

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© Е. М. Якубовская

Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина
 392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
 E-mail: yak.cat1306@gmail.com

Результаты об упорядоченно накрывающих многозначных отображениях применяются к исследованию функциональных включений в пространствах измеримых функций. Получены условия существования и оценки решений таких включений.

Ключевые слова: частично упорядоченные пространства; многозначные упорядоченно накрывающие отображения; антитонные возмущения упорядоченно накрывающих отображений; многозначный оператор Немыцкого; существование решений функциональных включений

Понятие упорядоченного накрывания для однозначных и многозначных отображений предложено в работах А.В. Артюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского [1]–[4]. В этих работах исследована задача о точках совпадения упорядоченно накрывающего и изотонного отображений. Кроме того, авторами показано, что известные результаты о точках совпадения отображений в метрических пространствах (в частности, утверждения работ [5], [6]) могут быть получены из соответствующих результатов в упорядоченных пространствах. В статье [7] получены утверждения об операторных уравнениях с упорядоченно накрывающими отображениями, на основании которых для неявного дифференциального уравнения доказан аналог теоремы Чаплыгина об оценке решения. В работе [8] предложены условия устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях. В данной работе результаты [8] применяются к исследованию функциональных включений в пространствах измеримых функций.

Приведем необходимые нам сведения об упорядоченных пространствах и их отображениях.

Частично упорядоченное пространство, т. е. множество X с заданным на нем порядком \preceq обозначаем через $X = (X, \preceq)$; используем также обозначения $x \succeq u$ в случае, если $u \preceq x$, и $x \prec u$, или $u \succ x$, если $x \preceq u$, $x \neq u$. Для элементов $u, v \in X$ и множества $U \subset X$ будем обозначать

$$\mathcal{O}_X(u) \doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \quad \mathcal{O}_X(U) \doteq \bigcup_{u \in U} \mathcal{O}_X(u).$$

Пусть заданы пространства (X, \preceq) , (Y, \preceq) . Под многозначным отображением $F : X \rightrightarrows Y$ понимаем отображение, сопоставляющее каждому $x \in X$ непустое множество $F(x) \subset Y$. Многозначное отображение $F : X \rightrightarrows Y$ называют *антитонным на множестве* $V \subset X$, если

$$\forall x, x' \in V \quad x' \preceq x \quad \forall y \in F(x) \quad \exists y' \in F(x') \quad y' \succeq y.$$

Если это соотношение выполнено для множества $V = X$, то отображение называют *антитоннным*, не упоминая множество X .

В [2], [4] определено следующее свойство многозначных отображений.

Определение 1. Говорим, что отображение $F: X \rightrightarrows Y$ *упорядоченно накрывает* (является *упорядоченно накрывающим*) множество $W \subset Y$, если для любого $x \in X$ выполнено включение

$$\mathcal{O}_Y(F(x)) \cap W \subset F(\mathcal{O}_X(x)).$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y , называется *упорядоченно накрывающим*.

Из приведенного определения следует, что отображение $F: X \rightrightarrows Y$ упорядоченно накрывает множество W тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\forall x \in X \quad \forall y \in F(x) \quad \forall y' \in W \quad y' \preceq y \Rightarrow \exists x' \in X \quad x' \preceq x, \quad y' \in F(x'). \quad (1)$$

В дальнейшем при выполнении условия (1) будем говорить, что F накрывает множество W , опуская слово «упорядоченно».

Будем обозначать: \mathbb{R}^n – n -мерное вещественное пространство, $M \doteq M([a, b], \mathbb{R}^n)$ – пространство измеримых функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для множества $B \subset \mathbb{R}^n$ определим подмножество $M(B)$ пространства M , содержащее функции со значениями $x(t) \in B$, при почти всех $t \in [a, b]$. Пусть задано отображение $g: [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, имеющее замкнутые значения и удовлетворяющее условиям Каратеодори, т.е. измеримое по первому аргументу, непрерывное по совокупности второго, третьего аргументов; задана измеримая функция $h: [a, b] \rightarrow [a, b]$ такая, что для любого измеримого (по Лебегу) множества $E \subset [a, b]$ множество $h^{-1}(E)$ измеримо и, если $\mu(E) = 0$, то $\mu(h^{-1}(E)) = 0$ (здесь μ – мера Лебега). Рассмотрим функциональное включение

$$0 \in g(t, x(h(t)), x(t)), \quad t \in [a, b]. \quad (2)$$

Сформулируем условия существования его решения в классе существенно ограниченных функций $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Пусть $r > 0$, $B_r \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$. Определим сужение $g_r: [a, b] \times B_r \times B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ отображения g .

