УДК 517.925.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-392-403

МЕТОД МНОГОЛИСТНЫХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© С. В. Корнев, Н. В. Лой

В настоящей работе предлагается использовать метод многолистных направляющих функций при исследовании бифуркационной задачи для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; бифуркации периодических решений; многолистная направляющая функция; бифуркационный индекс.

1. Введение

Одним из наиболее эффективных и геометрически наглядных способов решения задачи о существовании периодических решений дифференциальных уравнений является метод направляющих функций, общие принципы которого сформулировали М.А. Красносельский и А.И. Перов (см., например, [1, 2]). За более, чем полувековую историю своего существования, метод был развит рядом исследователей в различных направлениях. Отметим в этой связи одно из самых значительных развитий этого подхода на случай дифференциальных уравнений, связанное с понятием многолистной направляющей функции Д.И. Рачинского (см. [3]).

В настоящее время достаточно активно развиваются различные методы исследования бифуркационного феномена в динамических системах, описываемых дифференциальными уравнениями и включениями (см., например, [4-11]).

В настоящей работе, предлагается использовать многолистную направляющую функцию для исследования задачи о бифуркации периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений. Заметим, что различные модификации метода многолистных векторных направляющих функций применялись ранее только в задаче о существовании периодических решений (см., например, [12, 13]).

2. Предварительные сведения

В дальнейшем используются известные понятия и терминология из анализа и теории многозначных отображений (мультиотображений) (см., например, [5, 14-16]). Напомним некоторые из них.

Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) и (Z, d_Z) — метрические пространства. Символами $P(Y)$ и $K(Y)$ обозначаются совокупности всех, соответственно, непустых и компактных подмножеств пространства Y. Если Y — нормированное пространство, то символом $Kv(Y)$ обозначается совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства Y.

О п р е д е л е н и е 1. Многозначное отображение (мультиотображение) $F\colon X \to P(Y)$ называется:

(*i*) *полунепрерывным сверху (пн. св.)*, если для любого открытого множества $V \subset Y$ множество
$$F_+^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \subset V\}$$
является открытым в X;

(ii) *вполне пн. св.*, если оно пн. св. и каждое ограниченное множество $U \subset X$ переводит в относительно компактное множество $F(U)$ пространства Y;

(iii) *компактным*, если множество

$$F(X) := \bigcup_{x \in X} F(x)$$

является относительно компактным в Y.

Множество $M \in K(Y)$ называется *асферичным*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каждое непрерывное отображение единичной сферы $\sigma \colon S^n \to O_\delta(M)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, может быть продолжено до непрерывного отображения шара $\widetilde{\sigma} \colon B^{n+1} \to O_\varepsilon(M)$, где $S^n = \{x \in \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$, $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| \leq 1\}$ и $O_\delta(M)$ $[O_\varepsilon(M)]$ обозначает δ-окрестность [соотв., ε-окрестность] множества M.

Множество $A \subset X$ называется *стягиваемым*, если существует непрерывное отображение (гомотопия) $h \colon A \times [0,1] \to A$ такое, что $h(x,0) = x$, $h(x,1) = x_0$ для всех $x \in A$. Пространство X называется *локально стягиваемым*, если оно локально стягиваемо в каждой своей точке.

Множество $A \subset X$ называется R_δ*-множеством*, если его можно представить в виде пересечения убывающей последовательности компактных, стягиваемых множеств, т. е. $A = \cap\{A_n : n = 1, 2, ...\}$.

Множество $A \subset X$ называется *ретрактом* пространства X, если существует такое непрерывное отображение (ретракция) $r \colon X \to A$, сужение которого на A является тождественным, т. е. $r(x) = x$ для всех $x \in A$. Множество $A \subset X$ называется *окрестностным ретрактом*, если существует ретракция $r \colon O(A) \to A$, где $O(A)$ – некоторая окрестность A.

Вложением пространства X в пространство Y называется такое отображение $h \colon X \to Y$, которое обладает свойствами:

1^0 $h(X) \subset Y$ – замкнутое множество;

2^0 $\hat{h} \colon X \to h(X)$ – гомеоморфизм.

