.18) $Z_l(r) \in \mathcal{K}_r$ при $l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Поэтому (см. (7.35)) $\eta_{\kappa_r} \in Z_l(r) \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Иными словами,

$$\eta_{\kappa_r} \in \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} Z_l(r). \tag{7.36}$$

Поскольку выбор r был произвольным, установлено (см. (7.36)), что

$$\eta_{\kappa_j} \in Z_l(j) \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}} \, \forall j \in \overline{1,n}. \tag{7.37}$$

С учетом (7.23) и (7.37) получаем, что справедливо следующее свойство:

$$\eta_{\kappa_j} \in \mathbb{Z}^{(l)}_{\kappa_j} \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}} \;\; \forall j \in \overline{1,n}. \tag{7.38}$$

Из (7.11) и (7.38) получаем, что $\eta_x \in \mathbb{Z}^{(l)}_x \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}} \;\; \forall x \in \mathbb{K}$. С учетом (7.33) получаем теперь, что

$$\eta_x \in \mathbb{Z}^{(l)}_x \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}} \;\; \forall x \in X. \tag{7.39}$$

Теперь согласно (7.26) и (7.39) имеем $(\eta_x)_{x \in X} \in \mathcal{Z}_l \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Как следствие получаем, что

$$(\eta_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l. \tag{7.40}$$

Напомним, что согласно (7.27) справедливо следующее свойство:

$$\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x].$$

Иными словами, получаем (см. (7.40)), что имеет место

$$\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l \in \mathcal{P}\Big(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x]\Big) : \; (\eta_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l. \tag{7.41}$$

Теперь выберем произвольно отображение

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l. \tag{7.42}$$

Итак, $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{Z}_l \;\; \forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}$. Из (7.26) получаем, что $\forall l \in \overline{1,\mathbf{n}}$

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{Z}^{(l)}_x.$$

Иными словами, реализуется следующее очевидное свойство:

$$\lambda_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}} \ \ \forall x \in X. \tag{7.43}$$

Заметим, что (см. (7.26), (7.42)) справедливо, в частности, включение

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X.$$

Из (7.27) и (7.42) получаем также, что

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x]. \tag{7.44}$$

В свою очередь, из (7.44) следует, что реализуется система включений

$$\lambda_x \in \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link} \rangle_0 [E_x] \ \ \forall x \in X. \tag{7.45}$$

Поэтому из (7.7) и (7.45) вытекает, что

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \ \ \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \tag{7.46}$$

Пусть теперь $\nu \in \overline{1, n}$. Тогда в силу (7.11) $x_\nu \in \mathbb{K}$. Из (7.12) получаем, в частности, что

$$\mathbb{H}_{\kappa_\nu} \subset \mathbb{B}_{\kappa_\nu}. \tag{7.47}$$

Напомним также, что $\mathcal{K}_\nu \in \mathrm{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}])$ реализует следующее равенство:

$$\mathbb{H}_{\kappa_\nu} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}_\nu} S. \tag{7.48}$$

В частности, $\mathcal{K}_\nu \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}]$. Напомним, что согласно (7.43) для $\kappa_\nu \in X$ имеем свойство

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(l)} \ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \tag{7.49}$$

Выберем произвольно $\mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu$, получая множество из $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}]$:

$$\mathbb{D} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}].$$

Заметим, что согласно (7.18) реализуется следующее свойство:

$$Z_l(\nu) \in \mathcal{K}_\nu \ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

Из (7.23) имеем, в частности, очевидную систему равенств

$$\mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(l)} = Z_l(\nu) \ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

При этом $Z_1 \in \mathbf{K}$. Тогда имеем по определению $\mathbf{K}$, поскольку (см. (7.16))

$$\mathbf{K} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n,$$

что $Z_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n$. Иными словами, реализуется отображение

$$Z_1 : \ \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))).$$

При этом, конечно, $Z_1 \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i$, а потому $Z_1(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1,n}$. Введем в рассмотрение отображение (кортеж)

$$\tilde{Z}: \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))) \tag{7.50}$$

