УДК 517.977.5, 517.929.7, 519.62
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-417-431

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Т. Х. М. Тахир

Рассматриваются некоторые линейные функционально-дифференциальные уравнения, решение которых можно записать аналитически. Для рассматриваемых уравнений получены функция Коши; функция Грина двухточечной (в частном случае, периодической и апериодический) краевой задачи.

Ключевые слова: линейное функционально-дифференциальное уравнение; функция Коши; функция Грина; общее решение.

Введение

В статье рассматриваются конкретные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с запаздыванием и нейтрального типа, решение которых $x(t)$, $t \geq 0$, удается записать аналитически. Если запаздывающий аргумент $h(t) \leq t-\tau$, $\tau > 0$, то решение строится последовательно на каждом участке времени $[0,\tau]$, $(\tau, 2\tau)$, $\ldots$. В других случаях решение основано на представлении задачи Коши для соответствующего функционально-дифференциального уравнения в операторной виде

$$y(t) - (Ky)(t) = f(t), \quad t \in [0,T],$$

где $y = \dot{x}$ — производная искомого решения, $K : L([0,T],\mathbb{R}) \to L([0,T],\mathbb{R})$ — линейный ограниченный оператор со спектральным радиусом $\rho(K) < 1$, $f \in L([0,T],\mathbb{R})$, T — любое положительное число. Для нахождения y мы используем ряд Неймана

$$y = f + Kf + K^2 f + \ldots .$$

Отметим, что интегрируемые в квадратурах функционально-дифференциальные уравнения используются, например, в качестве модельных уравнений при исследовании краевых задач, проблем устойчивости, задачи о периодических решениях, получении оценок решений (подробнее см. [1]). В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых случаи интегрируемости в квадратурах подробно изучены (см. [2]), в научной литературе содержится очень мало сведений о конкретных уравнениях с запаздыванием, интегродифференциальных уравнениях, уравнениях нейтрального типа и др., решение которых удается записать аналитически. Для линейных функционально-дифференциальных уравнений в [3] предлагается построение функции Грина с использованием ряда Неймана. Методы нахождения функции Коши рассмотрены в [4]–[7]. Вопросам выделения решаемых явно функционально-дифференциальных уравнений посвящена статья [8]; предлагаемая работа продолжает это исследование.

Статья состоит из трех параграфов, в заголовок каждого параграфа вынесено рассматриваемое в нем уравнение. Для каждого исследуемого уравнения найдено общее решение, фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения и функция Коши. Получены также условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи, определена ее функция Грина. На основании этих результатов исследуется периодическая краевая задача.

1. Уравнение $\dot{x}(t)-x(t-1)=f(t)$.

1.1. Задача Коши

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t)-x(t-1)=f(t), \quad t\geq 0, \quad x(\xi)=0, \text{ если } \xi<0 \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(0)=\alpha.$$

Если $t\in[0,1]$, то $x(t-1)\in[-1,0]$, следовательно получаем $\dot{x}(t)-0=f(t)$. Решением этого уравнения будет $x(t)=\alpha+\int\limits_0^t f(s)ds$.

Если $t\in(1,2]$, то $x(t-1)\in(0,1]$, следовательно получаем $\dot{x}(t)-\Big(\alpha+\int\limits_0^{t-1} f(s)ds\Big)=f(t)$. Решением этого уравнения будет

$$x(t)=x(1)+\int\limits_1^t\Big(f(s)+\alpha+\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi\Big)ds.$$

Подставим $x(1)=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds$, получим

$$x(t)=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds+\int\limits_1^t\Big(f(s)+\alpha+\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi\Big)ds=$$

$$=\alpha+\int\limits_0^1 f(s)ds+\int\limits_1^t f(s)ds+\int\limits_1^t \alpha ds+\int\limits_1^t\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi ds=$$

$$=\alpha+\alpha(t-1)+\int\limits_0^t f(s)ds+\int\limits_0^{t-1}\int\limits_{\xi+1}^t ds f(\xi)d\xi=$$

$$=\alpha+\alpha(t-1)+\int\limits_0^t f(s)ds+\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(\xi)d\xi.$$

