

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК
РОССИЙСКИХ
УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN
UNIVERSITIES
REPORTS
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 30
№ 149
2025

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 30, № 149,
2025

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям:
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки);
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	3
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>Д.Н. Баротов, Р.Н. Баротов</i>	О множестве непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции 5
<i>А.В. Грешинов</i>	Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке 15
<i>С.М. Дзюба</i>	О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях 28
<i>А.Ф. Измаилов, Е.И. Усков</i>	Гибридная глобализация сходимости метода Левенберга–Марквардта для задач оптимизации с ограничениями-равенствами 41
<i>М.Р. Лангаршоев, С.С. Хоразмишоев</i>	О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2 56
<i>Л.И. Родина</i>	Об оценках характеристик сбора ресурса для стохастических структурированных популяций 66
<i>Д.Л. Ступин</i>	Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами 79

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Лансеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>;
<https://journals.rcsi.science/2686-9667>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редактор: М.И. Филатова
Редактор английских текстов: Н.А. Михайлова
Технический редактор: Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь: М.В. Борзова
Администраторы сайта: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. 92 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149>

Подписано в печать 21.03.2025. Дата выхода в свет 04.04.2025
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 11,5. Усл. печ. л. 10,7. Тираж 1000 экз. Заказ № 25039. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Контент доступен под лицензией [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 30, no. 149,
2025**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:

- 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
- 1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>D.N. Barotov, R.N. Barotov</i>	On the set of continuously differentiable concave extensions of a Boolean function	5
<i>A.V. Greshnov</i>	About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem	15
<i>S.M. Dzyuba</i>	On some properties of motions of dynamical systems on compact manifolds	28
<i>A.F. Izmailov, E.I. Uskov</i>	Hybrid globalization of convergence of the Levenberg–Marquardt method for equality-constrained optimization problems	41
<i>M.R. Langarshoev, S.S. Khorazmshoev</i>	On the best approximation of some classes of periodic functions in the space L_2 .	56
<i>L.I. Rodina</i>	Estimates of harvesting characteristics for stochastic structured populations	66
<i>D.L. Stupin</i>	Sharp estimate of the third coefficient for bounded non-vanishing holomorphic functions with real coefficients	79

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponosov, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>;
<https://journals.rcsi.science/2686-9667>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editor: M.I. Filatova
English texts editor: N.A. Mikhailova
Technical editor: Y.A. Biryukova
Technical secretary: M.V. Borzova
Web-site administrators: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova

For citation:

Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics, **30**:149 (2025), 92 p.
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149>

Signed for printing 21.03.2025. Release date 04.04.2025
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 11,5. Conv. pr. sheet 10,7. Copies printed 1000. Order no. 25039. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Баротов Д.Н., Баротов Р.Н., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14>

УДК 519.716.322, 519.85, 517.518.244



О множестве непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции

Достонжон Нумонжонович БАРОТОВ¹, Рузибой Нумонжонович БАРОТОВ²

¹ ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

125167, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Ленинградский, 49/2

² Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова

735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию существования экстремальных элементов множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множестве $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$, а также нахождению мощности множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$. В результате исследования доказано, что, во-первых, для любой булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ нет максимального элемента, во-вторых, если у булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ более одной существенной переменной, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ нет и минимального элемента, а если булева функция постоянна или имеет лишь одну существенную переменную, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ существует единственный минимальный элемент, явная форма которого приведена в работе. Также установлено, что мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ равна континууму.

Ключевые слова: непрерывно дифференцируемое вогнутое продолжение булевой функции, экстремальные элементы множества, мощность множества

Для цитирования: Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. О множестве непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 5–14.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. N. Barotov, R. N. Barotov, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14>

On the set of continuously differentiable concave extensions of a Boolean function

Dostonjon N. BAROTOV¹, Ruziboy N. BAROTOV²¹ Financial University under the Government of the Russian Federation
49/2 Leningradsky Prospekt, Moscow 125167, Russian Federation² Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov
1 Mavlonbekova, Khujand 735700, Republic of Tajikistan

Abstract. This paper is devoted to the study of the existence of extremal elements of the set of continuously differentiable concave extensions to the set $[0, 1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1, \dots, x_n)$, as well as finding the cardinality of the set of continuously differentiable concave extensions to $[0, 1]^n$ of the Boolean function $f_B(x_1, \dots, x_n)$. As a result of the study, it is proved that, firstly, for any Boolean function $f_B(x_1, \dots, x_n)$ among its continuously differentiable concave extensions to $[0, 1]^n$ there is no maximal element, secondly, if the Boolean function $f_B(x_1, \dots, x_n)$ has more than one essential variable, then among its continuously differentiable concave extensions to $[0, 1]^n$ there is no minimal element, and if the Boolean function is constant or has only one essential variable, then among its continuously differentiable concave extensions to $[0, 1]^n$ there is a unique minimal element, the explicit form of which is given in the paper. It was also established that the cardinality of the set of continuously differentiable concave extensions to $[0, 1]^n$ of an arbitrary Boolean function $f_B(x_1, \dots, x_n)$ is equal to the continuum.

Keywords: continuously differentiable concave extension of a Boolean function, extremal elements of a set, cardinality of a set

Mathematics Subject Classification: 06E30, 54C20, 03E17.

For citation: Barotov D.N., Barotov R.N. On the set of continuously differentiable concave extensions of a Boolean function. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 5–14.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-5-14>

Введение

Системы булевых уравнений широко используются в математике, компьютерных и прикладных науках [1]. По этой причине, с одной стороны, решению систем булевых уравнений посвящено значительное количество работ, разработано несколько направлений исследования и алгоритмов их решения [2–4]. С другой стороны, и в настоящее время, в связи с тем, что задача решения систем булевых уравнений в общем случае является NP-трудной, в научном сообществе продолжает расти интерес к поиску новых алгоритмов их решения в различных направлениях как в классических, так и в квантовых моделях вычислений [5, 6]. Одним из таких направлений исследования для решения систем булевых уравнений является преобразование (трансформация) заданной системы булевых уравнений путем представления некоторого вещественного продолжения (аналога) для каждой булевой функции в систему уравнений над полем действительных чисел, поскольку, во-первых, в этой области известно много методов и алгоритмов решения систем, а во-вторых, его можно использовать и при решении смешанных систем, т. е. систем, заданных одновременно математическими и логическими операциями [7, 8]. В свою очередь, преобразованная система вещественных уравнений может быть сведена в задачу непрерывной оптимизации, так как принципиальное отличие данного подхода от «переборных» алгоритмов локального поиска состоит в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по градиенту (антиградиенту) производится по всем переменным одновременно [9]. В данном направлении сравнительно недавно получены некоторые важные результаты, а именно, рассмотрено построение выпуклых [10–12], полилинейных [13, 14] и вогнутых [15, 16] продолжений булевых функций, представляющих интерес при преобразовании систем булевых уравнений к задаче непрерывной оптимизации. Также изучены свойства таких продолжений, в том числе в [12, 15] доказано, что для произвольной булевой функции от n переменных существует единственная вещественная функция, являющаяся минимумом (максимумом) среди всех ее вогнутых (выпуклых) продолжений.

Данная статья является продолжением статьи [15] и посвящается исследованию существования экстремальных элементов множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множество $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и нахождению мощности множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на множество $[0, 1]^n$ булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Доказывается, что, во-первых, для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ нет максимума, во-вторых, если число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ нет и минимума, а если число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ есть минимум. Также обосновывается, что мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $[0, 1]^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ равна континууму.

1. Используемые понятия, обозначения, множества и определения

Пусть $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, $\mathbb{K} = [0, 1]$ и задана булева функция $f_B : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$. Основные обозначения и определения, приведенные в [15], считаем известными и приводим лишь недостающие определения и обозначения.

О п р е д е л е н и е 1.1. Будем называть переменную x_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ *существенной* (или говорить, что булева функция $f_B(x_1, \dots, x_n)$ *существенно зависит от x_k*), если имеет место соотношение

$$f_B(x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \neq f_B(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Отображение $f_R : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

- a) f_R является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией,
- b) имеет место равенство

$$f_R(b_1, \dots, b_n) = f_B(b_1, \dots, b_n) \quad \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n.$$

О п р е д е л е н и е 1.3. Отображение $f_{NR} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

- a) f_{NR} является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B ,
- b) для любого непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения f_R булевой функции f_B на $\mathbb{K}^n$ и любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство

$$f_{NR}(x_1, \dots, x_n) \leq f_R(x_1, \dots, x_n).$$

О п р е д е л е н и е 1.4. Отображение $f_{DM} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *максимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений* на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$, если выполняются следующие два условия:

- a) f_{DM} является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B ,
- b) для любого непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения f_R булевой функции f_B на $\mathbb{K}^n$ и любой точки $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ справедливо неравенство

$$f_R(x_1, \dots, x_n) \leq f_{DM}(x_1, \dots, x_n).$$

Пусть $E(f_B, \mathbb{K}^n)$ — множество непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$.

2. Основные результаты

Начнем изложение с обоснования следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 2.1. Для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множество ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ не является пустым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае $f_B(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим нетривиальный случай $f_B(x_1, \dots, x_n) \neq 1$.

Достаточно показать, что вещественная функция вида

$$f_R(x_1, \dots, x_n) = 1 - \frac{1}{4} \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in f_B^{-1}(0)} \left(\sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 - \left| \sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 \right| \right)^2 \quad (2.1)$$

принадлежит множеству $E(f_B, \mathbb{K}^n)$. Для этого обоснуем справедливость следующих двух свойств:

$f_R(x_1, \dots, x_n)$ является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией; при любых $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ имеет место равенство $f_R(a_1, \dots, a_n) = f_B(a_1, \dots, a_n)$.

Вначале покажем непрерывную дифференцируемость функции $f_R(x_1, \dots, x_n)$. Нетрудно заметить, что при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ имеет место

$$\begin{aligned} \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in f_B^{-1}(0)} (2b_i - 1) \left(\sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 - \left| \sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 \right| \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} f_R(x_1, \dots, x_n) \in C(\mathbb{K}^n). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем $f_R(x_1, \dots, x_n) \in C^1(\mathbb{K}^n)$.

Теперь покажем, что функция $f_R(x_1, \dots, x_n)$ является вогнутой. Ввиду вогнутости функции $\varphi(y) = -\frac{1}{4}(y - |y|)^2$ и линейности функции $\psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1$ получаем, что функция

$$\varphi(\psi(x_1, \dots, x_n)) = -\frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 - \left| \sum_{k=1}^n (x_k + b_k - 2b_k x_k) - 1 \right| \right)^2 \quad (2.2)$$

является вогнутой. А в силу (2.1) и (2.2) получаем, что функция $f_R(x_1, \dots, x_n)$ как сумма вогнутых функций сама является вогнутой.

Остается заметить, что для любой точки $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ выполнено

$$\begin{aligned} f_R(a_1, \dots, a_n) \\ = 1 - \frac{1}{4} \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in f_B^{-1}(0)} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k - 2b_k a_k) - 1 - \left| \sum_{k=1}^n (a_k + b_k - 2b_k a_k) - 1 \right| \right)^2 \\ = 1 - \frac{1}{4} \begin{cases} 4, & \text{если } (a_1, \dots, a_n) \in f_B^{-1}(0) \\ 0, & \text{если } (a_1, \dots, a_n) \notin f_B^{-1}(0) \end{cases} = 1 + f_B(a_1, \dots, a_n) - 1 = f_B(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Итак, функция f_R , определенная формулой (2.1), является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^n$ булевой функции f_B . $\square$

Теперь, основываясь на доказанной лемме 2.1, докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Для любой булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ мощность множества ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ равна континууму.*

Доказательство. Множество $E(f_B, \mathbb{K}^n)$, очевидно, является подмножеством множества всех непрерывных функций, заданных на $\mathbb{K}^n$, т. е. имеет место вложение

$$E(f_B, \mathbb{K}^n) \subset C(\mathbb{K}^n). \quad (2.3)$$

Выберем произвольный элемент g_R из непустого, согласно лемме 2.1, множества $E(f_B, \mathbb{K}^n)$ и, используя его, для произвольного $\alpha \in (0, +\infty)$ определим функцию

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_n) = g_R(x_1, \dots, x_n) + \alpha \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^2). \quad (2.4)$$

Покажем, что при любом $\alpha \in (0, +\infty)$ имеет место включение

$$g_\alpha(x_1, \dots, x_n) \in E(f_B, \mathbb{K}^n). \quad (2.5)$$

Для этого проверим справедливость следующих двух свойств:

$g_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ является непрерывно дифференцируемой вогнутой на $\mathbb{K}^n$ функцией;
при любых $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ имеет место равенство $g_\alpha(a_1, \dots, a_n) = f_B(a_1, \dots, a_n)$.

Вначале покажем непрерывную дифференцируемость функции g_α . В силу включений $g_R(x_1, \dots, x_n) \in C^1(\mathbb{K}^n)$ и $\alpha \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^2) \in C^1(\mathbb{K}^n)$ имеем $g_\alpha(x_1, \dots, x_n) \in C^1(\mathbb{K}^n)$.

Далее, ввиду вогнутости функции $\sum_{k=1}^n (x_k - x_k^2)$ на $\mathbb{K}^n$ и $\alpha > 0$ имеем, что функция $g_\alpha(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$ как сумма двух вогнутых функций является вогнутой.

Покажем, что g_α является продолжением булевой функции f_B . Пусть $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} g_\alpha(a_1, \dots, a_n) &= g_R(a_1, \dots, a_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_k^2) = g_R(a_1, \dots, a_n) + \alpha \cdot \sum_{k=1}^n (a_k - a_k) \\ &= g_R(a_1, \dots, a_n) + 0 = f_B(a_1, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Итак, включение (2.5) установлено.

В силу определения (2.4) функции g_α получаем, что при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, +\infty)$, $\alpha_1 < \alpha_2$ и всех $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{int}(\mathbb{K}^n)$ справедлива цепочка неравенств

$$g_R(x_1^*, \dots, x_n^*) < g_{\alpha_1}(x_1^*, \dots, x_n^*) < g_{\alpha_2}(x_1^*, \dots, x_n^*). \quad (2.6)$$

Ввиду (2.5) получаем, что имеет место вложение

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1)} \{g_\alpha\} \subset E(f_B, \mathbb{K}^n). \quad (2.7)$$

Отсюда, в силу равенства $\text{card}\left(\bigcup_{\alpha \in (0,1)} \{g_\alpha\}\right) = c$, вытекающего из (2.6), и $\text{card}(C(\mathbb{K}^n)) = c$, а также включений (2.3), (2.7), получаем $\text{card}(E(f_B, \mathbb{K}^n)) = c$, т. е. мощность множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ равна континууму. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что из приведенного выше доказательства теоремы 2.1 следует, что для любой булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ нет максимума.

З а м е ч а н и е 2.2. Отметим, что справедливость теоремы 1, приведенной в [15], очевидным образом следует из доказанной выше теоремы 2.1, поскольку для любой булевой функции $f_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ мощность множества ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ равна континууму и, следовательно, мощность множества всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ не меньше континуума.

Теперь сформулируем и докажем теорему о существовании минимального непрерывно дифференцируемого вогнутого продолжения на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$.

Теорема 2.2. *Если число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ нет минимума, а если это число не больше единицы, то среди ее непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ есть минимум.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ не больше единицы. В этом случае достаточно рассмотреть булеву функцию $f_B(x)$, зависящую только от одной, не обязательно существенной, переменной x . Согласно [15, следствие 1] имеем, что для булевой функции $f_B(x)$ вещественная функция

$$f_{BD}(x) = (1 - x)f_B(0) + xf_B(1) \quad (2.8)$$

является единственным минимумом среди всех ее вогнутых продолжений на $\mathbb{K}$. Так как функция $f_{BD}(x)$, определенная формулой (2.8), непрерывно дифференцируема, то она также является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений булевой функции $f_B(x)$, т. е.

$$f_{NR}(x) = (1 - x)f_B(0) + xf_B(1).$$

Случай 2. Пусть число существенных переменных булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ больше единицы. В этом случае, без потери общности будем считать, что все переменные $x_1, \dots, x_n$ булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ являются существенными. Докажем от противного. Предположим, что утверждение не верно: существует вещественная функция $f_{NR}(x_1, \dots, x_n)$, которая является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$. Тогда при любом заданном $(b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^{n-2}$ «суженная» вещественная функция двух аргументов $f_{NR}(b_1, \dots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, x_j, b_{j+1}, \dots, b_n)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ «суженной» булевой функции $f_B(b_1, \dots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_{j-1}, x_j, b_{j+1}, \dots, b_n)$. Согласно доказанному в [17, 18], существует булева функция, существенно зависящая от двух своих переменных, равная самой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ в случае $n = 2$, которая является подфункцией булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, существуют $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$ и точка $(b_1^*, \dots, b_{i-1}^*, b_{i+1}^*, \dots, b_{j-1}^*, b_{j+1}^*, \dots, b_n^*) \in \mathbb{B}^{n-2}$ такие, что переменные x_i и x_j суженной булевой функции $f_B(b_1^*, \dots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \dots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \dots, b_n^*)$ являются существенными. Отсюда получаем, что вещественная функция вида

$$g_{NR}(x_i, x_j) = f_{NR}(b_1^*, \dots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \dots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \dots, b_n^*)$$

является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции

$$g_B(x_i, x_j) = f_B(b_1^*, \dots, b_{i-1}^*, x_i, b_{i+1}^*, \dots, b_{j-1}^*, x_j, b_{j+1}^*, \dots, b_n^*),$$

существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j .

Для завершения доказательства теоремы покажем, что среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j , нет минимума. Доказательство этого факта

также проводим от противного. Пусть некоторая вещественная функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$. В силу [15, следствие 2] получим, что при любых $(x_i, x_j) \in \mathbb{K}^2$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} g_{NR}(x_i, x_j) &\geq g_{BD}(x_i, x_j) = (1 - x_i - x_j)g_B(0, 0) + x_i g_B(1, 0) + x_j g_B(0, 1) \\ &\quad + \frac{g_B(0, 0) - g_B(0, 1) - g_B(1, 0) + g_B(1, 1)}{4} (2x_i + 2x_j - 1 - |x_i - x_j| + |x_i + x_j - 1|) \\ &\quad - \frac{|g_B(0, 0) - g_B(0, 1) - g_B(1, 0) + g_B(1, 1)|}{4} (|x_i - x_j| + |x_i + x_j - 1| - 1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

так как $g_{BD}(x_i, x_j)$ является минимумом среди всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$. Нетрудно показать, что для каждой булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, существенно зависящей от своих двух переменных x_i и x_j , выполнено неравенство

$$g_B(0, 0) - g_B(0, 1) - g_B(1, 0) + g_B(1, 1) \neq 0. \quad (2.10)$$

Ввиду (2.9) и (2.10) функция $g_{BD}(x_i, x_j)$ на $\mathbb{K}^2$ не является дифференцируемой и, следовательно, существует точка $(x_i^*, x_j^*) \in \mathbb{K}^2$ такая, что выполняется следующее строгое неравенство

$$g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_{BD}(x_i^*, x_j^*). \quad (2.11)$$

Действительно, в противном случае $g_{NR}(x_i, x_j) \equiv g_{BD}(x_i, x_j)$, а это противоречит к тому, что функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ на $\mathbb{K}^2$ непрерывно дифференцируема.

Теперь, ввиду неравенства (2.11), эквивалентного неравенству $g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_1(x_i^*, x_j^*)$, нетрудно показать (например, рассмотрев два случая относительно знака левой части (2.10) и заметив, что функция $g_\beta(x_i^*, x_j^*)$ по β непрерывна на $[1, +\infty)$ и не убывает на $[1, +\infty)$), что существует $\beta^* \in (1, +\infty)$ такое, что выполняется следующее строгое неравенство

$$g_{NR}(x_i^*, x_j^*) > g_{\beta^*}(x_i^*, x_j^*), \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} g_\beta(x_i, x_j) &= (1 - x_i - x_j)g_B(0, 0) + x_i g_B(1, 0) + x_j g_B(0, 1) \\ &\quad + \frac{g_B(0, 0) - g_B(0, 1) - g_B(1, 0) + g_B(1, 1)}{4} (2x_i + 2x_j - 1 - |x_i - x_j|^\beta + |x_i + x_j - 1|^\beta) \\ &\quad - \frac{|g_B(0, 0) - g_B(0, 1) - g_B(1, 0) + g_B(1, 1)|}{4} (|x_i - x_j|^\beta + |x_i + x_j - 1|^\beta - 1), \quad \beta \geq 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

И наконец, несложно проверить непосредственно, что функция $g_\beta(x_i, x_j)$, определенная формулой (2.13), для каждого $\beta > 1$, в частности для $\beta = \beta^*$ является непрерывно дифференцируемым вогнутым продолжением на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$.

Итак, неравенство (2.12) противоречит сделанному выше предположению о том, что вещественная функция $g_{NR}(x_i, x_j)$ является минимумом среди непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^2$ булевой функции $g_B(x_i, x_j)$, которая существенно зависит от двух своих переменных x_i и x_j . $\square$

Заключение

В качестве заключения отметим, что свойства множества непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ с точки зрения упорядоченности заметно отличаются от свойств множества всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ этой булевой функции. А именно, согласно [15, теорема 2], множество всех вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ произвольной булевой функции $f_B(x_1, \dots, x_n)$ имеет минимальный элемент, а согласно доказанной выше теореме 2.2 множество непрерывно дифференцируемых вогнутых продолжений на $\mathbb{K}^n$ данной булевой функции имеет минимальный элемент лишь в том случае, когда она существенно зависит не более, чем от одной переменной.

Благодарности: Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение работы и за полезные замечания.

References

- [1] Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов, “Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 20–28. [D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Construction of smooth convex extensions of Boolean functions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 20–28 (In Russian)].
- [2] E. Ishchukova, E. Maro, P. Pristalov, “Algebraic analysis of a simplified encryption algorithm GOST R 34.12-2015”, *Computation*, **8**:2 (2020), 51.
- [3] В. К. Леонтьев, Э. Н. Гордеев, “О числе решений системы булевых уравнений”, *Автомат. и телемех.*, 2021, №9, 150–168; англ. пер.: V. K. Leontiev, E. N. Gordeev, “On the number of solutions to a system of Boolean equations”, *Autom. Remote Control*, **82**:9 (2021), 1581–1596.
- [4] М. А. Мальцева, А. С. Румянцев, “Проверка выполнимости булевых формул с помощью квантового отжига”, *Труды Карельского научного центра РАН*, 2023, №4, 41–49. [M. A. Maltseva, A. S. Rumyantsev, “Boolean satisfiability verification by quantum annealing”, *Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2023, №4, 41–49 (In Russian)].
- [5] S. Ramos-Calderer, C. Bravo-Prieto, R. Lin, E. Bellini, M. Manzano, N. Aaraj, J. Latorre, “Solving systems of Boolean multivariate equations with quantum annealing”, *Phys. Rev. Res.*, **4**:1 (2022), 013096.
- [6] A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, G. B. Lesovik, “Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO Penalties for cryptanalysis”, *Algorithms*, **15**:2 (2022), 33.
- [7] J. Gu, Q. Gu, D. Du, “On optimizing the satisfiability (SAT) problem”, *Journal of Computer Science and Technology*, **14**:1 (1999), 1–17.
- [8] Д. Н. Баротов, Д. З. Музафаров, Р. Н. Баротов, “Об одном методе решения систем булевых алгебраических уравнений”, *Современная математика и концепции инновационного математического образования*, **8**:1 (2021), 17–23. [D. N. Barotov, D. Z. Muzafarov, R. N. Barotov, “On one method for solving systems of Boolean algebraic equations”, *Mod. Math. Concept Innov. Math. Educ.*, **8**:1 (2021), 17–23 (In Russian)].
- [9] Р. Т. Файзуллин, В. И. Дулькейт, Ю. Ю. Огородников, “Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимости, ассоциированной с задачей факторизации”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **19**, 2013, 285–294. [R. T. Faizullin, V. I. Dul’keit, Yu. Yu. Ogorodnikov, “Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **19**, 2013, 285–294 (In Russian)].
- [10] Д. Н. Баротов, “Выпуклое продолжение булевой функции и его приложения”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **31**:1 (2024), 5–18; англ. пер.: D. N. Barotov, “Convex continuation of a Boolean function and its applications”, *J. Appl. Ind. Math.*, **18**:1 (2024), 1–9.
- [11] Д. Н. Баротов, “О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций”, *Матем. заметки*, **115**:4 (2024), 533–551; англ. пер.: D. N. Barotov, “On the existence and properties of convex extensions of Boolean functions”, *Math. Notes*, **115**:4 (2024), 489–505.

- [12] Д. Н. Баротов, “Выпуклые продолжения некоторых дискретных функций”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **31**:3 (2024), 5–23; англ. пер.: D. N. Barotov, “Convex continuations of some discrete functions”, *J. Appl. Ind. Math.*, **18**:3 (2024), 412–423.
- [13] D. N. Barotov, “Target function without local minimum for systems of logical equations with a unique solution”, *Mathematics*, **10**:12 (2022), 2097.
- [14] Д. Н. Баротов, Р. Н. Баротов, “Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения”, *Вычислительные методы и программирование*, **24**:1 (2023), 10–23. [D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Polylinear continuations of some discrete functions and an algorithm for finding them”, *Numerical Methods and Programming*, **24**:1 (2023), 10–23 (In Russian)].
- [15] Д. Н. Баротов, “Вогнутые продолжения булевых функций и некоторые их свойства и приложения”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, **49** (2024), 105–123. [D. N. Barotov, “Concave continuations of Boolean functions and some of their properties and applications”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **49** (2024), 105–123 (In Russian)].
- [16] Д. Н. Баротов, В. А. Судаков, “О неравенствах между выпуклыми, вогнутыми и полилинейными продолжениями булевых функций”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2024, № 30, 1–13. [D. N. Barotov, V. A. Sudakov, “On inequalities between convex, concave, and multilinear continuations of Boolean functions”, *Keldysh Institute preprints*, 2024, № 30, 1–13 (In Russian)].
- [17] A. Salomaa, “On essential variables of functions, especially in the algebra of logic”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math.*, 1963, № 339, 1–11.
- [18] Ю. Я. Брейтбарт, “О существенных переменных функций алгебры логики”, *Докл. АН СССР*, **172**:1 (1967), 9–10. [Yu. Ya. Breitbart, “Essential variables of functions of the algebra of logic”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **172**:1 (1967), 9–10 (In Russian)].

