УДК 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-441-449

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВИДА ИМПУЛЬСНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

© **О. В. Филиппова**

Исследована краевая задача для импульсных функционально-дифференциальных включений с многозначным отображением, не обладающим свойством выпуклости по переключению значений в пространстве суммируемых функций. Введено понятие обобщенного решения. Получены условия существования обобщенных решений и найдены их оценки.
Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; краевая задача; выпуклость по переключению.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное пространство вектор-столбцов с евклидовой нормой $|\cdot|$; $\rho_{\mathbf{X}}[x;U]$ – расстояние от точки $x\in\mathbf{X}$ до множества $U\subset\mathbf{X}$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$; $h^+_{\mathbf{X}}[U_1;U]\equiv\sup\limits_{x\in U_1}\rho_{\mathbf{X}}[x,U]$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества $U_1\subset\mathbf{X}$ от множества U в пространстве X; $h_X[U_1;U]=\max\{h^+_X[U_1;U];h^+_X[U;U_1]\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами U_1 и U в пространстве $\mathbf{X}$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ – пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}=\int\limits_a^b|x(s)|ds$; $Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ – множество всех непустых замкнутых ограниченных суммируемыми функциями подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Пусть $t_k\in[a,b]$, $k=1,2,\ldots,m$, $(a<t_1<\ldots<t_m<b)$ – конечный набор точек. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ $(\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b])$ множество всех непрерывных (абсолютно-непрерывных) на каждом из промежутков $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_m,b]$ функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,m$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|:\ t\in[a,b]\}$ $(\|x\|_{\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]}=|x(a)|+ +\|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^n[a,b]}+\sum\limits_{k=1}^m|\Delta(x(t_k))|$, где $\Delta(x(t_k))=x(t_k+0)-x(t_k)$, $k=1,2,...,m$).

Пусть $y\in\mathbf{L}^n[a,b]$, β_k, $\alpha\in\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вначале линейную краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$\mathcal{L}x=y,\ \Delta x(t_k)=\beta_k,\ k=1,2,\ldots,m; \tag{1}$$

$$lx=\alpha, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbf{L}^n[a,b]$ – линейное непрерывное отображение, $l:\widetilde{\mathbf{D}}^n[a,b]\to\mathbb{R}^n$ – линейный непрерывный вектор-функционал.

Пусть задача (1), (2) однозначно разрешима. Тогда ее решение представимо в виде

$$x=X\alpha+Gy+\sum_{k=1}^m G_k\beta_k, \tag{3}$$

где X – фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$, $\Delta x(t_k)=0$, $k=1,2,\ldots,m$ при условии, что $l(X)=E$, E – единичная $n\times n$ матрица; $(Gy)(t)= =\int\limits_a^b G(t,s)y(s)ds$ – оператор Грина $G:\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{D}^n[a,b]$ с ядром $G(t,s)$, называемым матрицей Грина; $(G_k\beta_k)(t)=\chi_{(t_k,b]}(t)\int\limits_a^b G(t_k,s)\beta_k ds$, $k=1,2,\ldots,m$, $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция.

Применим представление (3) решения задачи (1),(2) к исследованию краевой задачи для импульсного функционально-дифференциального включения

$$\mathcal{L}x \in \Phi(x),\ \Delta x(t_k) = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, m; \tag{4}$$

$$lx \in \varphi(x), \tag{5}$$

где $\Phi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to Q(\mathbf{L}^n[a, b])$; $\varphi : \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b] \to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$.

Согласно представлению (3), задача (4),(5) эквивалентна включению

$$x \in X\varphi(x) + G\Phi(x) + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k.$$

Приведем необходимые определения и обозначения.

Пусть Φ – непустое подмножество пространства $\mathbf{L}^n[a, b]$. Выпуклой по переключению оболочкой $sw\Phi$ множества Φ, называется совокупность всех элементов вида $y = \sum_{i=1}^{l} \chi(\mathcal{U}_i)x_i$, где $x_i \in \Phi$, l – любое натуральное число, а произвольные измеримые множества $\mathcal{U}_i$, $i = \overline{1, l}$, осуществляют разбиение отрезка $[a, b]$, т. е. $\mathcal{U}_i \bigcap \mathcal{U}_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{U}_i = [a, b]$. Пусть далее, $\overline{sw}\Phi$ замыкание множества $sw\Phi$ в пространстве $\mathbf{L}^n[a, b]$.