Теорема 1. Пусть для некоторой функции $u_0 \in M(B_r)$ существует такая функция $y_0 \in M$, что $y_0(t) \geq 0$, $y_0(t) \in g_r(t, u_0(h(t)), u_0(t))$ почти всюду на $[a, b]$. Пусть при почти всех $t \in [a, b]$ и любом $x \in B_r$ отображение $g_r(t, x, \cdot): B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ упорядоченно накрывает $\{0\} \subset \mathbb{R}^m$, отображение $g_r(t, \cdot, x): B_r \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ – антитонкое. Тогда существует решение $x \in M(B_r)$, включения (2), удовлетворяющее неравенству $x(t) \leq u_0(t)$ при почти всех $t \in [a, b]$.

Доказательство теоремы 1 основано на результатах [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179, № 1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
4. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
5. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады РАН. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
6. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

7. Жуковский Е.С. Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1610–1627.
8. Жуковский Е.С., Плуэсникова Е.А., Якубовская Е.М. Об устойчивости упорядоченного накрывания многозначных отображений при антитонных возмущениях// Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2016. Т. 21. Вып. 6. С. 1969–1973.

Поступила в редакцию 30 мая 2017 г

Якубовская Екатерина Михайловна, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, аспирант, кафедра функционального анализа, e-mail: yak.cat1306@gmail.com.

UDC 517.275

DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614

ABOUT FUNCTIONAL INCLUSIONS IN ORDERED SPACES

© E. M. Yakubovskaya

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsionalnaya st., Tambov, Russian Federation, 392000
E-mail: yak.cat1306@gmail.com

Results about orderly covering multi-valued mappings are applied to studying functional inclusions in spaces of measurable functions. Existence conditions and estimates of solutions for such inclusions are obtained.

Key words: partially ordered spaces; multi-valued orderly covering mappings; antitone disturbances of orderly covering mappings; multi-valued Nemytskii's operator; existence of solutions of functional inclusions

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. №1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2016. V. 201. P. 330–343.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkah sovpadeniya otobrazhenij v chasticnouporyadochenykh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. Т. 453. №5. S. 475–478.
4. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Toчки sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazhenij v chasticchno uporyadochenykh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. Т. 453. №6. S. 595–598.
5. Arutyunov A.V. Nakrivayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvah i nepodvizhnje tochki // Doklady RAN. 2007. Т. 416. № 2. S. 151–155.
6. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O korrektnosti differentsial'nyh uravneniy, ne razreshimym otnositel'no proizvodnoi // Differentsial'nie uravneniya. 2011. Т. 47. № 11. S. 1523–1537.

7. Zhukovskiy E.S. Ob uporyadochenno nakryvajutchih otobrazheniyah i neyavnyh differencial'nyh neravenstvah // Differentsial'nie uravneniya. 2016. T. 52. № 12. S. 1610–1627.
8. Zhukovskiy E.S., Pluzhnikova E.A., Yakubovskaya E.M. Ob ustojchivosti uporyadochennogo nakryvajutchiy mnogozhachnyh otobrazhenij pri antitonnyh vozmuscheniyah// Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Eststvennye i tekhnicheskie nauki. Tambov, 2016. T. 21. Vyp. 6. S. 1969–1973.

Received 30 May 2017

Yakubovskaya Ekaterina Mikhailovna, Tambov State University named after G.R. Dergavin, Tambov, the Russian Federation, Post-graduate student, Functional Analysis Department, e-mail: yak.cat1306@gmail.com

Информация для цитирования:

Якубовская Е.М. О функциональных включениях в упорядоченных пространствах // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2017. Т. 22. Вып. 3. С. 611-614. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614

Yakubovskaya E.M. OO funkcional'nih vklucheniyah v uporyadochennyh prostranstvah [About functional inclusions in ordered spaces]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2017, vol. 22, no. 3, pp. 611-614. DOI: 10.20310/1810-0198-2017-22-3-611-614
(In Russian)