ISSN 1810-0198. Вестник ТГУ, т. 21, вып. 2, 2016

УДК 514+531.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-386-391

ШАРНИРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© **М. Д. Ковалёв**

Поставлены вопросы из теории вещественных квадратичных отображений. Вопросы возникают при рассмотрении геометрических свойств шарнирно-рычажных конструкций и пока остаются открытыми.
Ключевые слова: шарнирно-рычажные конструкции; рычажное отображение; квадратичные отображения.

1. Введение

Сначала поставим основной вопрос на обыденном языке, а потом формализуем его математически. Мы ограничимся рассмотрением плоских конструкций. Эти конструкции состоят из прямолинейных стержней, соединенных между собой и с точками плоскости шарнирами, допускающими произвольное вращение стержней в плоскости. На рисунках стержни (рычаги) есть отрезки, закрепленные в плоскости шарниры — крестики, незакрепленные (свободные) шарниры — кружочки. Шарниры расположены лишь на концах рычагов, и на каждом конце рычага имеется шарнир. Мы допускаем пересечение рычагов и совпадение различных шарниров при движении конструкции. На рис. 1а) показана простейшая не допускающая непрерывного движения (неизгибаемая) конструкция в плоскости. На рис. 1б) показана конструкция, допускающая непрерывное движение. В теории механизмов она называется шарнирным четырехзвенником.

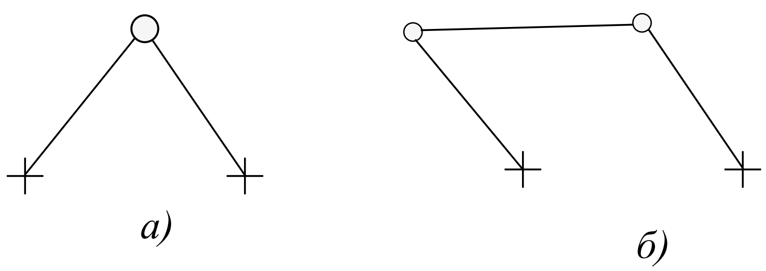

Рис. 1:

Рассмотрим конструкцию рис. 1а). Если ее свободный шарнир не лежит на прямой, соединяющей закрепленные, то ее очевидным образом можно собрать и при произвольной достаточно малой ошибке в длинах рычагов. Эту конструкцию можно назвать геометрически устойчивой. Однако она собирается не единственным способом (рис. 2а)). Вторая сборка показана пунктиром. Длины всех рычагов и точки закрепления при этом неизменны. Единственным образом эту конструкции можно собрать, лишь если все три ее шарнира лежат на одной прямой (рис. 2б)). Но в этом случае конструкция геометрически неустойчива. А именно, при сколь угодно малом уменьшении длины одного ее рычага мы уже не сможем собрать конструкцию!

Основной вопрос таков — существуют ли геометрически устойчивые конструкции, собираемые лишь единственным способом?

Ниже мы проведем математическую формализацию этого вопроса, выявим его связь со свойствами квадратичных отображений, затронем близкие вопросы.

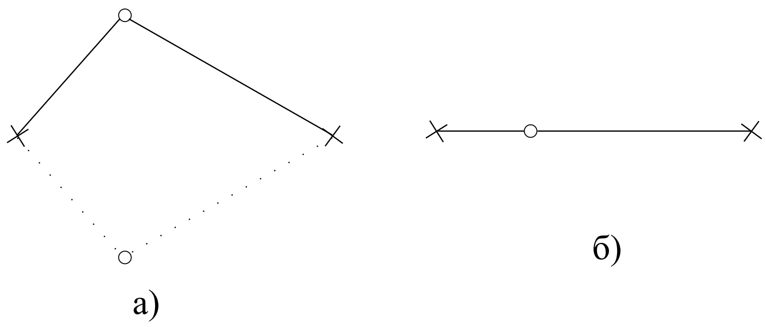

Рис. 2:

2. Шарнирные схемы и шарнирники.