посредством следующего правила:

$$(\tilde{Z}(j) \stackrel{\triangle}{=} Z_1(j) \quad \forall j \in \overline{1,n} \setminus \{\nu\})\&(\tilde{Z}(\nu) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{D}) \tag{7.51}$$

(согласно (7.15) $\mathcal{K}_\nu \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ и $\mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu$). При этом (см. (7.18))

$$(\tilde{Z}(j) = Z_1(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1,n} \setminus \{\nu\})\&(\tilde{Z}(\nu) = \mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu).$$

Иными словами, имеем систему включений $\tilde{Z}(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1,n}$. Тогда $\tilde{Z} \in \prod_{j=1}^{n} \mathcal{K}_j$, а потому

$$\tilde{Z} \in \mathbf{K}. \tag{7.52}$$

Из (7.17) и (7.52) следует, что для некоторого $\zeta \in \overline{1,\mathbf{n}}$ имеет место равенство $\tilde{Z} = Z_\zeta$. С учетом (7.51) получаем, как следствие, что

$$(Z_\zeta(j) = Z_1(j) \quad \forall j \in \overline{1,n} \setminus \{\nu\})\&(Z_\zeta(\nu) = \mathbb{D}). \tag{7.53}$$

При этом (см. (7.50)), конечно, $Z_\zeta: \overline{1,n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$. В силу (7.49)

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(\zeta)}. \tag{7.54}$$

Однако в силу (7.23) имеем равенство $\mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(\zeta)} = Z_\zeta(\nu)$, а потому (см. (7.54)) $\lambda_{\kappa_\nu} \in Z_\zeta(\nu)$. С учетом (7.53) получаем, что $\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{D}$. Поскольку выбор $\mathbb{D}$ был произвольным, установлено свойство

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in S \quad \forall S \in \mathcal{K}_\nu. \tag{7.55}$$

С учетом (7.48) и (7.55) получаем теперь очевидное включение

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{H}_{\kappa_\nu}. \tag{7.56}$$

Из (7.47) и (7.56) вытекает, что $\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{B}_{\kappa_\nu}$. Поскольку ν выбиралось произвольно, установлено, что $\lambda_{\kappa_j} \in \mathbb{B}_{\kappa_j} \quad \forall j \in \overline{1,n}$. С учетом (7.11) получаем теперь, что

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in \mathbb{K}. \tag{7.57}$$

Из (7.46) и (7.57) вытекает, что справедливо следующее свойство:

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in X.$$

Тогда имеем включение $(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{B}_x$, а потому (см. (7.5))

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbf{B}. \tag{7.58}$$

Из (7.4) и (7.58) следует теперь очевидное включение $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbb{G}$. Итак, получили (см. (7.42)) свойство

$$\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l \subset \mathbb{G}. \tag{7.59}$$

Таким образом (см. (7.31), (7.41), (7.59)), установлено, что

$$\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l \in \mathcal{P}(\prod_{x\in X} \langle \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\rangle_0[E_x]):\ ((\eta_x)_{x\in X} \in \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l)\&(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l \subset \mathbb{G}). \tag{7.60}$$

Заметим теперь, что из (7.1) и (7.60) вытекает, что

$$\mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l) \subset \mathbf{g}^1(\mathbb{G}). \tag{7.61}$$

При этом, как видно из (7.60), $\mathbf{g}((\eta_x)_{x\in X}) \in \mathbf{g}^1(\bigcap\limits_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l)$, а тогда согласно (7.2) имеем

$$\mathcal{E} \in \mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l). \tag{7.62}$$

Отметим, что согласно (7.31) и предложению 6.5 реализуется свойство

$$\mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x]\ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \tag{7.63}$$

Поскольку согласно предложению 6.4 отображение $\mathbf{g}$ является биекцией, то

$$\mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l) = \bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l). \tag{7.64}$$

Между тем справедливо (см. (3.3), (6.1)) следующее очевидное свойство:

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle.$$

Поэтому имеем (см. (7.63)) следующие включения

$$\mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle\ \ \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}, \tag{7.65}$$

где $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Поэтому (см. (7.65), аксиомы топологии) имеет место включение

$$\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle,$$

а тогда (см. (7.62), (7.64)) реализуется следующее свойство

$$\mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l) \in \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle:\ \mathcal{E} \in \mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{Z}_l).$$

Итак, множество (7.64) есть открытая окрестность точки $\mathcal{E}$. В этом случае (см. (7.61)) $\mathbf{g}^1(\mathbb{G})$ есть окрестность $\mathcal{E}$ в смысле [23, гл. I]. Поскольку выбор $\mathcal{E}$ был произвольным, установлено, что множество $\mathbf{g}^1(\mathbb{G})$ является окрестностью каждой своей точки (точнее, окрестностью в смысле [23, гл. I]), а потому

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\rangle \tag{7.66}$$

согласно [23, гл. I, § 1, предложение 1]. Поскольку $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$ выбиралось произвольно, имеем из (7.66) требуемое свойство: $\mathbf{g}$ — открытое в смысле ТП (6.41) и (6.50) отображение. □

Теорема 7.1. *Отображение* $\mathbf{g}$ (6.16) *есть гомеоморфизм ТП* (6.41) *на ТП* (6.50).

Доказательство очевидно: в силу предложений 6.4 и 7.1 отображение $\mathbf{g}$ есть открытая биекция ТП (6.41) на ТП (6.50), а тогда $\mathbf{g}$ есть (см. [24, предложение 3.12]) гомеоморфизм для упомянутых ТП. Итак, ТП (6.41) и (6.50) гомеоморфны. □

References

[1] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryaev, *Theory of Stochastic Processes*, Fizmatlit, M., 2005 (In Russian), 402 pp.]

[2] J. de Groot, "Superextensions and supercompactness", *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium "Extension Theory of Topological Structures and its Applications" (Berlin, 1969), Proceedings of the Symposium, VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.

[3] J. van Mill, "Supercompactness and Wallman spaces", *Mathematical Centre Tracts*. V. 85, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.

[4] M. Strok, A. Szymanski, "Compact metric spaces have binary subbases", *Fund. Math.*, **89**:1 (1975), 81–91.

[5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *General Topology. Basic Constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]

[6] А. В. Архангельский, "Компактность", *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНИТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel'skii, "Compactness", *General Topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].

[7] А. Г. Ченцов, "Суперрасширение как битопологическое пространство", *Изв. ИМИ УдГУ*, **49** (2017), 55–79. [A. G. Chentsov, "Superextension as bitopological space", *Izv. IMI UdGU*, **49** (2017), 55–79 (In Russian)].

[8] А. Г. Ченцов, "Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.:A. G. Chentsov, "Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.

[9] А. Г. Ченцов, "Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем", Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, "Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems", Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].

[10] А. Г. Ченцов, "Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств", *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:3 (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, "Ultrafilters and maximal linked systems", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:3 (2017), 365–388 (In Russian)].

[11] А. Г. Ченцов, "Некоторые топологические свойства пространства максимальных сцепленных систем с топологией волмэновского типа", *Изв. ИМИ УдГУ*, **56** (2020), 122–137. [A. G. Chentsov, "Some topological properties of the space of maximal linked systems with topology of Wallman type", *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 122–137 (In Russian)].

[12] А. Г. Ченцов, "К вопросу о некоторых обобщениях свойств сцепленности семейств множеств и суперкомпактности топологических пространств", *Изв. вузов. Матем.*, 2020, № 11, 65–80. [A. G. Chentsov, "To question on some generalizations of properties of cohesion of families of sets and supercompactness of topological spaces", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2020, № 11, 65–80 (In Russian)].

[13] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 309 с. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 309 pp.]

[14] А. Г. Ченцов, "Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 77–104. [A. G. Chentsov, "Maximal linked systems on families of measurable rectangles", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 77–104 (In Russian)].