Если $t\in(2,3]$, то $x(t-1)\in(1,2]$, следовательно получаем

$$\dot{x}(t)-\Big(\alpha+\alpha(t-2)+\int\limits_0^{t-1} f(s)ds+\int\limits_0^{t-2}(t-\xi-2)f(\xi)d\xi\Big)=f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t)=x(2)+\int\limits_2^t\Big(f(s)+\alpha+\alpha(s-2)+\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi+\int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi\Big)ds.$$

Подставим $x(2)=2\alpha+\int\limits_0^2 f(s)ds+\int\limits_0^1(1-s)f(s)ds$, получим

$$x(t)=2\alpha+\int\limits_0^2 f(s)ds+\int\limits_0^1(1-s)f(s)ds+$$
$$+\int\limits_2^t\Big(f(s)+\alpha+\alpha(s-2)+\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi+\int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi\Big)ds=$$

$$=2\alpha+\alpha(t-2)+\int\limits_0^2 f(s)ds+\int\limits_0^1(1-s)f(s)ds+$$

$$+\int\limits_2^t f(s)ds+\int\limits_2^t\alpha(s-2)ds+\int\limits_2^t\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi ds+\int\limits_2^t\int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi ds=$$

$$=2\alpha+\alpha(t-2)+\int\limits_0^2 f(s)ds+\int\limits_0^1(1-s)f(s)ds+$$

$$+\int\limits_2^t f(s)ds+\int\limits_2^t\alpha(s-2)ds+\int\limits_2^t\int\limits_0^1 f(\xi)d\xi ds+\int\limits_2^t\int\limits_1^{s-1}d\xi ds+\int\limits_0^{t-2}\int\limits_{\xi+2}^t(s-\xi-2)dsf(\xi)d\xi=$$
$$=\alpha+\alpha(t-1)+\int\limits_0^2 f(s)ds+\int\limits_0^1(1-s)f(s)ds+\int\limits_2^t f(s)ds+\int\limits_2^t\alpha(s-2)ds+\int\limits_0^1(t-2)f(s)ds+$$
$$+\int\limits_1^{t-1}(t-s-1)ds+\int\limits_0^{t-2}\frac{(t-s-2)^2}{2}f(s)ds=$$
$$=\alpha+\alpha(t-1)+\alpha\frac{(t-2)^2}{2}+\int\limits_0^t f(s)ds+\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds+\int\limits_0^{t-2}\frac{(t-s-2)^2}{2}f(s)ds.$$

Докажем методом математической индукции, что для для любого n при $t\in(n,n+1]$, выполнено

$$x(t)=\alpha+\alpha(t-1)+\ldots+\frac{\alpha(t-n)^n}{n!}+\int\limits_0^t f(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds+\ldots+\int\limits_0^{t-n}\frac{(t-s-n)^n}{n!}f(s)ds.$$

Это равенство проверено при $n = 1, 2, 3$. Предположим, что равенство справедливо при $n = k-1$, т. е. для $t \in (k-1, k]$, выполнено

$$x(t) = \alpha + \alpha t + \ldots + \frac{\alpha(t-k+1)^{k-1}}{(k-1)!} + \int\limits_0^t f(s)ds + \\ + \int\limits_0^{t-1}(t-s-1)f(s)ds + \ldots + \int\limits_0^{t-k+1}\frac{(t-s-k+1)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds.$$

Тогда при $n = k$ для $t \in (k, k+1]$, так как $x(t-1) \in (k-1, k]$, получаем

$$\dot{x}(t) - \Big(\alpha + \alpha(t-1) + \ldots + \frac{\alpha(t-k)^{k-1}}{(k-1)!} + \int\limits_0^{t-1} f(s)ds + \int\limits_0^{t-2}(t-s-2)f(s)ds + \ldots + \\ + \int\limits_0^{t-k}\frac{(t-s-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(\xi)d\xi\Big) = f(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$x(t) = x(k) + \int\limits_k^t\Big(f(s) + \alpha + \alpha(s-1) + \ldots + \alpha(s-k)^{k-1} + \int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi + \int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi + \\ + \ldots + \int\limits_0^{s-k}\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(\xi)d\xi\Big)ds.$$

Подставим

$$x(k) = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!} + \int\limits_0^k f(s)ds + \\ + \int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds + \int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds + \ldots + \int\limits_0^1\frac{(1-s)^{k-1}}{(k-1)!}f(s)ds,$$