Информация об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович, старший преподаватель кафедры математики и анализа данных, Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5047-7710>

Баротов Рузибой Нумонжонович, преподаватель кафедры математического анализа им. профессора А. Мухсинова, Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова, г. Худжанд, Республика Таджикистан. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3729-6143>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Баротов Достонжон Нумонжонович
 E-mail: DNBarotov@fa.ru

Поступила в редакцию 09.11.2024 г.
 Поступила после рецензирования 17.02.2025 г.
 Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the authors

Dostonjon N. Barotov, Senior Lecturer, Mathematics and Data Analysis Department, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5047-7710>

Ruziboy N. Barotov, Lecturer, Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov Department, Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Republic of Tajikistan. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3729-6143>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Dostonjon N. Barotov
 E-mail: DNBarotov@fa.ru

Received 09.11.2024
 Reviewed 17.02.2025
 Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Грешнов А.В., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27>

УДК 517+515.126.4



Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке

Александр Валерьевич ГРЕШНОВ

ФГАОУ ВО «Новосибирский государственный университет»

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 1

Аннотация. На симметрическом $(1, q_2)$ -квазиметрическом пространстве $(\mathbb{H}_\alpha^1, \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1})$, где $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ — Вох-квазиметрика первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$, исследована константа L_Φ в оценке устойчивости $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{L_\Phi \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi(u))}{1-\varepsilon}$ ε -сжимающих отображений Φ по отношению к тождественному отображению; здесь ξ — неподвижная точка отображения Φ , u — произвольная точка группы $\mathbb{H}_\alpha^1$. В работе установлено, что $L_\Phi = 1$ в случае, когда отображение Φ представляет собой композицию левого сдвига и однородной подгруппы растяжений. Построены примеры сжимающих отображений Φ первой группы Гейзенберга таких, что константа L_Φ не менее, чем $C\sqrt{q_2}$, где положительная константа C не зависит от выбора точки $u \in \mathbb{H}_\alpha^1$.

Ключевые слова: (q_1, q_2) -квазиметрика, Вох-квазиметрика, каноническая группа Карно, сжимающие отображения, оценки устойчивости, неподвижная точка

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00319, <https://rscf.ru/project/24-21-00319/>).

Для цитирования: Грешнов А.В. Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 15–27. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. V. Greshnov, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27>

About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem

Alexandr V. GRESHNOV

Novosibirsk State University (NSU)

1 Pirogova St., Novosibirsk 630090, Russian Federation

Abstract. On a symmetric $(1, q_2)$ -quasimetric space $(\mathbb{H}_\alpha^1, \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1})$, where $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ is the Box-quasimetric of the first Heisenberg group $\mathbb{H}_\alpha^1$, we studied a constant L_Φ in the estimate $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{L_\Phi \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi(u))}{1-\varepsilon}$ of stability of the ε -contracting mapping Φ with respect to the identity mapping; here ξ is a fixed point of the mapping Φ and u is an arbitrary point of $\mathbb{H}_\alpha^1$. In the paper, we got that $L_\Phi = 1$ when the mapping Φ is the composition of the left translation and the homogeneous dilation subgroup. Examples of the contracting mappings Φ on the first Heisenberg group such that L_Φ is not less than $C\sqrt{q_2}$ were found; here positive constant C does not depend on the choice of point $u \in \mathbb{H}_\alpha^1$.

Keywords: (q_1, q_2) -quasimetric, Box-quasimetric, canonical Carnot group, contraction mapping, estimates of stability, fixed point

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00319, <https://rscf.ru/project/24-21-00319/>).

Mathematics Subject Classification: 53C17, 34C05.

For citation: Greshnov A.V. About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 15–27.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-15-27>

Введение

(q_1, q_2) -квазиметрическим пространством [1–3] называется пара (X, ρ_X) , где X — некоторое множество, содержащее не менее двух элементов, $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ — некоторая функция, удовлетворяющая аксиоме тождества

$$\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(в этом случае говорят, что ρ_X — *функция расстояния*) и (q_1, q_2) -обобщенному неравенству треугольника, т. е.

$$\rho_X(x, y) \leq q_1 \rho_X(x, z) + q_2 \rho_X(z, y) \quad \forall x, y, z \in X, \quad q_1, q_2 > 0.$$

Если $q_1 = q_2 = 1$, тогда (X, ρ_X) — квазиметрическое пространство [4]. Если для (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, ρ_X) выполняется условие *обобщенной симметрии*

$$\rho_X(x, y) \leq q_0 \rho_X(y, x) \quad \forall x, y \in X,$$

где константа $q_0 > 0$ не зависит от выбора x, y , то (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является q_0 -симметрическим; в случае $q_0 = 1$ используется понятие метрического (q_1, q_2) -квазиметрического пространства. Метрическое пространство — это симметрическое $(1, 1)$ -квазиметрическое пространство.

Нетривиальными примерами (q_1, q_2) -квазиметрических пространств являются пространства $(L_p(E), \rho_{L_p(E)})$, $\rho_{L_p(E)}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_p$, где $0 < p < 1$, E — измеримое ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_p$ — стандартная норма пространства $L_p(E)$, и пространства Карно–Каратеодори $\mathcal{M}$, снабженные $\text{Box}_{\mathcal{M}}$ -квазиметриками [5–9].

В работах А. В. Арутюнова и А. В. Грешнова [1–3] были введены (q_1, q_2) -квазиметрические пространства и исследованы их свойства, изучены накрывающие отображения, действующие из одного (q_1, q_2) -квазиметрического пространства в другое, получены достаточные условия существования точек совпадения двух отображений, действующих в этих пространствах и удовлетворяющих предположению о том, что одно из этих отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица.

Пусть заданы отображения $\Psi, \Phi : (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$, а также вещественные числа $\alpha > \beta \geq 0$.

О п р е д е л е н и е 0.1. Точка $x \in X$ называется точкой совпадения Ψ, Φ , если

$$\Psi(x) = \Phi(x).$$

Пусть $B_X(x, r) = \{y \in X \mid \rho_X(x, y) \leq r\}$.

О п р е д е л е н и е 0.2. Отображение Ψ называется α -накрывающим, если

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subseteq \Psi(B_X(x, r)) \quad \forall r \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

О п р е д е л е н и е 0.3. Отображение Φ называется β -липшицевым, если

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Как обычно, $\text{grh}(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$ — *график* отображения $F : (X, \rho_X) \rightarrow (Y, \rho_Y)$.

О п р е д е л е н и е 0.4. Отображение F замкнуто, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ таких, что они сходятся к точкам x_0 и y_0 соответственно и $(x_i, y_i) \in \text{grh}(F) \forall i$, выполняется $(x_0, y_0) \in \text{grh}(F)$.

Символом $\bar{\rho}$ обозначается сопряженная (q_2, q_1) -квазиметрика, определяемая тождеством $\bar{\rho}(x, y) = \rho(y, x)$. Пусть $S(\theta, n) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i$, $n \in \mathbb{N}$, $S(\theta, 0) = 0$ и $\beta^0 = 1$ при $\beta = 0$. Для произвольных $q_0, q_1, q_2 \geq 1$ положим $m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid q_2 \beta^j < \alpha^j\}$, а в предположении, что $q_0^2 \beta < \alpha$ положим $n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid q_1 (q_0^2 \beta)^j < \alpha^j\}$.

Теорема 0.1 ([1–3]). Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) полное, Ψ — α -накрывающее и замкнутое отображение, Φ — β -липшицево отображение. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ , что имеет место оценка

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если пространство (X, ρ_X) является q_0 -симметрическим, то для ξ также имеет место оценка

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{q_1^3 \alpha^{m_0-1} S(q_2 \frac{\beta}{\alpha}, m_0 - 1) + q_1^2 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)),$$

а если, кроме того, $q_0^2 \beta < \alpha$, то для ξ также имеют место оценки

$$\bar{\rho}_X(x_0, \xi) \leq q_0 q_2^2 \frac{q_2 \alpha^{n_0-1} S(q_1 q_0^2 \frac{\beta}{\alpha}, n_0 - 1) + (q_1 q_0^2 \beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1 (q_0^2 \beta)^{n_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)), \quad (0.1)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \bar{\rho}_X(x_0, \eta) \leq q_0 q_2 \frac{q_2 \alpha^{n_0-1} S(q_1 q_0^2 \frac{\beta}{\alpha}, n_0 - 1) + (q_1 q_0^2 \beta)^{n_0-1}}{\alpha^{n_0} - q_1 (q_0^2 \beta)^{n_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \quad (0.2)$$

Теорема 0.2 ([1–3]). Пусть (X, ρ_X) — полное, Ψ — α -накрывающее и замкнутое, Φ — β -липшицево. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$.

1⁰ Пусть $q_1 = 1$. Тогда у отображений Ψ и Φ существует такая точка совпадения ξ , что имеет место оценка

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{\alpha - \beta + q_2 \beta}{\alpha(\alpha - \beta)} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \quad (0.3)$$

2⁰ Пусть пространство (X, ρ_X) является q_0 -симметрическим, $q_0^2 \beta < \alpha$ и $q_2 = 1$. Тогда существует такая точка совпадения ξ , что имеет место оценка

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq q_0 \frac{q_1 q_0^2 \beta + \alpha - q_0^2 \beta}{\alpha(\alpha - q_0^2 \beta)} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \quad (0.4)$$

Пусть $X = Y$ и $\Psi = \text{Id}$ — тождественное отображение. Тогда $\alpha = 1$, условие $\beta < 1$ означает, что отображение Φ является сжимающим, а точка совпадения превращается в неподвижную точку. Используя свойства (q_1, q_2) -квазиметрических пространств, мы получаем следующую теорему, см. [1].

Теорема 0.3 (теорема о неподвижной точке сжимающего отображения). *Замкнутое сжимающее с коэффициентом $\varepsilon \in (0, 1)$ отображение Φ полного (q_1, q_2) -квазиметрического пространства (X, ρ_X) в себя имеет неподвижную точку ξ , причем единственную. При этом*

1⁰ пусть $q_1 = 1$. Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ имеет место оценка

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{1 - \varepsilon + q_2 \varepsilon}{1 - \varepsilon} \rho_X(x_0, \Phi(x_0)), \quad (0.5)$$

2⁰ пусть $q_0^2 \varepsilon < 1$ и $q_2 = 1$. Тогда для произвольной точки $x_0 \in X$ имеет место оценка

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq q_0 \frac{q_1 q_0^2 \varepsilon + 1 - q_0^2 \varepsilon}{1 - q_0^2 \varepsilon} \rho_X(x_0, \Phi(x_0)). \quad (0.6)$$

Оценки (0.1)–(0.4) можно рассматривать в некотором смысле как оценки устойчивости липшицева отображения по отношению к накрывающему отображению. Такие оценки важны при практическом использовании теорем о точках совпадения накрывающих и липшицевых отображений (теорем о неподвижной точке сжимающих отображений). В работе [1] были построены примеры, доказывающие, что оценки (0.1)–(0.4) имеют универсальный характер и в общем случае не улучшаемы. Таким образом, нахождение оптимальных оценок в (0.1)–(0.4) напрямую связано с нахождением оптимальных значений констант q_1 , q_2 , в частности, минимального значения константы q_2 , см. (0.3), (0.5). С другой стороны, многое зависит от природы (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и рассматриваемых там отображений. Для (важных) частных случаев (q_1, q_2) -квазиметрических может так оказаться, что оценки (0.1)–(0.4) можно улучшить, в частности, оценки устойчивости (0.5), (0.6) из теоремы о неподвижной точке сжимающего отображения. Именно этот вопрос мы обсуждаем в настоящей работе для сжимающих отображений первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$, снабженной $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ -квазиметрикой, являющейся симметрической $(1, q_2)$ -квазиметрикой, см., например, [8]. А именно, в § 2 мы показываем, что для отображения Φ , являющегося стандартным сжатием δ_ε , $\varepsilon \in (0, 1)$, или композицией δ_ε с левым сдвигом группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$, выполняется оценка

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi(u))}{1 - \varepsilon} \quad \forall u \in \mathbb{H}_\alpha^1; \quad (0.7)$$

здесь ξ — единственная неподвижная точка отображения Φ . Как мы видим, оценка из (0.7) является более точной, чем оценка (0.5), и по форме она совпадает с классической оценкой для метрических пространств [10]. Но в оценке (0.7) отсутствует формальная связь с тем фактом, что мы имеем дело именно с $(1, q_2)$ -квазиметрическим пространством. Естественно, что в этом случае возникает вопрос о существовании на группе Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$ сжимающих отображений Φ таких, что

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{L_\Phi \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi(u))}{1 - \varepsilon} \quad \forall u \in \mathbb{H}_\alpha^1,$$

где константа L_Φ зависит от константы q_2 . В § 3 мы доказали, что для неоднородных сжатий D_ε первой группы Гейзенберга константа L_{D_ε} зависит от значений константы q_2 , причем эта зависимость снизу ведет себя как $O(\sqrt{q_2})$ (теоремы 3.1, 3.2, следствие 3.1). В § 4 эти результаты были обобщены для отображений, являющихся композициями левых сдвигов и неоднородных растяжений первой группы Гейзенберга (теоремы 4.1, 4.2). Существенным в наших доказательствах является следующий факт.

Теорема 0.4 (см. [8]). Пусть α — структурная константа первой группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$. Минимальное значение константы q_2 в $(1, q_2)$ -обобщенном неравенстве треугольника для группы $\mathbb{H}_\alpha^1$ определяется как

$$q_2 = \begin{cases} 1, & \alpha \leq 2, \\ \frac{\alpha}{2}, & \alpha > 2. \end{cases}$$

Получение оценок для неподвижных точек и точек совпадения отображений (q_1, q_2) -квазиметрических пространств является интересной задачей. В связи с этим отметим работу [11], где для однозначных и многозначных отображений, действующих в метрическом пространстве X и удовлетворяющих условию Липшица, получена оценка снизу расстояния от заданной точки $x_0 \in X$ до неподвижной точки; там же данный результат был распространен на (q_1, q_2) -квазиметрические пространства.

1. Каноническая первая группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$

Канонической конечномерной группой Ли [12] называется аналитическая группа Ли G , экспоненциальное отображение которой является тождественным. Таким образом, G отождествляется с некоторым евклидовым пространством $\mathbb{R}^N$ с координатами $(x_1, \dots, x_N)$, индуцированным координатным репером $(O, e_1, \dots, e_N)$. Поэтому мы можем отождествлять любой элемент $u \in G$ с его координатной записью; в частности, нейтральный элемент группы G — точка $O = (0, \dots, 0)$ (начало координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), и для любого $u = (x_1, \dots, x_N)$ мы имеем $u^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$. Групповая операция « $\cdot$ » на G (по-другому, левый сдвиг $P_u^G u' = u \cdot u'$ элемента $u' \in G$ на элемент $u \in G$) определяется при помощи формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа [13] и соответствующей таблицы коммутаторов, заданной на базисных ортах $\{e_i\}_{i=1, \dots, N}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^N$.

Каноническая группа $\mathbb{H}_\alpha^1$ определяется, см. [8, 14], в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t) , индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3) , при помощи следующей таблицы коммутаторов

$$[e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha > 0. \quad (1.1)$$

Произвольный элемент $u \in \mathbb{H}_\alpha^1$ отождествляется со своей координатной записью, т. е.

$$u = xe_1 + ye_2 + te_3 = (x, y, t).$$

Используя таблицу (1.1), запишем операцию левого сдвига для $\mathbb{H}_\alpha^1$. Пусть $w = (x, y, t)$, $w' = (x', y', t')$, тогда

$$P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w' = w \cdot w' = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y) \right).$$

Нейтральный элемент O канонической первой группы Гейзенберга совпадает с началом координат евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, т. е. $O = (0, 0, 0)$, и для любого элемента $u = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$ мы имеем $u^{-1} = (-x, -y, -t)$.

Однопараметрическая подгруппа растяжений $\delta_\varepsilon : \mathbb{H}_\alpha^1 \rightarrow \mathbb{H}_\alpha^1$, $\varepsilon \geq 0$, действует на элементы $u = (x, y, t)$ по правилу

$$\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t).$$

Определим неотрицательную функцию $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1} : \mathbb{H}_\alpha^1 \times \mathbb{H}_\alpha^1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$ следующим образом. Пусть $u, v \in \mathbb{H}_\alpha^1$, тогда $v = u \cdot (u^{-1}v) = uc$, где $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{H}_\alpha^1$. Тогда

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v) = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Из определения вытекает, что функция $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ удовлетворяет аксиомам тождества и симметрии. Более того, функция $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ является $(1, q_2)$ -квазиметрикой [8]. Функция $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}$ — это Вох-квазиметрика группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$.

Следующие свойства, называемые инвариантностью Вох-квазиметрики относительно действий растяжений и левых сдвигов, являются прямым следствием фактов общей теории групп Карно, см. [15], но их несложно проверить непосредственно:

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\delta_\varepsilon u, \delta_\varepsilon v) = \varepsilon \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v), \quad \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} u, P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} v) = \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v) \quad \forall u, v, w \in \mathbb{H}_\alpha^1.$$

2. Однородные сжатия и их композиции с левыми сдвигами группы $\mathbb{H}_\alpha^1$

1⁰ Рассмотрим стандартное (субриманово) сжатие $\delta_\varepsilon u = (\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t)$, $u = (x, y, t)$, $0 < \varepsilon < 1$, группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$. Из определения отображения δ_ε вытекает, что единственная неподвижная точка отображения здесь — начало координат O .

Мы имеем $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = \max\{|x|, |y|, |t|^{\frac{1}{2}}\}$,

$$\begin{aligned} \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \delta_\varepsilon u) &= \max\{ |(\varepsilon - 1)x|, |(\varepsilon - 1)y|, |(\varepsilon^2 - 1)t|^{\frac{1}{2}} \} \\ &= (1 - \varepsilon) \max\left\{ |x|, |y|, \left| \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} t \right|^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

откуда мы получаем

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) \leq \frac{\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \delta_\varepsilon(u))}{1 - \varepsilon}.$$

2⁰ Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\Phi_1(u) = \delta_\varepsilon \circ P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1}(u) = (\varepsilon(x_0 + x), \varepsilon(y_0 + y), \varepsilon^2 t_0 + \varepsilon^2 t + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(x_0 y - y_0 x)),$$

где $u = (x, y, t)$, $0 < \varepsilon < 1$. Найдем неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения Φ_1 :

$$x_n = \varepsilon(x_0 + x_n) \Rightarrow x_n = \frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon},$$

$$y_n = \varepsilon(y_0 + y_n) \Rightarrow y_n = \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon},$$

$$t_n = \varepsilon^2 t_0 + \varepsilon^2 t_n + \frac{\alpha \varepsilon^2}{2}(x_0 y_n - y_0 x_n) \Rightarrow t_n = \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2}.$$

Мы имеем $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) = \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u^{-1}\xi)$, $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi_1(u)) = \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u^{-1}\Phi_1(u))$, где

$$\begin{aligned} u^{-1}\xi &= (-x, -y, -t)(x_n, y_n, t_n) = (-x, -y, -t) \left(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon}, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon}, \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2} \right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{\varepsilon^2 t_0}{1 - \varepsilon^2} - t + \frac{\alpha \varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(-x y_0 + x_0 y) \right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{\varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\alpha \varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(x_0 y - x y_0) \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
u^{-1}\Phi_1(u) &= (-x, -y, -t) \left(\varepsilon(x_0 + x), \varepsilon(y_0 + y), \varepsilon^2(t_0 + t + \frac{\alpha}{2}(x_0y - y_0x)) \right) \\
&= \left(\varepsilon x_0 - (1 - \varepsilon)x, \varepsilon y_0 - (1 - \varepsilon)y, \varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1) + \left(\frac{\alpha\varepsilon}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} \right)(x_0y - y_0x) \right). \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Рассмотрим последние координаты в (2.1) и в (2.2); заметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\alpha\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)}(x_0y - xy_0) \right) \\
= \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \left(\varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1) + \left(\frac{\alpha\varepsilon}{2} + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2} \right)(x_0y - y_0x) \right). \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Учитывая (2.3), мы выводим

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi_1(u))}{1 - \varepsilon}.$$

3⁰ Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\Phi_2(u) = P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} \circ \delta_\varepsilon(u) = (\varepsilon x + x_0, \varepsilon y + y_0, t_0 + \varepsilon^2 t + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}(x_0y - y_0x)),$$

где $u = (x, y, t)$, $0 < \varepsilon < 1$. Найдем неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения Φ_2 :

$$\begin{aligned}
x_n = \varepsilon x_n + x_0 &\Rightarrow x_n = \frac{x_0}{1 - \varepsilon}, & y_n = \varepsilon y_n + y_0 &\Rightarrow y_n = \frac{y_0}{1 - \varepsilon}, \\
t_n = t_0 + \varepsilon^2 t_n + \frac{\alpha\varepsilon^2}{2}(x_0 y_n - y_0 x_n) &\Rightarrow t_n = \frac{t_0}{1 - \varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Мы имеем $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) = \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u^{-1}\xi)$, $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi_1(u)) = \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u^{-1}\Phi_1(u))$, где

$$\begin{aligned}
u^{-1}\xi &= (-x, -y, -t)(x_n, y_n, t_n) = (-x, -y, -t) \left(\frac{x_0}{1 - \varepsilon}, \frac{y_0}{1 - \varepsilon}, \frac{t_0}{1 - \varepsilon^2} \right) \\
&= \left(\frac{x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{t_0}{1 - \varepsilon^2} - t + \frac{\alpha}{2(1 - \varepsilon)}(-xy_0 + x_0y) \right) \\
&= \left(\frac{\varepsilon x_0}{1 - \varepsilon} - x, \frac{\varepsilon y_0}{1 - \varepsilon} - y, \frac{t_0 + t(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{2(1 - \varepsilon)}(x_0y - xy_0) \right), \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{-1}\Phi_2(u) &= (-x, -y, -t) \left(\varepsilon x + x_0, \varepsilon y + y_0, t_0 + \varepsilon^2 t + \frac{\alpha\varepsilon}{2}(x_0y - y_0x) \right) \\
&= \left(x_0 - (1 - \varepsilon)x, y_0 - (1 - \varepsilon)y, \varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right)(x_0y - y_0x) \right). \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Рассмотрим последние координаты в (2.4) и в (2.5); заметим, что

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \left(\frac{t_0 + t(\varepsilon^2 - 1)}{1 - \varepsilon^2} + \frac{\alpha}{2(1 - \varepsilon)}(x_0y - xy_0) \right) \\
= \frac{1}{(1 - \varepsilon)^2} \left(\varepsilon^2 t_0 + t(\varepsilon^2 - 1) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\varepsilon}{2} \right)(x_0y - y_0x) \right). \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Учитывая (2.6), мы выводим

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \xi) \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, \Phi_2(u))}{1 - \varepsilon}.$$

3. Неоднородные сжатия группы $\mathbb{H}_\alpha^1$

О п р е д е л е н и е 3.1. Отображение

$$D_\varepsilon : (x, y, t) \rightarrow (\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y, \varepsilon_1 \varepsilon_2 t), \quad 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1, \quad \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2, \quad \varepsilon = \max_{i=1,2} \{\varepsilon_i\},$$

назовем неоднородным сжатием группы Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$.

Далее для определенности полагаем, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

С в о й с т в о 3.1. Отображение $D_\varepsilon : \mathbb{H}_\alpha^1 \rightarrow \mathbb{H}_\alpha^1$ является ε -липшицевым, 2^0 имеет единственную неподвижную точку, совпадающую с началом координат O .

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1^0 Несложно проверить непосредственно, что

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(D_\varepsilon(u), D_\varepsilon(v)) \leq \varepsilon \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v).$$

Пусть $u_1 = (x_1, 0, 0)$, $u_2 = (x_2, 0, 0)$, тогда

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(D_\varepsilon(u_1), D_\varepsilon(u_2)) = \varepsilon_1 |x_1 - x_2| = \varepsilon_1 \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, v).$$

2^0 Очевидно. □

Теорема 3.1. Для произвольной точки $u = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$ имеет место оценка

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) \leq \sqrt{q_2} \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{1 - \varepsilon}. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы имеем $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = \max\{|x|, |y|, |t|^{\frac{1}{2}}\}$,

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u) = (x(\varepsilon_1 - 1), y(\varepsilon_2 - 1), \frac{\alpha}{2}xy(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - t(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)).$$

Если $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = |x|$ или $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = |y|$, то в этом случае очевидно выполняется оценка

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{1 - \varepsilon}. \quad (3.2)$$

Пусть $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = |t|^{\frac{1}{2}}$. Если при этом $xy = 0$, то оценка (3.2) очевидно выполняется. Далее полагаем, что $xy \neq 0$. Обозначим $k = \frac{1 - \varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$. Отметим, что $k > 1$.

Предположим, что

$$\frac{|t|(1 - \varepsilon_1\varepsilon_2)}{k} \leq \frac{\alpha}{2}|xy|(\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Мы имеем

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u) \geq \max\{|x|(1 - \varepsilon_1), |y|(1 - \varepsilon_2)\},$$

тогда

$$|t| \leq \frac{\alpha}{2}|xy| \leq \frac{\alpha}{2} \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}^2(u, D_\varepsilon u)}{(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \Rightarrow |t|^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{1 - \varepsilon},$$

откуда, с учетом теоремы 0.4, вытекает оценка (3.1).

Теперь пусть

$$\frac{|t|(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)}{k} > \frac{\alpha}{2} |xy|(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

тогда

$$\left| \frac{\alpha}{2} xy(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - t(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \right| \geq |t|(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) \left(1 - \frac{1}{k} \right) = |t|(1 - \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2).$$

Откуда получаем

$$|t|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{\sqrt{(1 - \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)}} \leq \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{1 - \varepsilon}.$$

□

В общем случае оценку (3.1) нельзя назвать более точной, чем оценка (0.5); все зависит от выбора ε и q_2 .

Теорема 3.2. *Имеет место оценка*

$$L_{D_\varepsilon} \geq \sqrt{q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}}. \quad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$.

Случай 1. Пусть $q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \geq 1$. В этом случае всегда найдется точка u такая, что $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = |t|^{\frac{1}{2}}$, $xy \neq 0$, и при этом выполняется тождество

$$t(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1) + \frac{\alpha}{2} xy(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0,$$

тогда

$$t = \frac{\alpha}{2} xy \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u) = \max\{|x|(1 - \varepsilon_1), |y|(1 - \varepsilon_2)\}.$$

Можно при этом рассматривать такую точку u , что $x = y$. Тогда

$$|t| = \frac{\alpha}{2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)^2} \text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}^2(u, D_\varepsilon u),$$

откуда, учитывая неравенство $\varepsilon = \varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и теорему 0.4, вытекает тождество

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = \sqrt{q_2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon \varepsilon_2}} \frac{\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(u, D_\varepsilon u)}{1 - \varepsilon}.$$

Покажем, см. (0.5), что

$$\sqrt{q_2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon \varepsilon_2}} \leq 1 + \varepsilon(q_2 - 1) \Leftrightarrow q_2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon \varepsilon_2} \leq 1 + 2\varepsilon(q_2 - 1) + \varepsilon^2(q_2 - 1)^2. \quad (3.4)$$

Пусть $f(\varepsilon_2) = q_2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon \varepsilon_2}$, тогда

$$f'(\varepsilon_2) = q_2 \frac{-1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon \varepsilon_2)^2} < 0, \quad f(0) = q_2 \varepsilon < 1 + 2\varepsilon(q_2 - 1) + \varepsilon^2(q_2 - 1)^2,$$

поэтому неравенство (3.4) выполняется.