[15] А. Г. Ченцов, “Фильтры и сцепленные семейства множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 444–467. [A. G. Chentsov, “Filters and linked families of sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 444–467 (In Russian)].

[16] А. Г. Ченцов, “О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией волмэновского типа”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, “On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type”, *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].

[17] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]

[18] А. Г. Ченцов, “К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 307–319; англ. пер.:A. G. Chentsov, “On the question of representation of ultrafilters in a product of measurable spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **284**:suppl. 1 (2014), 65–78.

[19] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981, 431 с. [J. L. Kelly, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1981 (In Russian), 431 pp.]

[20] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 274–292. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**, 2020, 274–292 (In Russian)].

[21] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 751 с. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 751 pp.]

[22] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры, I*, Уральский государственный технический университет – УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory, I*, Ural State Technical University - UPI, Yekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]

[23] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 272 с. [N. Burbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 272 pp.]

[24] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979, 336 с. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian), 336 pp.]

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 24.02.2021 г.
Поступила после рецензирования 20.04.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Received 24.02.2021
Reviewed 20.04.2021
Accepted for press 10.06.2021

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220
УДК 517.922, 517.927.4

Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений

Сарра БЕНАРАБ
Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 Мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, г. Гельма, п.я. 401

Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations

Sarra BENARAB
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University 8 May 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Аннотация. Рассматриваются двухточечная (в том числе, периодическая) краевая задача для следующей системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции:

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь при любом $i = \overline{1, n}$ функция $f_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу, непрерывна по последнему аргументу, непрерывна справа и удовлетворяют специальному условию монотонности по каждой компоненте второго и третьего аргументов. Получены утверждения о существовании и двусторонних оценках решений (типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве). Также получены условия существования наибольшего и наименьшего (относительно специального порядка) решения. Исследование основано на результатах об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество (см. [С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференц. уравнения, 2020, 56:11, 1471–1482]).

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение, краевая задача, существование решений, оценки решений, теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве

Для цитирования: *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220.

Abstract. We consider a two-point (including periodic) boundary value problem for the following system of differential equations that are not resolved with respect to the derivative of the desired function:

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Here, for any $i = \overline{1, n}$, the function $f_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is measurable in the first argument, continuous in the last argument, right-continuous, and satisfies the special condition of monotonicity in each component of the second and third arguments. Assertions about the existence and two-sided estimates of solutions (of the type of Chaplygin's theorem on differential inequality) are obtained. Conditions for the existence of the largest and the smallest (with respect to a special order) solution are also obtained. The study is based on results on abstract equations with mappings acting from a partially ordered space to an arbitrary set (see [S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. On functional and differential inequalities and their applications to control problems // Differential Equations, 2020, 56:11, 1440–1451]).

Keywords: implicit differential equation, boundary value problem, existence of solutions, estimates of solutions, Chaplygin's theorem on differential inequality

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34A40, 34B10

For citation: Benarab S. Dvustoronniye otsenki resheniy krayevykh zadach dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy [Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 216–220. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В сообщении представлены утверждения о существовании и оценках решений краевых задач для системы неявных дифференциальных уравнений. Результаты аналогичны известной теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [1], а также [2]).

Вопрос о распространении на неявные уравнения теорем о дифференциальных неравенствах рассматривался в работах [3–5]. Эти исследования существенно использовали результаты А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского и др. авторов (см. [6–11]) об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими в частично упорядоченных пространствах. Данное исследование основано на полученных в [12] результатах об абстрактных неравенствах, порожденных отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Использование этих утверждений позволило здесь получить теоремы типа Чаплыгина о существовании и двусторонних оценках решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений, причем при предположениях, несколько ослабляющих «традиционные» требования непрерывности и монотонности по фазовым переменным на функции, порождающие уравнения.

Сообщение состоит из двух пунктов. В пункте 1. приведены необходимые обозначения, в пункте 2. представлена теорема типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для двухточечной краевой задачи. Из этой теоремы выводится соответствующий результат для периодической краевой задачи, полученный в работе [12].