Напомним, что пространство X называется *абсолютным ретрактом*, или AR*–пространством*, если для любого метрического пространства Y и любого вложения $h \colon X \to Y$ множество $h(X)$ является ретрактом пространства Y. Если же множество $h(X)$ является окрестностным ретрактом, то пространство X называется *абсолютным окрестностным ретрактом,* или ANR*–пространством.*

Отметим, что класс ANR–пространств достаточно широк. В частности, всякий конечный полиэдр является ANR–пространством.

Более того, конечномерный компакт является ANR–пространством тогда и только тогда, когда он локально стягиваем. В частности, каждое компактное многообразие является ANR–пространством и, кроме того, если X_0, X_1 – ANR–пространства и $X_0 \cap X_1$ – ANR–пространство, то объединение $X_0 \cup X_1$ также является ANR–пространством.

О п р е д е л е н и е 2. Пн. св. мультиотображение $G \colon X \to K(Y)$ называется $J-$ *мультиотображением*, или $G \in J(X,Y)$, если для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является асферичным.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть Y является ANR–пространством. Тогда пн. св. многозначное отображение $G \colon X \to K(Y)$ является $\mathcal{J}-$ отображением в каждом из следующих случаев:

для любого $x \in X$ множество $G(x)$ является

(а) выпуклым множеством;

(б) AR–пространством;

(в) стягиваемым множеством;

(г) R_δ–множеством.

В частности, всякое непрерывное однозначное отображение $\sigma \colon X \to Y$ является $\mathcal{J}-$ отображением.

О п р е д е л е н и е 3. Классом $CJ(X,Y)$ называется совокупность мультиотображений $F\colon X\to K(Y)$ вида $F=f\circ G$, где $G\in J(X,Z)$ и $f\colon Z\to Y$ – непрерывное отображение.

Пусть $U\subset X$ – открытое ограниченное множество, $F\colon \overline{U}\to K(X)$ – компактное $CJ-$ – мультиотображение такое, что $x\notin F(x)$ для всех $x\in\partial U$. Тогда определена *топологическая степень* $\deg(i-F,\overline{U})$ многозначного векторного поля, порожденного мультиотображением F (здесь i – отображение вложения). Эта топологическая характеристика обладает всеми основными свойствами классической топологической стпепени Брауэра (см., например, [5]).

Рассмотрим следующее включение:

$$x\in F(x,\mu), \tag{1}$$

где $F\colon X\times\mathbb{R}\to K(X)$ является CJ-мультиотображением, а $\mu\in\mathbb{R}$ – параметром.

Пусть справедливы следующие предположения:

$(F1)$ мультиотображение F является вполне пн. св. и $0\in F(0,\mu)$ для всех $\mu\in\mathbb{R}$;

$(F2)$ существует $\varepsilon_0>0$ такое, что для каждого μ, $0<|\mu|<\varepsilon_0$ найдется $\delta_\mu>0$ такое, что $x\notin F(x,\mu)$ для всех $x\in B_X(0,\delta_\mu)\setminus\{0\}$, где $B_X(0,\delta_\mu)$ обозначает замкнутый шар в X радиуса δ_μ с центром в нуле;

$(F3)$ бифуркационный индекс в точке $(0,0)$, определяемый равенством

$$Bi(F;(0,0))=\lim_{\mu\to 0^+}\deg(i-F,B_X(0,\delta_\mu))-\lim_{\mu\to 0^-}\deg(i-F,B_X(0,\delta_\mu)),$$

отличен от нуля.

Символом $\mathfrak{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (1), т. е.

$$\mathfrak{S}=\{(x,\mu)\in X\times\mathbb{R}\colon x\neq 0 \text{ и } x\in F(x,\mu)\}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия* $(F1)-(F3)$. *Тогда существует связное множество* $\mathcal{R}\subset\mathfrak{S}$ *такое, что* $(0,0)\in\overline{\mathcal{R}}$ *и либо* $\mathcal{R}$ *является неограниченным, либо* $\overline{\mathcal{R}}\ni(0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_*\neq 0$.

3. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение следующего вида:

$$x'(t)=f(t,x(t),\mu) \tag{2}$$

в предположении, что

$(f1)$ непрерывное отображение $f\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ является T-периодическим по первому аргументу $(T>0)$;

$(f2)$ существует $c>0$ и положительная функция $h\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ такие, что $h(0)=0$ и

$$|f(t,x,\mu)|\leq c\,h(|\mu|)\,|x|$$

для всех $(t,x,\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$;

$(f3)$ для каждого $\mu\in\mathbb{R}$ уравнение (2) имеет решение $x\colon[0,T]\to\mathbb{R}^n$ такое, что $x(0)=x(T)=0$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n (n>2)$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q – оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p=i-q$, где i – тождественный оператор. Ниже элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ обозначаются через ξ. Пусть φ, ρ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

Дифференциальное уравнение (2) эквивалентно следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = g(t,\xi,\varphi,\rho,\mu), \\ \frac{d\varphi}{dt} = h(t,\xi,\varphi,\rho,\mu), \\ \frac{d\rho}{dt} = w(t,\xi,\varphi,\rho,\mu), \end{cases} \tag{3}$$

где непрерывные функции g, h, w являются T-периодичными по первому аргументу.

Для $(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ символом Σ_z обозначим множество решений следующей задачи:

$$\begin{cases} x' = f(t,x,\mu), \\ x(0) = z. \end{cases}$$

Известно, что Σ_z является R_δ-множеством в пространстве $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ (см., например, [5, 15]). Определим мультиотображение $\Sigma\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to C([0,T];\mathbb{R}^n)$ как

$$\Sigma(z,\mu) = \Sigma_{(z,\mu)}.$$

Тогда Σ является J-мультиотображением (см., например, [5, 15]).

Определим мультиоператор $U_T\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to K(\mathbb{R}^n)$ сдвига по траекториям уравнения (2) следующим образом

$$U_T(z,\mu) = \big\{x(T)\colon x\in\Sigma(z,\mu)\big\}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) эквивалентно включению

$$z\in U_T(z,\mu). \tag{4}$$

Из условий $(f1)-(f2)$ следует, что U_T является CJ-мультиоператором (см., например, [5, 15]). Кроме того, $0\in U_T(0,\mu)$ для всех $\mu\in\mathbb{R}$. Символом $\mathcal{S}$ обозначим множество всех нетривиальных решений включения (4), т. е.

$$\mathcal{S} = \{(z,\mu)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\colon z\neq 0 \text{ и } z\in U_T(z,\mu)\}.$$

4. Основной результат

Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi,\rho)\colon \varphi\in(-\infty,\infty), \rho\in(0,\infty)\}.$$

На Π для каждого $\mu\in\mathbb{R}$ пусть $W:\Pi\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задает скалярную непрерывно дифференцируемую функцию $W(\cdot,\cdot,\mu)$, для которой

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}W(\varphi,\rho,\mu) > 0, \quad (\varphi,\rho)\in\Pi, \tag{5}$$

$$W(\varphi+2\pi,\rho,\mu) = W(\varphi,\rho,\mu)+2\pi, \quad (\varphi,\rho)\in\Pi. \tag{6}$$

Из (6) легко следует, что

$$\nabla W(\varphi+2\pi,\rho,\mu) = \nabla W(\varphi,\rho,\mu),$$

где $\nabla W(\varphi,\rho,\mu) = \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial \rho}\right)$.

Для $r_* > 0$ определим область $G(r_*) = \{z \in \mathbb{R}^n \colon |pz| < r_*,\ |qz| < r_*\}$.