Случай 2. Теперь пусть $q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} < 1$. Всегда найдется точка u такая, что $\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(O, u) = \max\{|x|, |y|\}$, и в этом случае выполняется неравенство (3.2).

Неравенство (3.3) следует из случаев 1, 2. □

Следствие 3.1.

$$\sqrt{q_2 \frac{\varepsilon - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon \varepsilon_2}} \leq L_{D_\varepsilon} \leq 1 + \varepsilon(q_2 - 1).$$

4. Композиции неоднородных сжатий и левых сдвигов группы $\mathbb{H}_\alpha^1$

4.1 Композиция $P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} \circ D_\varepsilon$

Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$, $x_0 y_0 \neq 0$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\tilde{\Phi}_2(u) = P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} \circ D_\varepsilon(u) = (\varepsilon_1 x + x_0, \varepsilon_2 y + y_0, t_0 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t + \frac{\alpha}{2}(\varepsilon_2 x_0 y - \varepsilon_1 y_0 x)),$$

где $u = (x, y, t)$. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\tilde{\Phi}_2$ является ε -липшицевым, где $\varepsilon = \varepsilon_1$. Найдём неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения $\tilde{\Phi}_2$. Мы имеем

$$\varepsilon_1 x_n + x_0 = x_n \Rightarrow x_n = \frac{x_0}{1 - \varepsilon_1},$$

$$\varepsilon_2 y_n + y_0 = y_n \Rightarrow y_n = \frac{y_0}{1 - \varepsilon_2},$$

$$t_n = t_0 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t_n + \frac{\alpha x_0 y_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \right) \Rightarrow t_n = \frac{t_0}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{\alpha x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}.$$

Теорема 4.1.

$$L_{\tilde{\Phi}_2} \geq C \sqrt{q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

для некоторой положительной константы $C = C(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Доказательство. Пусть $v = (0, 0, t)$. Тогда

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = \max \left\{ \left| \frac{x_0}{1 - \varepsilon_1} \right|, \left| \frac{y_0}{1 - \varepsilon_2} \right|, \left| \frac{t_0}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{\alpha x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} - t \right|^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(v, \tilde{\Phi}_2(v)) = \max \{ |x_0|, |y_0|, |t_0 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1)t|^{\frac{1}{2}} \}.$$

Выберем t таким образом, чтобы выполнялось равенство $t_0 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - 1)t = 0$. В этом случае

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = \max \left\{ \left| \frac{x_0}{1 - \varepsilon_1} \right|, \left| \frac{y_0}{1 - \varepsilon_2} \right|, \left| \frac{\alpha x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \right|^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(v, \tilde{\Phi}_2(v)) = \max \{ |x_0|, |y_0| \} = m.$$

В случае, если $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = \max \left\{ \left| \frac{x_0}{1 - \varepsilon_1} \right|, \left| \frac{y_0}{1 - \varepsilon_2} \right| \right\}$, то очевидно выполняется оценка

$$\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) \leq \frac{\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(v, \tilde{\Phi}_2(v))}{1 - \varepsilon}.$$

Пусть $\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = \left| \frac{\alpha x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \right|^{\frac{1}{2}}$, тогда

$$\begin{aligned} \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}^2(\xi, v) &= \frac{\alpha}{2} \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}^2(v, \tilde{\Phi}_2(v)) \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)} \frac{|x_0 y_0|}{(1 - \varepsilon_1)^2 m^2} \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_2} \\ &\Rightarrow \text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = C \sqrt{q_2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)}} \frac{\text{Вох}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(v, \tilde{\Phi}_2(v))}{(1 - \varepsilon)}, \end{aligned}$$

где $C = C(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ — некоторая положительная константа. Откуда и следует теорема 4.1. $\square$

4.2 Композиция $D_\varepsilon \circ P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1}$

Зафиксируем точку $w = (x_0, y_0, t_0)$, $x_0 y_0 \neq 0$. Рассмотрим сжимающее отображение

$$\tilde{\Phi}_1(u) = D_\varepsilon \circ P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1}(u) = \left(\varepsilon_1(x + x_0), \varepsilon_2(y + y_0), \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(t_0 + t + \frac{\alpha}{2}(x_0 y - y_0 x) \right) \right),$$

где $u = (x, y, t)$. Нетрудно убедиться в том, что отображение $\tilde{\Phi}_1$ является ε -липшицевым, где $\varepsilon = \varepsilon_1$. Найдем неподвижную точку $\xi = (x_n, y_n, t_n)$ отображения $\tilde{\Phi}_1$. Мы имеем

$$x_n = \varepsilon_1(x_0 + x_n) \Rightarrow x_n = \frac{\varepsilon_1 x_0}{1 - \varepsilon_1},$$

$$y_n = \varepsilon_2(y_0 + y_n) \Rightarrow y_n = \frac{\varepsilon_2 y_0}{1 - \varepsilon_2},$$

$$t_n = t_0 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 t_n + \frac{\alpha x_0 y_0}{2} \left(\frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} \right) \Rightarrow t_n = \frac{t_0}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{\alpha x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}.$$

Теорема 4.2.

$$L_{\tilde{\Phi}_1} \geq C \sqrt{q_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

для некоторой положительной константы $C = C(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Доказательство. Пусть $v = (0, 0, t)$. Тогда

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(\xi, v) = \max \left\{ \left| \frac{\varepsilon_1 x_0}{1 - \varepsilon_1} \right|, \left| \frac{\varepsilon_2 y_0}{1 - \varepsilon_2} \right|, \left| \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 t_0}{1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} - \frac{\alpha \varepsilon_1 \varepsilon_2 x_0 y_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} - t \right|^{\frac{1}{2}} \right\},$$

$$\text{Box}_{\mathbb{H}_\alpha^1}(v, \tilde{\Phi}_2(v)) = \max \left\{ |\varepsilon_1 x_0|, |\varepsilon_2 y_0|, |\varepsilon_1 \varepsilon_2 (t_0 + t) - t|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Выберем t таким образом, чтобы выполнялось равенство $\varepsilon_1 \varepsilon_2 (t_0 + t) - t = 0$. Далее, действуя так же как и при доказательстве теоремы 4.1, получаем теорему 4.2. $\square$

References

- [1] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izvestiya Mathematics*, **82**:2 (2018), 245–272.
- [2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады РАН*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “The theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [3] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.
- [4] W. A. Wilson, “On quasi-metric spaces”, *American J. of Math.*, **53** (1931), 675–684.
- [5] А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -Квазиметрики, билипшицево эквивалентные 1-квазиметрикам”, *Матем. труды*, **20**:1 (2017), 81–96; англ. пер.: A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -quasimetrics bi-Lipschitz equivalent to 1-quasimetrics”, *Siberian Adv. Math.*, **27**:4 (2017), 253–262.
- [6] S. K. Vodopyanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings”, *Contemporary Mathematics*, **424** (2007), 247–301.
- [7] S. G. Basalaev, S. K. Vodopyanov, “Approximate differentiability of mappings of Carnot–Carathéodory spaces”, *Eurasian Math. J.*, **4**:2 (2013), 10–48.

- [8] А. В. Грешнов, М. В. Трямкин, “Точные значения констант в обобщенном неравенстве треугольника для некоторых $(1, q_2)$ -квазиметрик на канонических группах Карно”, *Матем. заметки*, **98**:4 (2015), 635–639; англ. пер.: A. V. Greshnov, M. V. Tryamkin, “Exact values of constants in the generalized triangle inequality for some $(1, q_2)$ -quasimetrics on canonical Carnot groups”, *Math. Notes*, **98**:4 (2015), 694–698.
- [9] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, “Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties”, *Acta Mathematica*, **155**:1–2 (1985), 103–147.
- [10] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Доклады РАН*, **416**:2 (2007), 151–155; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “Covering mappings in metric spaces and fixed points”, *Doklady Mathematics*, **76**:2 (2007), 665–668.
- [11] М. В. Борзова, Е. С. Жуковский, Н. Ю. Черникова, “Одна оценка неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **22**:6, 1255–1259. [M. V. Borzova, E. S. Zhukovskiy, N. Yu. Chernikova, “One estimate of fixed points and coincidence points of mappings of metric spaces”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1255–1260 (In Russian)].
- [12] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [L. V. Ovsyannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russian)].
- [13] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы и алгебры Ли*, Наука, М., 1982; англ. пер.: M. M. Postnikov, *Lectures In Geometry: Semester V – Lie Group And Lie Algebras*, Mir Publ., Moscow, 1986.
- [14] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to sub-Riemannian Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press, 2020.
- [15] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian*, Berlin–Heidelberg, Springer–Verlag, 2007.

Информация об авторе

Грешнов Александр Валерьевич,
 доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Российская Федерация. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1218-2767>

Поступила в редакцию 10.01.2025 г.
 Поступила после рецензирования 25.02.2025 г.
 Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Alexandr V. Greshnov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation. E-mail: a.greshnov@g.nsu.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1218-2767>

Received 10.01.2025
 Reviewed 25.02.2025
 Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Дзюба С.М., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40>

УДК 517.938



О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях

Сергей Михайлович ДЗЮБА

ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»

170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В статье рассматриваются движения динамической системы g^t , заданной на топологическом компактном многообразии V .

Показано, что множество M_1 неблуждающих относительно V точек является множеством центральных движений $\mathfrak{M}$, а в множестве $\mathfrak{M}$ всюду плотно объединение всех компактных минимальных множеств. Установлено, что для любого движения $f(t, p)$ найдется компактное минимальное множество $\Omega \subset V$, обладающее следующим свойством: для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и каждой окрестности E_Ω множества Ω вероятность принадлежности дуги $\{f(t, p) : t \in [t_0, t_1]\}$ траектории движения $f(t, p)$ множеству E_Ω стремится к единице при $t_1 \rightarrow +\infty$; аналогичное утверждение справедливо также и для дуги $\{f(t, p) : t \in [-t_1, t_0]\}$.

Все утверждения настоящей статьи без каких-либо изменений переносятся на систему g^t , заданную в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве.

Ключевые слова: топологическое многообразие, динамические системы, множество центральных движений, вероятностные свойства движений

Для цитирования: Дзюба С.М. О некоторых свойствах движений динамических систем на компактных многообразиях // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 28–40. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40>

SCIENTIFIC ARTICLE

© S. M. Dzyuba, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40>

On some properties of motions of dynamical systems on compact manifolds

Sergei M. DZYUBA

Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. The article considers the motions of dynamical system g^t defined on a topological compact manifold V .

It is shown that the set M_1 of non-wandering points with respect to V is the set of central motions $\mathfrak{M}$, and the union of all compact minimal sets is everywhere dense in the set $\mathfrak{M}$. It is established that for any motion $f(t, p)$, there exists a compact minimal set $\Omega \subset V$ with the following property: for all values $t_0 \in \mathbb{R}$ and every neighborhood E_Ω of the set Ω , the probability that the arc $\{f(t, p) : t \in [t_0, t_1]\}$ of the motion trajectory $f(t, p)$ belongs to the set E_Ω , tends to 1 as $t_1 \rightarrow +\infty$; a similar statement is true for the arc $\{f(t, p) : t \in [-t_1, t_0]\}$.

All statements of this article can be transferred without any changes to the system g^t defined in a Hausdorff sequentially compact topological space.

Keywords: topological manifold, dynamical systems, set of central motions, probabilistic properties of motions

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Dzyuba S.M. On some properties of motions of dynamical systems on compact manifolds. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 28–40. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-28-40>

Введение

Пусть V — топологическое компактное многообразие размерности n и $\mathbb{R}$ — действительная ось $(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ и положим

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

- (а) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times V$;
- (б) для всех $p \in V$

$$g^0 p = p;$$

- (с) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$g^{t+\tau} = g^t g^\tau.$$

По определению g^t представляет собой *динамическую систему*, для которой установлены все базовые понятия и свойства общей теории динамических систем (см. [1, гл. VII]). Поэтому будем говорить, что для любого $p \in V$ функция $t \rightarrow f(t, p)$ — *движение* (см. [2, с. 347]).

Конечной целью общей теории динамических систем является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями» (см. [1, с. 194]). Первые результаты построения основ такой теории сведены Биркгофом вместе в [1, гл. VII]. Дальнейшее развитие результатов Биркгофа изложено в [2, гл. V]. Как это ни покажется странным, с тех пор, до еще совсем недавнего прошлого, ничего принципиально нового в данной области получено не было (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в статьях [4] и [5] было существенным образом упрощено устоявшееся представление о взаимоотношении движений в метрическом пространстве Σ и установлено полное взаимоотношение движений на компактном многообразии V . Целью настоящей работы является дальнейшее развитие результатов статьи [5], направленное на изучение структуры множества неблуждающих точек и общих вероятностных свойств движений системы g^t , заданной на V .

1. Произвольные и рекуррентные движения

Первым типом движений, который выделил Биркгоф, было рекуррентное движение (см. [1, с. 194]). Поэтому, прежде всего, остановимся на этом фундаментальном понятии, которое будет определять все дальнейшие построения.

Зафиксируем произвольный атлас $(\Phi_s, \varphi_s)_{s \in S}$ многообразия V , где Φ_s — некоторая открытая часть пространства $\mathbb{R}^n$ и φ_s — гомеоморфизм Φ_s на $V_s \subset V$. При этом, поскольку V компактно, можем считать, что число S конечно.

Напомним, что множество M называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см. [1, с. 203]).

Следуя Биркгофу, будем называть любое движение $f(t, p)$ системы g^t , расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентным. Кроме того, заметим, что Биркгоф фактически доказал следующее (см. [1, с. 203]): *для рекуррентности движения $f(t, p)$ на V необходимо и достаточно, чтобы для каждого сколь угодно малого положительного числа ε нашлось такое $T_\varepsilon > 0$, что при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ существует*

такое $t \in [\sigma, \sigma + T_\varepsilon]$, что

$$\|\varphi_s^{-1}(f(\tau, p)) - \varphi_s^{-1}(f(t, p))\| < \varepsilon$$

на одном из множеств Φ_s . Более того, Биркгоф установил, что на V ω - и α -предельные множества любого движения всегда содержат рекуррентные движения (см. [1, с. 204]).

В дальнейшем при исследовании рекуррентных движений системы g^t мы будем интерпретировать многообразие V как полуметрическое пространство с отделимой структурой.

Напомним, что топологическое пространство Γ называется *полуметрическим*, если топология в нем индуцирована направленным семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где множество индексов I может иметь произвольную мощность (см., например, [6, с. 456]).

Напомним также, что функция $d_\gamma: \Gamma \times \Gamma \rightarrow [0, +\infty)$ называется *полуметрикой*, если она удовлетворяет следующим условиям:

(А) для всех $(p, q) \in \Gamma \times \Gamma$

$$d_\gamma(p, q) = d_\gamma(q, p);$$

(В) для всех $p \in \Gamma$

$$d_\gamma(p, p) = 0,$$

а случай

$$d_\gamma(p, q) = 0$$

не исключается при $q \neq p$;

(С) для всех $p \in \Gamma, q \in \Gamma$ и $r \in \Gamma$ выполнено неравенство треугольника

$$d_\gamma(p, q) \leq d_\gamma(p, r) + d_\gamma(r, q).$$

И, наконец, напомним, что семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I}$ называется *направленным*, если для любой конечной части $J \subset I$ найдется такое $k \in I$, что $d_k \geq d_j$ для всех $j \in J$. Если же для каждой пары $p \neq q$ найдется такая полуметрика d_γ , что

$$d_\gamma(p, q) > 0,$$

то будем говорить, что пространство Γ снабжено *отделимой структурой* (см. [6, с. 456]).

Заметим теперь, что многообразие V полуметризуемо как топологическое компактное пространство (см. [6, с. 458]). Полуметрики на V мы определим следующим образом.

Зафиксируем некоторую точку $x \in V$, некоторую ее окрестность E_x и зададим непрерывную функцию $\gamma: V \rightarrow [0, +\infty)$, такую, что $\gamma(p) > 0$, если $p \in E_x$, и $\gamma(p) = 0$ в противном случае. Тогда равенство

$$d_\gamma(p, q) = |\gamma(p) - \gamma(q)|$$

дает полуметрику d_γ на V (см. [6, с. 457]).

Изменяя функцию γ , мы можем получать различные полуметрики d_γ . Значит, всегда можно построить семейство полуметрик $(d_i)_{i \in I_{E_x}}$, которое будет направленным. При этом всегда можно добиться того, что для двух любых точек $p \neq q$ нашлась полуметрика d_γ , для которой $d_\gamma(p, q) > 0$. Проведя эту процедуру на всех окрестностях E_x всех точек $x \in V$, мы превратим V в полуметрическое пространство с отделимой структурой, в котором топология $\mathcal{T}'$ вводится семейством полуметрик $(d_i)_{i \in I}$, где

$$I = \bigcup_{E_x} I_{E_x}.$$

З а м е ч а н и е 1.1. Множество $E \subset V$ открыто в топологии $\mathcal{T}'$ тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой x оно содержит некоторый шар

$$B_\gamma(x, \varepsilon) = \{p \in V: d_\gamma(x, p) < \varepsilon\}$$

(см. [6, с. 456]). Очевидно, что эта топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{T}$, введенной на V атласом $(\Phi_s, \varphi_s)_{s \in S}$.

Полное взаимоотношение произвольных и рекуррентных движений системы g^t на многообразии V устанавливает следующая

Теорема 1.1. Пусть $f(t, p)$ — некоторое движение системы g^t . Тогда из любой последовательности натуральных чисел $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$ можно выбрать такую ее подпоследовательность $(N_{k_l})_{l \in \mathbb{N}} \uparrow +\infty$, что существуют рекуррентные движения $f(t, q)$ и $f(t, r)$, обладающие следующими свойствами:

(i) равномерно на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t + N_{k_l}, p), f(t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t - N_{k_l}, p), f(t, r)) = 0, \quad i \in I;$$

(ii) равномерно на всей оси $\mathbb{R}$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t + N_{k_{l+1}} - N_{k_l}, q), f(t, q)) = 0, \quad i \in I,$$

и

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d_i(f(t - N_{k_{l+1}} + N_{k_l}, r), f(t, r)) = 0, \quad i \in I.$$

При этом ω - и α -предельные множества движения $f(t, p)$ — компактные минимальные множества.

Теорема 1.1 непосредственно следует из теорем 3.1 и 4.1 работы [5]. Поэтому ее доказательство здесь мы не приводим.

Для полноты картины заметим теперь, что согласно [5] (теорема 2.1 и следствие 3.1 указанной работы) структура рекуррентного движения может быть уточнена, так как имеет место следующая

Теорема 1.2. На компактном многообразии V необходимое и достаточное условие рекуррентности движения $f(t, p)$ состоит в том, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} d_i(f(t, p), f(t + N_\varepsilon, p)) < \varepsilon, \quad i \in I.$$

2. Множество центральных движений

В развитие понятия рекуррентного движения Биркгоф ввел в рассмотрение понятие региональной рекуррентности (см. [1, с. 194]). Здесь мы остановимся на этом понятии в его классической форме множества центральных движений (см. [1, с. 195–200]).

Напомним, что точка $p \in V$ называется *блуждающей*, если найдется такая ее окрестность E_p и такое $T > 0$, что

$$E_p \cap f(t, E_p) = \emptyset$$

для всех $t \geq T$. При этом неизбежно оказывается, что

$$E_p \cap f(-t, E_p) = \emptyset$$

для всех $t \geq T$.

Множество E блуждающих точек открыто и инвариантно. Поэтому множество

$$M_1 = V \setminus E$$

неблуждающих относительно V точек замкнуто (и, потому, компактно) и инвариантно.

Вообще говоря, Биркгоф допускал, что множество M_1 может содержать компактное инвариантное множество точек M_2 , неблуждающих относительно M_1 . Значит, согласно допущению Биркгофа может существовать такая вполне упорядоченная система компактных инвариантных множеств

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_\beta \supset M_{\beta+1} \supset \dots, \quad (2.1)$$

занумерованных порядковыми числами первого и, возможно, второго классов, что точки каждого последующего множества являются неблуждающими относительно предыдущего. Однако, всегда найдется такое число α не выше второго класса, что последовательность (2.1) обрывается, т. е. что

$$M_\alpha = M_{\alpha+1} = \dots$$

(см. [1, с. 199]). Такое множество M_α Биркгоф назвал *множеством центральных движений*. В дальнейшем мы будем обозначать это множество через $\mathfrak{M}$.

Таким образом, $\mathfrak{M}$ — компактное инвариантное множество, не содержащее ни одного собственного подмножества, содержащего неблуждающие относительно $\mathfrak{M}$ точки. Кроме того, заметим, что любое компактное минимальное множество M является частью $\mathfrak{M}$. Более точную структуру множества $\mathfrak{M}$ устанавливает следующая

Теорема 2.1. *В множестве $\mathfrak{M}$ всюду плотно объединение всех компактных минимальных множеств.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ — множество нерекуррентных движений, расположенных в $\mathfrak{M}$, и предположим, что это множество непусто.

Пусть $f(t, p)$ — произвольное движение из $\mathcal{F}_{\mathfrak{M}}$ и пусть $E_p \subset \mathfrak{M}$ — некоторая окрестность точки p . Если E_p не содержит точек минимальных множеств, то в силу теоремы 1.1 точка p — блуждающая, что невозможно. $\square$

Приведенная выше конструкция построения множества $\mathfrak{M}$ может быть принципиально упрощена, поскольку справедлива следующая

Теорема 2.2. *Множество M_1 последовательности (2.1) является множеством центральных движений $\mathfrak{M}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если V — минимальное множество, то теорема 2.2 верна, поскольку в этом случае $V = M_1$. Поэтому рассмотрим случай, в котором множество $\mathcal{F}_V$ всех нерекуррентных движений, расположенных в V , непусто.

Пусть $f(t, p)$ — произвольное движение из $\mathcal{F}_V$ и пусть Ω и A — соответственно ω - и α -предельные множества этого движения. Согласно теореме 1.1 оба множества Ω и A компактны и минимальны. Значит, если множество $\mathfrak{M}$ не совпадает множеством V , то $M_1 = \mathfrak{M}$, что следует из теоремы 2.1. $\square$

3. Простейшие иллюстративные примеры

Почти все известные примеры построения последовательности (2.1) носят формальный характер, иллюстрирующий соответствующие рассуждения. Поэтому такие примеры нередко бывают ошибочными. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим, прежде всего, следующие два простейших примера.

Пример 3.1. На топологическом компактном многообразии

$$V = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

зададим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \quad (3.1)$$

и положим $x_{10} \in (0, 1)$ и $x_{20} \in (0, 1)$. В полярных координатах (r, θ) эта система может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Значит, ω -предельным множеством движения $f(t, x_{10}, x_{20})$ системы (3.1) является орбитально устойчивый предельный цикл

$$C = \{(x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

а α -предельным множеством — неустойчивый фокус $O(0, 0)$.

Следуя [2, с. 375], наряду с (3.1) рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = [-x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2], \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = [x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)][(x_1 - 1)^2 + x_2^2]. \quad (3.3)$$

В координатах (r, θ) система (3.2), (3.3) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{r} = r(1 - r^2)(1 + r^2 - 2r \cos \theta), \quad \dot{\theta} = (1 + r^2 - 2r \cos \theta). \quad (3.4)$$

В [2, с. 375] считается, что движение $f(t, x_{10}, x_{20})$ системы (3.2), (3.3) осуществляется по соответствующей кривой L уравнения

$$\frac{dr}{d\theta} = r(1 - r^2)$$

или, что эквивалентно, по соответствующей траектории системы (3.1). Если это так, то цикл C распадается на положение равновесия $A(1, 0)$ и дугу $C \setminus A$, причем траектория K движения $f(t, x_{10}, x_{20})$ наматывается на C как спираль. Поэтому согласно [2, с. 376] для системы (3.2), (3.3) приходится принять

$$M_1 = A \cup (C \setminus A) \cup O.$$

Тогда мы приходим к выводу, что

$$M_2 = \mathfrak{M} = A \cup O.$$

Последнее, однако, неверно.

В самом деле, для всех $r_0 \in (0, 1)$ непродолжаемое решение $(r(t), \theta(t))$ системы (3.4) с начальным условием

$$r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \pi$$

ограничено при $t \rightarrow +\infty$, поскольку ω -предельным множеством данного решения является положение равновесия $\{r = 1\}, \{\theta = 2\pi\}$. Однако, из ограниченности $\theta(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ следует, что траектория K не может наматываться на C .

Таким образом, движение $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ не осуществляется по кривой L . Кроме того, ограниченность $\theta(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ означает, что ω -предельным множеством движения $f(t, x_{1_0}, x_{2_0})$ является положение равновесия A . Следовательно,

$$M_1 = \mathfrak{M} = A \cup O.$$

Это и утверждает теорема 2.2.

Пример 3.2. Пусть $\mathbb{T}^2$ — тор с циклическими координатами (ξ_1, ξ_2) с периодом, равным единице. На действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = \lambda, \quad (3.5)$$

где λ — некоторое положительное иррациональное число. Траектории системы (3.5) порождают на $\mathbb{T}^2$ эргодический поток (см., например, [7, с. 450]), т. е. каждое движение данной системы является рекуррентным, а траектория этого движения всюду плотна на $\mathbb{T}^2$.

Теперь, следуя [2, с. 365], на $\mathbb{R}^2$ рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \pi x_2). \quad (3.6)$$

В [2, с. 365] считается, что движения системы (3.6) осуществляются по кривым уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda$$

или, что эквивалентно, по траекториям системы (3.5). Отсюда в [2, с. 365] делается вывод, что на $\mathbb{T}^2$ на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.6) порождает три типа движений:

(d) положение равновесия $O(0, 0)$;

(e) положительно асимптотические по отношению к O и отрицательно устойчивые по Пуассону;

(f) отрицательно асимптотические по отношению к O и положительно устойчивые по Пуассону.

Если это так, то траектории всех движений типа (e) и (f) системы (3.6) (по определению нерекуррентных) всюду плотны на $\mathbb{T}^2$. Поэтому для этой системы

$$M_1 = \mathfrak{M} = \mathbb{T}^2 \quad (3.7)$$

(см. [2, с. 373]). Последнее, однако, неверно.

В самом деле, очевидно, что на кривой $x_2 = \lambda x_1$ система (3.6) эквивалентна системе

$$\dot{x}_1 = \sin^2 \pi x_1 + \sin^2 \lambda \pi x_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda(\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} x_2 + \sin^2 \pi x_2). \quad (3.8)$$

Поскольку λ — иррациональное число, то правые части системы (3.8) не являются периодическими. Значит, движения данной системы, отличные от O , не могут быть представлены на $\mathbb{T}^2$.