1. Основные обозначения

Обозначим через M^n и L^n пространство измеримых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций и его подпространство суммируемых n-мерных функций с «обычным» порядком: для $u=(u_1,\ldots,u_n)\in M^n$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in M^n$, выполнено $u\le v$, если $u_i(t)\le v_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, при п.в. $t\in[0,1]$. Обозначим через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций (таким образом, $x\in AC^n \ \Leftrightarrow\ \dot x\in L^n$).

Пусть заданы функции $f_i:[0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t,x,\dot x,\dot x_i)=0,\quad t\in[0,1],\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Решением системы (1.1) будем называть функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t \in [0,1]$.

Для уравнения (1.1) будем рассматривать двухточечную краевую задачу с условием

$$\gamma_{0i}\, x_i(0) + \gamma_{1i}\, x_i(1) = A_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где числа $\gamma_{0i}, \gamma_{1i}, A_i$, $i = \overline{1,n}$, полагаем заданными. Частным случаем этой задачи при $\gamma_{0i} = 1$, $\gamma_{1i} = -1$, $i = \overline{1,n}$, является периодическая краевая задача с условием

$$x(0) - x(1) = A. \tag{1.3}$$

2. Двухточечная краевая задача

Пусть задана диагональная $n \times n$ - матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t,x,v,y_i) := f_i(t,x,v+\lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем предполагать, что для функций g_i^λ, $i = \overline{1,n}$, выполнено условие

(G↓) *При п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \ldots, x_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $v_1, \ldots, v_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\gamma_{1i} < 0$, $0 < \gamma_{0i} < -\gamma_{1i} \exp \lambda_i$. Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что*

$$\gamma_{0i}\, \nu_i(0) + \gamma_{1i}\, \nu_i(1) \geq \gamma_{0i}\, \eta_i(0) + \gamma_{1i}\, \eta_i(1), \quad \dot\nu_i - \lambda_i \nu_i \geq \dot\eta_i - \lambda_i \eta_i, \quad i = \overline{1,n},$$

выполнены неравенства

$$f_i(t, \nu(t), \dot\nu(t), \dot\nu_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot\eta(t), \dot\eta_i(t)) \leq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Тогда для любых A_i таких, что

$$\gamma_{0i}\, \eta_i(0) + \gamma_{1i}\, \eta_i(1) \leq A_i \leq \gamma_{0i}\, \nu_i(0) + \gamma_{1i}\, \nu_i(1), \quad i = \overline{1,n},$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее неравенствам

$$\dot\eta - \lambda\eta \leq \dot x - \lambda x \leq \dot\nu - \lambda\nu; \tag{2.2}$$

кроме того, существует наименьшая и наибольшая функции во множестве функций $z := \dot x - \lambda x$, где x — решение задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее неравенствам (2.2).

Доказательство этого утверждения использует редукцию к интегральному уравнению с помощью введения новой неизвестной функции $v \in L^n$, компоненты которой определяются равенствами $v_i = \dot x_i - \lambda_i x_i$, где x — решение задачи (1.1), (1.2). Эту замену (называемую W-подстановкой Азбелева [13]) можно также записать в виде $x_i = W_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, где

$$W_i : L^1 \to AC^1, \quad (W_i v_i)(t) = (\gamma_{0i} + \gamma_{1i} \exp \lambda_i)^{-1} \big(X_i(t) A_i + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s) v_i(s) ds \big),$$

$$X_i(t) = \exp \lambda_i t, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \gamma_{0i} \exp \lambda_i (t-s), & 0 \le s \le t \le 1, \\ -\gamma_{1i} \exp \lambda_i (t-s+1), & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Отметим, что интегральный оператор $W = (W_1, \ldots, W_n) : L^n \to AC^n$ является антитонным. Вследствие этого свойства и принятых предположений для полученного интегрального оператора оказывается выполненным [12, следствие 2], из которого и вытекает разрешимость рассматриваемой краевой задачи.