Определение 4. Пара функций $\{V(\xi,\mu), W(\varphi,\rho,\mu)\}$, обладающих свойствами (5)–(6), называется *локальной многолистной направляющей функцией* задачи (4) относительно $(0,0)$, если для всех $\mu \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\frac{\partial V(0,\mu)}{\partial \xi} = 0$, и если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для каждого $\mu\colon 0 < |\mu| \le \varepsilon_0$ найдется $r_\mu > 0$ такое, что:

$(a1)$ для $0 < |pz| < r_\mu$ и $|qz| < r_\mu$:

$$\left\langle \frac{\partial V(\xi,\mu)}{\partial \xi}, g(t,\xi,\varphi,\rho,\mu) \right\rangle < 0;$$

$(a2)$ для $0 < |qz| < r_\mu$:

$$\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial \varphi} h(t,0,\varphi,\rho,\mu) + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial \rho} w(t,0,\varphi,\rho,\mu) < 0;$$

$(a3)$ функции $\alpha(t,\mu)$ и $\beta(t,\mu)$, определяемые равенствами

$$\alpha(t,\mu) = \sup_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz,\mu)}{\partial qz}, qf(t,z,\mu) \right\rangle,$$

$$\beta(t,\mu) = \inf_{z \in G(r_\mu)} \left\langle \frac{\partial W(qz,\mu)}{\partial qz}, qf(t,z,\mu) \right\rangle,$$

являются непрерывными;

$(a4)$ существует такое целое число N_μ, что

$$2\pi(N_\mu - 1) < \int_0^T \alpha(s,\mu)ds,\ \int_0^T \beta(s,\mu)ds < 2\pi N_\mu.$$

Из приведенного определения следует, что для каждого $\mu\colon 0 < |\mu| \le \varepsilon_0$ корректно определена топологическая степень $deg\left(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\right)$ (см., например, [2]). Обозначим

$$indV = \lim_{\mu\to 0^+} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\right) - \lim_{\mu\to 0^-} \deg\left(\frac{\partial V(\cdot,\mu)}{\partial \xi}, B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0,r_\mu)\right).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(f1)-(f3)$. *Предположим, что для уравнения* (2) *можно указать локальную многолистную направляющую функцию относительно* $(0,0)$ *такую, что* $indV \neq 0$. *Тогда существует связное множество* $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ *такое, что:*

(i) *каждой точке* $(z,\mu) \in \overline{\mathcal{C}}$ *соответствует решение* $x\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *уравнения* (2), *для которого* $x(0) = x(T) = z$;

(ii) $(0,0) \in \overline{\mathcal{C}}$ *и либо* $\mathcal{C}$ *неограничено, либо* $\overline{\mathcal{C}} \ni (0,\mu_*)$ *для некоторого* $\mu_* \neq 0$.

В частности, существует последовательность $\{x_n\}$ *решений уравнения* (2), $\{z_n\} \subset \mathcal{S}$, $x_n(0) = x_n(T) = z_n$, *такая, что* $\{x_n\}$ *неограничена или* $\{x_n\}$ *сходится к решению* x_* *уравнения* (2), *для которого* $x_*(0) = x_*(T) = 0$.

Доказательство. Очевидно, мультиоператор сдвига U_T удовлетворяет условию $(F1)$ теоремы 1. Покажем, что он удовлетворяет и условию $(F2)$. Для этой цели покажем,

что включение (4) имеет для каждого $\mu,\ 0<|\mu|\le\varepsilon_0$ только тривиальные решения на шаре $B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)$, где
$$\delta_\mu=\frac{1}{2e^{cTh(|\mu|)}}r_\mu.$$
Предположим противное, что существует нетривиальное решение $z\in B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)$. Тогда существует функция x такая, что
$$\begin{cases}x'=f(t,x,\mu) \ \text{ для } \ t\in[0,T],\\ x(0)=x(T)=z.\end{cases}$$
Из равенства
$$x(t)=x(0)+\int_0^t f(s,x(s),\mu)ds$$
следует, что
$$|x(t)|\le|z|+\int_0^t|f(s,x(s),\mu)|ds\le|z|+\int_0^t c\,h(|\mu|)\,|x(s)|ds.$$
Применяя лемму Гронуэлла, получаем
$$|x(t)|\le|z|e^{cTh(|\mu|)}\le\frac{1}{2}r_\mu<r_\mu.$$