Таким образом, движения системы (3.6) не осуществляются по траекториям системы 3.5. Более того, согласно теореме 1.1 траектории движений типа (е) и (ф) нигде не плотны на $\mathbb{T}^2$. Поэтому разговор о справедливости цепочки (3.7) лишен какого-либо смысла. Без дополнительного изучения можно лишь утверждать, что множество $\mathfrak{M}$ является собственной частью тора $\mathbb{T}^2$ и что $O \subset \mathfrak{M}$.

З а м е ч а н и е 3.1. Важнейшее значение примеров 3.1 и 3.2 состоит в том, что они тривиальным образом иллюстрируют следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.1: *на топологическом компактном многообразии V не существует ни устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений, ни притягивающих множеств типа гомоклинического или гетероклинического аттрактора.*

4. Пример Майера

Обратимся теперь к гораздо более сложному примеру, который имеет ярко выраженный концептуальный характер.

П р и м е р 4.1. Одним из самых сложных примеров построения множества $\mathfrak{M}$ является пример Майера (см. [2, с. 380–389]).

Суть примера Майера состоит в следующем: на некоторой компактной части $\mathfrak{T}$ пространства $\mathbb{R}^3$ строится система дифференциальных уравнений, имеющая такое множество центральных движений $\mathfrak{M} = M_\alpha$, что порядковое число α оказывается числом, большим любого другого наперед заданного числа второго класса β .

Детальное обсуждение примера Майера едва ли возможно ввиду его чрезвычайной громоздкости. Кроме того, подробное обсуждение усложняется еще и тем, что этапы построения этого примера содержат ряд важнейших недоказанных утверждений. Так, в нем формально дважды осуществляется переход, полностью аналогичный переходам от системы (3.1) к системе (3.2), (3.3) в примере 3.1 и от системы (3.5) к системе (3.6) в примере 3.2 и оказавшихся в этих примерах некорректными.

Рассмотрим первый из упомянутых переходов.

По условию множество $\mathfrak{T}$ содержит окружность

$$C = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Пусть ξ — длина дуги данной окружности с выбранными точкой отсчета P и направлением обхода. На первом этапе примера Майера в некоторой окрестности точки P строятся дуги

$$L_1, L_2, \dots, L_\omega, L_{\omega+1}, \dots, L_\gamma, \dots, L_\beta, \quad (4.1)$$

каждая из которых допускает представление

$$L_\gamma(\xi) = (x_{1,\gamma}(\xi), x_{2,\gamma}(\xi), x_{3,\gamma}(\xi)),$$

где каждая функция $\xi \rightarrow x_{i,\gamma}(\xi)$ имеет непрерывную производную

$$\frac{dx_{i,\gamma}}{d\xi}, \quad i = 1, 2, 3,$$

вне сколь угодно малой окрестности E_P точки P . В [2, с. 381] утверждается, что на основании только лишь этого на $\mathfrak{T}$ могут быть построены функции F_i , локально удовлетворяющие условию Липшица вне E_P , такие, что все непродолжаемые решения автономной системы

$$\frac{dx_i}{d\xi} = F_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.2)$$

определены для всех $\xi \in \mathbb{R}$, причем все дуги (4.1) расположены на соответствующих кривых данной системы.

Очевидно, что без доказательства существования системы (4.2), обладающей указанными в [2, с. 381] свойствами, пример Майера превращается в некую аксиому. Однако, мы не будем прерывать обсуждение на столь ранней стадии и предположим, что такая автономная система может существовать.

Приняв это, заметим, что далее в [2, с. 381] формальной подстановкой

$$d\xi = \mu(x_1, x_2, x_3) dt,$$

где

$$\mu(x_1, x_2, x_3) \geq 0,$$

наряду с системой (4.2) вводится в рассмотрение система

$$\frac{dx_i}{dt} = G_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

Система (4.3) отличается от системы (4.2) тем, что в ней точка P становится положением равновесия. В результате все функции G_i удовлетворяют условию Липшица на $\mathfrak{T}$. При этом утверждается, что движения, соответствующие решениям системы (4.3), определенным при $t \in \mathbb{R}$, осуществляются по кривым системы (4.2) (см. [2, с. 382]).

Аналогичным образом, формальной подстановкой

$$dt = \nu(x_1, x_2, x_3) d\tau,$$

где

$$\nu(x_1, x_2, x_3) \geq 0,$$

производится переход от системы (4.3) к новой системе

$$\frac{dx_i}{d\tau} = H_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

в которой функции H_i удовлетворяют условию Липшица на $\mathfrak{T}$, как и функции G_i в системе (4.3).

Как утверждается, движения, соответствующие решениям системы (4.4), определенным при $\tau \in \mathbb{R}$, осуществляются по траекториям системы (4.3), т. е. по кривым системы (4.2). Более того, система (4.4) содержит несчетное множество $\mathcal{P}$ положений равновесия, содержащее точку P (см. [2, с. 388]). После перехода к системе (4.4) должна получиться последовательность траекторий

$$K_1, K_2, \dots, K_\omega, K_{\omega+1}, \dots, K_\beta \quad (4.5)$$

данной системы, обладающая следующим свойством: ω - или α -предельными точками движений на любой траектории K_δ при всех числах $\gamma > \delta$ являются точки траекторий K_γ и только они. В результате этого и образуется множество M_α , $\alpha > \beta$.

Очевидно, что говорить о построении последовательности (4.5) можно лишь тогда, когда переход от системы (4.3) к системе (4.4) корректен. Однако, какое-либо обоснование корректности каждого из указанных выше переходов в [2, с. 387, 388] отсутствует. Кроме того, в примерах 3.1 и 3.2 мы видели, что создание даже одного положения равновесия в простейшей системе принципиально меняет качественную картину поведения траекторий. Следовательно, без соответствующего полного и подробного обоснования разговор о построении последовательности (4.5) теряет какой-либо смысл.

Остается добавить, концепция примера Майера опровергается как теоремой 1.1, так и теоремой 2.2.

З а м е ч а н и е 4.1. Очевидно, что пример Майера содержит слишком много противоречивых утверждений аксиоматического характера. Только этим можно объяснить то, что данный пример был исключен из перевода [8] монографии [2].

5. Вероятностные свойства движений

Общие вероятностные свойства последовательности (2.1) были изучены еще Биркгофом (см. [1, с. 201]).

Принимая во внимание теорему 2.2, здесь мы не будем останавливаться на соответствующей теореме Биркгофа, а ограничимся лишь следующим определением (см. [1, с. 390]).

Пусть $f(t, p)$ — произвольное движение и пусть E — некоторая открытая часть многообразия V . Тогда для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t_1 > t_0$ *вероятность принадлежности* дуги $\{f(t, p) : t \in [t_0, t_1]\}$ траектории K движения $f(t, p)$ множеству E есть величина

$$\frac{\text{mes } E(t_0, t_1)}{t_1 - t_0}, \quad (5.1)$$

где $\text{mes } E(t_0, t_1)$ — обычная лебегова линейная мера множества тех $t \in [t_0, t_1]$, для которых $f(t, p) \in E$.

З а м е ч а н и е 5.1. Поскольку множество E открыто и отображение f непрерывно, вероятность (5.1) определена для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и $t_1 > t_0$.

Вероятностные свойства движений системы g^t на топологическом компактном многообразии V устанавливает следующая

Теорема 5.1. Пусть $f(t, p)$ — некоторое движение системы g^t . Тогда существуют компактные минимальные множества Ω и A , обладающие следующим свойством: для всех $t_0 \in \mathbb{R}$ и любых окрестностей E_Ω и E_A множеств Ω и A

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes } E_\Omega(t_0, t_1)}{t_1 - t_0} = 1 \quad (5.2)$$

и

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes } E_A(-t_1, t_0)}{t_1 - t_0} = 1. \quad (5.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего, зафиксируем произвольное движение $f(t, p)$.

Пусть Ω и A — соответственно ω - и α -предельные множества движения $f(t, p)$, согласно теореме 1.1 компактные и минимальные. Для простоты обозначений положим

$$M' = \Omega \cup A \quad (5.4)$$

и заметим, что в силу свойства (i) теоремы 1.1 для каждой окрестности E множества M' существуют натуральное N и положительное T , удовлетворяющие следующему условию: всегда можно указать N интервалов длины T , таких, что при всех t , не принадлежащих ни одному из них, точка $f(t, p)$ лежит в E (см. [1, с. 390]). Отсюда непосредственно следуют равенства (5.2) и (5.3). $\square$

Следствие 5.1. Любая окрестность E множества M' , задаваемого равенством (5.4), обладает следующим свойством:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes } E(-\tau, \tau)}{2\tau} = 1.$$

З а м е ч а н и е 5.2. Теорема 1.1 справедлива для системы g^t , заданной в хаусдорфовом секвенциально компактном топологическом пространстве Γ (см. [9]). Поэтому теоремы 2.1–5.1 и следствие 5.1 также справедливы в Γ .

References

- [1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].
- [2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].
- [3] D. N. Cheban, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, HPC Publ., New York, 2009.
- [4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].
- [5] S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems on compact manifolds”, *Lobachevskii J. Math.*, **44**:7 (2023), 2630–2637.
- [6] Л. Шварц, *Анализ*. Т. II, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analisis*. V. II, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [7] Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений*, ЛКИ, М., 2007. [E. A. Coddington, N. Levinson, *Ordinary differential equations*, LKI Publ., Moscow, 2007 (In Russian)].
- [8] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton University Press Publ., Princeton, 1960.
- [9] С. М. Дзюба, “О рекуррентных движениях динамических систем в полуметрическом пространстве”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:144 (2023), 371–382. [S. M. Dzyuba, “On the recurrent motions of dynamical systems in a semi-metric space”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports Mathematics*, **28**:144 (2023), 371–382 (In Russian)].

Информация об авторе

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем, Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Поступила в редакцию 20.06.2024 г.

Поступила после рецензирования 02.12.2024 г.

Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department, Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Received 20.06.2024

Reviewed 02.12.2024

Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Измаилов А.Ф., Усков Е.И., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-41-55>

УДК 519.6



Гибридная глобализация сходимости метода Левенберга–Марквардта для задач оптимизации с ограничениями-равенствами

Алексей Ферилович ИЗМАИЛОВ¹,
Евгений Иванович УСКОВ²

¹ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»
119992, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Метод Левенберга–Марквардта обладает локальной сверхлинейной сходимостью для общих систем нелинейных уравнений при слабых предположениях, допускающих неизоллированность решений. Это обосновывает его применение к системам условий первого порядка оптимальности для задач условной оптимизации при возможном нарушении условий регулярности ограничений, что влечет неединственность множителей Лагранжа. Однако, существующие стратегии глобализации сходимости метода Левенберга–Марквардта не являются оптимизационными, т. е., в случае применения к задачам оптимизации, направлены на поиск не решений, а любых стационарных точек таких задач. В этой работе предлагаются оптимизационные стратегии глобализации сходимости метода Левенберга–Марквардта для задач оптимизации с ограничениями-равенствами. Стратегии носят гибридный характер, а именно, основаны на комбинировании глобально сходящегося оптимизационного метода внешней фазы с асимптотическим переключением на метод Левенберга–Марквардта. Установлены свойства глобальной сходимости и сверхлинейная скорость. Приводятся численные результаты, подтверждающие работоспособность предложенных гибридных алгоритмов.

Ключевые слова: задача оптимизации с ограничениями-равенствами, система Лагранжа, метод Левенберга–Марквардта, глобализация с возвратами, глобализация с рекордами

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00015, <https://rscf.ru/project/24-21-00015/>).

Для цитирования: Измаилов А.Ф., Усков Е.И. Гибридная глобализация сходимости метода Левенберга–Марквардта для задач оптимизации с ограничениями-равенствами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 41–55.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-41-55>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. F. Izmailov, E. I. Uskov, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-41-55>

Hybrid globalization of convergence of the Levenberg–Marquardt method for equality-constrained optimization problems

Alexey F. IZMAILOV¹, Evgeniy I. USKOV²¹ Lomonosov Moscow State University

1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The Levenberg–Marquardt method possesses local superlinear convergence for general systems of nonlinear equations under weak assumptions allowing for nonisolated solutions. This justifies its application to first-order optimality systems of constrained optimization problems with possibly violated constraint qualifications, the latter giving rise to nonuniqueness of Lagrange multipliers. However, the existing strategies for globalization of convergence of the Levenberg–Marquardt method are not optimization-oriented by nature, i. e., when applied to optimization problems, they are intended not for finding solutions, but rather any stationary points of such problems. In this work, we propose optimization-oriented globalization strategies for the Levenberg–Marquardt method applied to optimization problems with equality constraints. The proposed strategies are hybrid by their character, i. e., they combine a globally convergent optimization outer phase method with asymptotic switching to the Levenberg–Marquardt method. Global convergence properties and superlinear rate of convergence are established. Numerical results are provided, demonstrating that the proposed hybrid algorithms are workable.

Keywords: equality-constrained optimization problem, Lagrange optimality system, Levenberg–Marquardt method, globalization with backups, globalization with records

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00015, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00015/>).

Mathematics Subject Classification: 47J05, 49M05, 49M15, 65H10, 65K05.

For citation: Izmailov A.F., Uskov E.I. Hybrid globalization of convergence of the Levenberg–Marquardt method for equality-constrained optimization problems. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 41–55.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-41-55>

Введение

Метод последовательного квадратичного программирования (SQP; от английского «Sequential Quadratic Programming») является одним из наиболее эффективных средств численного решения задач оптимизации с функциональными ограничениями; [1, разд. 4.4, 5.4], [2, разд. 4.2, 6.2]. В случае гладкой задачи с ограничениями-равенствами базовый вариант этого метода есть ни что иное, как метод Ньютона, применяемый к системе Лагранжа, характеризующей стационарные точки этой задачи и отвечающие им множители Лагранжа; см. [1, разд. 4.3], [2, разд. 4.1]. Результаты о локальной сверхлинейной сходимости таких методов предполагают выполнение в искомом решении условий регулярности ограничений, которые, в свою очередь, подразумевают единственность множителя Лагранжа. Если же множество множителей не является одноточечным, то оно может устойчивым образом содержать специальные множители, называемые критическими, которые притягивают двойственные последовательности, генерируемые методами SQP, и этот феномен приводит к потере сверхлинейной скорости сходимости; см. [2, разд. 7.1], [3] и цитированную там литературу.

Известны специальные модификации методов SQP, ориентированные на случай возможной неединственности множителей Лагранжа, и позволяющие ослабить указанный эффект притяжения к критическим множителям. Сюда относятся стабилизированный метод SQP [4–8], [2, разд. 7.7.2.], а также его версия со стабилизацией вдоль подпространства [9], в которых двойственные стабилизирующие механизмы препятствуют движению двойственных приближений вдоль множества множителей.

С другой стороны, численные результаты в [10] показывают, что метод Левенберга–Марквардта (LM), являющийся признанным средством поиска потенциально неизолированных решений нелинейных уравнений [11], демонстрирует вполне конкурентоспособное локальное поведение применительно к системе Лагранжа в случае неединственности множителей Лагранжа. В частности, в локальных экспериментах этот метод превосходит упомянутые выше метод SQP, стабилизированный метод SQP и метод SQP стабилизированный вдоль подпространства, как по робастности, так и по эффективности, несмотря на то, что в отличие от этих методов, метод LM предназначен для общих нелинейных уравнений, и никак не использует прямодвойственную структуру системы Лагранжа.

В связи с хорошим локальным поведением метода LM в данном контексте естественным образом возникает вопрос о глобализации сходимости этого метода, которая позволяла бы совместить высокую скорость локальной сходимости с гарантиями разумных свойств возможных предельных точек генерируемых последовательностей. В связи с этим, еще одно важное обстоятельство состоит в том, что подзадачи метода LM всегда разрешимы, в отличие от метода SQP, стабилизированного метода SQP и метода SQP стабилизированного вдоль подпространства, подзадачи которых гарантированно разрешимы только локально, вблизи квалифицированного (удовлетворяющего определенным предположениям) прямодвойственного решения. На самом деле, разрешимость подзадач — это первая трудность, возникающая при попытках глобализации сходимости этих методов. Для метода LM такой проблемы нет.

Способы глобализации сходимости метода LM для общих нелинейных уравнений известны [11] и могут применяться в данном контексте. Однако, эти способы основаны на последовательном уменьшении невязки уравнения, т. е., применительно к системе Лагранжа, направлены на поиск стационарных точек задачи оптимизации, а не ее решений, что,

мягко говоря, не идеально. Например, системе Лагранжа удовлетворяют как минимумы, так и максимумы, и такие глобализованные алгоритмы могут сходиться и к тем, и к другим, и вообще к любым стационарным точкам. С точки зрения теоретических гарантий, исключить возможность сходимости к любым таким точкам невозможно. Тем не менее, несомненный интерес представляют *оптимизационные* стратегии глобализации сходимости метода ЛМ, направленные на поиск именно решений задачи оптимизации (минимумов в задаче (1.1) ниже), и в частности, учитывающие значения целевой функции задачи, а не только невязку системы необходимых условий первого порядка, в которой значения целевой функции вообще не фигурируют, а только ее производная.

Один оптимизационный способ глобализации сходимости метода ЛМ был предложен в [10]; он основан на одномерном поиске для гладкой точной штрафной функции, включающей в себя два штрафных слагаемых (и, соответственно, два параметра штрафа): одно для невязки ограничений, а второе опять же для невязки системы Лагранжа, и это второе слагаемое может опять же играть доминирующую роль, если соответствующий параметр регуляризации бесконечно возрастает, что делает этот подход не вполне удовлетворительным. В этой работе предлагается альтернативный подход, основанный на гибридных стратегиях глобализации сходимости [2, разд. 5.3]. А именно, метод ЛМ определенным образом комбинируется с произвольным оптимизационным методом внешней фазы, обладающим разумными свойствами глобальной сходимости. Будет показано, что при определенных предположениях такие гибридные алгоритмы асимптотически превращаются в метод ЛМ, тем самым наследуя его высокую скорость сходимости. Для стабилизированного метода SQP родственные стратегии глобализации сходимости рассматривались в [12].

В разд. 1. приводится строгая постановка задачи и связанные с ней необходимые теоретические сведения. Разд. 2. содержит изложение метода ЛМ применительно к системе Лагранжа и наиболее точной известной на данный момент теории его локальной сверхлинейной сходимости. В разд. 3. предлагаются два способа гибридной глобализации сходимости этого метода, а именно, глобализация с возвратами и глобализация с рекордами, а также доказываются теоремы о глобальной сходимости и скорости сходимости соответствующих алгоритмов. Наконец, в разд. 4. приводятся результаты вычислительного эксперимента, позволяющие составить представление о практической перспективности гибридной глобализации в данном контексте.

Всюду далее через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^p$ соответствующей размерности p . Также будут использоваться нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$, т. е. сумма модулей компонент вектора и максимум из модулей его компонент, соответственно. Через $\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \|v - u\|$ обозначается расстояние от точки $v \in \mathbb{R}^p$ до множества $U \subset \mathbb{R}^p$, а через $B(v, \delta) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \|u - v\| \leq \delta\}$ — шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке v . Через I обозначается единичная матрица, размер которой всегда ясен из контекста, а через $\ker A$ и $\text{im } A$ — ядро (множество нулей) и образ (множество значений) линейного оператора A , соответственно. Для последовательности $\{u^k\} \subset \mathbb{R}^p$, сходящейся к некоторому $u \in \mathbb{R}^p$, будем говорить, что сходимость имеет Q -порядок $q > 1$, если существует $C > 0$ такое, что $\|u^{k+1} - u\| \leq C\|u^k - u\|^q$ для всех достаточно больших k .

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Будем рассматривать задачу оптимизации с ограничениями-равенствами

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad (1.1)$$

где функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ по крайней мере дважды дифференцируемы.

Стационарные точки задачи (1.1) и отвечающие им множители Лагранжа характеризуются системой Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0, \quad (1.2)$$

где $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Лагранжа задачи (1.1):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle.$$

Классический принцип Лагранжа состоит в том, что любое локальное решение $\bar{x}$ задачи (1.1), в котором выполнено условие регулярности ограничений

$$\text{rank } h'(\bar{x}) = l, \quad (1.3)$$

является стационарной точкой этой задачи, т. е. вместе с некоторым множителем Лагранжа $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяет системе (1.2). Более того, (1.3) является необходимым и достаточным условием для единственности отвечающего $\bar{x}$ множителя Лагранжа $\bar{\lambda}$. В этой работе, однако, особый интерес представляет случай, когда множество множителей Лагранжа

$$\Lambda(\bar{x}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^l \mid \frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \lambda) = 0 \right\},$$

отвечающих стационарной точке $\bar{x}$ задачи (1.1), может не быть одноточечным, т. е. когда условие регулярности ограничений (1.3) может нарушаться, и, в частности, когда система (1.2) может иметь неизолированные решения.

В дальнейшем будет использоваться локальная липшицева оценка расстояния до множества $\{\bar{x}\} \times \Lambda(\bar{x})$ в стационарной точке $\bar{x}$ задачи (1.1) для множителя $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x})$, а именно, следующее свойство:

$$\|x - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda, \Lambda(\bar{x})) = O(\|\Phi(x, \lambda)\|) \quad (1.4)$$

при $(x, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\lambda})$, где отображение $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ задается равенством

$$\Phi(x, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda), h(x) \right). \quad (1.5)$$

Это свойство равносильно тому, что множитель $\bar{\lambda}$ является некритическим, т. е. условия

$$\xi \in \ker h'(\bar{x}), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi \in \text{im}(h'(\bar{x}))^\top$$

выполняются только с $\xi = 0$; см. [2, предложение 1.43]. Элементарно проверяется, что некритичность $\bar{\lambda}$ всегда имеет место при выполнении достаточного условия второго порядка оптимальности

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda})\xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}, \quad (1.6)$$

но обратная импликация не имеет места: $\bar{\lambda}$ может быть некритическим и при нарушении (1.6).

2. Метод Левенберга–Марквардта

Система Лагранжа (1.2) может быть записана в виде

$$\Phi(x, \lambda) = 0, \quad (2.1)$$

с отображением Φ , введенным в (1.5). Заметим, что Φ — это полный градиент функции Лагранжа L , и, в частности, матрица Якоби этого отображения в любой точке симметрична. С учетом этого обстоятельства, для текущего приближения $(x^k, \lambda^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, метод ЛМ для уравнения (2.1) (т. е. для системы Лагранжа (1.2)) определяет следующее приближение как $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$, где $v^k = (\xi^k, \eta^k)$ есть решение линейного уравнения

$$\Phi'(x^k, \lambda^k)\Phi(x^k, \lambda^k) + ((\Phi'(x^k, \lambda^k))^2 + \sigma(x^k, \lambda^k)I)v = 0 \quad (2.2)$$

относительно $v = (\xi, \eta)$. Здесь $\sigma(x^k, \lambda^k)$ — параметр регуляризации, который обычно определяется как некоторая степень невязки уравнения (2.1), т. е. с использованием функции $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\sigma(x, \lambda) = \|\Phi(x, \lambda)\|^\theta, \quad (2.3)$$

где $\theta > 0$ — фиксированный параметр. При этом, если (x^k, λ^k) не является решением уравнения (2.1), то $\sigma(x^k, \lambda^k) > 0$, и уравнение (2.2) имеет единственное решение. Если же (x^k, λ^k) является решением уравнения (2.1), то будет удобно далее использовать соглашение, что в этом случае метод определяет $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k, \lambda^k)$.

Из [11, теорема 3.2] и полученных при выводе этой теоремы промежуточных оценок (в частности, [11, (3.16)]) вытекает следующий результат о локальной сверхлинейной сходимости метода ЛМ.

Теорема 2.1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ дважды дифференцируемы в окрестности стационарной точки $\bar{x}$ задачи (1.1), причем их вторые производные удовлетворяют условию Липшица вблизи $\bar{x}$. Пусть $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x})$ — некритический множитель. Пусть функция $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$ определена в (2.3) с некоторым фиксированным $\theta \in (0, 2]$.

Тогда для любой начальной точки $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ метод ЛМ однозначно определяет последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$. Более того, найдется функция $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\varphi(t) = O(t^{\min\{\theta+1, 2\}})$ при $t \rightarrow 0+$, и для любого $\delta > 0$ и любой начальной точки (x^0, λ^0) , достаточно близкой к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$ содержится в $B((\bar{x}, \bar{\lambda}), \delta)$ и сходится к $(\bar{x}, \lambda^*)$ с некоторым $\lambda^* \in \Lambda(\bar{x})$, причем скорость сходимости сверхлинейная с Q -порядком $\min\{\theta + 1, 2\}$, и

$$\|x^{k+1} - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda^{k+1}, \Lambda(\bar{x})) \leq \varphi(\|x^k - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda^k, \Lambda(\bar{x}))). \quad (2.4)$$

Заметим, что в сделанных предположениях для введенного в (1.5) отображения Φ функция $\|\Phi(\cdot)\|$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности множества $\{\bar{x}\} \times \mathbb{R}^l$. Отсюда следует, что

$$\|\Phi(x, \lambda)\| = O(\|x - \bar{x}\| + \text{dist}(\lambda, \Lambda(\bar{x}))) \quad (2.5)$$

при $(x, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Комбинируя оценки (1.4) (эквивалентную некритичности множителя $\bar{\lambda}$) и (2.5) с оценкой (2.4), получаем такое следствие теоремы 2.1, которое потребуется в дальнейшем анализе.

Следствие 2.1. В предположениях теоремы 2.1 найдется функция $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что $\varphi(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0+$, и для любой точки $(x^k, \lambda^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, достаточно близкой к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, итерация метода LM определяет приближение (x^{k+1}, λ^{k+1}) , для которого выполняется

$$\|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\| \leq \varphi(\|\Phi(x^k, \lambda^k)\|). \quad (2.6)$$

3. Гибридная глобализация

Ниже предлагаются два способа гибридной глобализации метода LM: алгоритм с возвратами и алгоритм с рекордами. Идея алгоритма с возвратами заключается в том, что на каждой итерации из текущей точки (x^k, λ^k) делается шаг метода LM, который принимается, если невязка системы Лагранжа в полученной пробной точке не превышает заданной доли от ее невязки в точке (x^k, λ^k) . Если на какой-то из последующих итераций шаг метода LM не принимается, то происходит возврат к той точке, откуда был сделан первый в данной серии шагов метода LM, и из этой точки делается шаг метода внешней фазы.

Алгоритм 1. Фиксируем параметры $\theta > 0$ и $\rho \in (0, 1)$. Выбираем $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ и полагаем $k = 0$.