Под ***обобщенным решением задачи*** (4),(5) понимается функция $x \in \widetilde{\mathbf{D}}^n[a, b]$, удовлетворяющая соотношениям

$$\mathcal{L}x \in \overline{sw}\Phi(x),\ \Delta x(t_k) = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$lx \in \varphi(x).$$

Отметим, что если – обобщенное решение задачи (4),(5), то существуют такие $z \in \varphi(x)$ и $v \in \overline{sw}\Phi(x)$, что $x = Xz + Gv + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k$.

Пусть $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a, b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$. Представим функцию q_0 в виде

$$q_0 = Xz_0 + Gv_0 + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k + e, \tag{6}$$

где $e = q_0 - Xz_0 - Gv_0 - \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k$. Пусть далее для функции $v_0 \in \mathbf{L}^n[a, b]$ существует функция $\kappa \in \mathbf{L}^1[a, b]$ такая, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a, b]$ выполняется

$$\rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_0, \overline{sw}\Phi(q_0)] \leqslant \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa(s)ds. \tag{7}$$

Определим функцию $\omega \in \mathbf{C}^1_+[a, b]$ равенством

$$\omega(t) = \int\limits_a^b |G(t, s)|\kappa(s)ds + |e(t)|, \tag{8}$$

где $|G(t, s)|$, $|e(t)|$ – норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц $G(t, s)$ и $e(t)$.

Будем предполагать, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ и любых $x, y \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ существует такая функция $\kappa_\Phi \in \mathbf{L}^1[a,b]$ и такое $\kappa_\varphi \geqslant 0$, что

$$h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\Phi(x), \Phi(y)] \leqslant \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds; \tag{9}$$

$$h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x), \varphi(y)] \leqslant \kappa_\varphi \|x-y\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}; \tag{10}$$

$$\max_{t\in[a,b]} \int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi \max_{t\in[a,b]} |X(t)| < 1. \tag{11}$$

Пусть для функции $\omega \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$, определенной соотношением (8), равномерно сходится ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\omega,\ \mathcal{A}^0\omega = \omega,\ \mathcal{A}^i\omega = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^{i-1}\omega\right),\ i = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где непрерывный оператор $\mathcal{A} : \mathbf{C}^1_+[a,b] \to \mathbf{C}^1_+[a,b]$ определен равенством

$$(\mathcal{A}\widetilde{\omega})(t) = \left(\int\limits_a^b |G(t,s)|\kappa_\Phi(s)ds + \kappa_\varphi \right) \|\widetilde{\omega}\|.$$

Пусть $\xi(\omega)$ – сумма ряда (12), то есть

$$\xi(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}^i\omega. \tag{13}$$

Для любой функции $\widetilde{\omega} \in \mathbf{C}^1_+[a,b]$ из некоторой окрестности 0 ряд (12) сходится в пространстве $\mathbf{C}^1[a,b]$.

Т е о р е м а. *Пусть* $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, $z_0 \in \varphi(q_0)$, $v_0 \in \mathbf{L}^n[a,b]$ *и пусть функция* q_0 *представима равенством* (6). *Далее, пусть отображения* $\Phi : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to Q(\boldsymbol{L}^n[a,b])$, $\varphi : \widetilde{\boldsymbol{C}}^n[a,b] \to$ $\to \mathrm{comp}[\mathbb{R}^n]$ *удовлетворяют соотношениям* $(9)-(11)$. *Тогда найдется обобщенное решение* x *задачи* (4),(5), *для которого выполняются следующие оценки: при любом* $t \in [a,b]$

$$|x(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\omega)(t); \tag{14}$$

$$|z - z_0| \leqslant \kappa_\varphi \max_{t\in[a,b]} |X(t)|\ \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{C}^1[a,b]}; \tag{15}$$

при почти всех $t \in [a,b]$

$$|v(t) - v_0(t)| \leqslant \kappa(t) + \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]}\ \|\xi(\omega)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]}. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $q_0 \in \widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ представима в виде (6) и пусть функция $v_1 \in \overline{sw}\Phi(q_0)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ удовлетворяет равенству

$$\|v_1 - v_0\|_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_0, \overline{sw}\Phi(q_0)].$$

Тогда в силу неравенства (7) при почти всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|v_1(t) - v_0(t)| \leqslant \kappa(t). \tag{17}$$

Далее, пусть

$$q_1 = z_1 + Gv_1 + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k,$$

где $z_1 \equiv z_0$. Тогда согласно (17) для любого $t \in [a,b]$ получаем соотношения

$$|q_1(t) - q_0(t)| = |(G(v_1 - v_0))(t) - e(t)| \leqslant |(G(v_1 - v_0))(t)| + |e(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |G(t,s)||v_1(s) - v_0(s)|ds + |e(t)| \leqslant \int_a^b |G(t,s)|k(s)ds + |e(t)|.$$