получим

$$x(t) = x(k) + \int\limits_k^t\Big(f(s) + x(s-1)\Big)ds = \alpha + \alpha k + \frac{\alpha(k-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!} + \\ + \int\limits_0^k f(s)ds + \int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds + \int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds + \ldots + \int\limits_0^1\frac{1-s}{(k-1)!}f(s)ds + \\ + \int\limits_k^t f(s)ds + \int\limits_k^t\Big(\alpha + \alpha(s-1) + \ldots + \alpha(s-k)^{k-1} +$$

$$+\int\limits_0^{s-1} f(\xi)d\xi+\int\limits_0^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi+\ldots+\int\limits_0^{s-k}\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}f(\xi)d\xi\Big)ds=$$

$$=\alpha+\alpha k+\frac{\alpha(k-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!}+\int\limits_0^k f(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds+\int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+\ldots+\int\limits_0^1\frac{1-s}{(k-1)!}f(s)ds+$$
$$+\int\limits_k^t f(s)ds+\int\limits_k^t\alpha ds+\int\limits_k^t\alpha(s-1)ds+\ldots+\int\limits_k^t\alpha(s-k)^{k-1}ds+\int\limits_k^t\int\limits_0^{k-1}f(\xi)d\xi ds+$$
$$+\int\limits_k^t\int\limits_{k-1}^{s-1}f(\xi)d\xi ds+\ldots+\int\limits_k^t\int\limits_0^{k-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi ds+\int\limits_k^t\int\limits_{k-2}^{s-2}(s-\xi-2)f(\xi)d\xi ds+\ldots+$$
$$+\int\limits_0^{t-k}\int\limits_{\xi+k}^t\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}dsf(\xi)d\xi=$$

$$=\alpha+\alpha k+\frac{\alpha(k-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(2)^{k-2}}{(k-2)!}+\frac{\alpha(1)^{k-1}}{(k-1)!}+\int\limits_0^k f(s)ds+\int\limits_0^{k-1}(k-s-1)f(s)ds+$$
$$+\int\limits_0^{k-2}\frac{(k-s-2)^2}{2!}f(s)ds+\ldots+\int\limits_0^1\frac{1-s}{(k-1)!}f(s)ds+\int\limits_k^t f(s)ds+\int\limits_k^t\alpha ds+$$

$$+\int\limits_k^t\alpha(s-1)ds+\ldots+\int\limits_k^t\alpha(s-k)^{k-1}ds+\int\limits_0^{k-1}\int\limits_k^t dsf(\xi)d\xi+\int\limits_{k-1}^{t-1}\int\limits_{\xi+1}^t dsf(\xi)d\xi+\ldots+$$

$$+\int\limits_0^{k-2}\int\limits_k^t(s-\xi-2)dsf(\xi)d\xi+\int\limits_{k-2}^{t-2}\int\limits_{\xi+2}^t(s-\xi-2)dsf(\xi)d\xi+\ldots+$$
$$+\int\limits_0^{t-k}\int\limits_{\xi+k}^t\frac{(s-\xi-k)^{k-1}}{(k-1)!}dsf(\xi)d\xi=$$

$$= \alpha + \alpha k + \frac{\alpha (k-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha 2^{k-2}}{(k-2)!} + \frac{\alpha 1^{k-1}}{(k-1)!} + \int_0^k f(s)ds + \int_0^{k-1} (k-s-1) f(s)ds +$$

$$+ \int_0^{k-2} \frac{(k-s-2)^2}{2!} f(s)ds + \ldots + \int_0^1 \frac{1-s}{(k-1)!} f(s)ds + \int_k^t f(s)ds + \int_k^t \alpha ds +$$

$$+ \int_k^t \alpha (s-1)ds + \ldots + \int_k^t \alpha (s-k)^{k-1} ds + \int_0^{k-1} (t-k) f(\xi)d\xi + \int_{k-1}^{t-1} (t-\xi-1) f(\xi) d\xi + \ldots +$$

$$+ \int_0^{k-2} \frac{[(t-\xi-2)^2] - [(k-\xi-2)^2]}{2} d\xi + \int_{k-2}^{t-2} \frac{(t-\xi-2)^2}{2} f(\xi)d\xi + \ldots + \int_0^{t-k} \frac{(t-\xi-k)^k}{k!} f(\xi) d\xi.$$