1. Полагаем $\hat{k} = k$ и $(\hat{x}, \hat{\lambda}) = (x^k, \lambda^k)$.
2. Если $\Phi(x^k, \lambda^k) = 0$, стоп.
3. Вычисляем $v^k = (\xi^k, \eta^k)$ как решение линейной системы (2.2) с функцией $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенной в (2.3).
4. Если

$$\|\Phi(x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)\| \leq \rho \|\Phi(x^k, \lambda^k)\|, \quad (3.1)$$

то полагаем $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$, увеличиваем номер шага k на 1, и переходим к п. 2. (Шаг метода LM.)

5. Если $k > \hat{k}$ (т. е. текущая точка (x^k, λ^k) сгенерирована с помощью шага метода LM), то восстанавливаем сохраненные значения, полагая $k = \hat{k}$ и $(x^k, \lambda^k) = (\hat{x}, \hat{\lambda})$.
6. Вычисляем (x^{k+1}, λ^{k+1}) с помощью шага метода внешней фазы, увеличиваем номер шага k на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода внешней фазы.)

Свойства глобальной сходимости алгоритма 1 вытекают из следующих наблюдений. Могут реализоваться только два возможных сценария: либо все итерации осуществляются с помощью метода внешней фазы, и при этом алгоритм 1 наследует свойства глобальной сходимости этого метода, либо все итерации, начиная с некоторого номера k , являются итерациями метода LM, и тогда из (3.1) вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ дважды дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Пусть последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$ сгенерирована алгоритмом 1, и пусть все члены этой последовательности, начиная с некоторого, получены шагами метода LM.

Тогда

$$\Phi(x^k, \lambda^k) \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$, и, в частности, если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ является предельной точкой последовательности $\{(x^k, \lambda^k)\}$, то $\bar{x}$ — стационарная точка задачи (1.1), а $\bar{\lambda}$ — отвечающий ей множитель Лагранжа.

В следующей теореме устанавливается сверхлинейная скорость сходимости алгоритма 1.

Теорема 3.2. Пусть в предположениях теоремы 2.1 точка $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ является предельной точкой последовательности $\{(x^k, \lambda^k)\}$, сгенерированной алгоритмом 1.

Тогда вся последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$ сходится к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ со сверхлинейной скоростью.

Доказательство. Из следствия 2.1 вытекает, что найдутся окрестность U точки $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ и функция $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что $\varphi(t) = o(t)$ при $t \rightarrow 0+$, и для любой точки $(x^k, \lambda^k) \in U$ итерация метода LM определяет приближение (x^{k+1}, λ^{k+1}) , для которого выполняется неравенство (2.6). Кроме того, из непрерывности Φ следует, что, сужая при необходимости окрестность U , можно гарантировать, что для любой точки $(x, \lambda) \in U$ справедливо неравенство

$$\varphi(\|\Phi(x, \lambda)\|) \leq \rho \|\Phi(x, \lambda)\|. \quad (3.2)$$

Далее, согласно теореме 2.1, найдется окрестность V точки $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ такая, что для любой начальной точки из V метод LM определяет последовательность, содержащуюся в U . Поскольку $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ является предельной точкой последовательности $\{(x^k, \lambda^k)\}$, то для некоторого k выполняется $(x^k, \lambda^k) \in V$, а значит, метод LM, запущенный из точки (x^k, λ^k) как из начальной точки, определяет последовательность, содержащуюся в U . Из неравенств (2.6) и (3.2) при этом вытекает выполнение вдоль этой последовательности условия (3.1). Поэтому все последующие итерации алгоритма 1 являются итерациями метода LM, и сходимость $\{(x^k, \lambda^k)\}$ к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ со сверхлинейной скоростью следует из теоремы 2.1. $\square$

Алгоритм с возвратами имеет по крайней мере один концептуальный недостаток, состоящий в том, что ранние попытки переключения на метод LM могут приводить к напрасным вычислительным затратам на итерации метода LM, результаты которых впоследствии отбрасываются. В связи с этим рассмотрим альтернативную стратегию гибридной глобализации, в которой вместо того, чтобы сравнивать невязку системы Лагранжа в пробной точке с невязкой, полученной на предыдущей итерации, будем сравнивать ее с рекордом, т. е. с наименьшим значением невязки на всех предыдущих итерациях, и принимать шаг метода LM только в том случае, если невязка в пробной точке не превышает заданной доли от рекорда.

Алгоритм 2. Фиксируем параметры $\theta > 0$ и $\rho \in (0, 1)$. Выбираем $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ и полагаем $k = 0$. Вычисляем $\varphi_{\text{rec}} = \|\Phi(x^0, \lambda^0)\|$.

1. Если $\Phi(x^k, \lambda^k) = 0$, стоп.
2. Вычисляем $v^k = (\xi^k, \eta^k)$ как решение линейной системы (2.2) с функцией $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенной в (2.3).
3. Если

$$\|\Phi(x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)\| \leq \rho \varphi_{\text{rec}}, \quad (3.3)$$

то полагаем $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) = (x^k + \xi^k, \lambda^k + \eta^k)$, $\varphi_{\text{rec}} = \|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\|$, увеличиваем номер шага k на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода LM.)

4. Вычисляем (x^{k+1}, λ^{k+1}) с помощью шага метода внешней фазы. Если

$$\|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\| < \varphi_{\text{rec}},$$

то полагаем $\varphi_{\text{rec}} = \|\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1})\|$. Увеличиваем номер шага k на 1 и переходим к п. 1. (Шаг метода внешней фазы.)

Как и для алгоритма 1, возможны лишь два сценария: либо все итерации алгоритма 2, начиная с некоторой, осуществляются с помощью метода внешней фазы, либо бесконечное число итераций алгоритма 2 являются итерациями метода LM. В первом случае алгоритм 2 наследует свойства глобальной сходимости метода внешней фазы. Во втором случае из условия (3.3) легко выводится следующий результат о глобальной сходимости алгоритма 2.

Теорема 3.3. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ дважды дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Пусть последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$ сгенерирована алгоритмом 2, и пусть все члены (x^{k_j}, λ^{k_j}) этой последовательности получены шагами метода LM для бесконечного числа номеров j .

Тогда

$$\Phi(x^{k_j}, \lambda^{k_j}) \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$, и, в частности, если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ является предельной точкой последовательности $\{(x^{k_j}, \lambda^{k_j})\}$, то $\bar{x}$ — стационарная точка задачи (1.1), а $\bar{\lambda}$ — отвечающий ей множитель Лагранжа.

Свойства глобальной сходимости алгоритма 2, установленные в теореме 3.3, несколько слабее соответствующих свойств алгоритма 1, установленных в теореме 3.1, но тем не менее, они вполне разумны. А именно, если вместо условия останова в п. 1 алгоритма 2 использовать практическое правило, состоящее в достаточной малости $\|\Phi(x^k, \lambda^k)\|$, то либо алгоритм успешно завершается после конечного числа итераций, либо все его итерации начиная с некоторой являются шагами метода внешней фазы.

Результат о сверхлинейной скорости сходимости алгоритма 2 использует несколько более сильные предположения, чем для алгоритма 1. А именно, в отличие от теоремы 3.2, в следующей теореме предполагается (а не утверждается) сходимость всей сгенерированной алгоритмом последовательности.

Теорема 3.4. Пусть в предположениях теоремы 2.1 последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$, сгенерированная алгоритмом 2, сходится к точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Тогда скорость сходимости сверхлинейная.

До к а з а т е л ь с т в о. Если рекордное значение φ_{rec} меняется бесконечное число раз, то в последовательности $\{(x^k, \lambda^k)\}$ найдется точка (x^k, λ^k) , сколь угодно близкая к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, для которой $\varphi_{\text{rec}} = \|\Phi(x^k, \lambda^k)\|$. Тогда аналогично доказательству теоремы 3.2 демонстрируется, что точка (x^{k+1}, λ^{k+1}) , полученная шагом метода LM, принимается алгоритмом 2, как и на всех последующих итерациях, и требуемый результат получается применением теоремы 2.1.

Если же предположить, что начиная с некоторой итерации рекордное значение $\varphi_{\text{rec}} > 0$ не меняется (что, в частности, подразумевает, что начиная с этой итерации шаги метода LM не принимаются алгоритмом 2), то приходим к противоречию. Действительно

$\Phi(x^k, \lambda^k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, поскольку $\{(x^k, \lambda^k)\}$ сходится к точке $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, отображение Φ непрерывно в этой точке, и $\Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$, и поэтому для достаточно большого k условие (3.3) должно выполняться, каким бы ни было фиксированное значение $\varphi_{\text{гес}} > 0$, а значит, рекордное значение $\varphi_{\text{гес}}$ должно измениться. $\square$

4. Численные результаты

Численный эксперимент проводился на всех задачах с ограничениями-равенствами из коллекции DEGEN¹⁾, в которой собраны задачи оптимизации с нерегулярными ограничениями в некотором известном решении, и, соответственно, с неединственным множителем Лагранжа, отвечающим этому решению. Всего использовалось 35 задач.

Сравнение проводилось для следующих алгоритмов.

- QNSQP — глобализованный посредством одномерного поиска квазиньютоновский метод SQP, приводимый ниже как алгоритм 3.
- LM backups — алгоритм 1, в котором в качестве метода внешней фазы используется QNSQP.
- LM records 1 — алгоритм 2, в котором в качестве метода внешней фазы используется QNSQP, причем если после принятого шага метода LM осуществлялся шаг метода внешней фазы, то он выполнялся с матрицей $H_k = I$ (см. описание метода внешней фазы ниже).
- LM records 2 — то же, что и LM records 1, но со следующим отличием: если после принятого шага метода LM осуществлялся шаг метода внешней фазы, то он выполнялся с матрицей H_k , получаемой по формуле BFGS с модификацией Пауэлла (см. ниже) из последней матрицы, использовавшейся на шаге метода внешней фазы.

Вычисления проводились в среде MATLAB, с использованием стандартных средств этой среды для решения систем линейных уравнений.

Конкретный вариант алгоритма QNSQP, использовавшийся в экспериментах, соответствует [1, алгоритм 5.4.1], с вычислением аппроксимаций H_k матрицы Гессе функции Лагранжа по правилу Бroyдена–Флетчера–Голдфарба–Шанно (BFGS) с модификацией Пауэлла (см. [2, р. 213]), с начальной матрицей $H_0 = I$. Определим семейство штрафных функций $\varphi_c : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_c(x) = f(x) + c\|h(x)\|_1.$$

Алгоритм 3. Фиксируем параметры $\bar{c} > 0$, $\bar{\delta} > 0$ и $\varepsilon, \varkappa, \nu \in (0, 1)$, и полагаем $H_0 = I$. Выбираем $(x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ и полагаем $k = 0$.

1. Если $\Phi(x^k, \lambda^k) = 0$, стоп.
2. Вычисляем $v^k = (\xi^k, \eta^k)$ как решение линейной системы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k) \\ h(x^k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_k & (h'(x^k))^\top \\ h'(x^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

¹⁾ http://w3.impa.br/~optim/DEGEN_collection.zip

Иными словами, ξ^k и $\lambda^k + \eta^k$ есть стационарная точка и отвечающий ей множитель Лагранжа задача квадратичного программирования

$$\langle f'(x^k), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle H_k \xi, \xi \rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k) \xi = 0.$$

Если v^k вычислить не удастся, или если $v^k = 0$, стоп.

3. Полагаем $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \eta^k$,

$$c_k = \begin{cases} \|\lambda^{k+1}\|_\infty + \bar{c} + \bar{\delta}, & \text{если } k = 0 \text{ или } c_{k-1} < \|\lambda^{k+1}\|_\infty + \bar{c}, \\ c_{k-1}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\Delta_k = \langle f'(x^k), \xi^k \rangle - c_k \|h(x^k)\|_1.$$

4. Полагаем $\alpha = 1$. Если выполняется неравенство

$$\varphi_{c_k}(x^k + \alpha \xi^k) \leq \varphi_{c_k}(x^k) + \varepsilon \alpha \Delta_k, \quad (4.1)$$

полагаем $\alpha_k = \alpha$. В противном случае заменяем α на $\varkappa \alpha$ и проверяем снова неравенство (4.1) до тех пор, пока оно не выполнится, после чего полагаем $\alpha_k = \alpha$.

5. Полагаем $x^{k+1} = \alpha_k \xi^k$,

$$s^k = x^{k+1} - x^k, \quad r^k = \frac{\partial L}{\partial x}(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) - \frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^{k+1}),$$

$$\tau_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \langle r^k, s^k \rangle \geq \nu \langle H_k s^k, s^k \rangle, \\ \frac{(1 - \nu) \langle H_k s^k, s^k \rangle}{\langle H_k s^k, s^k \rangle - \langle r^k, s^k \rangle}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\tilde{r}^k = \tau_k r^k + (1 - \tau_k) H_k s^k,$$

$$H_{k+1} = H_k + \frac{\tilde{r}^k (\tilde{r}^k)^\top}{\langle \tilde{r}^k, s^k \rangle} - \frac{H_k s^k (H_k s^k)^\top}{\langle H_k s^k, s^k \rangle},$$

увеличиваем номер шага k на 1 и переходим к п. 1.

Параметры в алгоритме 3 были выбраны следующим образом: $\bar{c} = \bar{\delta} = 1$, $\varepsilon = 0.01$, $\varkappa = 0.5$, $\nu = 0.2$. В алгоритмах 1 и 2 использовался параметр $\rho = 0.9$. Кроме того, в этих алгоритмах правило (2.3) для параметра регуляризации метода ЛМ было модифицировано следующим образом:

$$\sigma(x, \lambda) = \min\{0.1, \|\Phi(x, \lambda)\|^\theta\},$$

поскольку большие значения параметра регуляризации в удаленных от решений точках (с большими невязками) могут приводить к слишком коротким шагам метода ЛМ.

Запуск считался неудачным, если условие остановки

$$\|\Phi(x^k, \lambda^k)\| \leq 10^{-8}$$

ни разу не выполнялось за 500 итераций, или если очередная итерация метода внешней фазы оказывалась неудачной (а именно, если неудачей заканчивалось решение какой-либо из итерационных линейных систем метода для определения направления (ξ^k, η^k) , либо если в процессе одномерного поиска в алгоритме 3 получалось пробное значение параметра α длины шага, для которого $\alpha \|\xi^k\| \leq 10^{-12}$).

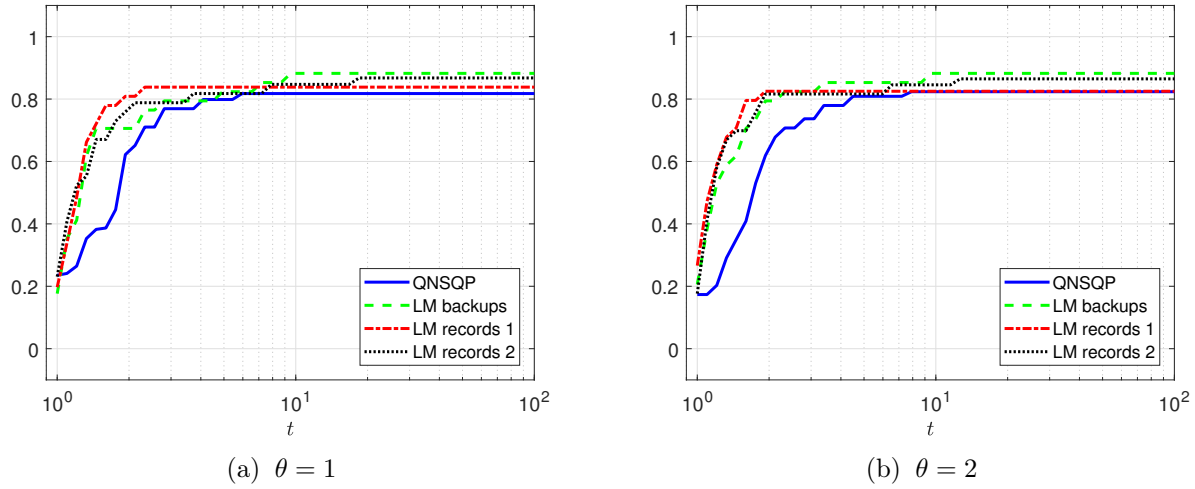


Рис. 1. Алгоритм 3 на внешней фазе; RSP = 1

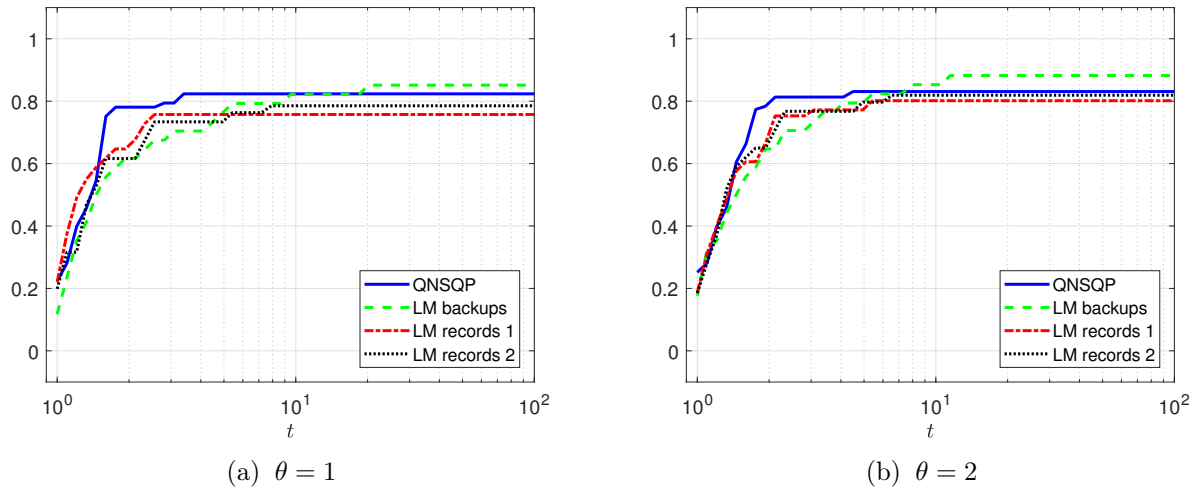


Рис. 2. Алгоритм 3 на внешней фазе; RSP = 10

Для каждой тестовой задачи осуществлялось 20 запусков из случайно сгенерированных начальных точек (x^0, λ^0) , равномерно распределенных в l_∞ -шаре (гиперкубе), радиус которого определялся параметром RSP (от «Range of Starting Points»), с центром в точке $(\bar{x}, 0)$, где $\bar{x}$ — известное решение, в котором нарушается условие регулярности (1.3).

Для представления результатов эксперимента использовались так называемые performance profiles, предложенные в [13], и адаптированные в [14] для случая многократных запусков для каждой тестовой задачи, с использованием средних характеристик эффективности и процентов успешных запусков. Полное описание этой конструкции, позволяющей одновременно отображать на рисунке сравнительную робастность (т. е. долю успешных запусков) и эффективность сравниваемых алгоритмов, можно найти в [15]. В качестве характеристики эффективности использовалось количество итераций (для алгоритма с возвратами это число учитывает отброшенные шаги метода LM), поскольку итерации всех сравниваемых алгоритмов имеют сопоставимую трудоемкость.

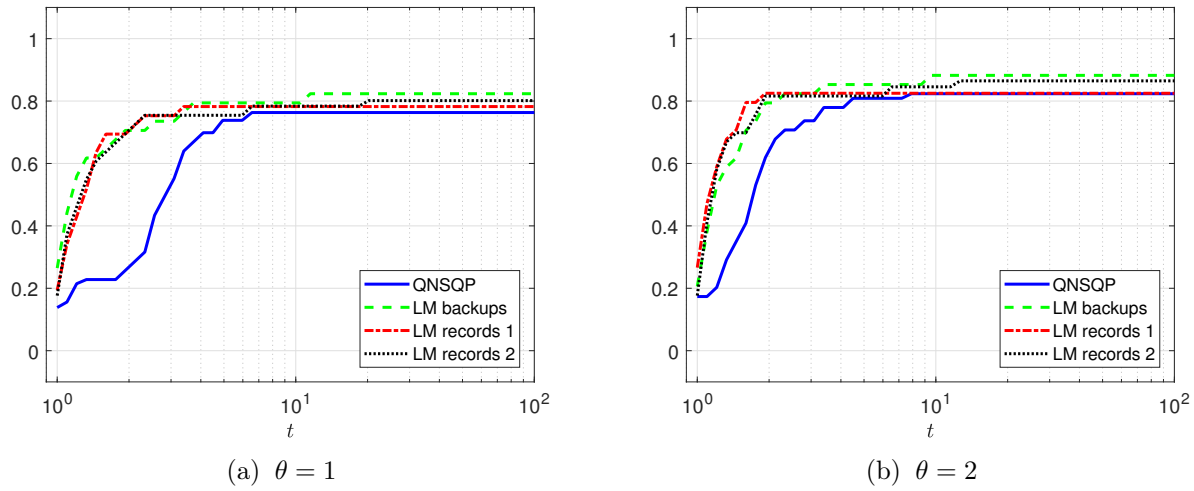


Рис. 3. Метод линейаризации на внешней фазе; RSP = 1

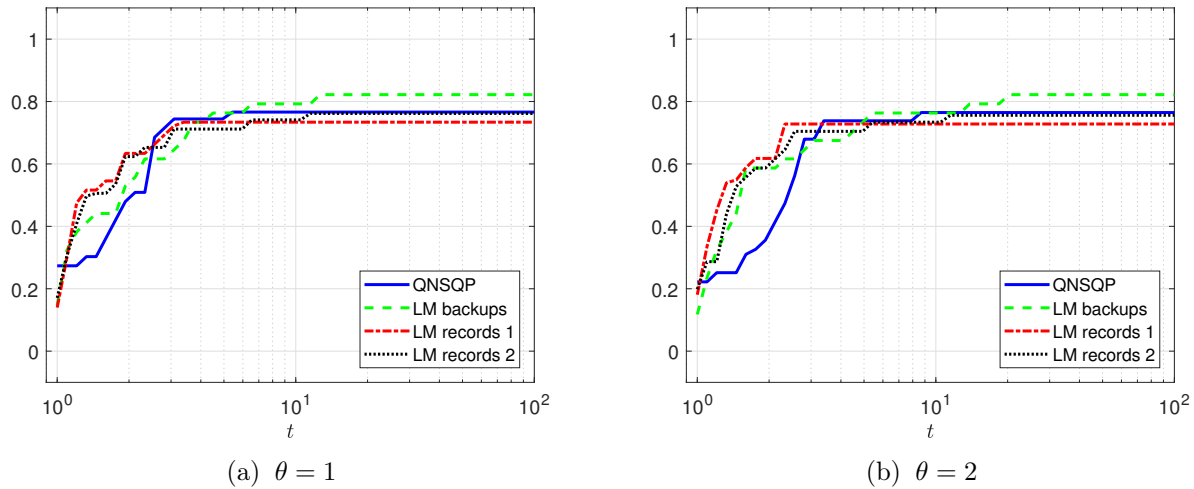


Рис. 4. Метод линейаризации на внешней фазе; RSP = 10

Из рис. 1 и 2 видно, что сравниваемые алгоритмы имеют на данном тестовом наборе схожую робастность, хотя для LM backups эта характеристика всегда является наилучшей. Кроме того, при RSP = 1 варианты глобализованного метода LM вполне конкурентоспособны и по эффективности, особенно с при использовании показателя степени $\theta = 2$ в параметре регуляризации. Однако, при RSP = 10 варианты метода LM уже несколько уступают по эффективности алгоритму QNSQP.

Дело, однако, в том, что какие-либо гарантии глобальной сходимости алгоритма 3 неизвестны, и проблема здесь в отсутствии гарантий равномерной положительной определенности и ограниченности матриц H_k , генерируемых этим алгоритмом по правилу BFGS. Поэтому использование этого алгоритма в качестве метода внешней фазы не вполне оправдано, по крайней мере формально. В связи с этим были также проведены эксперименты с вариантом алгоритма QNSQP, в котором в алгоритме 3 в качестве H_k всегда бралась единичная матрица. Метод SQP с $H_k = I$ называют методом линейаризации. Глобальная сходимость такого алгоритма следует, например, из [1, теорема 5.4.1].

Результаты для алгоритма QNSQP, использующего метод линейаризации, представлены на рис. 3 и 4, и они демонстрируют, что соответствующие гибридные глобализации метода LM по-прежнему сравнимы с этим алгоритмом по робастности, причем метод LM backups превосходит остальные алгоритмы по этой характеристике. При этом гибридные глобализации метода LM и существенно более эффективными при $RSP = 1$, и эта картина сохраняется и при $RSP = 10$, особенно для показателя степени $\theta = 2$ в параметре регуляризации, хотя и не столь выраженным образом.

References

- [1] А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов, *Численные методы оптимизации*, 2-е изд., перераб. и доп., Физматлит, М., 2008. [A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Chislennyye Metody Optimizatsii*, 2nd edition, revised and enlarged, Fizmatlit, Moscow, 2008 (In Russian)].
- [2] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, Cham, 2014.
- [3] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Critical Lagrange multipliers: what we currently know about them, how they spoil our lives, and what we can do about it”, *TOP*, **23**:1 (2015), 1–26.
- [4] S. J. Wright, “Superlinear convergence of a stabilized SQP method to a degenerate solution”, *Computational Optimization and Applications*, **11**:3 (1998), 253–275.
- [5] W. W. Hager, “Stabilized sequential quadratic programming”, *Computational Optimization and Applications*, **12**:1–3 (1999), 253–273.
- [6] S. J. Wright, “Modifying SQP for degenerate problems”, *SIAM J. on Optimization*, **13**:2 (2002), 470–497.
- [7] D. Fernández, M. V. Solodov, “Stabilized sequential quadratic programming for optimization and a stabilized Newton-type method for variational problems”, *Mathematical Programming*, **125**:1 (2010), 47–73.
- [8] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Stabilized SQP revisited”, *Mathematical Programming*, **133**:1–2 (2012), 93–120.
- [9] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, “Subspace-stabilized sequential quadratic programming”, *Computational Optimization and Applications*, **67**:1 (2017), 129–154.
- [10] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “A globally convergent Levenberg–Marquardt method for equality-constrained optimization”, *Computational Optimization and Applications*, **72**:1 (2019), 215–239.
- [11] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “The Levenberg–Marquardt method: an overview of modern convergence theories and more”, *Computational Optimization and Applications*, **89**:1 (2024), 33–67.
- [12] А. Ф. Измаилов, А. М. Крылова, Е. И. Усков, “Гибридная глобализация стабилизированного метода последовательного квадратичного программирования”, *Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа*, ВЦ РАН, М., 2011, 47–66. [A. F. Izmailov, A. M. Krylova, E. I. Uskov, “Hybrid globalization of the stabilized method of sequential quadratic programming”, *Theoretical and Applied Problems of Nonlinear Analysis*, CC RAS, Moscow, 2011, 47–66 (In Russian)].
- [13] E. D. Dolan, J. J. Moré, “Benchmarking optimization software with performance profiles”, *Mathematical Programming*, **91**:2 (2002), 201–213.
- [14] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, E. I. Uskov, “Combining stabilized SQP with the augmented Lagrangian algorithm”, *Computational Optimization and Applications*, **62**:2 (2015), 405–429.
- [15] A. F. Izmailov, E. I. Uskov, Yan Zhibai, “The piecewise Levenberg–Marquardt method for generalized Nash equilibrium problems.”, *Advances in System Sciences and Applications*, **24**:2 (2024), 19–31 (to appear).