Таким образом, для любого $t \in [a,b]$ выполняется оценка:

$$|q_1(t) - q_0(t)| \leqslant (\mathcal{A}^0\omega)(t). \tag{18}$$

Существует $z_2 \in \varphi(q_1)$ удовлетворяющее равенству

$$|z_2 - z_1| = \rho[z_1, \varphi(q_1)].$$

Тогда в силу (10) имеют место неравенства

$$|z_2 - z_1| \leqslant h[\varphi(q_0); \varphi(q_1)] \leqslant \kappa_\varphi \|q_0 - q_1\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}^0\omega.$$

Пусть для функции $v_2 \in \overline{sw}\Phi(q_1)$ и любого измеримого множества $\mathcal{U} \in [a,b]$ справедливо соотношение

$$||v_2 - v_1||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_1, \overline{sw}\Phi(q_1)].$$

Из определения функции v_2 и неравенств (9), (18) для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ вытекают оценки

$$||v_2 - v_1||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_0); \overline{sw}\Phi(q_1)] \leqslant ||q_0 - q_1||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds \leqslant ||\kappa_\Phi||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}\ \|\mathcal{A}^0\omega||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Пусть

$$q_2 = z_2 + Gv_2 + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k.$$

Тогда для любого $t \in [a,b]$ имеют место соотношения

$$|q_2(t) - q_1(t)| = |z_2(t) + (Gv_2)(t) - z_1(t) - (Gv_1)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |z_2(t) - z_1(t)| + |G(v_2 - v_1)(t)| \leqslant \kappa_\varphi(\mathcal{A}^0\omega)(t) + \int_a^b |G(t,s)||v_2(s) - v_1(s)|\,ds.$$

Таким образом, при всех $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|q_2(t) - q_1(t)| \leqslant (\mathcal{A}\omega)(t). \tag{19}$$

Пусть $z_3 \in \varphi(q_2)$ удовлетворяет равенству

$$|z_3 - z_2| = \rho[z_2, \varphi(q_2)].$$

Тогда из соотношений (10), (19) получаем неравенства

$$|z_3 - z_2| \leqslant h[\varphi(q_1);\varphi(q_2)] \leqslant \kappa_\varphi \|q_1 - q_2\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}\omega. \tag{20}$$

Далее, пусть $v_3 \in \overline{sw}\Phi(q_2)$ для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ удовлетворяет равенству

$$||v_3 - v_2||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_2, \overline{sw}\Phi(q_2)].$$

Из соотношений (9), (19) вытекают оценки

$$||v_3 - v_2||_{L^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_1);\overline{sw}\Phi(q_2)] \leqslant$$

$$\leq ||q_1 - q_2||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds \leq ||\kappa_\Phi \mathcal{A}\omega||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{21}$$

Теперь пусть

$$q_3 = z_3 + Gv_3 + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k.$$

Тогда из (20), (21) для любого $t \in [a,b]$ получаем неравенства

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leqslant |z_3(t) - z_2(t)| + |G(v_3 - v_2)(t)| \leq$$

$$\leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}\omega + \int\limits_a^b |G(t,s)|(\kappa_\Phi \mathcal{A}\omega)(s)\,ds.$$

Таким образом, для любого $t \in [a,b]$ справедлива оценка

$$|q_3(t) - q_2(t)| \leqslant (\mathcal{A}^2\omega)(t). \tag{22}$$

Наконец, пусть для $z_4 \in \varphi(q_3)$ имеет место равенство

$$|z_4 - z_3| = \rho[z_3, \varphi(q_3)].$$

Тогда из (10) и (22) вытекают соотношения

$$|z_4 - z_3| \leqslant h_{\mathbb{R}^n}[\varphi(q_2);\varphi(q_3)] \leqslant \kappa_\varphi \|q_2 - q_3\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}^2\omega.$$

Пусть $v_4 \in \overline{sw}\Phi(q_3)$ – такая функция, что для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ выполняется равенство

$$||v_4 - v_3||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} = \rho_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[v_3, \overline{sw}\varphi(q_3)].$$

Из определения функции v_4 и из соотношений (9), (22) для любого измеримого $\mathcal{U} \in [a,b]$ вытекают оценки

$$||v_4 - v_3||_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})} \leqslant h_{\mathbf{L}^n(\mathcal{U})}[\overline{sw}\Phi(q_2);\overline{sw}\Phi(q_3)] \leqslant$$

$$\leq ||q_2 - q_3||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n(\mathcal{U})} \int\limits_{\mathcal{U}} \kappa_\Phi(s)ds \leq ||\kappa_\Phi\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}\ \|\mathcal{A}^2\omega||_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}.$$