Итак, при $t \in (k, k+1]$ имеем

$$x(t) = \alpha + \alpha(t-1) + \ldots + \frac{\alpha (t-k)^k}{k!} + \int_0^t f(s)ds +$$

$$+ \int_0^{t-1} (t-s-1) f(s)ds + \ldots + \int_0^{t-k} \frac{(t-s-k)^k}{k!} f(s)ds \ldots$$

Таким образом, при любых $t \geq 0$ решение задачи Коши представимо в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[n,\infty)}(t) \Big(\frac{\alpha p^n (t-n)^n}{n!} + \int_0^{t-n} \frac{p^n (t-s-n)^n}{n!} f(s)\, ds \Big). \tag{2}$$

Отсюда для уравнения (1) определяем функцию Коши

$$C(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-s-n)^n \chi_{[n,\infty)}(t)\, \chi_{[0,t-n]}(s)}{n!}\,.$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n (t-n)^n \chi_{[n,\infty)}(t)}{n!}.$$

1.2. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - x(t-1) = f(t), \quad t \in [0,k], \quad x(\xi) = 0, \text{ если } \xi < 0, \tag{3}$$

$$Ax(0) + Bx(k) = C. \tag{4}$$

Аналогично представлению (2) общего решения уравнения (1), для уравнения (3) получаем общее решение в виде

$$x(t) = \sum_{n=0}^{k} \chi_{[n,k]}(t) \Big(\frac{\alpha p^n (t-n)^n}{n!} + \int_0^{t-n} \frac{p^n (t-s-n)^n}{n!} f(s)\, ds \Big), \quad t \in [0,k]. \tag{5}$$

Отсюда, учитывая равенство $\chi_{[n,k]}(k)=1$, вычисляем

$$x(0)=\alpha, \quad x(k)=\alpha\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{k-n}\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (4):

$$\alpha\Big(A+B\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}\Big)+B\sum_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{k-n}\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds=C.$$

Краевая задача (3), (4) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$A+B\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}\neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha=\frac{C-B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{k-n}\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}.$$

Таким образом, решением краевой задачи (3), (4) является

$$x(t)=\frac{C-B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{k-n}\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{n=0}^{k}\chi_{[n,k]}(t)\frac{p^n(t-n)^n}{n!}+$$

$$+\int\limits_0^{t-n}\sum_{n=0}^{k}\chi_{[n,k]}(t)\frac{p^n(t-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds, \quad t\in[0,k].$$

Преобразуем полученное выражение

$$x(t)=\frac{C}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}-$$

$$-\frac{B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\int\limits_0^{k-n}\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(t-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}+\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\int\limits_0^{t-j}\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!}f(s)\,ds=$$

$$=\frac{C}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}+\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\int\limits_0^{k}\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!}f(s)\,ds-$$

$$-\int\limits_0^{k}\frac{B}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{n=0}^{k-1}\chi_{[0,k-n]}(s)\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Отсюда для задачи (3), (4) определяем функцию Грина

$$G(t,s)=\sum_{j=0}^{k}\chi_{[n,k]}(t)\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!}-$$
$$-\frac{B}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{n=0}^{k-1}\chi_{[0,k-n]}(s)\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения

$$X(t)=\frac{1}{A+B\sum\limits_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Рассмотрим частный случай задачи (3), (4) — периодическую краевую задачу с условием

$$X(k)-X(0)=C. \tag{6}$$

Это условие совпадает с (4), если $A=-1$, $B=1$. Таким образом, задача (3), (6) однозначно разрешима при любых f,c тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=0}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}\neq 1. \tag{7}$$

При $k=1$ это условии нарушено, то есть задача (3), (6) не является однозначно разрешимой. При $k\geq 2$ условие (7) эквивалентно неравенству

$$\sum_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}\neq 0. \tag{8}$$

При выполнении (8), решение краевой задачи (4), (6) определяется формулой

$$x(t)=\frac{C}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}+\sum_{j=0}^{k}\chi_{[n,k]}(t)\int\limits_0^k\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!}f(s)\,ds-$$
$$-\int\limits_0^k\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{n=0}^{k}\chi_{[0,k-n]}(s)\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}f(s)\,ds\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Следовательно, функция Грина задачи (3), (6) равна

$$G(t,s)=\sum_{j=0}^{k}\chi_{[n,k]}(t)\chi_{[0,t-j]}(s)\frac{p^j(t-s-j)^j}{j!}-$$
$$-\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{n=0}^{k}\chi_{[0,k-n]}(s)\frac{p^n(k-s-n)^n}{n!}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

Фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения равно

$$X(t)=\frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{k-1}\frac{p^n(k-n)^n}{n!}}\sum_{j=0}^{k}\chi_{[j,k]}(t)\frac{p^j(t-j)^j}{j!}.$$

2. Уравнение $\dot{x}(t)-p\,x(t/2)=f(t)$.