Рассмотрим абстрактный связный граф $G_1(V_1,E_1)$ с непустым множеством вершин $\{v_1,\ldots,v_m\}=V_1$, отвечающих свободным шарнирам[1]. Его ребра $v_iv_j\in E_1, |E_1|=r_1$ отвечают рычагам шарнирного устройства, смежным лишь свободным шарнирам. И пусть связный граф $G(V,E)$ получается добавлением к $G_1(V_1,E_1)$ вершин $v_{m+1},\ldots,v_{m+n}$, составляющих непустое множество V_2, и некоторых ребер $v_iv_j,\ v_i\in V_2,\ v_j\in V_1$, составляющих также непустое множество E_2. Добавленные вершины отвечают закрепленным шарнирам, а ребра — исходящим из них рычагам. Отметим, что из каждой добавленной вершины исходит хотя бы одно ребро, и каждое из добавленных ребер соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2. Граф $G(V,E),\ V=V_1\cup V_2,\ E=E_1\cup E_2$, мы называем *шарнирной структурной схемой (ШСС)*. Вершины $v_i\in V_2$ будем называть закрепленными, а $v_j\in V_1$ — свободными. Далее мы также будем называть ребра шарнирной схемы — рычагами, а вершины — шарнирами.

Закрепленной шарнирной схемой (ЗШС) в плоскости назовем ШСС, каждой закрепленной вершине $v_i\in V_2$ которой сопоставлена точка $p_i\in R^2$. Теперь можно рассмотреть всевозможные проектирования абстрактного графа (ШСС) $G(V,E)$ в плоскость, сопоставляющие закрепленным вершинам уже выбранные точки, свободным вершинам $v_i\in V_1$ произвольные точки с радиус-векторами $p_i=(x_i,y_i)\in R^2$, а ребрам графа v_iv_j — отрезки p_ip_j прямых. Пусть задана ЗШС, тогда существует взаимнооднозначное соответствие между множеством всех проектирований графа $G(V,E)$ в плоскость и точками $p=(x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots,x_m,y_m)$ $2m$-мерного евклидова пространства параметров R^{2m}. Одно такое проектирование, целиком определяемое заданием пары (G,p), мы называем шарнирником. (В англоязычной литературе принят термин «framework».) Образ графа, получающийся при проектировании, можно мыслить как шарнирную конструкцию в плоскости.

Пусть $|E|=r$, тогда закрепленная шарнирная схема определяет отображение $F:R^{2m}\to$ $\to\mathcal{R}^r$, задающееся формулами $d_{ij}=(p_i-p_j)^2, v_iv_j\in E$, где в правой части стоят скалярные квадраты векторов. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным* (в англоязычной литературе — «rigidity mapping» или «edge function» [3], [4]). Оно играет ключевую роль в геометрии шарнирных механизмов. Точки пространства $\mathcal{R}^r$ мы называем *кинематическими шарнирными схемами (КШС)*. Образ $F(R^{2m})$ рычажного отображения назовем множеством C существенных КШС. Если $\dim C=r$, то рычажное отображение F и соответствующая ЗШС называются *правильными*. Правильная ЗШС называется *изостатической*, если $2m=r$.

Полный прообраз $F^{-1}(d)$ точки при рычажном отображении называют *конфигурационным пространством КШС* d. При таком подходе каждой компоненте связности полного прообраза $F^{-1}(d)$ отвечает определенное *шарнирное устройство*. Если компонента связно-

[1]Эта формализация изложена автором в работах [1], [2]

сти одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму.* В противном случае компонента связности состоит из бесконечного числа точек, и ей отвечает *шарнирный механизм.* Такую компоненту связности множества $F^{-1}(d)$ называют *конфигурационным пространством шарнирного механизма.* Точки, составляющие эту компоненту, — шарнирники — суть положения шарнирного механизма. Конфигурационное пространство шарнирного механизма является (линейно) связным, что отвечает возможности перевести непрерывно механизм из одного своего положения в любое другое.

Одной КШС может отвечать несколько шарнирных устройств. Машиноведы в этом случае говорят о различных сборках шарнирного механизма. При нашем подходе естественнее вместо различных сборок одного механизма говорить о различных устройствах с одной и той же КШС.

