ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 151 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304

УДК 517.9

Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством

Михаил Иосифович СУМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассматривается регуляризация принципа Лагранжа (ПЛ) и теоремы Куна–Таккера (ТКТ) в недифференциальной форме в нелинейной (невыпуклой) задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением-равенством. Существование решения задачи априори не предполагается. Ограничение-равенство содержит аддитивно входящий в него параметр, что обеспечивает возможность применения для исследования задачи «нелинейного варианта» метода возмущений. Основное предназначение регуляризованных ПЛ и ТКТ — устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП) в рассматриваемой задаче. Их можно трактовать как ОМП-образующие (регуляризирующие) операторы, ставящие в соответствие каждому набору исходных данных задачи субминималь (минималь) ее отвечающего этому набору регулярного модифицированного функционала Лагранжа (МФЛ), двойственная переменная в котором генерируется в соответствии с процедурой стабилизации по Тихонову двойственной задачи. Конструкция МФЛ полностью определяется видом «нелинейных» субдифференциалов (проксимальный субградиент, субдифференциал Фреше) полунепрерывной снизу функции значений как функции параметра задачи. Регуляризованные ПЛ и ТКТ «преодолевают» свойства некорректности классических аналогов, составляя тем самым теоретическую основу для создания устойчивых методов решения нелинейных задач оптимального управления. В частном случае, когда задача регулярна в смысле существования в ней обобщенного вектора Куна–Таккера, а ее исходные данные аффинным образом зависят от управления, предельный переход в соотношениях регуляризованной ТКТ ведет к условиям оптимальности в форме соответствующих недифференциальной ТКТ и принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: нелинейное оптимальное управление, поточечное фазовое ограничение-равенство, обобщенная минимизирующая последовательность, метод возмущений, субдифференциалы нелинейного анализа, регуляризация, двойственность, принцип Лагранжа

Благодарности: Результаты, представленные в разделах 1–4, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/); результаты, представленные в разделе 5, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области (проект № 2-ФП-2023).

Для цитирования: *Сумин М.И.* Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейной задаче оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 275–304. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304

Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in a nonlinear optimal control problem with pointwise state equality-constraint

Mikhail I. SUMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The regularization of the Lagrange principle (LP) and the Kuhn–Tucker theorem (KTT) in a non-differential form is considered in a nonlinear (non-convex) optimal control problem for a system of ordinary differential equations with a pointwise state equality constraint. The existence of a solution to the problem is not assumed a priori. The equality constraint contains an additive parameter, which makes it possible to use the "nonlinear version" of the perturbation method to study the problem. The main purpose of the regularized LP and KTT is to stably generate generalized minimizing sequences (GMS) in the problem under consideration. They can be interpreted as GMS-forming (regularizing) operators that associate with each set of initial data of the problem a subminimal (minimal) of its regular augmented Lagrangian (AL) functional corresponding to this set, the dual variable in which is generated in accordance with the Tikhonov stabilization procedure of the dual problem. The construction of the AL is completely determined by the form of the "nonlinear" subdifferentials (proximal subgradient, Frechet subdifferential) of the lower semicontinuous function of values as a function of the problem parameter. Regularized LP and KTT "overcome" the properties of ill-posedness of classical analogs, thus giving a theoretical basis for creating stable methods for solving nonlinear optimal control problems. In the particular case when the problem is regular in the sense of the existence of a generalized Kuhn-Tucker vector in it, and its initial data depend affinely on the control, the limit transition in the relations of the regularized KTT leads to optimality conditions in the form of the corresponding non-differential KTT and Pontryagin's maximum principle.

Keywords: nonlinear optimal control, pointwise state equality constraint, generalized minimizing sequence, perturbation method, subdifferentials of nonlinear analysis, regularization, duality, Lagrange principle

Acknowledgements: The results of Introduction and Sections 1-4 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). The results of Section 5 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region (project no. 2-ФП-2023).

Mathematics Subject Classification: 49K15 47A52 49N15 90C46.

For citation: Sumin M.I. Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in a nonlinear optimal control problem with pointwise state equality-constraint. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 275–304. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-275-304

Введение

С формальной точки зрения «математическая природа» задач на экстремум при наличии ограничений и, в частности, задач оптимального управления, такова, что, в целом, всю их совокупность мы можем рассматривать как типичный класс некорректных задач [1]. Различные примеры задач на условный экстремум, в которых нарушается хотя бы одно из трех условий корректности по Адамару [2], хорошо известны [1, 3]. Вместе с тем, на каждого конкретного представителя этого важного класса математических задач, в зависимости от содержательного смысла задачи и точки зрения исследователя, с «равным успехом», можно одновременно смотреть с двух существенно различных позиций.

При первом подходе, который можно считать традиционным и привычным для *теории экстремальных задач* [4,5], исходные данные задач на экстремум с ограничениями (функции, функционалы, операторы, участвующие в задании критерия качества, ограничений типа равенства и неравенства и т. п.) трактуются как «жестко» заданные (фиксированные) математические «объекты». Такой подход лежит в основе этой теории, ядро которой составляют различные результаты, связанные с правилом множителей Лагранжа — принципом Лагранжа (ПЛ), его регулярным вариантом — теоремой Куна–Таккера (ТКТ) и принципом максимума Понтрягина (ПМП) [4, 5].

Однако, с другой стороны, совершенно естественным является и то, что в задачах на условный экстремум «особый упор» делается на связь оптимизационной теории с проблемами ее приложений. В отличие от первого, такой подход в *теории условной оптимизации* допускает, что исходные данные экстремальной задачи могут содержать погрешности [1]. Более того, требование точного знания исходных данных при постановке конкретных задач условной оптимизации, возникающих в современных естественнонаучных приложениях, часто противоречит физической сути этих задач. Это объясняется тем, что исходные данные многих подобных задач связаны с результатами того или иного физического эксперимента, проведение которого сопряжено с неизбежными погрешностями [3, 6, 7].

При выводе необходимых (и достаточных) условий оптимальности в теории экстремальных задач мы находимся в рамках первого подхода и не задумываемся о том корректна или нет данная экстремальная задача, ибо при получении условий оптимальности приходится опираться на иные факты [4, 5]. В то же время, в рамках второго подхода к задачам условной оптимизации возникает серьезная теоретическая проблема, связанная с естественным в этом случае желанием ответить на следующий вопрос. Как увязать обязательное требование точного задания исходных данных при получении классических условий оптимальности (КУО) с естественным желанием использовать последние и при решении задач условной оптимизации в отсутствие этого требования? Отвечая на него, мы неизбежно приходим к проблеме регуляризации задач условной оптимизации и, в частности, регуляризации КУО. Последнее связано с хорошо известными проблемами некорректности как самих задач условной оптимизации [1], в целом, так и соответствующих им КУО [8–10]. Одновременно следует учитывать и то, что установление факта корректности или некорректности экстремальной задачи «далеко не всегда является легким делом».

Можно утверждать, что КУО имеют самое непосредственное отношение сразу к двум важным направлениям математической теории. С одной стороны, они являются основой всей теории экстремальных задач [4, 5], с другой же, составляют базовый инструментарий теории некорректных задач [3, 7]. Тем самым мы оказываемся в естественной ситуации возможного разумного сопряжения привычных методов теории экстремальных задач с методами, развитыми в рамках теории некорректных задач. В настоящей статье автор продолжает линию работ, в которых возможность указанного сопряжения реализуется в форме регуляризации КУО [8–10]. С точки зрения теории некорректных задач КУО в регуляризованном виде можно трактовать как устойчивые к ошибкам исходных данных, т. е. регуляризирующие, алгоритмы для решения большого числа некорректных задач на условный экстремум [8–10], что лишний раз говорит в пользу универсальности тех идей, что лежат в основе теории ПЛ.

Хорошо известно, что в теории оптимального управления получение КУО во многих задачах сопряжено с преодолением трудностей существенного характера. К таким, по традиции считающимися сложными, относятся задачи с операторными (т. е. задаваемыми операторами с бесконечномерными образами) ограничениями. Традиционно к подобным сложным задачам с операторными ограничениями, в первую очередь, относятся задачи с поточечными фазовыми ограничениями, со смешанными ограничениями типа равенства и неравенства [4, 11, 12]. Рассматриваемая ниже в статье нелинейная задача оптимального управления с поточечным фазовым ограничением-равенством является одной из таких сложных задач. Получение условий оптимальности в задачах с таким ограничением, относящимся к классу так называемых нерегулярных смешанных ограничений (см., например, [11, 12]), как справедливо замечено в [11, с. 92], чрезвычайно сложно, см. также по этому поводу [12, гл. 4, с. 125]. В то же время, специфика рассматриваемой задачи такова, что факт ее некорректности устанавливается достаточно легко. Два последних обстоятельства наводят на мысль, что при исследовании этой задачи целесообразно одновременно опереться как на традиционные для теории экстремальных задач методы, так и, принимая в расчет ее некорректность, использовать методы теории регуляризации.