Информация об авторах

Измаилов Алексей Ферилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Усков Евгений Иванович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НОЦ «Фундаментальные математические исследования», Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Измаилов Алексей Ферилович

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 26.01.2025 г.

Поступила после рецензирования 04.03.2025 г.

Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the authors

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Evgeniy I. Uskov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher at the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexey F. Izmailov

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Received 26.01.2025

Reviewed 04.03.2025

Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Лангаршоев М. Р., Хоразмшоев С. С., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>

УДК 517.5, 519.65



О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ¹,Саидджобир Саиднасиллоевич ХОРАЗМШОЕВ²¹ АНО ВО «Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт»

117342, Российская Федерация, г. Москва, ул. Введенского, 1А

² Таджикский технический университет им. академика М. С. Осими

734042, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Академиков Раджабовых, 10

Аннотация. Рассматривается множество $L_2^{(r)}$ 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна, а производная r -го порядка $f^{(r)} \in L_2$. Решается экстремальная задача нахождения точной константы типа Джексона–Стечкина, связывающей наилучшее полиномиальное приближение функций из $L_2^{(r)}$ и усредненное значение обобщенного модуля непрерывности m -го порядка их производной $f^{(r)}$ в пространстве L_2 . Также рассмотрены классы $W_m^{(r)}(u)$ и $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ функций из $L_2^{(r)}$ таких, что усредненное значение обобщенного модуля непрерывности m -го порядка их производной $f^{(r)}$ ограничено сверху единицей и, соответственно, значением некоторой функции $\Phi(u)$. Вычислены точные значения известных n -поперечников (по Бернштейну, по Гельфанду, колмогоровского, линейного и проекционного) класса $W_m^{(r)}(u)$. Затем решена экстремальная задача нахождения точного значения наилучшего приближения для класса $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Полученные результаты развивают и дополняют некоторые известные результаты о наилучшем приближении в L_2 различных классов функций. В работе мы используем методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах, а также метод оценки снизу n -поперечников функциональных классов в банаховых пространствах, разработанный В. М. Тихомировым.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение в L_2 , экстремальная характеристика — обобщенный модуль непрерывности, n -поперечники

Для цитирования: Лангаршоев М.Р., Хоразмшоев С.С. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций в пространстве L_2 // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 56–65.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>



On the best approximation of some classes of periodic functions in the space L_2

Mukhtor R. LANGARSHOEV¹, Saidjobir S. KHORAZMSHOEV²

¹ Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction
1A, Vvedenskogo St., Moscow 117342, Russian Federation

² Tajik Technical University named after academician M. S. Osimi
10, Academicians Rajabov's Av., Dushanbe 734042, Republic of Tajikistan

Abstract. We consider the set $L_2^{(r)}$ of 2π -periodic functions $f \in L_2$ whose $(r-1)$ -th order derivative is absolutely continuous, and the r -th order derivative $f^{(r)} \in L_2$. We solve the extremal problem of finding an exact Jackson–Stechkin type constant that connects the best polynomial approximation of functions from $L_2^{(r)}$ with the average value of the generalized m -th order modulus of continuity of their derivative $f^{(r)}$ in the space L_2 . We also consider the classes $W_m^{(r)}(u)$ and $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ of functions from $L_2^{(r)}$ such that the average value of the generalized m -th order modulus of continuity of their derivative $f^{(r)}$ is bounded from above by unity and, accordingly, by the value of some function $\Phi(u)$. We calculate the exact values of the known n -widths (according to Bernstein, to Gelfand, to Kolmogorov, linear, and projection) of the class $W_m^{(r)}(u)$. Then we solve the extremal problem of finding the exact value of the best approximation for the class $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. The obtained results develop and complement some known results on the best approximation of various classes of functions in L_2 . In the paper, we use methods for solving extremal problems in normed spaces, as well as the method developed by V. M. Tikhomirov for estimating from below the n -widths of functional classes in Banach spaces.

Keywords: best polynomial approximation in L_2 , extremal characteristic — generalized modulus of continuity, n -widths

Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A17, 41A44.

For citation: Langarshoev M.R., Khorazmshoev S.S. On the best approximation of some classes of periodic functions in the space L_2 . *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 56–65.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-56-65>

Введение

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения для изучения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2$ часто используют различные модификации обычного модуля непрерывности m -го порядка

$$\omega_m(f, t) = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(x + (m-k)h) \right\|_{L_2} : |h| \leq t \right\}.$$

Указанные модификации, как отмечается в [1], в большинстве случаев связаны со специфическими условиями исследуемых задач и позволяют раскрыть их содержательную сущность. Например, в работах [2–6] при аппроксимации 2π -периодических функций из L_2 вместо оператора сдвига $T_h(f, x) := f(x + h)$, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, был использован оператор Стеклова

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\tau) d\tau, \quad h > 0.$$

Данная работа продолжает указанную тематику и посвящена дальнейшему применению характеристик гладкости, использующих оператор $S_h(f, x)$.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел вещественной оси. Рассмотрим пространство $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ измеримых по Лебегу 2π -периодических функций с нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $L_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество 2π -периодических функций $f \in L_2$, у которых производная $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывна, а производная r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежит пространству L_2 . Символом $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка $n-1$ (размерности $\leq 2n-1$), т. е.

$$\mathcal{T}_{n-1} = \left\{ T_{n-1}(x) : T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right\}.$$

Известно, что для произвольной функции $f \in L_2$, имеющей формальное разложение в ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

величина ее наилучшего приближения в метрике L_2 подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ равна

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &= \inf \left\{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \right\} \\ &= \left\| f - S_{n-1}(f, x) \right\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \right\}^{1/2} := \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— частичная сумма порядка $n - 1$ ряда Фурье функции $f \in L_2$.

Пусть

$$S_h(f, x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x + h) dx, \quad h > 0$$

— функция Стеклова элемента $f \in L_2$. Через функцию Стеклова определим операторы

$$S_{h,i}(f) = S_h(S_{h,i-1}(f)), \quad i \in \mathbb{N}, \quad \text{и} \quad S_{h,0}(f) \equiv f.$$

Пусть E — единичный оператор в пространстве L_2 . Следуя работе [2], равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_h^1(f, x) &= S_h(f, x) - f(x) = (S_h - E)(f, x), \\ \Delta_h^m(f, x) &= \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f, x), x) = (S_h - E)^m(f, x) \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_{h,k}(f, x), \quad m = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

определим конечные разности первого и высших порядков, соответственно.

Величина

$$\Omega_m(f, t) = \sup\{\|\Delta_h^m(f, \cdot)\|_2 : 0 < h \leq t\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

называется специальным модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$.

Следует отметить, что характеристика гладкости $\Omega_1(f, t)_p$ при $0 < p < 1$ была использована в работе [7] для изучения поведения наилучшего приближения функций полиномами по системе Хаара.

Нетрудно показать, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$

$$\|\Delta_h^m(f^{(r)}, \cdot)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m},$$

согласно которой равенство (1.2) принимает вид (см. [4])

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t) = \sup_{0 < h \leq t} \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2(f) \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^{2m}.$$

В данной работе для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $u \in (0, \frac{\pi}{n}]$ введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt\right)^m}. \quad (1.3)$$

2. Точные константы в неравенстве Джексона–Стечкина

Теорема 2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при любом $u \in (0, \frac{3\pi}{4n}]$ имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}.$$

Доказательство. В [2] доказано, что для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \cdot \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h). \quad (2.1)$$

Умножаем обе части неравенства (2.1) на h , имеем

$$h E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\sin kh}{k} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h). \quad (2.2)$$

Теперь интегрируем неравенство (2.2) по переменной h от 0 до t :

$$\frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1 - \cos kt}{k^2} \rho_k^2 + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh.$$

А из этого неравенства, учитывая соотношение (1.1) и равенство

$$\max_{k \geq n} \left\{ \frac{1 - \cos kt}{k^2} \right\} = \frac{1 - \cos nt}{n^2},$$

получаем

$$\frac{t^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1 - \cos nt}{n^2} E_{n-1}^2(f) + E_{n-1}^{2-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh,$$

или

$$\frac{t^2}{2} \leq \frac{1 - \cos nt}{n^2} + E_{n-1}^{-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh. \quad (2.3)$$

Интегрируем соотношение (2.3) по переменной t от 0 до u , запишем

$$\frac{u^3}{6} \leq \frac{nu - \sin nu}{n^3} + E_{n-1}^{-1/m}(f)_2 \cdot \frac{1}{n^{r/m}} \int_0^u \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh dt. \quad (2.4)$$

Для нахождения интеграла в (2.4) воспользуемся интегрированием по частям, получим

$$\int_0^u \int_0^t h \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, h) dh dt = \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt.$$

Таким образом, из неравенства (2.4) вытекает, что

$$\frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^m} \leq \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}, \quad (2.5)$$

а из (2.5) сразу получаем оценку сверху для величины $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$.

Для получения аналогичной оценки снизу величины $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$ нам потребуется функция $f_0(x) = \cos nx$, очевидно принадлежащая множеству $L_2^{(r)}$. Для этой функции из (1.1) и (1.2) находим

$$E_{n-1}(f_0)_2 = 1, \quad \Omega_m(f_0^{(r)}, t) = n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)dt\right)^m} &\geq \left(\int_0^u t(u-t)\Omega_m^{1/m}(f_0^{(r)}, t)dt\right)^m \\ &= \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из сопоставления неравенств (2.5) и (2.6) получаем утверждение теоремы 2.1. $\square$

3. Поперечники классов $W_m^{(r)}(u)$ в пространстве L_2

Пусть S — единичный шар в L_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство ко-размерности n , $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n .

Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}, \\ \pi_n(\mathfrak{M}, L_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \} \end{aligned}$$

называют, соответственно, бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n -поперечниками. В силу специфики гильбертова пространства для указанных поперечников выполнены (см. например, [8, с. 239]) следующие соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2). \quad (3.1)$$

Для множества $\mathfrak{M}$ определим еще число

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (3.2)$$

Следуя работе [4], через t_* обозначим величину аргумента $t \in \mathbb{R}_+$ функции $\frac{\sin t}{t}$, при котором она достигает своего наименьшего значения. Очевидно, что t_* есть наименьший из положительных корней уравнения $t = \operatorname{tg} t$ ($4,49 < t < 4,51$). Также обозначим

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \begin{cases} 1 - \frac{\sin t}{t}, & \text{если } 0 < t \leq t_*; \\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t \geq t_* \end{cases}.$$

Через $W_m^{(r)}(u)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$, обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполняется неравенство

$$\frac{6}{u^3} \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \leq 1.$$

Теорема 3.1. При $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$ справедливы равенства

$$\sigma_{2n}(W_m^{(r)}(u), L_2) = \sigma_{2n-1}(W_m^{(r)}(u), L_2) = \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u)) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m,$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Доказательство. Используя определение класса $W_m^{(r)}(u)$, неравенство (2.5) и соотношения (3.1), (3.2), получаем оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \pi_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\leq \pi_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \leq \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(h)) \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника введем в рассмотрение $(2n+1)$ -мерный шар тригонометрических полиномов $S_{2n+1} \in \mathcal{T}_n \cap L_2$, определяемый формулой

$$S_{2n+1} = \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \frac{n^{3m-r} u^{3m}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} \right\},$$

и покажем, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(u)$. В работе [4] для произвольного тригонометрического полинома $T_n \in \mathcal{T}_n$ доказано неравенство

$$\Omega_m^{1/m}(T_n^{(r)}, t) \leq n^{r/m} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)_* \|T_n\|^{1/m}.$$

Используя это соотношение, для произвольного полинома $T_n \in S_{2n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{u^3} \int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^m &\leq \left(\frac{6}{u^3} n^{r/m} \int_0^u t(u-t) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt \right)^m \|T_n\|^m \\ &= \left(\frac{6}{u^3} n^{r/m} \frac{u^3 n^3 - 6nu + 6 \sin nu}{6n^3} \right)^m \frac{n^{3m-r} u^{3m}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(u)$. Согласно теореме В. М. Тихомирова [9] о поперечнике шара получим оценки снизу для бернштейновского n -поперечника

$$\begin{aligned} b_{2n}(W_m^{(r)}(h), L_2) &\geq b_{2n-1}(W_m^{(r)}(h), L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{u^3}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Утверждение теоремы 3.1 вытекает из сопоставления неравенств (3.3) и (3.4). $\square$

4. Верхние грани классов $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ в пространстве L_2

Пусть $\Phi(u)$ — непрерывная неубывающая на полуоси $0 \leq u < \infty$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in (0, +\infty)$ обозначим через $W_m^{(r)}(u, \Phi)$ класс функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых выполнено неравенство

$$\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t) dt \right)^m \leq \Phi(u).$$

Для этого класса вычислим экстремальную аппроксимационную характеристику (1.3).

Теорема 4.1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $u \in (0; \frac{3\pi}{4n}]$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u).$$

Доказательство. Из соотношения (2.5) для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{6^m n^{3m-r}}{(n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu)^m} \left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^m.$$

Отсюда, используя определение класса $W_m^{(r)}(u, \Phi)$, получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) &= \sup \{ E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(u, \Phi) \} \\ &\leq \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \sin nx.$$

Легко показать, что для этой функции имеют место следующие соотношения:

$$E_{n-1}(f_1)_2 = \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \quad (4.2)$$

$$\Omega_m^{1/m}(f_1, u) = n^3 \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right) \Phi^{1/m}(u) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right).$$

Заметим, что $f_1 \in W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^u t(u-t) \Omega_m^{1/m}(f^{(r)}, u) du \right)^m \\ &= \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \left(n^3 \int_0^u t(u-t) \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right) dt \right)^m \\ &= \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u) \left(\frac{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu}{6} \right)^m = \Phi(u), \end{aligned} \quad (4.3)$$

а равенство (4.3) означает принадлежность функции f_1 классу $W_m^{(r)}(u, \Phi)$. Теперь с учетом равенства (4.2) запишем требуемую оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(u, \Phi)) &= \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_m^{(r)}(u, \Phi)\} \geq E_{n-1}(f_1)_2 \\ &= \frac{1}{n^{r-3m}} \left(\frac{6}{n^3 u^3 - 6nu + 6 \sin nu} \right)^m \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Сравнив оценки (4.1) и (4.4), получим утверждение теоремы 4.1. $\square$

Благодарности: Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

References

- [1] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Неравенства типа Джексона–Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **92**:4 (2012), 497–514; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “Jackson–Stechkin type inequalities for special moduli of continuity and widths of function classes in the space L_2 ”, *Math. Notes*, **92**:4 (2012), 458–472.
- [2] В. А. Абилов, Ф. В. Абилова, “Некоторые вопросы приближения 2π -периодических функций суммами Фурье в пространстве $L_2(2\pi)$ ”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 803–811; англ. пер.: V. A. Abilov, F. V. Abilova, “Problems in the approximation of 2π -periodic functions by Fourier sums in the space $L_2(2\pi)$ ”, *Math. Notes*, **76**:6 (2004), 749–757.
- [3] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson inequalities”, *East J. Approx.*, **14**:4 (2008), 411–421.
- [4] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенство типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “A sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 306–313.
- [5] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 ”, *Сиб. мат. журн.*, **52**:6 (2011), 1414–1427; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of the widths of some classes of functions in L_2 ”, *Siberian Math. J.*, **52**:6 (2011), 1124–1136.
- [6] М. Ш. Шабозов, К. Тухлиев, “Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 ”, *Матем. заметки*, **94**:6 (2013), 908–917; англ. пер.: M. Sh. Shabozov, K. Tukhliiev, “Polynomial approximations and the widths of function classes in L_2 ”, *Math. Notes*, **94**:6 (2013), 930–937.
- [7] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98**(140):3(11) (1975), 395–415; англ. пер.: È. A. Storozhenko, V. G. Krotov, P. Oswald, “Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:3 (1975), 355–374.
- [8] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [9] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tikhomirov “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Mathematical Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.

Информация об авторах

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных дисциплин, Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Хоразмшоев Саиджобир Саиднасилоевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Таджикский технический университет им. академика М. С. Осими, г. Душанбе, Таджикистан. E-mail: skhorazmshoev@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1345-3757>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2024 г.
Поступила после рецензирования 27.02.2025 г.
Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the authors

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Social and Humanitarian Disciplines Department, Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction, Moscow, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Saidjobir S. Khorazmshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi, Dushanbe, Tajikistan. E-mail: skhorazmshoev@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1345-3757>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mukhtor R. Langarshoev
E-mail: mukhtor77@mail.ru

Received 20.12.2024
Reviewed 27.02.2025
Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

УДК 517.938



Об оценках характеристик сбора ресурса для стохастических структурированных популяций

Людмила Ивановна РОДИНА

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматриваются модели структурированных популяций, состоящих из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделенных на n возрастных групп. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации динамика популяции задана системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, а в фиксированные моменты времени из популяции добывают случайные доли ресурса каждого из видов. Предложен способ построения управления процессом сбора ресурса, при котором ограничивают величину извлекаемого ресурса для увеличения размера следующего сбора. Получены оценки характеристик сбора ресурса, таких как средняя временная выгода и общий доход с учетом дисконтирования, выполненные с вероятностью единица.

Предложены два метода для решения данной задачи. Первый из них можно применить для систем, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных условий. Во втором методе нет ограничений на свойства системы, и состоит он в построении положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории системы при всех значениях случайных параметров. Используется понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Е. Л. Тонковым. Приведены примеры оценки рассматриваемых характеристик для моделей взаимодействия двух видов, таких как нейтрализм и конкуренция.

Ключевые слова: положительно инвариантные множества, функции Ляпунова, эксплуатируемая популяция, средняя временная выгода, доход с учетом дисконтирования

Для цитирования: Родина Л.И. Об оценках характеристик сбора ресурса для стохастических структурированных популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 66–78. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

Estimates of harvesting characteristics for stochastic structured populations

Lyudmila I. RODINA

Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

National University of Science and Technology “MISiS”

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. Models of structured populations consisting of individual species $x_1, \dots, x_n$, or divided into n age groups are considered. We assume that in the absence of exploitation, the dynamics of the population is given by a system of differential equations $\dot{x} = f(x)$, and at fixed moments of time, random fractions of the resource of each species are extracted from the population. A method is proposed for building control of the harvesting process, in which the amount of the extracted resource is limited in order to increase the size of the next collection. Estimates of the harvesting characteristics, such as the average time benefit and total income, including discounting, were obtained, performed with a probability of one.

Two methods are proposed to solve this problem. The first one can be applied to systems with the property of monotony of solutions with respect to initial conditions. In the second method, there are no restrictions on the properties of the system. It consists in constructing positively invariant sets in which the trajectories are located. The concept of Lyapunov functions with respect to a set, introduced by E. L. Tonkov, is used. Examples of estimation of the considered characteristics for models of interaction of two species, such as neutralism and competition, are given.

Keywords: positively invariant sets, Lyapunov functions, exploited population, average time benefit, income with discounting

Mathematics Subject Classification: 34A34, 34C05, 34C25.

For citation: Rodina L.I. Estimates of harvesting characteristics for stochastic structured populations. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 66–78. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-66-78>

Вопросам оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях посвящено множество работ, первые из которых [1, 2] относятся к семидесятым годам прошлого века. Продолжением данной тематики являются публикации по эксплуатации возобновляемого ресурса, в которых случайные изменения внешней среды влияют на размер популяции или коэффициенты рождаемости [3, 4]. Работы [3, 5] посвящены разработке моделей управления рыболовством, включающих экологическую и экономическую неопределенность, и задач ценового регулирования в условиях неопределенности. В [6] рассматриваются вопросы влияния случайных факторов внешней среды на оптимальное управление добычей рыбных ресурсов и проводится сравнение различных характеристик для вероятностных и детерминированных моделей. Отметим, что более подробный обзор литературы приведен в работе [4].

Данная статья продолжает исследования [7, 8], в которых описываются вопросы оптимального сбора ресурса из однородной стохастической популяции. Здесь мы рассматриваем модели динамики структурированной популяции, то есть популяции, состоящей из отдельных видов $x_1, \dots, x_n$, либо разделенной на n возрастных групп. При отсутствии эксплуатации развитие данной популяции задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}. \quad (0.1)$$

Здесь вектор-функция f и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$. Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ можно добывать некоторую случайную долю ресурса $\omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n$, $k = 1, 2, \dots$. В скобках будем обозначать параметры времени, а нижними индексами — пространственные параметры; так, через $\omega_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd .

Пусть имеется возможность остановить процесс сбора в момент kd , если доли извлеченного ресурса нескольких видов окажутся достаточно большими — не меньше, чем заданные значения $(u_1(k), \dots, u_n(k)) = u(k) \in [0, 1]^n$. В этом случае доля добываемого ресурса может быть уменьшена до

$$\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad \text{где } \ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i(k)\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

за счет чего размер следующего сбора может быть увеличен. Таким образом, мы рассматриваем *эксплуатируемую популяцию*, динамика которой задана управляемой системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - \ell_i(k)) x_i(kd - 0), \end{aligned} \quad (0.2)$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа.

Обозначим через $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$ решение системы (0.1), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Будем считать, что данные решения являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях, то есть функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяют *условию квазиположительности* (см. [9, с. 34]), которое выглядит следующим образом:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3)$$

для любых неотрицательных x_j , $j \neq i$. Из равенств $x_i(kd) = (1 - u_i(k)) x_i(kd - 0)$ в системе (0.2) следует, что решения данной системы при выполнении условия квазиположительности также неотрицательны при любых неотрицательных начальных условиях.

Приведем описание *вероятностной модели*, параметризующей управляемую систему (0.2). Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0, 1]$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω , на которой определена вероятностная мера $\tilde{\mu}$. Рассмотрим множество последовательностей

$$\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega(1), \dots, \omega(k), \dots)\}, \text{ где } \omega(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_n(k)) \in \Omega \subseteq [0, 1]^n, \ k = 1, 2, \dots$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$E_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega(1) \in A(1), \dots, \omega(k) \in A(k)\}, \text{ где } A(j) \in \tilde{\mathfrak{A}}, \ j = 1, 2, \dots, k$$

и определим меру $\tilde{\mu}(E_k) = \tilde{\mu}(A(1)) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(A(k))$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры $\tilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

Обозначим через $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ начальное количество ресурса, $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент $\tau(k) = kd$, $C_i \geq 0$ — стоимость ресурса i -го вида, $i = 1, \dots, n$. Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k).$$

Пусть также $\bar{\ell} \doteq (\ell(1), \dots, \ell(k), \dots)$. Будем рассматривать следующие характеристики сбора возобновляемого ресурса.

О п р е д е л е н и е 0.1. (см. [7, 10]). *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется характеристика

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) \ell_i(j). \quad (0.4)$$

Если в правой части (0.4) нижний предел заменить на верхний, то будем обозначать его $H^*(\bar{\ell}, x(0))$, и если $H_*(\bar{\ell}, x(0)) = H^*(\bar{\ell}, x(0))$, то общий предел обозначим $H(\bar{\ell}, x(0))$.

О п р е д е л е н и е 0.2. (см. [11]). *Суммарным доходом с учетом дисконтирования* называется характеристика

$$H_\alpha(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} Y(k) e^{-\alpha k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k). \quad (0.5)$$

Значение показателя дисконтирования $\alpha > 0$ указывает на то, что стоимость позднее получаемого дохода снижается.

Получены оценки характеристик (0.4) и (0.5), выполненные с вероятностью единица, для структурированной популяции в случае $n > 1$. Предложены два метода для решения данной задачи. Первый из них можно применить для систем, обладающих свойством монотонности решений относительно начальных условий. Во втором методе нет ограничений на свойства системы, и состоит он в построении положительно инвариантных множеств, в которых находятся траектории системы при всех значениях случайных параметров.

1. Оценка характеристик сбора ресурса для систем, обладающим свойством монотонности решений относительно начальных данных

Отметим сначала, что неравенство $x \leq y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать, как неравенства $x_i \leq y_i$, выполненные для всех $i = 1, \dots, n$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы (0.1)*, если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D при $t \geq 0$.

Будем говорить, что для решений $\varphi(t, x(0))$ системы (0.1) выполнено свойство монотонности относительно начальных данных на множестве $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$, если множество D положительно инвариантно относительно данной системы и для любых $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ таких, что $x(0) \leq y(0)$, неравенство $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$ имеет место для любых $t \geq 0$. Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений системы (0.1), получены в работе [12]. В ней, в частности, показано, что данное свойство выполнено для любой системы (0.1) размерности 1 (то есть для любого дифференциального уравнения). Приведем основное утверждение статьи [12] (такой же результат справедлив для системы дифференциальных уравнений, рассматриваемой на множестве $\mathbb{R}^n$).

Теорема 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) множество $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ положительно инвариантно относительно системы (0.1);
- 2) каждая из функций f_i является строго возрастающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за возможным исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$;

- 3) $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) \leq y(0)$.

Тогда $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geq 0$.

Следствие 1.1. Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ является положительно инвариантным относительно системы (0.1) и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ для всех $x \in D$, либо $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда, если $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) \leq y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geq 0$.