2.1. Задача Коши

Здесь рассматривается линейное дифференциальное уравнение с переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t)-p\,x(t/2)=f(t),\quad t\geq 0. \tag{9}$$

Задача Коши с начальным условием $x(0)=0$ для уравнения (9) заменой $y=\dot{x}$ сводится к интегральному уравнению

$$y(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds+f(t),\quad t\in[0,T],\quad x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<0, \tag{10}$$

где T — любое положительное число. Так как спектральный радиус вольтеррова интегрального оператора $K:L([0,T],\mathbb{R})\to L([0,T],\mathbb{R})$, $(Ky)(t)=p\int\limits_0^{t/2}y(s)\,ds+f(t)$, равен нулю, то существует единственное решение уравнения (10), и это решение представимо суммой ряда Неймана $y(t)=f(t)+(Kf)(t)+(K^2f)(t)+\ldots$.

Имеем

$$(K^2f)(t)=p^2\int\limits_0^{t/2}\int\limits_0^{s/2}f(\xi)\,d\xi\,ds=p^2\int\limits_0^{t/4}\int\limits_{2\xi}^{t/2}f(\xi)\,ds\,d\xi=p^2\int\limits_0^{t/4}\Big(\frac{t}{2}-2\xi\Big)f(\xi)\,d\xi.$$

Аналогичными вычислениями по индукции устанавливаем

$$(K^nf)(t)=p^n\int\limits_0^{t/2^n}\frac{2^02^1\ldots2^{n-2}}{(n-1)!}\Big(\frac{t}{2^{n-1}}-2\xi\Big)^{n-1}f(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом,

$$x(t)=\int\limits_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(K^nf)(s)\,ds=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^t(K^nf)(s)\,ds=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\int\limits_0^t\int\limits_0^{s/2^n}\frac{2^02^1\ldots2^{n-2}}{(n-1)!}\Big(\frac{s}{2^{n-1}}-2\xi\Big)^{n-1}f(\xi)\,d\xi\,ds=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\int\limits_0^{t/2^n}\int\limits_{2^n\xi}^{t}\frac{2^02^1\ldots2^{n-2}}{(n-1)!}\Big(\frac{s}{2^{n-1}}-2\xi\Big)^{n-1}f(\xi)\,ds\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\int\limits_0^{t/2^n}\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\Big(\frac{t}{2^{n-1}}-2\xi\Big)^{n}f(\xi)\,d\xi.$$

Итак, получено общее решение уравнения (9)

$$x(t) = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\, ds. \tag{11}$$

Заметим, что справедливость этого равенства следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (см. [9], с. 200). Действительно, подынтегральная функция удовлетворяет при $t \in [0,T]$, $s \in [0,t]$ неравенству

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |p|^n \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}}\right)^n |f(s)| = |f(s)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|p|^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}},$$

где числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(n! 2^{n(n-1)/2}\right)^{-1} |p|^n T^n$ сходится.

Из (11) для уравнения (9) получаем функцию Коши

$$C(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n$$

и фундаментальное решение соответствующего однородного уравнения (см. [1], с. 63)

$$X(t) = C(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}}.$$

2.2. Двухточечная краевая задача

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) - p\, x(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{12}$$

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{13}$$

Аналогично представлению (11) общего решения уравнения (9), для уравнения (12) получаем общее решение в виде

$$x(t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\, ds. \tag{14}$$

Из предоставления (14) получаем

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\, ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (13):

$$A\alpha + B\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n T^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + B \int_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\, ds = C.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$A + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}} \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B\int\limits_0^T \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\,ds}{A + B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}.$$