Данную статью следует рассматривать как непосредственное продолжение статей [13, 14], в которых на основе «нелинейной версии» метода возмущений (о методе возмущений в задаче выпуклого программирования см. в [5, п. 3.3.2]) рассматривалась регуляризация ПЛ в задаче нелинейного программирования с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве. В отличие от [13, 14], ниже в статье, непосредственно опирающейся на результаты [14] (см. также [13]), рассматривается регуляризация КУО в нелинейной задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида с операторным ограничением-равенством в форме поточечного фазового ограничения-равенства. Разрешимость рассматриваемой ниже задачи априори не предполагается. Как и в [13, 14], она является параметрической, а ее параметр аддитивно входит в ограничение-равенство.

Остановим внимание на базовых моментах статьи. Прежде всего, отметим, что в ее основе лежит, как и во всей теории некорректных задач, секвенциальный подход. В соответствии с ним основным (искомым) объектом в статье является не оптимальный элемент, как это обычно бывает в привычной теории оптимального управления [4, 5], а обобщенная минимизирующая последовательность (ОМП) допустимых управлений (см. раздел 1.3). Понятие ОМП порождает центральное для всей статьи понятие ОМП-образующего оператора (см. определение 1.1) [14, 15] и совпадает с хорошо известным в оптимальном управлении понятием минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [16, гл. III]. В математическом программировании это понятие выступает под названием обобщенного оптимального плана [17]. Существенным здесь является то, что ассоциированная с понятием ОМП (см. раздел 1.3) функция значений $\beta : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ рассматриваемой параметрической задачи как функция параметра, принадлежащего гильбертовому пространству H образов задающего ограничение-равенство оператора (в качестве H в статье используется пространство суммируемых с квадратом функций (см. раздел 1.3)) и аддитивно входящего в ограничение, является полунепрерывной снизу (см. лемму 1.1). Это открывает возможность применимости при исследовании задачи так называемого метода возмущений, а именно, его «нелинейной» версии, опирающейся на известные конструкции негладкого (нелинейного) анализа [18–20], и объясняет одновременно наличие соответствующего словосочетания в названии статьи. В качестве указанных известных конструкций негладкого анализа ниже используются проксимальный субградиент и субдифференциал Фреше полунепрерывной снизу функции β (см. раздел 2.1), важнейшим характеристическим свойством которых является их непустота в точках плотного в $\operatorname{dom}\beta$ множества [18–20] (см. раздел 2.2). Здесь же отметим, что принадлежность функции β к указанному функциональному классу полунепрерывных снизу функций является характеристическим свойством функций значений, ассоциированных именно с понятием ОМП.

Далее, проксимальный субградиент и субдифференциал Фреше функции значений β естественным образом порождают соответствующие модифицированные функции Лагранжа (МФЛ) в рассматриваемой задаче (см. раздел 2.3), приводят к определению модифицированной двойственной задачи (см. раздел 2.4), а также и к центральному для статьи определению соответствующего обобщенного вектора Куна–Таккера (см. раздел 2.5). Все эти конструкции и «переходы» позволяют, в конечном итоге, организовать процедуру регуляризации КУО в рассматриваемой задаче. В зависимости от «субдифференциального устройства» при конкретном значении параметра $p \in H$ функция значений β может либо обладать обобщенным вектором Куна–Таккера (случай **А)**), либо такого вектора у нее нет (случай **Б)**) (см. раздел 2.5). В обоих случаях при условии лишь конечности значения β в точке p (т. е., когда задача имеет смысл) в задаче устойчиво конструируются ОМП из субэкстремалей (экстремалей) регулярной МФЛ (см. раздел 3). При этом в случае **А)** двойственная переменная генерируется в соответствии с процедурой стабилизации по Тихонову [1,3] двойственной задачи и сходится к ее минимальному по норме решению. В случае же **Б)** устойчиво генерируемая из субэкстремалей ОМП является неограниченной, а сама эта процедура приобретает черты метода штрафов. Заметим, что экстремали МФЛ в обоих случаях берутся, когда соответствующий экстремум достигается.

Как результат, указанное конструирование приводит в конечном итоге в разделе 4 в случае **А)** к формулировке регуляризованной ТКТ (теорема 4.1) в недифференциальной форме, а учет одновременно обоих случаев порождает и аналогичный регуляризованный ПЛ (теорема 4.2) в задаче с поточечным фазовым ограничением-равенством. Основное предназначение обеих теорем — устойчивое генерирование ОМП в рассматриваемой нелинейной задаче. Их можно трактовать так же как ОМП-образующие (регуляризирующие) операторы (см. определение 1.4), ставящие в соответствие каждому набору исходных данных задачи субминималь (минималь) ее соответствующего этому набору регулярной МФЛ, двойственная переменная в которой генерируется в соответствии с указанными в этих теоремах процедурами в двойственных задачах.

Описанная выше процедура, связанная с конструированием ОМП в нелинейной задаче с поточечным ограничением-равенством, подобна той, которая реализуется в аналогичных, но выпуклых задачах [8–10]. Однако, в отличие от выпуклых задач, для которых конструируемые ОМП в том или ином смысле (слабо, сильно) сходятся к их оптимальным элементам, в случае нелинейной задачи в общей ситуации мы не можем говорить о сходимости конструируемых ОМП к оптимальным элементам, так как и самих оптимальных элементов может в таких задачах не существовать. В то же время, указанное устойчивое конструирование ОМП оказывается возможным в любой задаче, для которой ее обобщенное значение при выбранном фиксированном значении параметра конечно. При этом функция значений в этой фиксированной точке может и не быть субдифференцируемой в смысле негладкого анализа.

В заключительной части статьи (раздел 5) показывается, как регуляризованная ТКТ может быть использована для получения «обычных» условий оптимальности в рассматриваемой задаче оптимального управления. Это реализуется в случае «аффинной» зависимости интегранта функционала качества и правой части управляемой системы от управляющей переменной, которая гарантирует как существование оптимального элемента в исходной точной задаче, так и существование экстремалей в соответствующей задаче минимизации МФЛ. В этом частном случае в результате предельного перехода в соотношениях регуляризованной ТКТ (при стремлении к бесконечности номеров элементов ОМП теоремы 4.1) сначала доказывается соответствующая ТКТ (теорема 5.1), а затем, как следствие, и соответствующий ПМП (теорема 5.2), представляющие собою КУО в исходной нелинейной регулярной задаче оптимального управления.

Заметим, наконец, что регуляризация ПЛ в регулярном случае была рассмотрена ранее применительно к нелинейной задаче оптимального управления в работе [21]. В свою очередь, в [22] аналогичные вопросы были рассмотрены для регулярной нелинейной задачи условной оптимизации с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств.

Ниже используются следующие стандартные обозначения для функциональных пространств и соответствующих норм элементов: $L_{p,k}(Y)$ — пространство k-мерных суммируемых на множестве Y с p-й степенью функций с нормой $\|\cdot\|_{p,k,Y}$, $p \in [1,+\infty]$; $C_k(Y)$ — пространство k-мерных на множестве Y функций с нормой $\|\cdot\|^{(0)}_Y$. Кроме того, в статье компактность множества понимается в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, (см., например, [23, раздел 19.3], в подобной ситуации часто используется также термин предкомпактность), $\operatorname{dom} f \equiv \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ и $\operatorname{epi} f \equiv \{(x,\alpha) \in X \times \mathbb{R}^1 : f(x) \le \alpha\}$ — эффективное множество и надграфик функции $f : X \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$, $\operatorname{cl} X$ и $\operatorname{conv} X$ — замыкание и выпуклая оболочка множества X, соответственно.

1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления, вспомогательные конструкции и утверждения

Начинаем с постановки нелинейной задачи оптимального управления с операторным ограничением в форме поточечного фазового ограничения-равенства.

1.1. Постановка нелинейной задачи оптимального управления. Рассмотрим параметрическую задачу оптимального управления с фиксированным временем $T > 0$ и с аддитивно зависящим от параметра поточечным фазовым ограничением-равенством

$$(OC_p) \qquad I_0(u) \equiv \int_0^T F(t, x[u](t), u(t))dt + G(x[u](T)) \to \inf, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0,T),$$

$$I(u)(t) \equiv H(t, x[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0,T],$$

где $x[u](t)$, $t \in [0,T]$, — абсолютно-непрерывное решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u(t)), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже: $p \in L_{2,1}(X)$ — параметр, $\mathcal{U} \equiv \{u \in L_{2,m}(0,T) : u(t) \in U$ при п. в. $t \in (0,T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченное замкнутое множество, $X \subset [0,T]$, $X = \mathrm{cl} \overset{\circ}{X}$ — замкнутое множество с непустой внутренностью (без изолированных точек).