3. Геометрическая устойчивость

Кинематическая шарнирная схема d называется *геометрически устойчивой,* если $d \in \mathrm{Int} C$, в противном случае — геометрически неустойчивой. Далее, говоря о геометрической устойчивости, мы часто будем опускать слово «геометрическая». Для неустойчивой КШС возможно сколь угодно малое изменение квадратов длин рычагов, приводящее к несущественной КШС, т. е. к такой, которой не отвечает шарнирников. Причем, квадраты d_{ij} длин некоторых рычагов этой несущественной КШС могут оказаться отрицательными, и тогда она не будет лежать в ортанте $Q : d_{ij} \geq 0$.

Плоский шарнирник p *(геометрически) устойчив*, если для любой его шаровой ε-окрестности $O(p,\varepsilon) \subset R^{2m}$ найдется δ-окрестность $O(d,\delta) \subset \mathcal{R}^r$ точки $d = F(p)$ целиком лежащая в образе $F(O(p,\varepsilon))$. Если достаточно мало изменить длины рычагов устойчивого шарнирника, то шарнирник с измененными длинами рычагов можно будет собрать таким образом, что все его шарниры окажутся близки к соответствующим шарнирам исходного шарнирника. Неправильной ЗШС не отвечает устойчивых шарнирников. Этим обстоятельством и обусловливается практическая важность правильных ЗШС. Из неустойчивости КШС d, очевидно, следует неустойчивость любого шарнирника $p \in F^{-1}(d)$.

Кратностью КШС d называется количество точек в прообразе $F^{-1}(d)$; КШС однократна, если ей отвечает всего лишь одна шарнирная ферма. Вопрос, поставленный во введении, можно сформулировать так.

В о п р о с 1. Возможна ли однократная и устойчивая КШС?

Кинематической схеме рис. 2б) отвечает единственный шарнирник. Эта схема неустойчива, ибо при произвольном уменьшении длин рычагов ей уже не будет отвечать ни одного шарнирника. КШС рис. 2а) устойчива, но ей отвечает два зеркально симметричных шарнирника.

В о п р о с 2. Возможна ли устойчивая КШС d, для которой каждый шарнирник $p \in F^{-1}(d)$ неустойчив?

Эти вопросы пока остаются открытыми. Отметим, что КШС d, которой отвечает изостатическая ферма, с необходимостью устойчива. В одномерном случае множества правильных и изостатических ЗШС совпадают. ЗШС, составляющие эти множества, имеют всего лишь один закрепленный шарнир, а их графы не содержат циклов. В этом случае ответы на вопросы 1 и 2 отрицательны.

Ответы на вопросы 1, 2 неизвестны даже для распрямленной ЗШС, изображенной на рис. 3. *Распрямленной* мы называем ЗШС, все закрепленные шарниры которой лежат на одной прямой. Шарнирник называем *распрямленным*, если все его шарниры лежат на одной прямой.

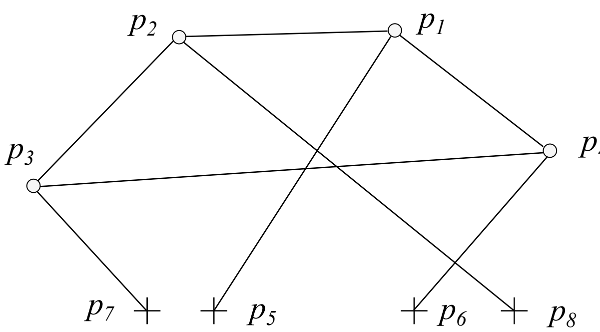

Рис. 3:

Отметим, что эта ЗШС обладает свойствами, не имеющими места для простейших плоских ЗШС. А именно, автором [5] было установлено существование для нее устойчивой распрямленной фермы, она изображена на рис. 4а). На рис. 4б) изображена нераспрямленная ферма с той же самой КШС. Также для этой ЗШС обнаружен неустойчивый распрямленный шарнирник, однако, устойчивый по «шевелению» длины каждого своего рычага в отдельности. Этот шарнирник показан на рис. 4в).

