

## О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Е. М. Якубовская

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина  
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33  
E-mail: yak.cat1306@gmail.com

Результаты об упорядоченно накрывающих многозначных отображениях применяются к исследованию функциональных включений в пространствах измеримых функций. Получены условия существования и оценки решений таких включений.

*Ключевые слова:* частично упорядоченные пространства; многозначные упорядоченно накрывающие отображения; антитонные возмущения упорядоченно накрывающих отображений; многозначный оператор Немыцкого; существование решений функциональных включений

Понятие упорядоченного накрывания для однозначных и многозначных отображений предложено в работах А.В. Артюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [1]–[4]. В этих работах исследована задача о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений. Кроме того, авторами показано, что известные результаты о точках совпадения отображений в метрических пространствах (в частности, утверждения работ [5], [6]) могут быть получены из соответствующих результатов в упорядоченных пространствах. В статье [7] получены утверждения об операторных уравнениях с упорядоченно накрывающими отображениями, на основании которых для неявного дифференциального уравнения доказан аналог теоремы Чаплыгина об оценке решения. В работе [8] предложены условия устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях. В данной работе результаты [8] применяются к исследованию функциональных включений в пространствах измеримых функций.

Приведем необходимые нам сведения об упорядоченных пространствах и их отображениях.

Частично упорядоченное пространство, т. е. множество  $X$  с заданным на нем порядком  $\preceq$  обозначаем через  $X = (X, \preceq)$ ; используем также обозначения  $x \succeq u$  в случае, если  $u \preceq x$ , и  $x \prec u$ , или  $u \succ x$ , если  $x \preceq u$ ,  $x \neq u$ . Для элементов  $u, v \in X$  и множества  $U \subset X$  будем обозначать

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \doteq \bigcup_{u \in U} \mathcal{O}_X(u).$$

Пусть заданы пространства  $(X, \preceq)$ ,  $(Y, \preceq)$ . Под многозначным отображением  $F : X \rightrightarrows Y$  понимаем отображение, сопоставляющее каждому  $x \in X$  непустое множество  $F(x) \subset Y$ . Многозначное отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  называют *антитонным на множестве*  $V \subset X$ , если

$$\forall x, x' \in V \quad x' \preceq x \quad \forall y \in F(x) \quad \exists y' \in F(x') \quad y' \succeq y.$$

Если это соотношение выполнено для множества  $V = X$ , то отображение называют *антитонным*, не упоминая множество  $X$ .

В [2], [4] определено следующее свойство многозначных отображений.

**О п р е д е л е н и е 1.** Говорим, что отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  *упорядоченно накрывает* (является *упорядоченно накрывающим*) множество  $W \subset Y$ , если для любого  $x \in X$  выполнено включение

$$\mathcal{O}_Y(F(x)) \cap W \subset F(\mathcal{O}_X(x)).$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство  $Y$ , называется *упорядоченно накрывающим*.

Из приведенного определения следует, что отображение  $F : X \rightrightarrows Y$  упорядоченно накрывает множество  $W$  тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\forall x \in X \quad \forall y \in F(x) \quad \forall y' \in W \quad y' \preceq y \Rightarrow \exists x' \in X \quad x' \preceq x, \quad y' \in F(x'). \quad (1)$$

В дальнейшем при выполнении условия (1) будем говорить, что  $F$  накрывает множество  $W$ , опуская слово «упорядоченно».