Будем считать, что функции $F : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $H : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $\varphi : [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ измеримы в смысле Лебега и удовлетворяют условию Липшица по $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ с независящей от t постоянной $L_M > 0$ на множестве $S^n_M \times S^m_M$ при п. в. $t \in [0,T]$, $S^l_M \equiv \{y \in \mathbb{R}^l : |y| < M\}$. Будем считать также, что для любого управления $u \in \mathcal{U}$ существует глобальное абсолютно-непрерывное решение $x[u](t)$, $0 \le t \le T$ системы (1.1), причем все эти решения равномерно по $u \in \mathcal{U}$ ограничены в $C_n[0,T]$. Как известно, такая ограниченность семейства $\{x[u] : u \in \mathcal{U}\}$ реализуется, если, например, φ имеет линейный порядок роста по x.

З а м е ч а н и е 1.1. Задача оптимального управления (OC_p) формально записывается в компактной форме задачи нелинейного программирования $I_0(u) \to \inf$, $I(u) = p$, $u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0,T)$. Если мы определяем, в какое пространство вкладываются элементы $I(u)$, то получаем «полноценную» задачу математического (нелинейного) программирования. В качестве пространства образов оператора $I(\cdot)$ здесь можно формально рассматривать разные конкретные пространства: $C_1(X)$, $L_{\infty,1}(X)$, $L_{q,1}(X)$, $1 \le q < \infty$ и еще некоторые другие. То, какое из них «более подходящее», зависит от свойств исходных данных задачи (OC_p) и «целей регуляризации» КУО. Фазовое ограничение-равенство $I(u) \equiv I(u)(\cdot) \equiv H(\cdot, x[u](\cdot)) = p(\cdot)$ понимается как равенство почти всюду в X: $H(t, x[u](t)) = p(t)$ при п. в. $t \in X$. Ниже мы будем смотреть на это равенство как на равенство в $L_{2,1}(X)$. При этом в качестве «важного бонуса» мы получаем возможность оперировать с «хорошими» субдифференциальными в смысле негладкого (нелинейного) анализа свойствами функции значений параметрической задачи (OC_p) как функции в гильбертовом пространстве $L_{2,1}(X)$. Возможные неустойчивость и невыполнимость КУО [8–10] в подобных ситуациях характеризуют те сложности, которые возникают при анализе задачи (OC_p).

З а м е ч а н и е 1.2. С одной стороны, задача (OC_p) по своей постановке является типичной задачей оптимального управления с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством. Наличие операторного ограничения-равенства, в данном случае, поточечного фазового ограничения-равенства, составляет, как уже было сказано выше, «главную сложность» задачи (OC_p) как задачи оптимального управления. С другой же стороны, на задачу (OC_p) естественно смотреть и как на типичного представителя теории некорректных задач. В частности, если, например, взять $I_0(u) = \int_0^T |u(t)|^2 dt$, то это обычная для теории некорректных задач ситуация, когда идет речь о поиске минимального по норме решения операторного уравнения $I(u) = p$, $u \in \mathcal{U}$ с оператором $I : \mathcal{U} \to L_{2,1}(X)$, имеющем при сделанных выше предположениях об исходных данных задачи (OC_p) компактный в $L_{2,1}(X)$ образ. Такой двоякий взгляд на постановку задачи (OC_p) объясняет, почему для ее анализа и решения мы опираемся ниже как на привычные для теории оптимального управления методы, так и на методы, которые принято применять в теории некорректных задач.

З а м е ч а н и е 1.3. Ниже нас будет интересовать также частный случай задачи (OC_p), в котором: $F(t,x,u) \equiv F_1(t,x) + \langle F_2(t,x), u\rangle$, $\varphi(t,x,u) \equiv \varphi_1(t,x) + \varphi_2(t,x)u$, U — выпуклое замкнутое ограниченное множество. Здесь: $F_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $F_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — измеримые в смысле Лебега функции, удовлетворяющие условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ с независящей от t постоянной $\bar{L}_M > 0$ на множестве S^n_M при п. в. $t \in [0,T]$; $\varphi_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ — измеримые в смысле Лебега векторная и матричная (n строк, m столбцов) функции, удовлетворяющие условию Липшица по $x \in \mathbb{R}^n$ с независящей от t постоянной $\hat{L}_M > 0$ на множестве S^n_M при п. в. $t \in [0,T]$. Кроме того, ниже мы будем иметь дело с задачей, в которой функции F и φ берутся такими же, как в указанном частном случае задачи (OC_p), но с функционалом качества

$$I^l_0(u) \equiv \int_0^T F_1(t, x[u](t))dt + \int_0^T \langle F_2(t, x[u](t)), u(t)\rangle dt + G(x[u](T)) + l|u - \widetilde{u}|^2_{w,2,m}, \quad u \in \mathcal{U},$$

где $\widetilde{u} \in \mathcal{U}$ — некоторое управление, $l \in [0,1]$ — число, $|\cdot|_{w,2,m}$ — так называемая слабая норма в $L_{2,m}(0,T)$ (как известно, слабая сходимость в $L_{2,m}(0,T)$ эквивалентна сходимости в слабой норме $|\cdot|_{w,2,m}$ [16, теорема I.3.11]).

1.2. Точная и возмущенная задачи оптимального управления. Так как задача (OC_p) является, вообще говоря, некорректной и мы собираемся использовать для ее анализа соответствующие методы, введем в рассмотрение точную задачу (OC^0_p), а также возмущенные задачи (OC^δ_p) при $\delta > 0$, $\delta \ge 0$ — числовой параметр, характеризующий степень возмущения исходных данных точной задачи, при этом по традиции считаем $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число. Задача (OC^δ_p) при $\delta \ge 0$ получается из задачи (OC_p), если вместо набора исходных данных $\mathsf{f} \equiv (F, G, H, \varphi, x_0)$ подставить соответственно набор возмущенных исходных данных $\mathsf{f}^\delta \equiv (F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x^\delta_0)$. Отклонение возмущенного набора $\mathsf{f}^\delta \equiv (F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x^\delta_0)$ при $\delta > 0$ от точного $\mathsf{f}^0 \equiv (F^0, G^0, H^0, \varphi^0, x^0_0)$ задаются при $M > 0$ следующими оценками:

$$\begin{aligned}
&|F^\delta(t,x,u) - F^0(t,x,u)| \le L_F(M)\delta \quad \forall\,(x,u) \in S^{n+m}_M \quad \text{при п. в.} \quad t \in (0,T),\\
&|G^\delta(x) - G^0(x)| \le L_G(M)\delta \quad \forall\, x \in S^n_M,\\
&|H^\delta(t,x) - H^0(t,x)| \le L_H(M)\delta \quad \forall\, x \in S^n_M \quad \text{при п. в.} \quad t \in (0,T),\\
&|\varphi^\delta(t,x,u) - \varphi^0(t,x,u)| \le L_\varphi(M)\delta \quad \forall\,(x,u) \in S^{n+m}_M \quad \text{при п. в.} \quad t \in (0,T),\\
&|x^\delta_0 - x^0_0| \le L_{x_0}\delta,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где постоянные $L_F(M)$, $L_G(M)$, $L_H(M)$, $L_\varphi(M)$, L_{x_0} не зависят от δ.

1.3. Обобщенные нижняя грань и минимизирующая последовательность, функция значений. Центральным объектом в данной статье, к устойчивому построению которого мы будем стремиться, является обобщенная минимизирующая последовательность (ОМП) в задаче (OC^0_p). Напомним, что ОМП в задаче (OC^0_p) называется последовательность $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1,2,\dots$, такая, что $I^0_0(u^i) \le \beta(p) + \gamma^i$, $u^i \in \mathcal{U}^{0,\epsilon^i}_p$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел γ^i, ϵ^i, $i = 1,2,\dots$. Здесь: $\mathcal{U}^{\delta,\epsilon}_p \equiv \{u \in \mathcal{U} : \|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X} \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$, $\delta \ge 0$, $\mathcal{U}^{0,0}_p \equiv \mathcal{U}^0_p$, $\beta(p)$ — обобщенная нижняя грань (обобщенное значение) задачи (OC^0_p)

$$\beta(p) \equiv \lim_{\epsilon\to+0} \beta_\epsilon(p), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{u\in\mathcal{U}^{0,\epsilon}_p} I^0_0(u), \quad \beta_\epsilon(p) \equiv +\infty, \quad \text{если} \quad \mathcal{U}^{0,\epsilon}_p = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p) \le \beta_0(p)$, где $\beta_0(p) \equiv \inf_{u \in \mathcal{U}_p^0} I_0^0(u)$ — классическое значение задачи (OC_p^0). Справедлива следующая важная для дальнейших построений

Лемма 1.1. *Функция значений* $\beta: L_{2,1}(X) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *полунепрерывна снизу.*

Лемма доказывается точно так же, как и в случае выпуклой задачи в [24, лемма 1.2].