Следовательно, решением краевой задачи (12), (13) является

$$x(t) = \frac{C - B\int\limits_0^T \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\,ds}{A + B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nt^n}{n!2^{n(n-1)/2}} +$$

$$+\int\limits_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\,ds =$$

$$= \frac{C\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nt^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}{A + B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}} - \frac{B\int\limits_0^T \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,T/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{T}{2^{n-1}} - 2s\right)^n \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}} f(s)\,ds}{A + B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}} +$$

$$+\int\limits_0^T \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,t/2^n]}(s)\frac{2^{n(n-1)/2}}{n!}\left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\,ds.$$

Таким образом, получена функция Грина уравнения (12),(13)

$$G(t,s) = -\frac{B}{A + B\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)(T-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)(t-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}.$$

Для уравнения (12) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \tag{15}$$

Условие (15) — частный случай условия (13) при $A = -1$, $B = 1$. Из приведенных выше результатов получаем, что краевая задача (12),(15)) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}} \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}} \neq 0.$$

Таким образом, получена функция Грина задачи (12),(15)

$$G(t,s)=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}p^n\chi_{[0,T/2^n]}(s)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p^nT^n}{n!2^{n(n-1)/2}}}\,\frac{(T-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^kt^k}{k!2^{k(k-1)/2}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^n\chi_{[0,t/2^n]}(s)(t-2^ns)^n}{n!2^{n(n-1)/2}}.$$

3. Уравнение $\dot x(t)-p\,\dot x\big(t/2\big)=f(t)$.

3.1. Задача Коши

В заключение рассмотрим линейное уравнение нейтрального типа

$$\dot x(t)-p\,\dot x\big(h(t)\big)=f(t),\quad t\geq 0,\quad x(\xi)=0,\ \text{если}\ \xi<0. \tag{16}$$

Будем предполагать, что измеримая функция $h:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $h(t)\leq t$ и выполнено следующее условие

$$|p|\,\frac{\mu\big(h^{-1}(\Omega)\big)}{\mu\,\Omega}<1, \tag{17}$$

где символом μ обозначена мера Лебега.

Определим оператор $(S_hy)(t)=\begin{cases} y\big(h(t)\big), & \text{если}\quad h(t)\geq 0,\\ 0, & \text{если}\quad h(t)<0,\end{cases}$ Вследствие принятых предположений, при любом $T>0$ оператор S_h действует в $L([0,T],\mathbb{R})$ и $\|S_h\|<1$ (см. [1], с. 21), следовательно, при любых α, f задача Коши с начальным условием $x(0)=\alpha$ однозначно разрешима. Решение может быть определено через ряд Неймана

$$\dot x(t)=f(t)+p\,(S_hf)(t)+p^2\,(S_{h^2}f)(t)+\dots. \tag{18}$$

Для упрощения выкладок приведем решение уравнения (16) в частном случае при $h(t)=t/2$. Итак, рассмотрим уравнение

$$\dot x(t)-p\,\dot x\big(t/2\big)=f(t),\quad t\geq 0. \tag{19}$$

Условие (17) приобретает вид неравенства $|p|<1/2$. В силу (18) имеем

$$\dot x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p^n\,f(t/2^n),\quad x(t)=\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{t/2^n}(2p)^n\,f(s)\,ds. \tag{20}$$

Таким образом, функция Коши уравнения (19) равна

$$C(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n,$$

или, что то же самое

$$C(t,s)=\frac{1-(2p)^{n+1}}{1-2p},\ \text{если}\ c\in[t/2^n,\,t/2^{n+1}],\quad n=0,1,2,\dots.$$

В [3] предложен метод нахождения функции Грина уравнения (16), использующий, как и в нашей работе, ряд Неймана (18).

3.2. Краевая задача

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения

$$\dot{x}(t) - p\,\dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T] \tag{21}$$

с условием

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \tag{22}$$

Представление (20) общего решения уравнения (19) при $t \in [0,T]$ дает и общее решение уравнения (21). Таким образом, получаем

$$x(t) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n\, f(s)\, ds, \quad t \in [0,T]. \tag{23}$$

Отсюда имеем

$$x(0) = \alpha, \quad x(T) = \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n\, f(s)\, ds.$$

Подставим эти соотношения в краевые условия (22):

$$\alpha(A+B) = C - B\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n\, f(s)\, ds.$$

Краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$(A+B) \neq 0.$$

В этом случае получаем

$$\alpha = \frac{C - B\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n\, f(s) ds}{A+B}.$$

Таким образом, решением краевой задачи (21), (22) является

$$x(t) = \frac{C - B\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{T/2^n} (2p)^n\, f(s) ds}{A+B} + \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^{t/2^n} (2p)^n\, f(s)\, ds.$$

Таким образом, получена функция Грина краевой задачи (21), (22)

$$G(t,s) = -\frac{B\sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,T/2^n]}(s)\,(2p)^n}{A+B} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n.$$

Для уравнения (21) рассмотрим периодическую краевую задачу с условием

$$x(T) - x(0) = C. \tag{24}$$

Как уже отмечалось, условие (24) — частный случай условия (22) при $A=-1$, $B=1$. Так как $A+B=0$, периодическая задача не является однозначна разрешимой ни при каких значениях p, T.

В отличие от периодической задачи апериодическая задача с условием

$$x(T)+x(0)=C \tag{25}$$

однозначно разрешимой при любых p, T, так как $A+B=2\neq 0$. Ее функция Грина равна

$$G(t,s) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{[0,\,T/2^n]}(s)\,(2p)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\chi_{[0,\,t/2^n]}(s)\,(2p)^n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 280 с.

2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

3. *Жуковский Е.С.* Использование ряда Неймана для построения функции Грина // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. № 2. С. 205–206.

4. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 256 с.

5. *Жуковская Т.В., Молоканова Е.А.* Численные методы решения эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. № 5. С. 1352–1359.

6. *Жуковская Т.В.* Интерполяция функции Коши // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2002. Т. 7. № 1. С. 110–111.

7. *Жуковская Т.В.* Метод построения функции Коши уравнения с обобщенно вольтерровым оператором // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2003. Т. 8. № 1. С. 162-163.

8. *Борзова М.В., Козадаев А.В., Тахир Х.М.Т.* Некоторые интегрируемые в квадратурах линейные функционально-дифференциальные уравнения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2015. Т. 20. № 5. С. 1079–1083.

9. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973. 352 с.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Тахир Халид Мизхир Тахир, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com

UDC 517.977.5, 517.929.7, 519.62
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-417-431

ON SOLVING LINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS

© T. Kh. M. Takhir

We consider some linear functional-differential equations the solutions of which can be written analytically. For these equations we derive the Cauchy function, the Green function for a two-point (in particular, for periodic and aperiodic) boundary value problem.
Key words: linear functional-differential equation; the Cauchy function; the Green function; general solution.

REFERENCES

1. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rahmatullina L.F.* Vvedenie v teoriyu funkcional'no-differencial'nyh uravneniy. M.: Nauka, 1991. 280 s.
2. *Kamke EH.* Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam. M.: Nauka, 1976. 576 s.
3. *Zhukovskiy E.S.* Ispol'zovanie ryada Nejmana dlya postroeniya funkcii Grina // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 1997. T. 2. № 2. S. 205–206.
4. *Kim A.V., Pimenov V.G.* i-Gladkiy analiz i chislennye metody resheniya funkcional'no-differencial'nyh uravnenij. Izevsk: Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, 2004. 256 s.
5. *Zhukovskaya T.V., Molokanova E.A.* Chislennye metody resheniya evolyucionnyh funkcional'no-differencial'nyh uravnenij // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2012. T. 17. № 5. S. 1352–1359.
6. *Zhukovskaya T.V.* Interpolyaciya funkcii Koshi // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2002. T. 7. № 1. S. 110–111.
7. *Zhukovskaya T.V.* Metod postroeniya funkcii Koshi uravneniya s obobshchenno vol'terrovym operatorom // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2003. T. 8. № 1. S. 162-163.
8. *Borzova M.V., Kozadaev A.V., Tahir H.M.T.* Nekotorye integriruemye v kvadraturah linejnye funkcional'no-differencial'nye uravneniya // Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2015. T. 20. № 5. S. 1079–1083.
9. *Vulih B.Z.* Kratkiy kurs teorii funkciy veshchestvennoy peremennoy. M.: Nauka, 1973. 352 s.

Received 21 March 2016.

Tahir Khalid Mizhir Tahir, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student of the Functional Analysis Department, e-mail: khalidtahir89@yahoo.com