Если найдется $\Omega\subset(0,T)$ такое, что
$$\xi(t)=px(t)=0 \quad \text{для} \quad t\in\Omega$$
и
$$\xi(t)\neq 0 \ \text{ для } \ t\in(0,T)\setminus\Omega,$$
то из определения 4 следует соотношение
$$\left\langle\frac{\partial V(\xi,\mu)}{\partial\xi},g(t,\xi,\varphi,\rho,\mu)\right\rangle<0$$
для всех $t\in(0,T)\setminus\Omega$. Следовательно,
$$\int_0^T\left\langle\frac{\partial V(\xi,\mu)}{\partial\xi},g(t,\xi,\varphi,\rho,\mu)\right\rangle dt<0.$$
С другой стороны,
$$\int_0^T\left\langle\frac{\partial V(\xi,\mu)}{\partial\xi},g(t,\xi,\varphi,\rho,\mu)\right\rangle dt=\int_0^T\left\langle\frac{\partial V(\xi,\mu)}{\partial\xi},\frac{d\xi}{dt}\right\rangle dt=$$
$$=V(\xi(T),\mu)-V(\xi(0),\mu)=0.$$
Получили противоречие.

Если $\xi(t)=0$ для всех $t\in(0,T)$, например, $x(t)=qx(t)\in\mathbb{R}^2$ для всех $t\in(0,T)$, то, из того, что $x\neq0$ следует, что найдется $\Omega\subset(0,T)$ такое, что $x(t)\neq0$ для всех $t\in[0,T]\setminus\Omega$ и $x(t)=0$ для $t\in\Omega$. Поэтому
$$\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi}h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu)+\frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho}w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu)<0$$

для $t\in[0,T]\setminus\Omega$.
Следовательно,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi} h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho} w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) \right\rangle dt < 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\varphi} h(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) + \frac{\partial W(\varphi,\rho,\mu)}{\partial\rho} w(t,0,\varphi(t),\rho(t),\mu) \right\rangle dt = \\ = W\big(\varphi(T),\rho(T),\mu\big) - W\big(\varphi(0),\rho(0),\mu\big) = 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, условие $(F2)$ так же выполняется.

Итак, топологическая степень $\deg\big(i-U_T(\cdot,\mu),B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)\big)$ существует. Для ее вычисления выберем $\widetilde{r}_\mu>0$ такое, что

$$G(\widetilde{r}_\mu)\subset B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu).$$

Так как включение (4) имеет только тривиальные решения на $B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)$, то

$$\deg\big(i-U_T(\cdot,\mu),B_{\mathbb{R}^n}(0,\delta_\mu)\big) = \deg\big(i-U_T(\cdot,\mu),G(\widetilde{r}_\mu)\big).$$

Рассмотрим мультиотображение

$$\Phi(t,z,\mu) = z - pU_t(z,\mu) - qU_T(z,\mu),\ t\in(0,T],\ z\in G(\widetilde{r}_\mu).$$

Так как $p\Phi(t,z,\mu)=p(z-U_t(z,\mu))$, $q\Phi(t,z,\mu)=q(z-U_T(z,\mu))$ и нет нетривиальных решений на $G(\widetilde{r}_\mu)$, то имеем

$$0\notin p\Phi(t,z,\mu),\quad t\in(0,T],\ z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu);$$
$$0\notin q\Phi(t,z,\mu),\quad t\in(0,T],\ z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu).$$

Поэтому

$$0\notin \Phi(t,z,\mu),\quad t\in(0,T],\ z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu).$$

Если $U_t(z,\mu)$ – траектория, выпущенная из точки z, то

$$\frac{d}{dt}U_t(z,\mu) = f(t,U_t(z,\mu)),$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}pU_t(z,\mu) = pf(t,U_t(z,\mu)).$$

Полагая здесь $t=0$, получим

$$\lim_{t\to+0}\frac{pU_t(z,\mu)-pz}{t} = pf(0,z,\mu).$$

Откуда следует, что поля $-pf(0,z,\mu)$ и $p(z-U_\varepsilon(z,\mu))$ при малых $\varepsilon>0$ направлены непротивоположно.