З а м е ч а н и е 1.4. Известно [16], что каждую ОМП в задаче (OC_p) можно «замкнуть», получив «в пределе» обобщенное управление в смысле [16, 25]. Однако ниже в работе все результаты для задачи (OC_p^0) общего вида формулируются только в терминах ОМП. Это связано, в частности, с некорректностью задачи (OC_p^0), а в некорректных задачах, как известно [3, 7], основным является именно секвенциальный подход.

1.4. ОМП-образующий оператор. Определим ОМП-образующий оператор [14, 21] для задачи (OC_p^0) (определение ОМП-образующего оператора для выпуклых задач см. в [15]). Обсуждение взаимосвязи этого понятия с классическим понятием регуляризирующего оператора [3] в случае задачи поиска нормального решения линейного операторного уравнения первого рода см. в [26].

О п р е д е л е н и е 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots,$ вообще говоря, многозначный оператор $R_p(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $R_p(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \mathcal{W}_p^{\delta^k} \subset \mathcal{U}$, называется ОМП-образующим в задаче (OC_p^0), если любая последовательность $u^{\delta^k} \in \mathcal{W}_p^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ есть ОМП в этой задаче.

1.5. Нелинейная задача оптимального управления как задача нелинейного программирования. С формальной точки зрения, задача (OC_p^δ), $\delta \in [0, \delta_0]$, которой соответствует набор исходных данных $(F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$, может быть записана в компактном виде параметрической задачи нелинейного программирования с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве суммируемых с квадратом функций $L_{2,1}(X)$

$$(P_p^\delta) = (OC_p^\delta) \qquad I_0^\delta(u) \to \inf, \quad I^\delta(u) = p, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0, T),$$

где $p \in L_{2,1}(X)$ — параметр.

Получим оценки отклонения значений пары возмущенных функционала и оператора (I_0^δ, I^δ) задачи (P_p^δ) при $\delta > 0$ от соответствующих точных значений, т. е. пары (I_0^0, I^0). С этой целью приведем сначала некоторые элементарные оценки, предположив для определенности, что $|\varphi^\delta(t, x, u)| \le S(1 + |x|)$ $\forall t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, причем $S > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, т. е. предположив, что правая часть системы имеет линейный порядок роста по x. В таком случае стандартное применение классического неравенства Гронуолла [5, п. 2.5.3, с. 189] приводит к равномерной по δ, $u \in \mathcal{U}$, $t \in [0, T]$, ограниченности решений нелинейной управляемой системы

$$|x^\delta[u](t)| \le K \quad \forall \delta \in [0, \delta_0], \ u \in \mathcal{U}, \ t \in [0, T]$$

и, как следствие, опять же с помощью неравенства Гронуолла, к оценке

$$|x^\delta[v](t) - x^\delta[u](t)| \le K_1 \int_0^T |v(t) - u(t)| dt \tag{1.3}$$

с независящей от $t \in [0,T]$, $u,v \in \mathcal{U}$, $\delta \in [0,\delta_0]$ постоянной $K_1 > 0$.

Благодаря оценке (1.3) и условиям на исходные данные $(F^\delta, G^\delta, H^\delta, \varphi^\delta, x_0^\delta)$ функционал I_0^δ и оператор I^δ непрерывны на $\mathcal{U}$. Кроме того, благодаря ограниченности множества $\{x^\delta[u] : u \in \mathcal{U}\} \subset C_n[0,T]$ оно и равностепенно непрерывно, т. е. это компакт в $C_n[0,T]$. По этой причине образ оператора $I^\delta : \mathcal{U} \to L_{2,1}(X)$ является компактным в $L_{2,1}(X)$. Дальнейшие достаточно очевидные выкладки, также опирающиеся на неравенство Гронуолла, приводят нас к нужным оценкам для отклонений значений функционала и оператора

$$|I_0^\delta(u) - I_0^0(u)| \le \hat{C}_1\delta, \quad \|I^\delta(u) - I^0(u)\|_{2,1,X} \le \hat{C}_2\delta, \tag{1.4}$$

в которых постоянные $\hat{C}_1$, $\hat{C}_2 > 0$ следует считать не зависящими от $u \in \mathcal{U}$ и δ. Кроме того, с учетом оценки (1.3) можно утверждать, что

$$|I_0^\delta(u) - I_0^\delta(v)| \le \hat{C}_3\|u - v\|_{2,m,(0,T)}, \quad \|I^\delta(u) - I^\delta(v)\|_{2,1,X} \le \hat{C}_4\|u - v\|_{2,m,(0,T)}, \tag{1.5}$$

где постоянные $\hat{C}_3, \hat{C}_4 > 0$ также не зависят от $\delta \in [0,\delta_0]$.

Полученные выше оценки (1.4) отклонения возмущенных данных (I_0^δ, I^δ) задачи нелинейного программирования $(P_p^\delta) = (OC_p^\delta)$ при $\delta > 0$ от точных (I_0^0, I^0) в совокупности с оценками (1.5), говорящими, что эти исходные данные удовлетворяют условию Липшица, позволяют нам применить для исследования задачи (P_p^δ), а тем самым и задачи (OC_p^δ), результаты работы [14]. При этом роль функционала f^δ, оператора g^δ, множества $\mathcal{D}$, метрического пространства Z и гильбертова пространства H цитированной работы играют соответственно функционал I_0^δ, оператор I^δ, множество $\mathcal{U}$, гильбертово пространство $L_{2,m}(0,T)$ и также гильбертово пространство $L_{2,1}(X)$.

2. Модифицированные функции Лагранжа, модифицированная двойственная задача, обобщенный вектор Куна–Таккера

В данном разделе напомним, прежде всего, необходимые результаты, связанные со свойствами субдифференцируемости в смысле нелинейного (невыпуклого) анализа полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве. Их необходимость объясняется, во-первых, неестественностью использования понятия субдифференцируемости в смысле выпуклого анализа применительно к невыпуклой полунепрерывной снизу функции значений, и, во-вторых, наличием соответствующих результатов о плотности субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве в смысле нелинейного анализа [18–20]. Одновременно, эти понятия субдифференцируемости приведут нас естественным образом к конструкциям так называемых модифицированных функций Лагранжа (МФЛ), к соответствующим модифицированным двойственным задачам, а также к понятию обобщенного вектора Куна–Таккера задачи $(P_p^0) = (OC_p^0)$.

2.1. Субдифференциалы полунепрерывных снизу функций. Ниже нам будут нужны два понятия субдифференцируемости полунепрерывных снизу функций — понятия проксимального субградиента и субдифференциала Фреше.

Введем прежде всего понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции на основе понятия проксимальной нормали [18, 19].

Определение 2.1. (a) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальной нормалью к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \le M\|s - \bar{s}\|^2 \ \ \forall\, s \in S$.

Множество всех таких векторов ζ, представляющее собой конус, обозначается через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и называется проксимальным нормальным конусом.

(б) Пусть $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ называется проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{\operatorname{epi} f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначается через $\partial^P f(\bar{x})$ и называется проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

Лемма 2.1 (см. [18, 19]). *Пусть* $f : H \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *— полунепрерывная снизу функция и* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. *Вектор* $\zeta \in H$ *является проксимальным субградиентом функции* f *в точке* $\bar{x}$ *тогда и только тогда, когда существуют постоянные* $R > 0$ *и* $\delta > 0$ *такие, что*

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \le f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \quad \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \|x' - \bar{x}\| < \delta\}.$$

Определим далее понятие нормали Фреше к замкнутому множеству в банаховом пространстве, а также соответствующее понятие субдифференциала полунепрерывной снизу функции [20].

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть Ω — непустое множество банахова пространства $\mathcal{X}$. Пусть $x \in \operatorname{cl} \Omega$ и $u \xrightarrow{\Omega} x$ означает, что $u \to x$ с $u \in \Omega$. Тогда непустое множество

$$\hat{N}(x; \Omega) \equiv \{x^* \in \mathcal{X}^* : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \le 0\}$$

называется нормальным конусом Фреше к Ω в x и обозначается $\hat{N}(x; \Omega)$. При $x \notin \operatorname{cl} \Omega$ полагается $\hat{N}(x; \Omega) = \emptyset$.