При доказательстве существования наименьшей и наибольшей функции во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи (1.1), (1.2), используются результаты [12] о минимальном решении операторных уравнений и свойства оператора Немыцкого.

Применим теорему 2.1 к периодической краевой задаче. Это возможно, так как для коэффициентов в условии (1.3) справедливо следующее предположение теоремы 2.1

$$\gamma_{1i} = -1 < 0, \quad 0 < \gamma_{0i} = -1 < -\gamma_{1i} \exp \lambda_i.$$

Как и выше предполагаем, что выполнено условие $(\mathbf{G}\!\downarrow)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ выполнены неравенства*

$$\nu_i(0) - \nu_i(1) \ge \eta_i(0) - \eta_i(1), \quad \dot{\nu}_i - \lambda_i \nu_i \ge \dot{\eta}_i - \lambda_i \eta_i, \quad i = \overline{1,n},$$

и неравенства (2.1)*. Тогда для любых A_i таких, что*

$$\eta_i(0) - \eta_i(1) \le A_i \le \nu_i(0) - \nu_i(1), \quad i = \overline{1,n},$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи (1.1), (1.3)*, удовлетворяющее неравенствам* (2.2)*; кроме того, существует наименьшая и наибольшая функции во множестве всех функций вида $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи* (1.1), (1.3)*, удовлетворяющее неравенствам* (2.2)*.*

Сформулированные в следствии 2.1 условия разрешимости периодической краевой задачи (1.1), (1.3) были получены в [12, теорема 3], но в цитируемой работе не было установлено существование наибольшего и наименьшего решений.

References

[1] С. А. Чаплыгин, “Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений”, *Собрание сочинений.* Т. 1, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, “Foundations of a new method of approximate integration of differential equations”, *Collected Works.* V. I, Gostekhizdat, Moscow, 1948, 348–368 (In Russian)].

[2] Н. Н. Лузин, “О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина”, *УМН*, **6**:6(46) (1951), 3–27. [N. N. Luzin, “On the method of approximate integration of academician S. A. Chaplygin”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **6**:6(46) (1951), 3–27 (In Russian)].

[3] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[4] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференц. уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Ordered-Covering Mappings and Implicit Differential Inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[5] Т. В. Жуковская, И. Д. Серова, “Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом”, *Материалы Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 85-летию профессора М. Т. Терёхина. Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина, Рязань, 17–18 мая 2019 г. Часть 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **186**, ВИНИТИ РАН, М., 2020, 38–44. [T. V. Zhukovskaya, I. D. Serova, “On estimates of solutions of boundary-value problems for implicit differential equations with deviating argument”, *Proceedings of the All-Russian Scientific Conference ≪Differential Equations and Their Applications≫ Dedicated to the 85th Anniversary of Professor M. T. Terekhin. Ryazan State University named for S. A. Yesenin, Ryazan, May 17-18, 2019. Part 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **186**, VINITI, Moscow, 2020, 38–44 (In Russian)].

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces”, *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[7] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах”, *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On coincidence points of mappings in partially ordered spaces”, *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[8] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах”, *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[9] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Topology and Its Applications*, **201** (2016), 330–343.

[10] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[11] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, И. Д. Серова, “Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 345–358. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, I. D. Serova, “Some questions of the analysis of mappings of metricand partially ordered spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 345–358 (In Russian)].

[12] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференц. уравнения*, **56**:11 (2021), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2021), 1440–1451.

[13] Н. В. Азбелев, “Как это было (Об основных этапах развития современной теории функционально-дифференциальных уравнений)”, *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*, **9**:1(17) (2003), 1–22. [N. V. Azbelev, “How it was (On the main stages of development of modern theory of functional-differential equations)”, *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, **9**:1(17) (2003), 1–22 (In Russian)].