В силу $(a1)$

$$\langle\nabla V(pz,\mu),-pf(0,z,\mu)\rangle>0,\quad z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu),$$

где $\nabla V(pz,\mu)=\frac{\partial V(pz,\mu)}{\partial pz}$.

Так как

$$0\notin q(z-U_T(z,\mu)),\quad t\in(0,T],\ z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu),$$

то поля

$$-pf(0,z,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),$$
$$\nabla V(pz,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),$$

а также поля

$$-pf(0,z,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),$$
$$p(z-U_\varepsilon(z,\mu))+q(z-U_T(z,\mu))=\Phi(\varepsilon,z,\mu)$$

непротивоположно направлены при $z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu)$.

Поэтому

$$\deg(\nabla V(pz,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),G(\widetilde{r}_\mu))=$$
$$=\deg(-pf(0,z,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),G(\widetilde{r}_\mu))=\deg(\Phi(\varepsilon,z,\mu),G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Откуда

$$\deg(i-U_T(\cdot,\mu),G(\widetilde{r}_\mu))=\deg(\nabla V(pz,\mu)+q(z-U_T(z,\mu)),G(\widetilde{r}_\mu)). \qquad (7)$$

Из условия (5) вытекает, что уравнение

$$W(\varphi,\rho,\mu)=w$$

однозначно разрешимо относительно φ.

Определим функцию $\Psi(\lambda,z,\mu):[0,1]\times G(\widetilde{r}_\mu)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ равенствами

$$\varphi(\Psi(\lambda,z,\mu))=\theta((1-\lambda)\rho(qU_T(z,\mu)),\,W(\varphi(qU_T(z,\mu)),\rho(qU_T(z,\mu)),\mu)),$$
$$\rho(\Psi(\lambda,z,\mu))=(1-\lambda)\rho(qU_T(z,\mu)).$$

Полагая $\varphi=\varphi(qU_T(z,\mu))$, $\rho=\rho(qU_T(z,\mu))$ в тождестве $\theta(\rho,W(\varphi,\rho,\mu))\equiv\varphi$, получим

$$\theta(\rho(qU_T(z,\mu)),\,W(\varphi(qU_T(z,\mu)),\rho(qU_T(z,\mu)),\mu))=\varphi(qU_T(z,\mu))$$

или

$$\theta(\Psi(0,z,\mu))=\varphi(qU_T(z,\mu)).$$

Отсюда и из соотношений $\rho(\Psi(0,z,\mu))=\rho(qU_T(z,\mu))$, $\rho(\Psi(1,z,\mu))\equiv 0$ следуют равенства

$$\Psi(0,z,\mu)=qU_T(z,\mu),\quad \Psi(1,z,\mu)\equiv 0.$$

Таким образом, кривая $\Gamma_{z,\mu}(\lambda)=\Psi(\lambda,z,\mu)$, где $0\le\lambda\le 1$ а z,μ фиксированы, соединяет точки $\xi_0=qU_T(z,\mu)$ и $\xi_1=0$. Далее, так как $W(\theta(\rho,w),\rho,\mu)=w$, то

$$W(\varphi(\Psi(\lambda,z,\mu)),\rho(\Psi(\lambda,z,\mu)),\mu)=W(\varphi(qU_T(z,\mu)),\rho(qU_T(z,\mu)),\mu),$$

т. е. функция $W(\varphi,\rho,\mu)$ имеет постоянное значение на $\Gamma_{z,\mu}(\lambda)$.

Положим

$$\Phi_1(\lambda,z,\mu)=\nabla V(pz,\mu)+qz-\Psi(\lambda,z,\mu),\quad \lambda\in[0,1],\ z\in G(\widetilde{r}_\mu).$$

Непрерывная деформация $\Phi_1(\lambda,z,\mu)$ соединяет поля

$$\nabla V(pz,\mu)+q(z-U_T(z,\mu))\quad\text{и}\quad\nabla V(pz,\mu)+qz.$$

Покажем, что она невырождена на $\partial G(\widetilde{r}_\mu)$ и, более того,

$$0\notin q\Phi_1(\lambda,z,\mu),\quad \lambda\in[0,1],\ z\in\partial G(\widetilde{r}_\mu). \qquad (8)$$