Вернемся к эксплуатируемой популяции, заданной системой (0.2). Обозначим через $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$ и $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ количество ресурса до сбора и после сбора в момент τ_k соответственно, тогда $X(k+1) = \varphi(d, x(k))$ и $x(k) = (1 - \ell(k))X(k)$. Если $\ell_i(k) = u_i$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то $X(k)$ удовлетворяет системе разностных уравнений

$$X(k+1) = \varphi(d, (1-u)X(k)), \quad k = 1, 2, \dots; \quad (1.1)$$

здесь $(1-u)X(k) = ((1-u_1)X_1(k), \dots, (1-u_n)X_n(k))$. Предположим, что отображение, соответствующее системе (1.1), имеет неподвижную точку $S(u) = (S_1(u), \dots, S_n(u))$, тогда $S(u) = \varphi(d, (1-u)S(u))$. Пусть $s(u) \doteq (1-u)S(u)$; отметим, что $s_i(u) = (1-u_i)S_i(u)$ и $\varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$, $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим случайные величины $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$ и обозначим через $M\ell_i = M\ell_i(k)$ их математическое ожидание.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.1, $x(0) \in D$, $s(u) \in D$ и $x(0) \geq s(u)$. Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \geq \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i. \quad (1.2)$$

Доказательство. Напомним, что $X_i(k)$ и $x_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до сбора и после сбора в момент kd ; тогда $x_i(k) = (1 - \ell_i(k))X_i(k)$, $k \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 1.1, если $x_i(0) \geq s_i(u)$, то $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geq \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$, $i = 1, \dots, n$. Из неравенств $\ell_i(k) \leq u_i$ получаем

$$x_i(1) = (1 - \ell_i(1))X_i(1) \geq (1 - u_i)X_i(1) \geq (1 - u_i)S_i(u) = s_i(u), \quad i = 1, \dots, n.$$

Далее, $X_i(2) = \varphi_i(d, x(1)) \geq \varphi_i(d, s(u)) = S_i(u)$. Аналогично получаем, что $X_i(k) \geq S_i(u)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, n$. Поэтому

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) \ell_i(j) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) \ell_i(j). \quad (1.3)$$

Случайные величины $\ell_i(1), \ell_i(2), \dots$ независимы, имеют одинаковое распределение и, так как $0 \leq \ell_i(k) \leq 1$ для всех $k = 1, 2, \dots$, то $M|\ell_i(k)| \leq 1 < \infty$. Поэтому из усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ и каждого $i = 1, \dots, n$ выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ell_i(j) = M \ell_i. \quad (1.4)$$

Таким образом, нижний предел в правой части (1.3) равен пределу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) \ell_i(j) = \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i. \quad (1.5)$$

Неравенство (1.2) теперь следует из (1.3) и (1.5). $\square$

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что если функция распределения F случайной величины $\ell_i(k)$ абсолютно непрерывна, то ее математическое ожидание равно

$$M \ell_i(k) = \int_0^u t f(t) dt + u(1 - F(u)), \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

где через f обозначена плотность данного распределения (см. [7]).

П р и м е р 1.1. Найдем оценку средней временной выгоды для модели взаимодействия двух видов типа нейтрализм:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - c_1 x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - c_2 x_2^2. \end{cases} \quad (1.7)$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные, стоимости ресурса данных видов равны C_1, C_2 , и доли добываемого ресурса $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$.

Для системы (1.7) выполнены условия теоремы 1.1 (множество $D = \mathbb{R}_+^2$ положительно инвариантно относительно данной системы, так как для него справедливо условие квази-положительности (0.3)). Решением системы (1.7) является функция

$$\begin{aligned}\varphi(t, x(0)) &= (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0))), \text{ где} \\ \varphi_i(t, x(0)) &= \frac{a_i x_i(0) e^{a_i t}}{a_i + c_i x_i(0)(e^{a_i t} - 1)}, \quad i = 1, 2.\end{aligned}$$

Для заданных $u = (u_1, u_2)$, $d > 0$ найдем неподвижные точки $S(u) = (S_1(u), S_2(u))$ системы (1.1) из равенства $S(u) = \varphi(d, (1 - u)S(u))$. Отметим, что при любом $u \in [0, 1]^2$ существует нулевая неподвижная точка; при $u_i < 1 - e^{-a_i d}$ система (1.7) имеет неподвижную точку $S(u)$ с положительными координатами

$$S_i(u_i) = \frac{a_i((1 - u_i)e^{a_i d} - 1)}{c_i(1 - u_i)(e^{a_i d} - 1)}, \quad i = 1, 2;$$

также возможны случаи, когда одна из координат равна нулю, а другая больше нуля.

Найдем оценки характеристик сбора ресурса. Поскольку $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то их плотность $f(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ и функция распределения $F(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, из (1.6) получаем

$$M\ell_i = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, в силу теоремы 1.2, при $u_i < 1 - e^{-a_i d}$, $i = 1, 2$ имеем оценку средней временной выгоды

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \geq \sum_{i=1}^2 \frac{a_i C_i ((1 - u_i)e^{a_i d} - 1)(u_i - u_i^2/2)}{c_i(1 - u_i)(e^{a_i d} - 1)},$$

выполненную для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

2. Оценка характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств

Отметим, что свойство монотонности решений, рассмотренное в первом параграфе, справедливо не для всех систем дифференциальных уравнений. Здесь мы предлагаем рассмотреть способ оценки характеристик сбора ресурса методом построения положительно инвариантных множеств, при этом свойство монотонности решений не обязано быть выполненным. С этой целью мы используем понятие функции Ляпунова относительно множества, введенное Евгением Леонидовичем Тонковым в работах [13, 14], а также полученные им условия положительной инвариантности заданных множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений. Приведем необходимые определения и утверждения.

Пусть D — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\text{fr}D$ — граница D ; $D^r = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, D) \leq r\}$, где $r > 0$, $\rho(x, D) \doteq \min_{y \in D} \|x - y\|$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества D в $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. (см. [13]). Функция $V : D^r \rightarrow \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* (относительно множества D), если она локально липшицева, $V(x) = 0$ для всех $x \in \text{fr}D$ и $V(x) > 0$ для всех $x \in D^r \setminus D$.

Обозначим через $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)}$ производную функции V в силу автономной системы (0.1), тогда $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$. Приведенное ниже утверждение является следствием теоремы 1 работы [13] о положительной инвариантности заданного множества относительно дифференциального включения.

Теорема 2.1. *Предположим, что для некоторого $r > 0$ существует локально липшицева функция Ляпунова $V : D^r \rightarrow \mathbb{R}$. Если для всех $x \in D^r \setminus D$ выполнено неравенство $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} \leq 0$, то множество D положительно инвариантно относительно системы (0.1).*

Приведем условия существования положительно инвариантных множеств для модели эксплуатируемой популяции, заданной системой (0.2). Напомним, что через $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$ мы обозначаем количество ресурса до сбора в момент τ_k . Пусть фиксировано $u \in [0, 1]^n$. Рассмотрим систему разностных уравнений, зависящих от случайных параметров:

$$X(k+1) = \varphi(d, (1 - \ell(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $X(1) \in \mathbb{R}_+^n$, $\ell(k) = (\ell_1(k), \dots, \ell_n(k))$, $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\}$. Будем искать положительно инвариантное множество относительно системы (2.1), которое является прямоугольником в $\mathbb{R}_+^n$, запишем его в виде

$$D = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \delta_i \leq x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad \text{где } 0 < \delta_i < \Delta_i. \quad (2.2)$$

Отметим, что прямоугольник D можно представить в виде пересечения двух множеств:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \Delta_i, i = 1, \dots, n\}, \quad D_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \geq \delta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть задано $u \in [0, 1]^n$ и выполнены следующие условия:*

- 1) $f_i(x) \leq 0$ при $x_i \geq \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$;
- 2) если $x \in \text{fr}D_2 \cap D$, то $\varphi(d, (1 - u)x) \in D_2$.

Тогда прямоугольник D является положительно инвариантным множеством относительно системы (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение F , ставящее в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{R}_+^n$ точку $y \in \mathbb{R}_+^n$, такую, что $y = \varphi(d, x)$. Покажем, что прямоугольник (2.2) является положительно инвариантным относительно системы (2.1), если множество D_1 положительно инвариантно относительно системы (0.1) и $F((1 - u)D_2) \subseteq D_2$. Действительно, пусть $X(k) \in D_1$, тогда $(1 - \ell(k))X(k) \in D_1$ и из положительной инвариантности D_1 относительно (0.1) получаем, что

$$X(k+1) = \varphi((1 - \ell(k))X(k)) \in D_1.$$

Далее, из неравенств $\ell_i(k) = \min\{\omega_i(k), u_i\} \leq u_i$, $i = 1, \dots, n$ следует включение

$$(1 - \ell(k))D_2 \subseteq (1 - u)D_2,$$

поэтому, если $X(k) \in D_2$, то

$$X(k+1) = \varphi((1 - \ell(k))X(k)) \in F((1 - \ell(k))D_2) \subseteq F((1 - u)D_2) \subseteq D_2.$$

Таким образом, если $X(k) \in D$, то $X(k+1) \in D_1 \cap D_2 = D$, $k = 1, 2, \dots$

Покажем, что если выполнено первое условие теоремы, то прямоугольник D_1 положительно инвариантен относительно системы (0.1). Представим множество D_1 в виде $D_1 = \bigcap_{i=1}^n E_i$, где $E_i = \{x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq \Delta_i\}$, $i = 1, \dots, n$. Выберем следующую функцию Ляпунова относительно множества E_i : $V(x) = x_i - \Delta_i$, тогда

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \dot{x}_i = f_i(x).$$

В силу теоремы 2.1, если $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} = f_i(x) \leq 0$ при $x_i \geq \Delta_i$, то множество E_i положительно инвариантно относительно системы (0.1). Таким образом, если имеет место первое условие, то положительно инвариантным является каждое из множеств $E_1, \dots, E_n$ и, следовательно, множество $D_1 = \bigcap_{i=1}^n E_i$.

Второе условие теоремы означает, что включение $F((1 - u)D_2) \subseteq D_2$ достаточно проверить для множества $\text{fr} D_2 \cap D$. $\square$

Для доказательства следующих утверждений применяется теорема 2.2 и усиленный закон больших чисел А. Н. Колмогорова.

Теорема 2.3. Пусть при $u \in [0, 1]^n$ решения системы (2.1) удовлетворяют неравенствам

$$X_i(k) \in [\delta_i, \Delta_i], \quad \text{где } i = 1, \dots, n, \quad k \geq k_0 \geq 1. \quad (2.3)$$

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i. \quad (2.4)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 1.2 показано, что случайные величины $\ell_i(1), \ell_i(2), \dots$ удовлетворяют усиленному закону больших чисел А. Н. Колмогорова, поэтому для почти всех $\sigma \in \Sigma$ и каждого $i = 1, \dots, n$ выполнено равенство (1.4). Из условия (2.3) следует неравенство

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i \ell_i(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) \ell_i(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i \ell_i(k), \quad k \geq k_0 \geq 1. \quad (2.5)$$

Переходя к пределу среднего арифметического в (2.5), из определения средней временной выгоды и (1.4) получаем неравенство (2.4). $\square$

Предположим, что в разных опытах появились различные случайные последовательности

$$\sigma^p \doteq \{\omega^p(1), \dots, \omega^p(k), \dots\},$$

также определим $\bar{\ell}^p \doteq (\ell^p(1), \dots, \ell^p(k), \dots)$, где $p = 1, 2, \dots$. Для каждой последовательности $\bar{\ell}^p$ реализуется свое значение суммарного дохода, которое равно

$$H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k), \quad p = 1, 2, \dots$$

Теорема 2.4. Пусть при $u \in [0, 1]^n$ выполнены условия

$$X_i^p(k) \in [\delta_i, \Delta_i], \quad i = 1, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедлива оценка

$$(e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i. \quad (2.7)$$

Доказательство. Из (2.6) получаем неравенства

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i \ell_i^p(k), \quad p = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

В силу закона больших чисел А. Н. Колмогорова $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \ell_i^p(k) = M \ell_i$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$, поэтому из (2.8) следует

$$\sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m \sum_{i=1}^n C_i X_i^p(k) \ell_i^p(k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i.$$

Умножая последнее неравенство на $e^{-\alpha k}$ и суммируя по всем $k = 1, 2, \dots$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i \delta_i M \ell_i \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} \sum_{i=1}^n C_i \Delta_i M \ell_i.$$

Отсюда, с учетом равенства $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k} = (e^\alpha - 1)^{-1}$, следует (2.7). $\square$

Приведем также утверждение для оценки суммарного дохода с учетом дисконтирования в случае, когда система (0.1) обладает свойством монотонности решений относительно начальных данных.

Теорема 2.5. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.1, $x(0) \in D$, $s(u) \in D$ и $x(0) \geq s(u)$. Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \geq (e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n C_i S_i(u) M \ell_i.$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 1.2, получаем, что

$$X_i^p(k) \geq S_i(u) \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теперь утверждение теоремы следует из неравенства (2.7). $\square$

Пример 2.1. Модели взаимодействия двух видов в классификации Е. Одума подробно описаны в книге Г.Ю. Ризниченко [15, с. 143–157]. В соответствии с гипотезой В. Вольтерра о взаимодействии экологических сообществ, модель конкуренции задается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь x_1, x_2 — численности видов, c — постоянная собственной скорости роста видов, a — постоянная взаимодействия видов или межвидовой конкуренции, b — постоянная внутривидовой конкуренции. Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a > b$.

Пусть задано $u \in [0, 1]^2$; доли добываемого ресурса $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найдем оценки средней временной выгоды и суммарного дохода с учетом дисконтирования для системы (2.9), выполненные с вероятностью единица.

Отметим, что система (2.9) на множестве $D = \mathbb{R}_+^2$ может не обладать свойством монотонности решений относительно начальных данных (см. следствие 1.1). Поэтому будем искать оценки характеристик сбора ресурса методом положительно инвариантных множеств. Проверим, при каких Δ_1, Δ_2 имеет место первое условие теоремы 2.2. В силу симметрии уравнений системы можно считать, что $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (c - ax_1 - bx_2)x_1 \leq (c - ax_1)x_1 \leq 0, \\ f_2(x) &= (c - ax_2 - bx_1)x_2 \leq (c - ax_2)x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

при $x_1 \geq \Delta$, $x_2 \geq \Delta$, где $\Delta = \frac{c}{a}$. Таким образом, множество

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \leq \Delta, x_2 \leq \Delta\}, \text{ где } \Delta = \frac{c}{a}$$

положительно инвариантно относительно системы (2.9).

Теперь для каждого $u \in [0, 1]^2$ нужно найти значения δ_1, δ_2 , при которых выполняется второе условие теоремы 2.2. Отметим, что если $x = (x_1, x_2)$ содержится в положительно инвариантном множестве D_1 , то

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (c - ax_1 - bx_2)x_1 \geq (c(1 - b/a) - ax_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (c - ax_2 - bx_1)x_2 \geq (c(1 - b/a) - ax_2)x_2. \end{aligned}$$

В силу теоремы Чаплыгина, для решения системы (2.9) при

$$x \in D_2 = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 \geq \delta_1, x_2 \geq \delta_2\}$$

выполнены неравенства

$$\varphi_i(d, (1 - u)x) \geq \frac{c_0(1 - u_i)\delta_i e^{c_0 d}}{c_0 + a(1 - u_i)\delta_i(e^{c_0 d} - 1)}, \quad i = 1, 2,$$

где $c_0 = c(1 - b/a) > 0$. Из условия $\varphi(d, (1 - u)x) \in D_2$ получаем

$$\delta_i = \frac{c_0(e^{c_0 d} - 1 - e^{c_0 d} u_i)}{a(1 - u_i)(e^{c_0 d} - 1)} > 0, \text{ если } u_i < 1 - e^{-c_0 d} \quad (2.10)$$

и $\delta_i = 0$, если $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$, $i = 1, 2$.

Найдем оценки характеристик сбора ресурса. Поскольку $\omega_i(k)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, то их плотность $f(t) = 1$ при $t \in [0, 1]$ и функция распределения $F(t) = t$, $t \in [0, 1]$. Таким образом, из (1.6) следует, что

$$M\ell_i = u_i - \frac{u_i^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть δ_1, δ_2 заданы (2.10), тогда из (2.4) следуют неравенства для средней временной выгоды

$$\sum_{i=1}^2 C_i \delta_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right) \leq H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

выполненные для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Далее, в силу (2.7) для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеют место следующие оценки суммарного дохода:

$$(e^\alpha - 1)^{-1} \sum_{i=1}^2 C_i \delta_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

где $\alpha > 0$ — показатель дисконтирования, $u_i < 1 - e^{-c_0 d}$, $i = 1, 2$.

Отметим, что если $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$, $i = 1, 2$, то справедливы только следующие оценки сверху:

$$H_*(\bar{\ell}, x(0)) \leq \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right),$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{p=1}^m H_\alpha(\bar{\ell}^p, x(0)) \leq (e^\alpha - 1)^{-1} \frac{c}{a} \sum_{i=1}^2 C_i \left(u_i - \frac{u_i^2}{2} \right).$$

Таким образом, при «больших» величинах управлений $u_i \geq 1 - e^{-c_0 d}$, $i = 1, 2$, нельзя гарантировать, что характеристики сбора ресурса положительные.

References

- [1] W. J. Reed, “The steady state of a stochastic harvesting model”, *Mathematical Biosciences*, **41**:3-4 (1978), 273–307.
- [2] A. Gkait, “Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth”, *Mathematical Biosciences*, **41**:1-2 (1978), 111–123.
- [3] L. G. Hansen, F. Jensen, “Regulating fisheries under uncertainty”, *Resource and Energy Economics*, **50** (2017), 164–177.
- [4] F. Jensen, H. Frost, J. Abildtrup, “Fisheries regulation: A survey of the literature on uncertainty, compliance behavior and asymmetric information”, *Marine Policy*, **81** (2017), 167–178.
- [5] M. L. Weitzman, “Landing fees vs harvest quotas with uncertain fish stocks”, *Journal of Environmental Economics and Management*, **43** (2002), 325–338.
- [6] U. Kapaun, M. F. Quaas, “Does the optimal size of a fish stock increase with environmental uncertainties?”, *Environmental and Resource Economics*, **54**:2 (2013), 293–310.
- [7] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьютер. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

- [8] Л. И. Родина, “Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, “Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].
- [9] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Izdatel'stvo Nizhegorodskogo Univ., Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian)].
- [10] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resource extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].
- [11] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resource”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.
- [12] Л. И. Родина, М. С. Волдеаб, “О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1022–1028; англ. пер.: L. I. Rodina, M. S. Woldeab, “On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions”, *Differential Equations*, **59**:8 (2023), 1025–1031.
- [13] Е. А. Панасенко, Е. Л. Тонков, “Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений”, *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, **262** (2008), 202–221; англ. пер.: E. A. Panasenکو, E. L. Tonkov, “Invariant and stably invariant sets for differential inclusions”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **262** (2008), 194–212.
- [14] Л. И. Родина, Е. Л. Тонков, “О множестве достижимости управляемой системы без предположения компактности геометрических ограничений на допустимые управления”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2012, № 4, 68–79. [L. I. Rodina, E. L. Tonkov, “About the attainability set of control system without assumption of compactness of geometrical restrictions on admissible controls”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, 2012, № 4, 68–79 (In Russian)].
- [15] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]

Информация об авторе

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Поступила в редакцию 24.01.2025 г.
 Поступила после рецензирования 17.02.2025 г.
 Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Ludmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Received 24.01.2025
 Reviewed 17.02.2025
 Accepted for press 13.03.2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ступин Д. Л., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

УДК 517.53, 517.54



Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами

Денис Леонидович СТУПИН

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Пусть Ω_0^r — класс функций ω , голоморфных в единичном круге Δ , с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $z \in \Delta$. Проблема коэффициентов на классе Ω_0^r формулируется следующим образом: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на действительные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ являлся рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0^r .

Класс B^r состоит из функций f , голоморфных в Δ , с действительными коэффициентами, для которых выполняются условия $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. Подклассы B_t^r , $t \geq 0$, определяются как множество функций $f \in B^r$, нормированных условием $f(0) = e^{-t}$. Задача точной оценки $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классах B^r или B_t^r известна как проблема Кшижа для соответствующего класса. Очевидно, объединение всех классов B_t^r исчерпывает класс B^r с точностью до вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$).

На основе решения проблемы коэффициентов для класса Ω_0^r решена задача точной оценки функционала $|\{f\}_3|$ на классах B_t^r при каждом $t \geq 0$. Для этого задача была сведена к задаче оценки функционала над классом Ω_0^r , после чего задача сведена к задаче о поиске глобального условного экстремума функции двух действительных переменных с ограничениями типа неравенств.

Экстремальные функции найдены в двух формах: в форме выпуклой комбинации ядер Шварца, связанной с классом Каратеодори, и в форме произведений Бляшке, связанной с классом Ω_0^r .

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченная не обращающаяся в нуль функция, точная оценка коэффициента, тело коэффициентов

Для цитирования: Ступин Д. Л. Точная оценка третьего коэффициента для ограниченных не обращающихся в нуль голоморфных функций с действительными коэффициентами // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 149. С. 79–92.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. L. Stupin, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

Sharp estimate of the third coefficient for bounded non-vanishing holomorphic functions with real coefficients

Denis L. STUPIN

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. Let Ω_0^r be a class of holomorphic functions ω in the unit disk Δ , with real coefficients, and such that $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $z \in \Delta$. The coefficients problem in the class Ω_0^r is formulated as follows: find the necessary and sufficient conditions to be imposed on the real numbers $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$ in order for the series $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ to be the Taylor series of a function in the class Ω_0^r .

The class B^r consists of holomorphic functions f in Δ with real coefficients and such that $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. The classes B_t^r , $t \geq 0$, are defined as the sets of functions $f \in B^r$ such that $f(0) = e^{-t}$. The problem of obtaining a sharp estimation of $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, on the class B^r or B_t^r is commonly referred to as the Krzyz problem (for the class B^r or B_t^r). It is clear that the union of all classes B_t^r exhausts the class B^r up to rotations in the plane of variable w ($w = f(z)$).

Based on the solution of the coefficients problem for the class Ω_0^r , the problem of obtaining a sharp estimation of the functional $|\{f\}_3|$ on the classes B_t^r for every $t \geq 0$ is solved by transitioning to the functional over the class Ω_0^r , after which the problem is reduced to finding the global constrained extremum of a function of two real variables with inequality-type constraints.

The extreme functions are found in two forms: as a convex combination of Schwartz kernels related to the Caratheodory class, and as Blaschke products related to the class Ω_0^r .

Keywords: the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded non-vanishing function, sharp coefficient estimate, coefficient body

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. Sharp estimate of the third coefficient for bounded non-vanishing holomorphic functions with real coefficients. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 79–92.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-149-79-92>

Введение

Пусть $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Классом B будем называть множество голоморфных в единичном круге Δ функций f , удовлетворяющих условиям $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$. Тейлоровские коэффициенты функции f обозначим через $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

В 1968 году Ян Кшиж высказал гипотезу [1] о том, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}}, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание многих математиков. В настоящее время она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [2]. Существование экстремалей в проблеме Кшижа очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий в соответствие каждой функции из B ее тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на B .

Класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), поэтому можно ограничиться изучением только тех функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчиненных функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \quad (0.1)$$

где Ω_0 — класс функций ω , голоморфных в Δ и таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t .

Класс, состоящий из функций $\omega \in \Omega_0$ с действительными коэффициентами, обозначим через Ω_0^r , класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами, обозначим через B_t^r , а класс, состоящий из функций $f \in B$ с действительными коэффициентами, обозначим через B^r .

При каждом $t > 0$ формула (0.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами Ω_0^r и B_t^r .

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

Цель данной статьи состоит в нахождении точной оценки модуля третьего тейлоровского коэффициента на классах B_t^r , $t > 0$. Классы B_t^r являются весьма важным частным случаем. Действительно, $F(z, t) \in B_t^r$, если $f \in B_t$, то экстремальные функции для функционалов $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ лежат в B_t^r . Как будет показано ниже, экстремальные функции

для функционала $|\{f\}_3|$ на B_t лежат вне B_t^r лишь на малом интервале изменения параметра t .

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через ее тейлоровские коэффициенты. В геометрической теории функций изучению классов функций, ограниченных в Δ , уделяется значительное внимание. Теория ограниченных голоморфных функций представляет собой богатую и бурно развивающуюся область с большим количеством открытых проблем. Многие задачи геометрической теории функций сводятся к задачам на классах ограниченных функций.

Проблема Кшижа формулируется для подклассов ограниченных функций, не обращающихся в нуль, и имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций. Последняя, в свою очередь, тесно связана с теорией подчиненных функций [3] и теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n является задачей на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительной функции $2n - 3$ действительных переменных [4]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и находят разнообразные применения.

Класс B посредством класса Ω_0 связан с классами однолистных функций, в частности с классами выпуклых и звездных функций. Соответственно, проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также существуют параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибераха).

1. Подчиненные функции и начальные коэффициенты

Коснемся представлений вида (0.1). Пусть функции $F(z)$ и $f(z)$ голоморфны в Δ . Функция $f(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $F(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ .

Понятие подчинения восходит к Е. Линделефу [5], однако термин был введен Д. И. Литлвудом [6] и В. Рогозинским [3]; они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [7–10]).

В случае проблемы Кшижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z, t)$.

Теория подчинения позволяет легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций f , подчиненных функции F . Известно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$, $|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1|$, $|\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|)$; все оценки точные [3] и равенство достигается только на вращениях $F(z)$ или $F(z^2)$ в плоскости переменной z .

Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Ясно, что $\{f\}_n$ зависит от $\{\omega\}_k$, $k = 1, \dots, n$. Если верхний индекс обозначает показатель степени, то

$$\{f\}_n = \{F\}_1\{\omega\}_n + \{F\}_2\{\omega^2\}_n + \dots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n. \quad (1.1)$$

2. Неравенства для коэффициентов

На Ω_0 имеет место точное неравенство (см. [11] или [4])

$$\left| \{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1} \{\omega\}_2^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1 - |\{\omega\}_1|^2}. \quad (2.1)$$

Заметим, что из неравенства (2.1) сразу следует неравенство Пика [12, с. 219]

$$|\{\omega\}_2| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2, \quad (2.2)$$

а из неравенства (2.2) сразу следует неравенство Шварца [12, с. 29]

$$|\{\omega\}_1| \leq 1. \quad (2.3)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно преобразовать неравенства $r_3 \geq 0$ и $r_2 \geq 0$, где r_3 и r_2 — правые части неравенств (2.1) и (2.2), соответственно. Неравенства (2.3) и (2.2) можно найти также в [11] или в [4].

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точками которого являются наборы из n комплексных чисел $\omega^{(n)} := (\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n)$.

Множество, состоящее из точек $\omega^{(n)} \in \mathbb{C}^n$ таких, что числа $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$ являются первыми n коэффициентами некоторой функции класса Ω_0 , будем обозначать через $\Omega_0^{(n)}$ и называть n -м телом коэффициентов класса Ω_0 .

Проблема коэффициентов на классе Ω_0 ставится так: найти необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на комплексные числа $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \dots$ для того, чтобы ряд $\{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \dots$ был рядом Тейлора некоторой функции класса Ω_0 .

Третье тело коэффициентов на Ω_0 полностью характеризуется неравенством (2.1), второе — неравенством (2.2), а первое — неравенством (2.3).

Множество A называется абсолютно выпуклым, если оно выпуклое и сбалансированное, то есть $aA \subset A$, $|a| \leq 1$. Здесь a является действительным или комплексным числом.

Отметим, что класс Ω_0 является абсолютно выпуклым множеством ($a \in \mathbb{C}$). Класс Ω_0^r также является абсолютно выпуклым множеством ($a \in \mathbb{R}$).

Из неравенства (2.1) с учетом действительности коэффициентов вытекает следующее утверждение (см. [13]).