О п р е д е л е н и е 2.3. Пусть $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве $\mathcal{X}$, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) \equiv \{x^* \in \mathcal{X}^* : (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f)\}$$

называется субдифференциалом Фреше функции f в точке $\bar{x}$. При этом полагается $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \emptyset$ в случае $x \notin \operatorname{dom} f$.

Лемма 2.2 (см. [20]). *Пусть* $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ *— полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве* $\mathcal{X}$, $x \in \mathit{dom}\, f$, $\epsilon > 0$. *Тогда* $x^* \in \hat{\partial} f(x)$ *в том и только в том случае, если существует окрестность* $\mathcal{X}_\epsilon$ *точки* x *такая, что*

$$f(x) - \langle x^*, x \rangle \le f(x') - \langle x^*, x' \rangle + \epsilon\|x' - x\| \;\; \forall\, x' \in \mathcal{X}_\epsilon.$$

2.2. Плотность субдифференцируемости. Важнейшим свойством полунепрерывных снизу функций $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ является то, что как множество $\partial^P f(x)$, так и множество $\hat{\partial} f(x)$ заведомо не пусто для всех точек x из плотного в $\operatorname{dom} f$ множества в случае гильбертова пространства $\mathcal{X}$ [19, теорема 3.1, с. 39], [20, следствие 2.29, с. 209].

2.3. Модифицированные функции Лагранжа (МФЛ). Следуя [13, 14], можно утверждать, что для задачи (OC_p^0) с полунепрерывной снизу функцией значений $\beta : L_{2,1}(X) \to \mathbb{R}^1 \cup \{+\infty\}$ являются естественными две конструкции МФЛ в зависимости от субдифференциальных свойств β в фиксированной индивидуальной точке $p \in \operatorname{dom} \beta$.

2.3.1. Первая МФЛ. Если точка $p \in \operatorname{dom}\beta$ такова, что $\partial^P\beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P\beta(p)$, то, как следствие, для задачи (OC_p^0) естественной (см. [13, 14]) является конструкция МФЛ вида

$$L_{p,c}^{0,2}(u,\zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p\rangle + c\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2, \quad u \in \mathcal{U}$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$ (этому коэффициенту можно и удобно придать смысл коэффициента штрафа), зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \partial^P\beta(p)$.

Действительно, в этом случае из леммы 2.1 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки p и элемента ζ) такие, что

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + R\|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall\, p' \in S_\delta(p). \tag{2.1}$$

Так как в силу ограниченности множества $\mathcal{U}$ эффективное множество $\operatorname{dom}\beta$ ограничено и функция β ограничена на множестве $\operatorname{dom}\beta$, то в силу неравенства (2.1) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p,\zeta) > 0$

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + c\|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall\, p' \in L_{2,1}(X) \tag{2.2}$$

или

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle < \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\|_{2,1,X}^2 \quad \forall\, p' \in L_{2,1}(X), \quad p' \neq p, \quad \hat{c} > c,$$

откуда в силу строгого неравенства $\hat{c} > c$, полунепрерывности снизу функции значений β и ограниченности множества $\operatorname{dom}\beta$ следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\|_{2,1,X}^2 \to \inf, \quad p' \in L_{2,1}(X)$$

является лишь любая последовательность p^k, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке p такая, что $\beta(p^k) \to \beta(p)$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда следует естественность конструкции МФЛ $L_{p,c}^{0,2}(u,\zeta)$, $u \in \mathcal{U}$, так как в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,\hat{c}}^{2}(u,\zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U} \tag{2.3}$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $I_0^0(u^k) \to \beta(p)$, $I^0(u^k) \to p$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} (I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2) = \beta(p).$$

Покажем это. Пусть $\bar{u}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ — минимизирующая последовательность в задаче минимизации (2.3). Тогда благодаря ограниченности $\mathcal{U}$, ограниченности значений функционала I_0^0 и компактности области значений оператора I^0 без ограничения общности считаем, что $I_0^0(\bar{u}^k) \to \bar{I}_0^0$, $I^0(\bar{u}^k) \to \bar{p}$, $k \to \infty$, где $\bar{I}_0^0 \in \mathbb{R}^1$, $\bar{p} \in L_{2,1}(X)$ — некоторые элементы. Тогда рассмотрим два возможных случая.

Во-первых, если $\bar{p} = p$, но $\bar{I}_0^0 \neq \beta(p)$, то в силу последних предельных соотношений, с учетом определения величины $\beta(p)$, можем записать при $k \to \infty$

$$I_0^0(\bar{u}^k) + \langle -\zeta, I_0^0(\bar{u}^k) - p\rangle + \hat{c}\|I_0^0(\bar{u}^k) - p\|_{2,1,X}^2 \to \bar{I}_0^0 > \beta(p).$$

Во-вторых, если же $p \neq \bar{p}$, то в силу тех же предельных соотношений, определения обобщенной нижней грани $\beta(\bar{p})$ и соотношений (2.2), можем записать $\bar{I}_0^0 \geq \beta(\bar{p})$ и, одновременно, при $k \to \infty$

$$\begin{aligned} I_0^0(\bar{u}^k) + \langle -\zeta, I^0(\bar{u}^k) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(\bar{u}^k) - p\|^2_{2,1,X} &\to \bar{I}_0^0 + \langle -\zeta, \bar{p} - p\rangle + \hat{c}\|\bar{p} - p\|^2_{2,1,X} \\ &\geq \beta(\bar{p}) + \langle -\zeta, \bar{p} - p\rangle + \hat{c}\|\bar{p} - p\|^2_{2,1,X} > \beta(p). \end{aligned}$$

Полученные в обоих случаях строгие неравенства вступают в противоречие с предположением о том, что последовательность $\bar{u}^k$, $k = 1, 2, \ldots$ — минимизирующая, так как для последовательности u^k, $k = 1, 2, \ldots$ указанного выше вида ($I_0^0(u^k) \to \beta(p)$, $I^0(u^k) \to p$, $k \to \infty$) мы можем записать

$$I_0^0(u^k) + \langle -\zeta, I^0(u^k) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(u^k) - p\|^2_{2,1,X} \to \beta(p).$$

З а м е ч а н и е 2.1. Если наряду с функцией β у нас имеется функция $\widetilde{\beta}$, обладающая всеми теми же свойствами, что и β, причем $\widetilde{\beta}(p) = \beta(p)$, $\widetilde{\beta}(p') \geq \beta(p')$ при $p' \neq p$, множество $\operatorname{dom}\widetilde{\beta}$ ограничено, функция $\widetilde{\beta}$ ограничена на $\operatorname{dom}\widetilde{\beta}$, то в силу леммы 2.1 можно утверждать, что из неравенства (2.2) с некоторыми $\zeta \in \partial^P\beta(p)$ и $c > 0$ вытекает также и неравенство, с тем же $c > 0$,

$$\widetilde{\beta}(p) - \langle\zeta, p\rangle = \beta(p) - \langle\zeta, p\rangle \leq \widetilde{\beta}(p') - \langle\zeta, p'\rangle + c\|p' - p\|^2_{2,1,X} \quad \forall\, p' \in L_{2,1}(X),$$

при этом $\zeta \in \partial^P\widetilde{\beta}(p)$. Описанная выше в данном замечании ситуация реализуется, например, тогда, когда наряду с задачей (OC_p^0) мы имеем «близкую» задачу ($\widetilde{OC}_p^0$)

$$(\widetilde{OC}_p^0) \qquad \widetilde{I}_0^0(u) \to \inf, \quad I^0(u) = p, \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0,T),$$

с ограниченным на $\mathcal{U}$ функционалом $\widetilde{I}_0^0$, с теми же свойствами, что и у функционала I_0^0, причем таким, что для ее функции значений $\widetilde{\beta}$ выполняются все описанные выше в замечании соотношения и свойства. При этом в задаче минимизации МФЛ с $\hat{c} > c$

$$\widetilde{L}^2_{p,\hat{c}}(u,\zeta) \equiv \widetilde{I}_0^0(u) - \langle\zeta, I^0(u) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(u) - p\|^2_{2,1,X} \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что выполняются предельные соотношения $\widetilde{I}_0^0(u^k) \to \beta(p)$, $I^0(u^k) \to p$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}}(\widetilde{I}_0^0(u) - \langle\zeta, I^0(u) - p\rangle + \hat{c}\|I^0(u) - p\|^2_{2,1,X}) = \beta(p).$$