Будем обозначать:  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное вещественное пространство,  $M \doteq M([a, b], \mathbb{R}^n)$  – пространство измеримых функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Для множества  $B \subset \mathbb{R}^n$  определим подмножество  $M(B)$  пространства  $M$ , содержащее функции со значениями  $x(t) \in B$ , при почти всех  $t \in [a, b]$ . Пусть задано отображение  $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ , имеющее замкнутые значения и удовлетворяющее условиям Каратеодори, т.е. измеримое по первому аргументу, непрерывное по совокупности второго, третьего аргументов; задана измеримая функция  $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$  такая, что для любого измеримого (по Лебегу) множества  $E \subset [a, b]$  множество  $h^{-1}(E)$  измеримо и, если  $\mu(E) = 0$ , то  $\mu(h^{-1}(E)) = 0$  (здесь  $\mu$  – мера Лебега). Рассмотрим функциональное включение

$$0 \in g(t, x(h(t)), x(t)), \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Сформулируем условия существования его решения в классе существенно ограниченных функций  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Пусть  $r > 0$ ,  $B_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$ . Определим сужение  $g_r : [a, b] \times B_r \times B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  отображения  $g$ .

**Т е о р е м а 1.** Пусть для некоторой функции  $u_0 \in M(B_r)$  существует такая функция  $y_0 \in M$ , что  $y_0(t) \geq 0$ ,  $y_0(t) \in g_r(t, u_0(h(t)), u_0(t))$  почти всюду на  $[a, b]$ . Пусть при почти всех  $t \in [a, b]$  и любом  $x \in B_r$  отображение  $g_r(t, x, \cdot) : B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  упорядоченно накрывает  $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$ , отображение  $g_r(t, \cdot, x) : B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  – антитонное. Тогда существует решение  $x \in M(B_r)$ , включения (2), удовлетворяющее неравенству  $x(t) \leq u_0(t)$  при почти всех  $t \in [a, b]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 1 основано на результатах [8].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. №1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. №5. С. 475–478.
4. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. №6. С. 595–598.
5. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
6. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

7. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.

8. Жуковский Е.С., Плужникова Е.А., Якубовская Е.М. Об устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1969–1973.

Поступила в редакцию 30 мая 2017 г

Якубовская Екатерина Михайловна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: yak.cat1306@gmail.com.

UDC 517.275

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614

## ABOUT FUNCTIONAL INCLUSIONS IN ORDERED SPACES

© E. M. Yakubovskaya

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,  
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000  
E-mail: yak.cat1306@gmail.com

Results about orderly covering multi-valued mappings are applied to studying functional inclusions in spaces of measurable functions. Existence conditions and estimates of solutions for such inclusions are obtained.

*Key words:* partially ordered spaces; multi-valued orderly covering mappings; antitone disturbances of orderly covering mappings; multi-valued Nemytskii's operator; existence of solutions of functional inclusions

## REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkah sovpadeniya otobrazhenij v chastichnouporядochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 5. S. 475–478.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 6. S. 595–598.
5. Arutyunov A.V. Nakrivayushchie otobrazheniya v metricheskih prostranstvah i nepodvizhnie tochki // Doklady RAN. 2007. T. 416. № 2. S. 151–155.
6. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nyh uravneniy, ne razreshimym otnositel'no proizvodnoi // Differentsial'nye uravneniya. 2011. T. 47. № 11. S. 1523–1537.

7. *Zhukovskiy E.S.* Ob uporyadochenno nakryvajutich otobrazheniyah i neyavnyh differencial'nyh neravenstvah // *Differentsial'nie uravneniya*. 2016. T. 52. № 12. S. 1610–1627.

8. *Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A., Yakubovskaya E.M.* Ob ustojchivosti uporyadochennogo nakryvajutchiy mnogoznachnyh otobrazhenij pri antitonnyh vozmuscheniyah // *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Eststvennye i tekhnicheskie nauki*. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 6. S. 1969–1973.

Received 30 May 2017

Yakubovskaya Ekaterina Mikhailovna, Tambov State University named after G.R. Dergavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: yak.cat1306@gmail.com

**Информация для цитирования:**

*Якубовская Е.М.* О функциональных включениях в упорядоченных пространствах // *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 611-614. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614

*Yakubovskaya E.M.* OO funkcional'nih vklucheniya v uporyadochennyh prostranstvakh [About functional inclusions in ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 611-614. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614 (In Russian)