Утверждение 2.1. *Первое тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.3) и является отрезком $[-1, 1]$ оси x . Второе тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.2), лежит в плоскости xu и является абсолютно выпуклым компактом, заключенным между параболой $y = -1 + x^2$ и $y = 1 - x^2$. Проекция второго тела на ось x есть первое тело. Третье тело коэффициентов класса Ω_0^r определяется неравенством (2.1), лежит в пространстве xuz и является абсолютно выпуклым компактом, ограниченным поверхностями*

$$z = -(1 - x^2) + \frac{y^2}{1 + x} \quad \text{и} \quad z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 - x}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 + x^2 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Проекция третьего тела на плоскость xu есть второе тело.

По поводу абсолютной выпуклости см. [4, 13]. Здесь только заметим, что

$$-\left(-(1 - (-x)^2) + \frac{y^2}{1 + (-x)} \right) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{1 - x}. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1 (Каратеодори, Фейер). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каков бы ни был полином

$$p(z) = \{\omega\}_1 z + \dots + \{\omega\}_n z^n \neq 0,$$

существует, и притом единственная, дробь вида

$$\lambda z \frac{\bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_{n-2} z + \dots + \bar{\alpha}_0 z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{n-1} z^{n-1}}, \quad \lambda > 0,$$

регулярная в Δ и имеющая в своем тейлоровском разложении n первых коэффициентов, соответственно равных $\{\omega\}_1, \dots, \{\omega\}_n$.

Полную формулировку этой теоремы, а также метод поиска λ можно найти в монографии [12, с. 480] или в статье [4, с. 283].

3. Анализ задачи

Согласно формуле (1.1), если $f \in B_t$, то найдется $\omega \in \Omega_0$ такая, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 \{\omega\}_3 + 2\{F\}_2 \{\omega\}_1 \{\omega\}_2 + \{F\}_3 \{\omega\}_1^3. \quad (3.1)$$

Области значений функционалов $\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3$ на классе Ω_0 , взятые в совокупности, различаются, что затрудняет решение задачи. Поэтому перепишем неравенства (2.3), (2.2) и (2.1) в виде $|m_1| \leq r_1$, $|m_2| \leq r_2$ и $|m_3| \leq r_3$ соответственно. Обозначив $z_k := m_k/r_k$, $k = 1, 2, 3$, получим

$$z_1 := \{\omega\}_1, \quad z_2 := \frac{\{\omega\}_2}{r_2}, \quad z_3 := \frac{\{\omega\}_3 + r_2 \bar{z}_1 z_2^2}{r_3}, \quad (3.2)$$

откуда

$$\{\omega\}_1 = z_1, \quad \{\omega\}_2 = r_2 z_2, \quad \{\omega\}_3 = r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2. \quad (3.3)$$

Подставив эти значения в (3.1), получим

$$\{f\}_3 = \{F\}_1 (r_3 z_3 - r_2 \bar{z}_1 z_2^2) + 2\{F\}_2 r_2 z_1 z_2 + \{F\}_3 z_1^3. \quad (3.4)$$

Ясно, что $|z_k| \leq 1$, $k = 1, 2, 3$. Заметим еще, что $z_1 = z_1(\{\omega\}_1)$, $z_2 = z_2(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$, а $r_2 = r_2(\{\omega\}_1)$ и т. д. В дальнейшем, ради краткости записи, мы будем опускать эти подробности.

Так как функционал $|\{f\}_3|$ достигает своего максимума на границе полидиска $\bar{\Delta}^n$ (см. об этом подробнее в [4]), то $|z_3| = 1$ и $\{\omega\}_3 = r_3 e^{i\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2$, где $\varphi_3 := \arg z_3$. Поделив равенство (3.4) на $\{F\}_1$, получим

$$\frac{\{f\}_3}{\{F\}_1} = r_3 e^{i\varphi_3} - r_2 \bar{z}_1 z_2^2 + 2\alpha r_2 z_1 z_2 + \beta z_1^3, \quad \alpha := \frac{\{F\}_2}{\{F\}_1}, \quad \beta := \frac{\{F\}_3}{\{F\}_1}.$$

Поскольку в этой работе нас интересуют функции с действительными коэффициентами ($f \in B_t^r$), то задача об оценке модуля функционала (3.1) свелась к задаче исследования функций

$$h^\pm(x_1, x_2) = \pm r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3$$

на условный глобальный экстремум при ограничениях $-1 \leq x_k \leq 1$, $k = 1, 2$.

Так как $r_2 = 1 - x_1^2$, а $r_3 = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2)$ и $h^+(x_1, x_2) = -h^-(-x_1, x_2)$ (см. также (2.4)), то, окончательно, целевой функцией можно считать

$$h(x_1, x_2) = r_3 - r_2 x_1 x_2^2 + 2\alpha r_2 x_1 x_2 + \beta x_1^3.$$

Если считать, что $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то мы решим задачу в существенно более общем виде, чем изначальная (в [14] аналогичная задача решена для произвольных комплексных значений параметров α и β). Здесь мы ограничимся частным случаем

$$\alpha = t - 1, \quad \beta = \frac{2}{3}t^2 - 2t + 1, \quad t > 0.$$

Заметим, что, упростив ограничения, мы несколько усложнили целевую функцию. Действительно, без всякой подготовки целевая функция выглядела бы следующим образом

$$\tilde{h}(\{w\}_1, \{w\}_2) = 1 - \{w\}_1^2 - \frac{\{w\}_2^2}{1 - \{w\}_1} + 2\alpha \{w\}_1 \{w\}_2 + \beta \{w\}_1^3,$$

а ограничения $-1 \leq \{w\}_1 \leq 1$, $-(1 - \{w\}_1^2) \leq \{w\}_2 \leq 1 - \{w\}_1^2$.

Изначально перед нами стояла задача оценки простого функционала $|\{f\}_3|$ на сложно устроенном множестве — третьем теле коэффициентов класса B_t^r . Затем мы свели эту задачу к промежуточной задаче оценки сложного функционала (3.4) на множестве, устроенном несколько проще — третьем теле коэффициентов класса Ω_0^r , которое, как известно [4], является абсолютно выпуклым компактом. Эта задача, в свою очередь, была сведена к задаче поиска экстремума действительнзначной функции на обычном квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

С геометрической точки зрения, мы установили биекцию между третьим телом коэффициентов класса B_t^r и третьим телом коэффициентов класса Ω_0^r , при котором границы этих тел переходят друг в друга. Затем верхняя половина границы третьего тела коэффициентов класса Ω_0^r была биективно отображена на $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Утверждение 2.1 говорит о том, что верхняя половина границы этого тела является явно заданной двумерной поверхностью, следовательно, такое отображение возможно. Формулы (3.2) и (3.3) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между z_k и ω_k , причем они справедливы для любого натурального n (см. [4]).

Как известно [12, с. 480], каждой внутренней точке третьего тела коэффициентов класса B_t^r соответствует бесконечно много функций класса B_t^r , а каждой граничной точке — только одна функция. Таким образом, между функциями класса B_t^r , которые полностью определяются коэффициентами $\{f\}_1$, $\{f\}_2$ и $[-1, 1] \times [-1, 1]$, установлено взаимно-однозначное соответствие. В частности, имеет место (см. [4])

Утверждение 3.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega_0$. Точка $\omega^{(n)}$ является граничной точкой n -го тела коэффициентов класса Ω_0 тогда и только тогда, когда $|z_n| = 1$.

4. Исследование на экстремум

Исследование целевой функции h на экстремум проведем методами дифференциального исчисления.

4.1. Исследование функций $h(\pm 1, \cdot)$ на экстремум

Если $|z_1| = 1$, то $|z_2| = 1$. (Действительно, если $|z_1| \rightarrow 1$, то $|m_2| \rightarrow r_2$ и, следовательно, $|z_2| = |m_2|/r_2 \rightarrow r_2/r_2 = 1$.) Кроме того, если $|z_1| = 1$, то $r_2 = r_3 = 0$. Таким образом, для $f \in B_t^r$ имеем, что если $x_1 = \pm 1$, то $x_2 = \pm 1$, и вычисления дают

$$h_1 := -h(-1, x_2) = h(1, x_2) = \beta, \quad t > 0.$$

4.2. Исследование функции $h(\cdot, -1)$ на экстремум

Если $x_2 = -1$, то $r_3 = 0$. Вычисления дают

$$h(x_1, -1) = (2\alpha + \beta + 1)x_1^3 - (2\alpha + 1)x_1,$$

откуда

$$(h(x_1, -1))'_{x_1} = 3(2\alpha + \beta + 1)x_1^2 - (2\alpha + 1),$$

т. е. точки

$$x_{1(1,2)} := \mp \sqrt{\frac{2\alpha + 1}{3(2\alpha + \beta + 1)}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2t - 1}}{t}$$

являются стационарными и

$$h_{2,3} := h(x_{1(1,2)}, -1) = \pm \sqrt{\frac{4(2\alpha + 1)^3}{27(2\alpha + \beta + 1)}} = \pm \frac{\sqrt{2(2t - 1)^3}}{3t}.$$

Заметим, что $0 \leq x_{1(1,2)}^2 < 1$, при $t \geq 1/2$.

4.3. Исследование функции $h(\cdot, 1)$ на экстремум

Если $x_2 = 1$, то $r_3 = 0$. Вычисления дают

$$h(x_1, 1) = -(2\alpha - \beta - 1)x_1^3 + (2\alpha - 1)x_1,$$

откуда

$$(h(x_1, 1))'_{x_1} = -3(2\alpha - \beta - 1)x_1^2 + (2\alpha - 1),$$

т. е. точки

$$x_{1(3,4)} := \mp \sqrt{\frac{2\alpha - 1}{3(2\alpha - \beta - 1)}} = \mp \sqrt{\frac{3 - 2t}{t^2 - 12t + 12}}$$

являются стационарными и

$$h_{4,5}(t) := h(x_{1(3,4)}, 1) = \mp \sqrt{\frac{4(2\alpha - 1)^3}{27(2\alpha - \beta - 1)}} = \mp \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(3 - 2t)^3}{t^2 - 6t + 6}}.$$

Заметим, что $0 \leq x_{1(3,4)}^2 \leq 1$, при $t \in [0, (5 - \sqrt{7})/2] \cup [3/2, (5 + \sqrt{7})/2]$.

4.4. Исследование функции $h(x_1, \cdot)$ на экстремум

Вычисления дают

$$h(x_1, x_2) = (1 - x_1^2)(1 - x_2^2) - (1 - x_1^2)x_1x_2^2 + 2\alpha(1 - x_1^2)x_1x_2 + \beta x_1^3,$$

откуда

$$(h(x_1, x_2))'_{x_2} = 2(1 - x_1^2)(\alpha x_1 - (1 + x_1)x_2).$$

Случай $x_1 = \pm 1$ разобран в пункте 4.1. Таким образом, точка

$$x_2^* := \frac{\alpha x_1}{1 + x_1}$$

является точкой максимума, так как

$$(h(x_1, x_2))''_{x_2} = -2(1 - x_1^2)(1 + x_1) < 0, \quad |x_1| < 1, \quad |x_2| \leq 1.$$

Далее

$$h(x_1, x_2^*) = 1 - (\alpha^2 - \beta)x_1^3 + (\alpha^2 - 1)x_1^2,$$

т. е.

$$(h(x_1, x_2^*))'_{x_1} = (2(\alpha^2 - 1) - 3(\alpha^2 - \beta)x_1)x_1.$$

Откуда получаем стационарные точки

$$x_{1(5)} := 0, \quad x_{1(6)} := \frac{2(\alpha^2 - 1)}{3(\alpha^2 - \beta)} = 2\frac{t - 2}{t},$$

причем

$$h_6(t) := h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(5)}} = 1,$$

$$h_7(t) := h(x_1, x_2^*)|_{x_1=x_{1(6)}} = 1 + \frac{4(\alpha^2 - 1)^3}{27(\alpha^2 - \beta)^2} = 1 + \frac{4}{3} \frac{(t - 2)^3}{t}.$$

Заметим, что $-1 \leq x_{1(6)} \leq 1$, при $4/3 \leq t \leq 4$, но

$$|x_2^*(x_{1(6)})| = \left| 2 \frac{(t - 1)(t - 2)}{3t - 4} \right| \leq 1,$$

при $t \in [3/2, t^*]$, где $t^* := 9/4 + \sqrt{17}/4 \approx 3.281$. То есть $h_7(t)$ можно рассматривать только при $t \in [3/2, t^*]$.

5. Анализ результатов

5.1. Максимумы

Пусть $M(t) := \{|h_1(t)|, h_2(t), h_5(t), h_6(t), |h_7(t)|\}$, а $m_r(t) := \max M(t)$. Например, уравнение $h_2(t) = h_6(t)$ при $t > 0$ эквивалентно уравнению $p_1(t) = 0$, где $p_1(t) := 16t^3 - 33t^2 + 12t - 2$. Следовательно, $h_2(t) \geq h_6(t)$, при $t \geq t_1$, где t_1 — наибольший корень многочлена p_1 . Аналогичным образом мы получим промежутки, на которых график каждой функции $h \in M$ лежит не ниже графиков всех остальных функций из M .

5.2. Экстремали

В общем случае ($x_3 = \pm 1$) экстремальная функция имеет вид

$$\omega(z) = \{\omega\}_1 z + \{\omega\}_2 z^2 + \{\omega\}_3 z^3 + \dots,$$

и коэффициенты с номерами $n > 3$ выражаются через первые три коэффициента. В случае ($x_2 = \pm 1$) коэффициенты с номерами $n > 2$ выражаются через первые два коэффициента. В случае ($x_1 = \pm 1$) коэффициенты с номерами $n > 1$ выражаются через первый коэффициент. Эти выводы справедливы в силу утверждения 3.1.

По утверждению 3.1, если $x_1 = \pm 1$ (пункт 4.1.), то точка $(\{\omega\}_1)$ находится на границе первого тела коэффициентов класса Ω_0 . По формуле (3.3) получаем, что $\omega(z) = z$.

В пункте 4.2. $x_1 = x_{1(1)}$, $x_2 = -1$, поэтому, по утверждению 3.1, точка $(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2)$ принадлежит границе второго тела коэффициентов класса Ω_0 . Формула (3.3) дает экстремальную функцию в виде $\omega_{-1}(z) = p_{-1}(z) + o(z^2)$, где $p_{-1}(z) := \{\omega_{-1}\}_1 z + \{\omega_{-1}\}_2 z^2$, а

$$\begin{aligned} \{\omega_{-1}\}_1 &= x_{1(1)}, \quad x_{1(1)} = -\sqrt{\frac{2\alpha + 1}{3(2\alpha + \beta + 1)}}, \\ \{\omega_{-1}\}_2 &= x_{1(1)}^2 - 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Точный вид функции ω_{-1} найдем в виде произведений Бляшке. Для этого мы будем пользоваться теоремой Каратеодори–Фейера (теорема 2.1). Согласно этой теореме, многочлен p_{-1} можно продолжить единственным образом до голоморфной функции ω_{-1} , лежащей в Ω_0 , причем так как точка $(\{\omega_{-1}\}_1, \{\omega_{-1}\}_2)$ принадлежит границе второго тела коэффициентов класса Ω_0 , то $\lambda = \pm 1$ и

$$\omega_{-1}(z) = \lambda z \frac{\alpha_1 + \alpha_0 z}{\alpha_0 + \alpha_1 z}.$$

Взяв $\lambda = 1$ и вычислив параметры α_0, α_1 , видим, что соотношение (5.1) не выполняется. Повторив это же действие при $\lambda = -1$, получим

$$\omega_{-1}(z) = -z \frac{x_{1(1)} - z}{-1 + x_{1(1)} z}.$$

По аналогии мы найдем экстремальную функцию ω_1 для случая $x_2 = 1$ из пункта 4.3.

Как было указано в пункте 3., $x_3 = 1$. Следовательно, согласно утверждению 3.1, точка $(\{\omega\}_1, \{\omega\}_2, \{\omega\}_3)$ находится на границе третьего тела коэффициентов класса Ω_0 . Так как, согласно пункту 4.4., $x_1 = x_{1(5)} = 0$, $x_2 = x_2^* = \alpha x_1 / (1 + x_1) = 0$, $x_3 = 1$, то с помощью формулы (3.3) мы получим экстремальную функцию $\omega_3(z) := z^3$.

5.3. Основной результат

Теорема 5.1. Если $f \in B_t^r$, то имеет место точная, при каждом $t \geq 0$, оценка

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{\sqrt{t^2 - 6t + 6}}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{2}{3} t^2 - 2t + 1, & t \geq t_3, \end{cases} \quad (5.2)$$

где числа $t_1 \approx 1.655$, $t_2 \approx 3.304$ и $t_3 \approx 3.823$ — наибольшие положительные корни полиномов $16t^3 - 33t^2 + 12t - 2$, $8t^4 - 40t^3 + 50t^2 - 18t + 3$ и $2t^2 - 10t + 9$, соответственно. Экстремальные функции имеют вид (0.1) с точностью до вращения на угол π радиан в плоскости переменной z , где вместо ω подставлены функции

$$\omega_3(z) := z^3, \quad \omega_{-1}(z) := -z \frac{z + x_{1(1)}}{1 + x_{1(1)}z}, \quad \omega_1(z) := z \frac{z + x_{1(4)}}{1 + x_{1(4)}z}, \quad \omega(z) := z.$$

Исследовав правую часть неравенства (5.2) на максимум, при $t \geq 0$, видим, что строгий глобальный максимум равен $2/e$ и достигается при $t = 1$.

Следствие 5.1. *Гипотеза Кишижа для B^r справедлива при $n = 3$. То есть, если $f \in B^r$, то $|\{f\}_3| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции $F(z^3, t)$ в плоскостях переменных z и w на углы, кратные π радиан.*

5.4. Экстремали на B_t

Д. В. Прохоров и Я. Шиналь получили точную для каждого $t \geq 0$ оценку $|\{f\}_3|$ на классе B_t в работе [14]. Отметим, что в общем случае $f \in B_t$ (именно B_t , а не B_t^r) формула (5.2) должна быть дополнена еще одной строкой [14]:

$$|\{f\}_3| \leq 2 \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-t} (2t^2 - 6t + 3) \sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, \quad t \in [t_2^*, t_3^*],$$

где числа $t_2^* = 2 + \sqrt{6}/2 \approx 3.225$ и $t_3^* \approx 3.476$, — наибольшие положительные корни полиномов $2t^2 - 8t + 5$ и $2t^3 - 12t^2 + 21t - 12$, соответственно. Экстремальные на B_t , $t \in [t_2^*, t_3^*]$, функции имеют вид (0.1) с точностью до вращений в плоскости переменной z , где вместо $\omega(z)$ подставлены функции

$$\omega_{\frac{-b}{2a}}(z) := z e^{i\varphi} \frac{z + x_1(\frac{-b}{2a}) e^{-i\varphi_{1,2}}}{1 + x_1(\frac{-b}{2a}) e^{i\varphi_{1,2}} z},$$

где

$$x_1(\frac{-b}{2a}) := \sqrt{\frac{3\alpha^2 - 2(\alpha^2 + 2)\beta}{3(1 - \beta)(\alpha^2 - 4\beta)}},$$

$$\varphi_{1,2} := \pm \arccos \frac{\alpha(2(\alpha^2 + 2) - (\alpha^2 + 8)\beta)}{2(3\alpha^2 - 2(\alpha^2 + 2)\beta)}, \quad \beta \neq 1, \quad \beta \neq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Также из формулы (5.2) видно, что

$$\max_{f \in B} |\{f\}_3| = \max_{f \in B^r} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_1} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_t^r} |\{f\}_3| = \max_{f \in B_1^r} |\{f\}_3| = \frac{2}{e}.$$

Экстремальные функции из B_t допускают вращения в плоскости переменной z , а экстремальные функции из B допускают также вращения в плоскости переменной w ($w = f(z)$).

5.5. Еще одно представление экстремалей на B_t

По аналогии с формулой (0.1), каждую функцию f класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-th(z)}, \quad h(z) \in C, \quad (5.3)$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$, $z \in \Delta$.

Перейдем от представления (0.1) к представлению (5.3) для экстремальных функций. Экстремальные функции имеют вид (5.3) с точностью до вращения в плоскости переменной z , где вместо h подставлены функции

$$\begin{aligned} h(z) &:= \frac{1+z}{1-z}, \\ h_{-1}(z) &:= \lambda \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{1-z}{1+z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(1)}}{2}, \\ h_{\frac{-b}{2a}}(z) &:= \lambda \frac{1+e^{i\varphi_{1,2}}z}{1-e^{i\varphi_{1,2}}z} + (1-\lambda) \frac{1-e^{i\varphi_{1,2}}z}{1+e^{i\varphi_{1,2}}z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(\frac{-b}{2a})}}{2}, \\ h_1(z) &:= \lambda \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{1-z}{1+z}, \quad \lambda := \frac{1+x_{1(4)}}{2}, \\ h_3(z) &:= \frac{1+z^3}{1-z^3}. \end{aligned}$$

Функции ω , ω_1 и ω_3 преобразованы в функции h , h_1 и h_3 при помощи отображения $\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$, функция ω_{-1} преобразована в функцию h_{-1} при помощи $\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}$, а функции $\omega_{\frac{-b}{2a}}$ преобразованы в функции $h_{\frac{-b}{2a}}$ посредством $\frac{1+e^{i\varphi}\omega(z)}{1-e^{i\varphi}\omega(z)}$.

Интересно заметить, что ω есть произведение, состоящее из одного множителя, ω_{-1} , $\omega_{\frac{-b}{2a}}$ и ω_1 есть произведения двух множителей, а ω_3 есть произведение трех множителей. Соответственно, h есть сумма одного слагаемого, h_{-1} , $h_{\frac{-b}{2a}}$ и h_1 есть суммы двух слагаемых, а h_3 есть сумма трех слагаемых. Далее

$$\begin{aligned} h(z) &= 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + o(z^3), \\ h_{-1}(z) &= 1 + 2x_{1(1)}z + 2z^2 + 2x_{1(1)}z^3 + o(z^4), \\ h_{\frac{-b}{2a}}(z) &= 1 + 2e^{i\varphi_{1,2}}x_{1(\frac{-b}{2a})}z + 2e^{2i\varphi_{1,2}}z^2 + 2e^{3i\varphi_{1,2}}x_{1(\frac{-b}{2a})}z^3 + o(z^4), \\ h_1(z) &= 1 + 2x_{1(4)}z + 2z^2 + 2x_{1(4)}z^3 + o(z^4), \\ h_3(z) &= 1 + 2z^3 + o(z^3). \end{aligned}$$

Отметим, что $\{h\}_1 = \{h_{-1}\}_2 = \left| \left\{ h_{\frac{-b}{2a}} \right\}_2 \right| = \{h_1\}_2 = \{h_3\}_3 = 2$.

6. Заключение

По геометрическим соображениям очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точная оценка $|\{f\}_1|$ впервые появилась в [15]. Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 году в [1].

В статье [7] при помощи вариационного метода была впервые получена точная оценка модуля третьего коэффициента на классе B .

Точная при каждом $t > 0$ оценка функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t была добыта в работе [14]. Однако, из этого результата не вытекает теорема 5.1, для $t \in (t_2^*, t_3^*)$.

В настоящей статье решена задача получения точной оценки функционала $|\{f\}_3|$ на классе B_t^r путем перехода к функционалу над классом Ω_0^r . Далее, полученная задача сведена к задаче о поиске глобального условного экстремума функции двух действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что позволило применить стандартные методы дифференциального исчисления для получения основного результата. Отметим еще, что данный метод приводит ограничения к нормированному виду $|x_k| \leq 1$.

В обзоре [16] отмечается, что наиболее убедительным доказательством неравенства

$$|\{f\}_4| \leq 2/e$$

стало доказательство В. Шапеля [9]. Оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [2]. По поводу гипотезы Кшижа для $n \geq 6$ см. [17, 18].

References

- [1] J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Ann. Polon. Math.*, **70** (1968), 314.
- [2] N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48** (2003), 753–766.
- [3] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82.
- [4] Д. Л. Ступин, “Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения”, *Вестник российских университетов. Математика.*, **28**:143 (2023), 277–297. [D. L. Stupin, “The coefficient problem for bounded functions and its applications”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297 (In Russian)].
- [5] E. Lindelöf, “Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.
- [6] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford university press, 1947.
- [7] J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J. d’Analyse Mathématique*, **31** (1977), 169–190.
- [8] R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
- [9] W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A.*, **48** (1994), 169–192.
- [10] D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, arXiv: [abs/1104.3984](https://arxiv.org/abs/1104.3984).
- [11] J. E. Brown, “Iterations of functions subordinate to schlicht functions”, *Compl. Var.*, **9** (1987), 143–152.
- [12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966, 628 с.; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, Translations of Mathematical Monographs, **26**, American Mathematical Society, Rhode Island, 1969, 676 pp.
- [13] Д. Л. Ступин, “Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$ ”, *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*, **24**:3 (2024), 342–359. [D. L. Stupin, “A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$ ”, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, **24**:3 (2024), 342–350 (In Russian)].
- [14] D. V. Prokhorov, J. Szynal, “Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions”, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, **29**:5–6 (1981), 223–230.
- [15] V. I. Levin, W. Fenchel, E. Reissner, “Losing der Aufgabe 163”, *Jahresber. DM.*, **44**:2 (1934), 80–83.

- [16] D. V. Prokhorov, “Coefficients of holomorphic functions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **106**:6 (2001), 3518–3544.
- [17] Д. Л. Ступин, “Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 98–120. [D. L. Stupin, “A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120 (In Russian)].
- [18] Д. Л. Ступин, “Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчиненных функций”, *Вестник Воронежского государственного университета. Физика. Математика.*, 2024, № 2, 71–84. [D. L. Stupin, “One method of estimation of moduli of Taylor coefficients of subordinated functions”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2024, № 2, 71–84 (In Russian)].

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Поступила в редакцию 03.02.2025 г.

Поступила после рецензирования 09.03.2025 г.

Принята к публикации 13.03.2025 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamental Mathematics and Digital Technologies Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Received 03.02.2025

Reviewed 09.03.2025

Accepted for press 13.03.2025

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$S_{25} = E$$

$$H^2(\Pi, M^{\Pi}) \rightarrow$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \} \rightarrow \{ \mu_p^{(\infty)} \}$$

$$L_v(E, 1)$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

$$\text{other entries in } \mathbb{Z}$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \frac{\bar{\alpha} + 2}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma \in G \times E \mathbb{Z}_p$$

$$A \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\pi} a a \frac{1}{\pi} \sigma = -\pi$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$|R|, |M|, |VE| =$$

$$\pi \approx \frac{1}{11}$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_{H^2}}$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$K, 0/X, 0 \text{ Ind } \mathbb{Z}/p$$

$$\det(X, \Theta X) \neq 0$$