2.3.2. Вторая МФЛ. Если точка $p \in \operatorname{dom}\beta$ такова, что $\hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, то, как следствие, для задачи (OC_p^0)) естественной (см. [13]) является конструкция МФЛ вида

$$L^{0,1}_{p,c}(u,\zeta) \equiv I_0^0(u) - \langle\zeta, I^0(u) - p\rangle + c\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}, \quad u \in \mathcal{U}$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$, зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$. Как и в случае первой МФЛ, такая естественность объясняется тем обстоятельством, что, как показано в [13, 14], в этом случае коэффициент $c > 0$ можно без ограничения общности считать столь большим, что в задаче минимизации МФЛ

$$I_0^0(u) - \langle\zeta, I^0(u) - p\rangle + c\|I^0(u) - p\|_{2,1,X} \to \inf, \quad u \in \mathcal{U} \tag{2.4}$$

минимизирующей является лишь последовательность u^k, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $I_0^0(u^k) \to \beta(p)$, $I^0(u^k) \to p$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. Одновременно справедливо равенство

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} (I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p \rangle + c \|I^0(u) - p\|_{2,1,X}) = \beta(p).$$

2.3.3. Комбинированная МФЛ. Далее, следуя [13,14], введем, с учетом конструкций МФЛ задач (2.3), (2.4), комбинированную (смешанную) МФЛ задачи (OC_p^δ)

$$\begin{aligned} L_{p,c}^\delta(u,\lambda) &\equiv \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,1}(u,\lambda) + \frac{1}{2} L_{p,2c}^{\delta,2}(u,\lambda) \\ &\equiv I_0^\delta(u) + \langle \lambda, I^\delta(u) - p \rangle + c\psi(\|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X}), \;\; u \in \mathcal{U}, \;\; \lambda \in L_{2,1}(X), \;\; (\lambda = -\zeta), \end{aligned}$$

где $c \geq 0$, а «штрафная» функция $\psi : \mathbb{R}_+^1 \to \mathbb{R}_+^1$, определяется формулой $\psi(t) \equiv l_1 t + l_2 t^2$, $t \in \mathbb{R}_+^1$, в которой весовые множители l_1, $l_2 \in \{0, 1\}$ — фиксированные числа.

О других подходах к построению МФЛ, а также об их истории см. в [27–29].

2.4. Модифицированная двойственная задача. Определим, в свою очередь, и модифицированную двойственную задачу

$$V_{p,c}^\delta(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_{2,1}(X), \quad V_{p,c}^\delta(\lambda) \equiv \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^\delta(u,\lambda).$$

Условия на исходные данные задачи (OC_p^0) таковы, что вогнутая функция $V_{p,c}^\delta(\lambda)$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c > 0$ для любой точки $\lambda \in L_{2,1}(X)$ и ограниченной на любом множестве вида $\{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\| < M\}$, $M > 0$, а значит и локально липшицевой (см. [30, определение 2.3]) на $\operatorname{dom} V_{p,c}^\delta = L_{2,1}(X)$ [30, теорема 2.1, следствие 2.3]). Кроме того, выполняется оценка

$$|V_{p,c}^\delta(\lambda) - V_{p,c}^0(\lambda)| \leq C\delta(1 + \|\lambda\|_{2,1,X} + |c|) \quad \forall\, \lambda \in L_{2,1}(X), \tag{2.5}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая при фиксированном $p \in L_{2,1}(X)$ лишь от $\sup_{u \in \mathcal{U}} \|u\|_{2,m,(0,T)}$. Приведем также выражение для супердифференциала $\partial V_{p,c}^\delta$ вогнутой функции значений $V_{p,c}^\delta$ при условии компактности образа оператора $I^\delta : \mathcal{U} \to L_{2,1}(X)$. Здесь под супердифференциалом вогнутой функции $V_{p,c}^\delta$ понимается субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) с обратным знаком выпуклой функции $-V_{p,c}^\delta$. Утверждение формулируемой ниже леммы является следствием утверждения, доказательство которого см. в [31, лемма 2].

Лемма 2.3. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) $\partial V_{p,c}^\delta(\lambda)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, вогнутой функции $V_{p,c}^\delta$ в точке $\lambda \in L_{2,1}(X)$ при любом $c \in \mathbb{R}^1$ выражается формулой*

$$\begin{aligned} \partial V_{p,c}^\delta(\lambda) = \partial_C V_{p,c}^\delta(\lambda) = \operatorname{cl}\operatorname{conv} \Big\{ &\lim_{i \to \infty} (I^\delta(u^i) - p) : \, u^i \in \mathcal{U}, \\ &L_{p,c}^\delta(u^i, \lambda) \to \inf_{u \in \mathcal{U}} L_{p,c}^\delta(u,\lambda), \; i \to \infty \Big\} \equiv \operatorname{cl}\operatorname{conv} Q_{p,c}^\delta(\lambda), \end{aligned}$$

где $\partial_C V_{p,c}^\delta(\lambda)$ — обобщенный градиент Кларка функции $V_{p,c}^\delta$ в точке λ, $\operatorname{cl}\operatorname{conv} A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A.

2.5. Обобщенный вектор Куна–Таккера. Введем также соответствующее понятие обобщенного вектора Куна–Таккера задачи (OC_p^0). Возможны две и только две ситуации для этой задачи:

Случай А) в задаче существует обобщенный вектор Куна–Таккера, т. е. вектор $\lambda \in L_{2,1}(X)$, для которого $\beta(p) \leq \inf_{u\in\mathcal{U}} L_{p,c}^0(u,\lambda)$ при некотором $c > 0$;

Случай Б) в задаче не существует обобщенного вектора Куна–Таккера в указанном смысле.

В соответствии со сказанным в разделах 2.2, 2.3 можно утверждать, что:

I. Множество тех $p \in \operatorname{dom}\beta$, для которых задача (OC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера, является всюду плотным в $\operatorname{dom}\beta$.

II. Обобщенный вектор Куна–Таккера в задаче (OC_p^0) заведомо существует тогда, когда имеет место, по крайней мере, одно из следующих двух условий: 1. $\partial^P\beta(p) \neq \emptyset$; 2. $\hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset$. При этом напомним, что $\partial^P\beta(p) \subset \hat{\partial}\beta(p)$.

Можно утверждать (см. [14]), что существование вектора Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле эквивалентно тому, что при некотором $c > 0$ целевая функция $V_{p,c}^0(\lambda)$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$, модифицированной двойственной задачи

$$V_{p,c}^0(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in L_{2,1}(X)$$

достигает значения $\beta(p)$ в некоторой точке $\lambda^0 \in L_{2,1}(X)$.

2.6. Задача минимизации МФЛ. Ниже при построении ОМП и при формулировке регуляризованных ПЛ и ПМП центральную роль будет играть задача минимизации при $\lambda \in L_{2,1}(X)$, $c > 0$, МФЛ

$$\begin{aligned} L_{p,c}^\delta(u,\lambda) = \int_0^T F_1^\delta(t, x^\delta[u](t))dt + \int_0^T F_2^\delta(t, x^\delta[u](t))dt + G^\delta(x^\delta[u](T)) \\ + \int_X \lambda(t)\big(H^\delta(t, x^\delta[u](t)) - p(t)\big)dt \\ + c\Big(l_1\Big(\int_X \big(H^\delta(t,x^\delta[u](t)) - p(t)\big)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} + l_2\int_X \big(H^\delta(t,x^\delta[u](t)) - p(t)\big)^2 dt\Big) \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $x^\delta[u](t)$, $0 \leq t \leq T$, — решение системы

$$\dot{x} = \varphi^\delta(t, x, u(t)), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n.$$

Эта задача является обычной нелинейной (вообще говоря, не выпуклой) простейшей (т. е., без ограничений типа равенства и неравенства) задачей оптимального управления.

3. Устойчивое построение ОМП в нелинейной задаче оптимального управления

Далее нашей главной целью будет построение ОМП в исходной задаче $(P_p^0) = (OC_p^0)$. Заметим, что ввиду ограниченности множества $\mathcal{U}$ значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно тогда и только тогда, когда в ней существует ОМП. В основе устойчивого построения ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0) лежит процедура основанной на двойственности регуляризации в нелинейных задачах на условный экстремум [13, 14]. Такое построение мы организуем в двух указанных выше существенно разных ситуациях. Первая из них предполагает, что задача (OC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера (случай **А)**).

Во второй ситуации построение ОМП в исходной задаче проводится в отсутствие предположения о существовании вектора Куна–Таккера (случай **Б)**).