Далее, пусть

$$q_4 = z_4 + Gv_4 + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k.$$

Тогда для любого $t \in [a,b]$ имеют место неравенства

$$|q_4(t) - q_3(t)| \leqslant |z_4(t) - z_3(t)| + |G(v_4 - v_3)(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}^2\omega + \int\limits_a^b |G(t,s)|(\kappa_\Phi \mathcal{A}^2\omega)(s)\, ds = \mathcal{A}(\mathcal{A}^2\omega)(t) = (\mathcal{A}^3\omega)(t).$$

Продолжая этот процесс дальше, получим последовательности $\{q_i\}$, $\{z_i\}$ и $\{v_i\}$ такие, что для любого $i = 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$q_i = z_i + Gv_i \sum_{k=1}^{m} G_k \beta_k, \tag{23}$$

где $z_i \in \varphi(q_{i-1})$, $v_i \in \Phi(q_{i-1})$, причем имеют место следующие соотношения:

$$|q_i(t) - q_{i-1}(t)| \leqslant (\mathcal{A}^{i-1}\omega)(t), \tag{24}$$

$$||z_i - z_{i-1}||_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]} \leqslant \kappa_\varphi \mathcal{A}^{i-2}\omega \tag{25}$$

и при почти всех $t \in [a,b]$

$$|v_i(t) - v_{i-1}(t)| \leqslant \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}\ \|(\mathcal{A}^{i-2}\omega)(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{26}$$

Покажем, что последовательность $\{q_i\}$ сходится. Действительно, согласно неравенству (24) для любых $j = 0, 1 \ldots,\ i = 1, 2 \ldots$ и $t \in [a,b]$ получаем оценку

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leqslant |q_{j+i}(t) - q_{j+i-1}(t)| + |q_{j+i-1}(t) - q_{j+i-2}(t)| + \cdots +$$

$$+|q_{j+1}(t) - q_j(t)| \leqslant (\mathcal{A}^{j+i-1}\omega)(t) + (\mathcal{A}^{j+i-2}\omega)(t) + \cdots + (\mathcal{A}^j\omega)(t).$$

Таким образом, для любых $j = 0, 1, \ldots,\ i = 1, 2, \ldots$ и при любом $t \in [a,b]$ выполняются соотношения

$$|q_{j+i}(t) - q_j(t)| \leqslant \sum_{k=j}^{\infty} (\mathcal{A}^k\omega)(t). \tag{27}$$

Из сходимости ряда (12) следует, что последовательности $\{q_i\}$ фундаментальна в пространстве $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$, поэтому последовательность $\{q_i\}$ сходится. Пусть

$$x = \lim_{i\to\infty} q_i.$$

Докажем, что x удовлетворяет теореме. Покажем, что для x справедливо неравенство (14). Пусть в неравенстве (27) $j = 0$. Тогда, учитывая, что $\xi(\omega) \in \mathbf{C}^1[a,b]$ – сумма ряда (12), при любом $t \in [a,b]$ получим оценку

$$|q_i(t) - q_0(t)| \leqslant \xi(\omega)(t).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ в этом соотношении, получим неравенство (14).

Докажем далее сходимость последовательности $\{z_i\}$. Так как при $t \in [a,b]$ и любых $i, j = 1, 2 \ldots$ выполняются соотношения

$$|z_{j+i}(t) - z_j(t)| \leqslant |z_{j+i}(t) - z_{j+i-1}(t)| + |z_{j+i-1}(t) - z_{j+i-2}(t)| + \cdots +$$

$$+|z_{j+1}(t) - z_j(t)|,$$

то, согласно (25) справедлива оценка

$$|z_{j+i} - z_j| \leqslant \kappa_\varphi \sum_{k=j-1}^{\infty} \mathcal{A}^k \omega. \tag{28}$$

Отсюда и из сходимости ряда (12) вытекает, что последовательность $\{z_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть

$$z = \lim_{i\to\infty} z_i.$$

Приняв в соотношении (28) $j=1$ и переходя к пределу при $i\to\infty$, при этом учитывая, что $z_1 \equiv z_0$, получим, что z удовлетворяет неравенству (15).