Информация об авторе

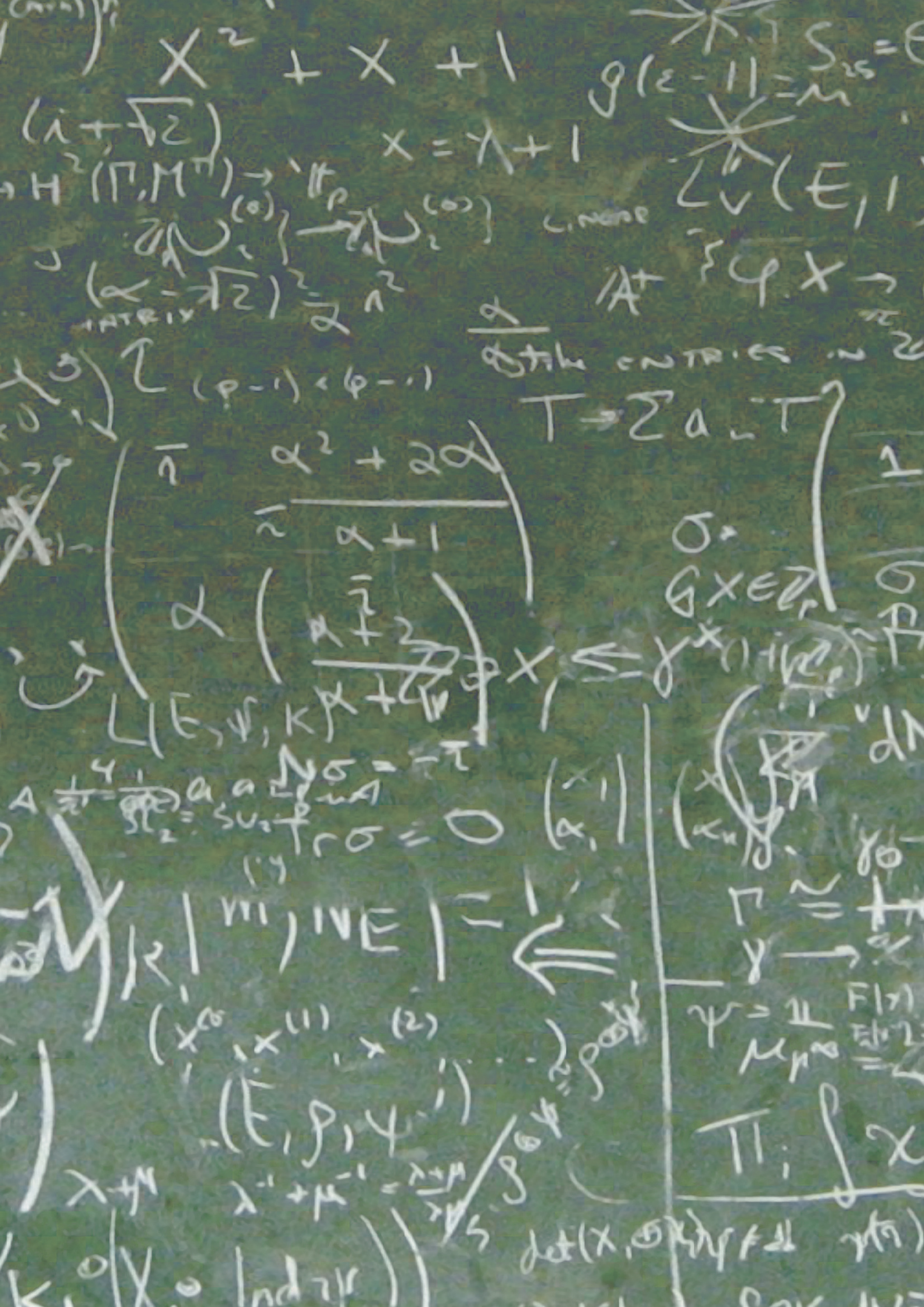
Бенараб Сарра, аспирант, Лаборатория прикладной математики и моделирования, Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Поступила в редакцию 06.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 04.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Sarra Benarab, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory, University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria.
E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Received 06.04.2021
Reviewed 04.06.2021
Accepted for press 10.06.2021



X^2 + X + 1
x = λ + 1
T → Σ a_n T
tr σ = 0