В первом случае (случай **А)**) нашей основной целью будет построение при достаточно большом фиксированном $c > 0$ максимизирующей последовательности в модифицированной двойственной задаче

$$V^0_{p,c}(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\|_{2,1,X} \leq c\} \tag{3.1}$$

и параллельное этому процессу построение ОМП в исходной задаче (OC^0_p), в котором центральная роль принадлежит задаче минимизации модифицированного функционала Лагранжа (2.6). Задача (3.1) представляет собою типичную некорректную задачу вогнутой оптимизации общего вида. В то же время, эта задача разрешима, так как непрерывный вогнутый функционал $V^0_{p,c}$ достигает максимума на выпуклом замкнутом ограниченном множестве Λ_c гильбертова пространства $L_{2,1}(X)$. Минимальное по норме решение задачи (3.1) в этом случае будет являться ее вектором Куна–Таккера. Его поиск организуется на основе стандартной процедуры стабилизации (регуляризации) по Тихонову для вогнутой задачи (3.1). Как известно, такая стандартная процедура связана с нахождением точки максимума в задаче максимизации сильно вогнутого функционала $R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \equiv V^{\delta}_{p,c}(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2_{2,1,X}$, $\lambda \in L_{2,1}(X)$, $\delta \geq 0$, $\alpha > 0$. Для нахождения точки максимума в задаче (3.1) рассматривается задача

$$R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \to \max, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in L_{2,1}(X) : \|\lambda\|_{2,1,X} \leq c\}, \tag{3.2}$$

единственное решение которой (оно, очевидно, существует) обозначается через $\lambda^{\delta,\alpha}_{p,c}$. Одновременно предполагается, что выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{3.3}$$

Процедура стабилизации (регуляризации) по Тихонову (3.2), (3.3), с учетом оценки (2.5), является устойчивой процедурой поиска точки максимума в модифицированной двойственной задаче (3.1). Регуляризирующая процедура (3.2), (3.3) конструктивно порождает ОМП $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \ldots$ в задаче (OC^0_p), т. е. $I_0^0(u^i) \to \beta(p)$, $u^i \in \mathcal{U}^{0,\epsilon^i}_p$, $\epsilon^i \to 0$, $i \to \infty$. При этом подчеркнем, что в случае **А)** величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому положительному числу. При этом хотя бы один из двух весовых множителей l_1, l_2 должен быть не равен нулю.

Во втором случае (случай **Б)**) для построения ОМП в задаче (OC^0_p) штрафной коэффициент c мы будем с необходимостью стремить к $+\infty$ согласованно со стремлением к нулю величины δ. В этой ситуации применяемый в случае **А)** метод двойственной регуляризации, по сути дела, трансформируется в метод штрафов, при этом штрафной коэффициент c играет одновременно и роль соответствующего параметра регуляризации, а ОМП в исходной задаче конструируется из субминималей (минималей) задачи (2.6) при указанном согласованном поведении параметров δ, c. В этом случае процесс построения ОМП в задаче (OC^0_p) при определенных предположениях в заметной степени приобретает вид привычного метода регуляризации Тихонова для нелинейных некорректных задач [7] (см. [14]). В случае Б) оба весовых множителя l_1, l_2 должны быть не равны нулю.

Случай А). Итак, предполагаем, что задача (OC^0_p) обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле и хотя бы один из весовых коэффициентов l_1, l_2 больше нуля. Будем опираться в этом случае на соответствующие результаты [13,14]. Рассматриваем задачу (3.2) при произвольном достаточно большом фиксированном $c > 0$. Замкнутое выпуклое множество всех точек λ, доставляющих равное $\beta(p)$ максимальное значение функции $V^0_{p,c}$ на $L_{2,1}(X)$, обозначим через $K_{p,c}$. Пусть далее $c > 0$ столь велико, что $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$.

3.1. Точки максимума целевой функции модифицированной двойственной задачи и ОМП в исходной задаче условной минимизации. Как показано в [13, раздел 3, с. 958], имеет место следующее предложение о связи точек максимума функции $V^0_{p,c}$, в которых принимается значение $\beta(p)$, с ОМП в исходной задаче (OC^0_p).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Пусть $\tilde{c} > c$. Если $\lambda \in K_{p,c}$, то для любой минимизирущей в задаче*

$$L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda) \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}$$

последовательности $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \ldots$, справедливы предельные соотношения

$$L^0_{p,\tilde{c}}(u^i, \lambda) \to \beta(p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,\tilde{c}}(u, \lambda), \quad I^0_0(u^i) \to \beta(p), \quad I^0(u^i) - p \to 0, \quad i \to \infty, \tag{3.4}$$

что говорит о том, что каждая из указанных последовательностей $u^i \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \ldots$ является ОМП в задаче (OC^0_p).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\lambda \in K_{p,c} \subset L_{2,1}(X)$, то $\beta(p) = \inf\limits_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,c}(u, \lambda)$, а, следовательно, и $\beta(p) = \inf\limits_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,\tilde{c}}(u, \lambda)$, так как любая ОМП в задаче (OC^0_p) является минимизирующей последовательностью как для функционала $L^0_{p,c}(u, \lambda)$, $u \in \mathcal{U}$, так и для функционала $L^0_{p,\tilde{c}}(u, \lambda)$, $u \in \mathcal{U}$. Предположим, что существует такая последовательность

$$u^i \in \mathcal{U}, \quad i = 1, 2, \ldots, \quad L^0_{p,\tilde{c}}(u^i, \lambda) \to \inf_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,\tilde{c}}(u, \lambda) = \beta(p), \quad i \to \infty,$$

что (образ оператора $I^0 : \mathcal{U} \to L_{2,1}(X)$ есть компакт)

$$\lim_{i \to \infty} (I^0(u^i) - p) = \tilde{I} \neq 0. \tag{3.5}$$

Но тогда можем записать

$$\begin{aligned} L^0_{p,\tilde{c}}(u^i, \lambda) &= I^0_0(u^i) + \langle \lambda, I^0(u^i) - p \rangle + \tilde{c}\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \\ &= I^0_0(u^i) + \langle \lambda, I^0(u^i) - p \rangle + c\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) + (\tilde{c} - c)\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \\ &= L^0_{p,c}(u^i, \lambda) + (\tilde{c} - c)\psi(\|I^0(u^i) - p\|_{2,1,X}) \to \beta(p), \quad i \to \infty, \end{aligned}$$

откуда ввиду соотношений (3.5) получаем, что $\limsup\limits_{i \to \infty} L^0_{p,c}(u^i, \lambda) < \beta(p)$, что, в свою очередь, влечет строгое неравенство $\inf\limits_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,c}(u, \lambda) < \beta(p)$, которое противоречит равенству $\inf\limits_{u \in \mathcal{U}} L^0_{p,c}(u, \lambda) = V^0_{p,c}(\lambda) = \beta(p)$. Таким образом, предложение доказано. □

3.2. Аппроксимация минимальной по норме точки максимума модифицированной двойственной задачи (3.1) посредством ее стабилизация по Тихонову. В силу оценки (2.5), условия согласования (3.3) и теоремы о сходимости метода стабилизации Тихонова (см., например, [1, гл. 9, § 4, теорема 2]) можно утверждать, что справедливо следующее предложение об аппроксимации минимального по норме решения в вогнутой задаче максимизации общего вида (3.1).

Предложение 3.2. *Если* $K_{p,c}\cap\Lambda_c=\emptyset$, *то*

$$\|\lambda_{p,c}^{\delta,\alpha(\delta)}-\lambda_{p,c}^0\|\to 0,\quad \delta\to 0, \tag{3.6}$$

где $\lambda_{p,c}^0$ *— минимальное по норме решение задачи* (3.1). *Если же* $K_{p,c}\cap\Lambda_c\neq\emptyset$, *то точка* $\lambda_{p,c}^0$ *в предельном соотношении* (3.6) *одновременно является и минимальной по норме точкой во множестве* $K_{p,c}$.

Замечание 3.1. Если в задаче (3.2) вместо стабилизатора $\|\lambda\|_{2,1,X}^2$, $\lambda\in L_{2,1}(X)$ взять $\|\lambda-\tilde\lambda\|_{2,1,X}^2$ с некоторым $\tilde\lambda\in L_{2,1}(X)$, то в условиях предложения 3.2 в случае $K_{p,c}\cap\Lambda_c\neq\emptyset$ точка $\lambda_{p,c}^0$ одновременно доставляет минимум функционалу $\|\lambda-\tilde\lambda\|_{2,1,X}^2$, $\lambda\in K_{p,c}$. Таким образом, за счет выбора точки $\tilde\lambda$ предельный элемент $\lambda_{p,c}^0$ можно считать равным любому фиксированному наперед выбранному элементу из $K_{p,c}\cap\Lambda_c$.