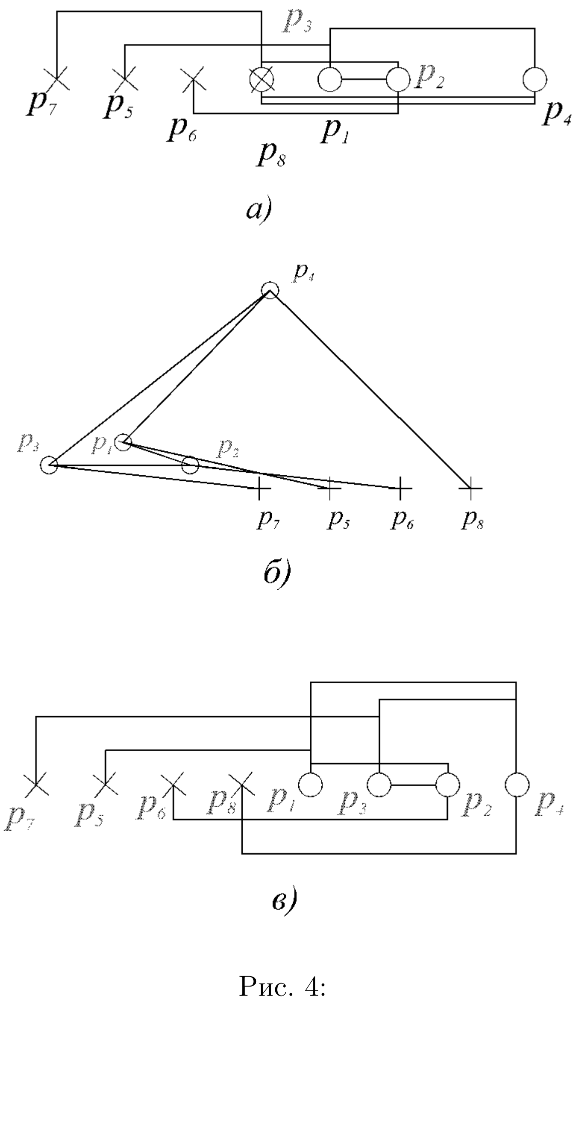

Рис. 4:

4. Квадратичные отображения.

Если рычажное отображение является неоднородным квадратичным отображением, т. е., задается по некоторым координатам неоднородными многочленами второй степени, то ниже пойдет речь об однородных квадратичных отображениях. Однородные квадратичные отображения задаются покоординатно квадратичными формами.

Очевидно, однократные КШС для распрямленной ЗШС могут отвечать лишь распрямленным шарнирникам. ЗШС рис. 3 является простейшей изостатической схемой, не содержащей трехвершинников. *Трехвершинником* мы называем либо треугольный цикл графа $G(V,E)$ с вершинами в свободных шарнирах, либо совокупность свободного шарнира и двух смежных ему закрепленных. Распрямленный шарнирник, содержащий трехвершинник, очевидно, геометрически неустойчив.

Попытка решить вопрос 1 для распрямленной схемы рис. 3 приводит к следующему. Пусть закрепленные шарниры имеют координаты: $p_5=(0,0)$, $p_6=(1,0)$, $p_7=(v_7,0)$, $p_8=(v_8,0)$. Рассмотрим распрямленный шарнирник p^0 с координатами свободных шарниров x_1, x_2, x_3, x_4. Имеем $\operatorname{Rank} dF(p^0)=4$, и касательное многообразие $T(p^0)=dF(p^0)(p-p^0)\subset\mathcal{R}^r$, $p\in R^{2m}$ отображения в этой точке также четырехмерно. Ядерное многообразие L касательного отображения в точке p^0, т. е., многообразие векторов $p-p^0$, для которых $dF(p^0)(p-p^0)=0$, состоит из векторов, имеющих нулевые абсциссы в R^2, и ординаты, принимающие произвольные вещественные значения: $(y_1,y_2,y_3,y_4)\in R^4$. Его образ задается следующим образом:

$$\mathcal{K}=[y_1^2,\, y_2^2,\, y_3^2,\, y_4^2,\, (y_1-y_2)^2,\, (y_1-y_4)^2,\, (y_2-y_3)^2,\, (y_3-y_4)^2].$$