Наконец, рассмотрим последовательность $\{v_i\}$. Докажем ее сходимость. В самом деле, для любых $j=0,1,2,\ldots,$ $i=1,2,\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ имеет место соотношение

$$|v_{j+i}(t) - v_j(t)| \leqslant |v_{j+i}(t) - v_{j+i-1}(t)| + |v_{j+i-1}(t) - v_{j+i-2}(t)| + \cdots +$$

$$+|v_{j+1}(t) - v_j(t)|$$

Поэтому из (26) следует, что при почти всех $t\in[a,b]$ выполняется оценка

$$|v_{j+i}(t) - v_j(t)| \leqslant \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}\| \sum_{k=j-1}^{\infty} (\mathcal{A}^k\omega)(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}. \tag{29}$$

Следовательно, последовательность $\{v_i\}$ фундаментальна в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$. Пусть

$$v = \lim_{i\to\infty} v_i.$$

Покажем, что при почти всех $t\in[a,b]$ z удовлетворяет соотношению (16). Действительно, так как при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $i=1,2,\ldots$ выполняется оценка

$$|v_{i+1}(t) - v_0(t)| \leqslant |v_{i+1}(t) - v_1(t)| + |v_1(t) - v_0(t)|,$$

то из (29) для любого $i=1,2,\ldots$ и при почти всех $t\in[a,b]$ имеем неравенство

$$|v_{i+1}(t) - v_0(t)| \leqslant \|\kappa_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathcal{U})}\| \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^k\omega)(t)\|_{\mathbf{L}^1[a,b]} + |v_1(t) - v_0(t)|.$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $i\to\infty$ и учитывая (13), (17), при почти всех $t\in[a,b]$ получим оценку (16). Далее, переходя в равенстве (23) к пределу при $i\to\infty$, получим равенство

$$x = Xz + Gv + \sum_{k=1}^{m} G_k\beta_k,$$

$z\in\varphi(x)$, $v\in\overline{sw}\Phi(x)$ причем из непрерывности по Хаусдорфу отображений $\varphi:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to$ $\to \operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$, $\Phi:\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]\to Q(\mathbf{L}^n[a,b])$ вытекают включения $v\in\overline{sw}\Phi(x)$ и $z\in\varphi(x)$, т. е. x – обобщенное решение задачи (4),(5). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенная теорема дает несколько больше, чем просто условия существования решения краевой задачи (4),(5). Она дает способ нахождения приближенного решения путем подбора функции $q_0\in\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$. При этом функция $\xi(\omega)$, зависящая от функций $q_0, z_0\in\mathbb{R}^n$ и $v_0\in\mathbf{L}^n[a,b]$, дает оценку погрешности приближенного решения – функции q_0.

Таким образом, для импульсных функционально-дифференциальных включений с правой частью, не обладающей свойством выпуклости по переключению значений, получены оценки обобщенных решений (см.[2], [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
2. *Булгаков А.И., Корчагина Е.В., Филиппова О.В.* Функционально-дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Части 1-6 // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2009. Т. 14. Вып. 6. С. 1275-1313.
3. *Чугунов П.И.* Свойства решений дифференциальных включений и управляемые системы // Прикл. математика и пакеты прикл. программ. Иркутск: Изд-во СЭИСО АН СССР, 1980. С. 155-179.
4. *Булгаков А.И., Полянский А.И.* Обобщенные решения квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных включений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2007. Т. 12. Вып. 1. С. 52-54.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-01-97504, № 14-01-00877).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Филиппова Ольга Викторовна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа, e-mail: philippova.olga@rambler.ru

UDC 517.911, 517.968
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-441-449

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE TYPE IMPULSE FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL INCLUSIONS

© O.V. Filippova

A boundary value problem for one type impulse functional-differential inclusions with a multi-valued map not necessarily convex-valued with respect to switching in the space of summable functions is considered. Concept of a generalized solution is represented. Existence conditions for generalized solutions are obtained and their estimates are found.

Key words: functional-differential inclusion; boundary value problem; convexity with respect to switching.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects № 14-01-97504, № 14-01-00877).

REFERENCES

1. *Filippov A.F.* Differencial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu. M.: Nauka, 1985. 224 s.
2. *Bulgakov A.I., Korchagina E.V., Filippova O.V.* Funkcional'no-differencial'nye vklyucheniya s impul'snymi vozdeystviyami. CHasti 1-6 // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2009. T. 14. Vyp. 6. S. 1275-1313.
3. *Chugunov P.I.* Svoystva resheniy differencial'nyh vklyucheniy i upravlyaemye sistemy // Prikl. matematika i pakety prikl. programm. Irkutsk: Izd-vo SEISO AN SSSR, 1980. S. 155-179.
4. *Bulgakov A.I., Polyanskiy A.I.* Obobshchennye resheniya kvazilineynyh kraevyh zadach dlya funkcional'no-diffrencial'nyh vklyucheniy // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2007. T. 12. Vyp. 1. S. 52-54.

Received 21 March 2016.

Filippova Olga Viktorovna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department, e-mail: philippova.olga@rambler.ru