Предположим противное: найдутся $\lambda_* \in [0,1]$, $z_* \in \partial G(\widetilde{r}_\mu)$ такие, что

$$0 \in q\Phi_1(\lambda_*, z_*, \mu), \quad 0 \in qz_* - q\Psi(\lambda_*, z_*, \mu).$$

Тогда

$$\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \varphi(qz_*) + 2\pi k, \quad \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)) = \rho(qz_*).$$

Из условия (6) вытекает равенство

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) + 2\pi k.$$

Но

$$W(\varphi(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \rho(\Psi(\lambda_*, z_*, \mu)), \mu) = W(\varphi(qU_T z_*), \rho(qU_T z_*), \mu)$$

и, следовательно,

$$W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) = 2\pi k. \tag{9}$$

Положим $\omega_*(t, \mu) = W(\varphi(qU_t(z_*, \mu)), \rho(qU_t(z_*, \mu)), \mu)$. Так как $z_* \in G(\widetilde{r}_\mu)$, то

$$U_t(z_*, \mu) \in G(r_\mu), \quad t \in (0, T].$$

Поэтому верны оценки

$$2\pi(N_\mu - 1) < \omega_*(T, \mu) - \omega_*(0, \mu) < 2\pi N_\mu.$$

Подставляя сюда равенства

$$\omega_*(0, \mu) = W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu),$$

$$\omega_*(T, \mu) = W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu),$$

получим

$$2\pi(N_\mu - 1) < W(\varphi(qU_T(z_*, \mu)), \rho(qU_T(z_*, \mu)), \mu) - W(\varphi(qz_*), \rho(qz_*), \mu) < 2\pi N_\mu,$$

что противоречит оценкам (9). Из соотношения (8) и

$$p\Phi_1(\lambda, z, \mu) = \nabla V(pz, \mu) \neq 0, \quad z \in G(\widetilde{r}_\mu),$$

следует, что $\Phi_1(\lambda, z, \mu)$ невырождена. Поэтому

$$\deg(\nabla V(pz, \mu) + q(z - U_T(z, \mu)), G(\widetilde{r}_\mu)) =$$

$$= \deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu))$$

и в силу (7)

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Отсюда, применяя теорему о произведении степеней и свойство нормализации топологической степени, получаем

$$\deg(\nabla V(pz, \mu) + qz, G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\widetilde{r}_\mu)) \cdot \deg(qz, G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\widetilde{r}_\mu)).$$

Таким образом, получаем

$$\deg(i - U_T(\cdot, \mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), G(\widetilde{r}_\mu)) = \deg(\nabla V(pz, \mu), B_{\mathbb{R}^{n-2}}(0, r_\mu)).$$

Теперь утверждение следует из теоремы 1 и того факта, что $ind\, V \neq 0$. Теорема доказана.

Авторы искренне благодарны профессору В.В. Обуховскому за полезные обсуждения затронутых в статье вопросов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти-периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. Москва, 1958. Т. 123. № 2. С. 235-238.

2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.

3. *Rachinskii D.I.* Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. Amsterdam, 1996. V. 26. № 3. P. 631–639.

4. *Kryszewski W.* Homotopy properties of set-valued mappings. Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.

5. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.

6. *Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S.* Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // Differ. Equ. Dyn. Syst. Berlin, 2012. V. 20. P. 285–300.

7. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems // Set-Valued Var. Anal. Berlin, 2013. V. 21. P. 247–269.

8. *Obukhovskii V., Liu Z. and Loi N.V.* Existence and global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities // Int. J. Bifurcation and Chaos. Munich, 2013. V. 23. P. 1350125.

9. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.

10. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Liu Z.* On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 127–142.

11. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 353–370.

12. *Корнев С.В.* О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Автоматика и телемеханика. Москва, 2003. № 3. С. 72–83.

13. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* О негладких многолистных направляющих функциях // Дифференциальные уравнения. Москва, 2003. Т. 39. № 11. С. 1497–1502.

14. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw Kluwer, 1991.

15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.

16. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е. М.: Либроком, 2011.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана за счет средств гранта РФФИ–Тайвань № 14-01-92004, РФФИ №№ 14-01-00468, 16-01-00386, а также РНФ № 14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете.

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Корнев Сергей Викторович, Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Лой Нгуен Ван, ПетроВьетнам университет, Ханой, Вьетнам, доктор физико-математических наук, декан факультета фундаментальных наук, e-mail: loinv14@yahoo.com

UDC 517.925.52
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-392-403

METHOD OF MULTIVALENT GUIDING FUNCTIONS IN THE BIFURCATION PROBLEM OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

© **S. V. Kornev, N. V. Loi**

In this paper we use the multivalent guiding functions method to study a bifurcation problem for differential equations.
Key words: differential equation; bifurcation of periodic solutions; multivalent guiding function; bifurcation index.

ACKNOWLEDGEMENTS: This research is supported by the joint Taiwan NSC - Russia RFBR grant 14-01-92004 and the RFBR grants 14-01-00468, 16-01-00386, as well as RSF grant 14-21-00066 (in Voronezh State University)

REFERENCES

1. *Krasnosel'skii M.A., Perov A.I.* On a certain principle of existence of bounded, periodic and almost periodic solutions of systems of ordinary differential equations // Dokl. Akad. Nauk SSSR. Moscow, 1958. V. 123. № 2. P. 235–238 (in Russian).
2. *Krasnosel'skii M.A.* The Operator of Translation Along the Trajectories of Differential Equations. Translations of Mathematical Monographs, V. 19. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
3. *Rachinskii D.I.* Multivalent guiding functions in forced oscillation problems // Nonlinear Anal. Theory, Methods & Appl. Amsterdam, 1996. V. 26. № 3. P. 631–639.
4. *Kryszewski W.* Homotopy properties of set-valued mappings. Torun: Univ. N. Copernicus Publishing, 1997.
5. *Górniewicz L.* Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. 2nd Ed. Berlin: Springer, 2006.
6. *Obukhovskii V., Loi N.V., Kornev S.* Existence and global bifurcation of solutions for a class of operator-differential inclusions // Differ. Equ. Dyn. Syst. Berlin, 2012. V. 20. P. 285–300.
7. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A bifurcation of solutions of nonlinear Fredholm inclusions involving CJ-multimaps with applications to feedback control systems // Set-Valued Var. Anal. Berlin, 2013. V. 21. P. 247–269.
8. *Obukhovskii V., Liu Z. and Loi N.V.* Existence and global bifurcation of periodic solutions to a class of differential variational inequalities // Int. J. Bifurcation and Chaos. Munich, 2013. V. 23. P. 1350125.
9. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N.V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. V. 2076. Berlin: Springer, 2013.
10. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Liu Z.* On an A-bifurcation theorem with application to a parametrized integro-differential system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 127–142.
11. *Obukhovskii V., Loi N.V. and Yao J.-C.* A multiparameter global bifurcation theorem with application to a feedback control system // Fixed Point Theory. Cluj-Napoca, 2015. V. 16. P. 353–370.
12. *Kornev S.V.* On the method of multivalent guiding functions to the periodic problem of differential inclusions // Autom. Remote Control. Moscow, 2003. V. 64. P. 409–419.
13. *Kornev S.V., Obukhovskii V.V.* On nonsmooth multivalent guiding functions // Differ. Equat. Moscow, 2003. V. 39. P. 1578–1584.
14. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. Dordrecht: PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw Kluwer, 1991.
15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 2001.
16. *Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V.* Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions. 2nd Ed. Moscow: Librokom, 2011.

Received 21 March 2016.

Kornev Sergei Viktorovich, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Docent, Department of Physics and Mathematics, e-mail: kornev_vrn@rambler.ru

Loi Nguen Van, PetroVietNam University, Quoc Oai - Ha Noi, Vietnamese, Doctor of Physics and Mathematics, Dean of the Fundamental Science Department, e-mail: loinv14@yahoo.com