Проекция этого конуса на четырехмерное координатное подпространство $\mathcal{R}^4$, дополнительное к $T(p^0)$, является конусом $\pi\mathcal{K}$ [5]:

$$\begin{aligned}\pi\mathcal{K}=\Bigg[&-\frac{(x_1-x_2)\,y_1^2}{x_1}+\frac{(x_1-x_2)\,y_2^2}{x_2-1}+(y_1-y_2)^2\,,\\ &-\frac{(x_1-x_4)\,y_1^2}{x_1}+\frac{(x_1-x_4)\,y_4^2}{x_4-v_8}+(y_1-y_4)^2,\\ &-\frac{(x_2-x_3)\,y_2^2}{x_2-1}+\frac{(x_2-x_3)\,y_3^2}{x_3-v_7}+(y_2-y_3)^2,\\ &-\frac{(x_3-x_4)\,y_3^2}{x_3-v_7}+\frac{(x_3-x_4)\,y_4^2}{x_4-v_8}+(y_3-y_4)^2\Bigg],\\ &(y_1,y_2,y_3,y_4)\in L.\end{aligned}\tag{1}$$

с вершиной в точке $d^0=F(p^0)$.

Топологическая степень рычажного отображения равна нулю [1]. Если допустить однократность точки $d^0=F(p^0)$, то выписанное выше отображение $R^4\to\mathcal{R}^4$ должно также иметь степень нуль, и в случае геометрической устойчивости КШС d^0 быть отображением на.

Возможно ли это? В размерностях от одного до трех не существует квадратичных (однородных) отображений на степени нуль. До последнего времени вопрос существования таких отображений в высших размерностях оставался открытым. Недавно А.В. Арутюновым и С.Е. Жуковским наконец были построены в размерностях начиная с пяти квадратичные отображения на, имеющие степень нуль. Но, интересующий нас, четырехмерный случай пока остается неисследованным!

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалев М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН. Серия: Математика. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.

2. *Ковалев М.Д.* Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ. Серия Машиностроение. 2001. № 4. С. 33–51.

3. *Asimov L., Roth B.* The rigidity of Graphs. II. // Journal of Mathematical analysis and applied. 1979. V. 68. I. 1. P. 171–190.

4. *Crapo H., Whiteley W.* Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction // Structural Topology. 1982. № 6. P. 43–82.

5. *Ковалев М.Д.* О распрямленных шарнирных конструкциях // Математический сборник. 2004. Т. 195. № 6. С. 71–98.

Поступила в редакцию 1 февраля 2016 г.

Ковалёв Михаил Дмитриевич, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики, e-mail: mkovalev@mtu-net.ru

UDC 514+531.8
DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-386-391

HINGED CONSTRUCTIONS AND QUADRATIC MAPPINGS

© M. D. Kovalev

Some questions on real quadratic mappings are formulated. These questions appear from the analysis of geometrical properties of hinged constructions, and are still open.
Key words: hinged constructions; rigidity mapping; quadratic mappings.

REFERENCES

1. *Kovalev M.D.* Geometricheskaya teoriya sharnirnyh ustrojstv // Izvestiya RAN. Seriya: Matematika. 1994. T. 58. № 1. S. 45–70.

2. *Kovalev M.D.* Voprosy geometrii sharnirnyh ustrojstv i skhem // Vestnik MGTU. Seriya Mashinostroenie. 2001. № 4. S. 33–51.

3. *Asimov L., Roth B.* The rigidity of Graphs. II. // Journal of Mathematical analysis and applied. 1979. V. 68. I. 1. P. 171–190.

4. *Crapo H., Whiteley W.* Statics of Frameworks and Motions of Panel Structures, a Projective Geometric Introduction // Structural Topology. 1982. № 6. P. 43–82.

5. *Kovalev M.D.* O raspryamlennyh sharnirnyh konstrukciyah // Matematicheskij sbornik. 2004. T. 195. № 6. S. 71–98.

Received 1 February 2016.

Kovalev Mikhail Dmitrievich, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Discrete Mathematics Department, e-mail: mkovalev@mtu-net.ru