3.3. Построение ОМП в исходной нелинейной задаче оптимального управления в случае A). Итак, пусть $K_{p,c}\cap\Lambda_c\neq\emptyset$. Пусть далее δ^s, $s=1,2,\ldots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Рассмотрим в этом случае последовательность $u_\kappa^{c,\delta^s,i}$, $i=1,2,\ldots$, являющуюся минимизирующей для функционала $L_{p,c+\kappa}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}(u,\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})$, $u\in\mathcal{U}$, $s=1,2,\ldots$, где $\kappa>0$ не зависящая от $s=1,2,\ldots$ постоянная. Примем при этом обозначение $u_0^{c,\delta^s,i}\equiv u^{c,\delta^s,i}$ при $\kappa=0$. Тогда можем записать неравенства

$$\begin{aligned}I_0^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i})+\langle\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)},I^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i})-p\rangle+(c+\kappa)\psi(\|I^{\delta^s}(u_\kappa^{c,\delta^s,i})-p\|_{2,1,X})&\\ \le V_{p,c+\kappa}^{\delta^s}(\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})+\epsilon^{c,\delta^s,i},\quad i=1,2,\ldots,\quad \epsilon^{c,\delta^s,i}\to 0,\quad i\to\infty.&\end{aligned} \tag{3.7}$$

В силу ограниченности множества Λ_c и оценок (1.4), (2.5), а также выбора подпоследовательности $i(c,s)$, $s=1,2,\ldots$ последовательности $i=1,2,\ldots$ такой, что $\epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)}\to 0$, $s\to\infty$, из (3.7) выводим, обозначив $u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}\equiv u_\kappa^s$, что

$$\begin{aligned}I_0^0(u_\kappa^s)+\langle\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)},I^0(u_\kappa^s)-p\rangle+(c+\kappa)\psi(\|I^0(u_\kappa^s)-p\|_{2,1,X})&\\ \le V_{p,c+\kappa}^0(\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)})+\epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)}+\gamma^s,\quad s=1,2,\ldots,&\end{aligned}$$

где $\gamma^s\to 0$, $s\to\infty$. В свою очередь, из этой оценки в силу предельного соотношения (3.6) и непрерывности функционала $V_{p,c+\kappa}^0$ (см. раздел 2.4) получаем

$$\begin{aligned}I_0^0(u_\kappa^s)+\langle\lambda_{p,c}^0,I^0(u_\kappa^s)-p\rangle+(c+\kappa)\psi(\|I^0(u_\kappa^s)-p\|_{2,1,X})&\\ \le V_{p,c+\kappa}^0(\lambda_{p,c}^0)+\widetilde\gamma^s,\quad s=1,2,\ldots,\quad \widetilde\gamma^s\to 0,\quad s\to\infty.&\end{aligned}$$

Последнее неравенство говорит о том, что последовательность $u_\kappa^s\equiv u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s=1,2,\ldots$ является минимизирующей в задаче

$$L_{p,c+\kappa}^0(u,\lambda_{p,c}^0)\to\inf,\quad u\in\mathcal{U}.$$

Но такой последовательностью в силу включения $\lambda_{p,c}^0\in K_{p,c}$, строгого неравенства $\kappa>0$ и предложения 3.1 может быть лишь последовательность с указанными свойствами (3.4) при $\tilde c=c+\kappa$. Таким образом, сконструированная выше последовательность элементов $u_\kappa^s\equiv u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s=1,2,\ldots$, будет представлять собой ОМП в задаче (OC_p^0).

Итак, в общей ситуации для построения ОМП в задаче (OC_p^0) в случае **A)** требуется в регуляризованном процессе максимизации модифицированной двойственной задачи решать задачу минимизации МФЛ при двух значениях штрафного коэффициента c: c и $c+\kappa$. В то же время, как показано в [13], во многих важных частных случаях, когда известна дополнительная информация о субдифференциальных свойствах функции значений β в конкретной точке $p\in\operatorname{dom}\beta$, ОМП в задаче (OC_p^0) будет построенная выше последовательность $u_\kappa^s\equiv u_\kappa^{c,\delta^s,i(c,s)}$, $s=1,2,\ldots$ при $\kappa=0$: $u_0^s\equiv u^s$, $s=1,2,\ldots$. В частности, такими важными частными случаями являются следующие (см. [13]).

1. Множество $\partial^P\beta(p)$ является одноточечным, что, в силу включения $\partial^P\beta(p)\subset\hat\partial\beta(p)$, имеет место, в частности, тогда, когда $\partial^P\beta(p)\neq\emptyset$ и одноточечным является множество $\hat\partial\beta(p)$.

2. Проксимальный субградиент $\partial^P\beta(p)$ содержит минимальный по норме элемент. Это будет заведомо так, если, например, $\partial^P\beta(p)$ замкнутое множество.

По аналогии с [14, теорема 3.1] может быть сформулирована и соответствующая теорема сходимости описанной выше процедуры двойственной регуляризация для решения исходной нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) в случае **A)**.

Случай Б). Пусть теперь задача (OC_p^0) при условии $\beta(p)<+\infty$ такова, что нам неизвестно, обладает ли она вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле (случай **A)**) или, другими словами, нам неизвестно, имеет ли функция $V_{p,c}^0$ при некотором $c>0$ точку максимума на $L_{2,1}(X)$, в которой принимает значение $\beta(p)$. Тем не менее, предельное соотношение $\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}\to\lambda_{p,c}^0$, $s\to\infty$, где $\lambda_{p,c}^0$ — минимальное по норме решение задачи (3.1), имеет место в силу предложения 3.2 при каждом фиксированном $c>0$ также и в этом случае (см. (3.6), когда $K_{p,c}\cap\Lambda_c=\emptyset$). Будем, однако, теперь стремить δ к нулю согласованно со стремлением штрафного коэффициента c к $+\infty$. В этом случае метод двойственной регуляризации сопрягается (объединяется), по сути дела, с методом штрафов, так как слагаемое $c\psi(\|g^\delta(z)-p\|_{2,1,X})$ в МФЛ имеет вид именно штрафного слагаемого с коэффициентом штрафа c. В дальнейших построениях в случае **Б)** считаем, что (при $\beta(p)<+\infty$) оба весовых множителя l_1, l_2 в штрафной функции ψ положительны, т. е. $l_1=l_2=1$, и выполняется условие согласования

$$c^s\delta^s\to 0,\quad c^s\to\infty,\quad \delta^s\to 0,\quad s\to\infty. \tag{3.8}$$

Одновременно, мы будем далее предполагать, что в МФЛ с коэффициентом штрафа c^s двойственная переменная λ, как и в задаче (3.2), удовлетворяет неравенству $\|\lambda\|_{2,1,X}\le c^s$.

3.4. Построение ОМП в исходной нелинейной задаче оптимального управления в случае Б). Итак, рассматриваем по аналогии с соотношениями (3.7) при $c=c^s$, $\kappa=0$ последовательность $u^{c^s,\delta^s,i}$, $i=1,2,\ldots$, являющуюся минимизирующей для функционала $L_{p,c^s}^{\delta^s}(u,\lambda^s)$, $u\in\mathcal{U}$ с $\lambda^s\in\Lambda_{c^s}$. Тогда подобно (3.7) можем записать

$$\begin{aligned}I_0^{\delta^s}(u^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)})+\langle\lambda^s,I^{\delta^s}(u^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)})-p\rangle+c^s\psi(\|I^{\delta^s}(u^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)})-p\|_{2,1,X})&\\ \le V_{p,c^s}^{\delta^s}(\lambda^s)+\epsilon^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)},\quad s\to\infty.&\end{aligned} \tag{3.9}$$

При этом номер $i(c^s,s)$ выбираем так, что $\epsilon^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}\le\gamma^s$, $s\to\infty$, где γ^s, $s=1,2,\ldots$ — некоторая произвольным образом заданная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел.

Подчеркнем, что в качестве последовательности $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1, 2, \dots$, в (3.9) годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\| \le c^s$. Например, в целях согласования процессов построения ОМП в случаях **А)** и **Б)**, можно воспользоваться «двойственными точками» $\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}$ с достаточно большими c и в случае **Б)**. В качестве другого возможного варианта можно взять последовательность, все элементы которой совпадают с некоторым заданным фиксированным элементом $\lambda \in L_{2,1}(X)$.

Обозначим $u^s \equiv u^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}$. В силу ограниченности $\mathcal{U}$, оценки $\|\lambda^s\| \le c^s$, условия согласования (3.8) и оценок (1.4), (2.5) из (3.9) следует

$$I_0^0(z^s) + \langle \lambda^s, I^0(u^s) - p\rangle + c^s\psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}) \le V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s, \quad s \to \infty, \tag{3.10}$$

где

$$\widetilde{\gamma}^s \equiv |I_0^{\delta^s}(u^s) - I_0^0(u^s| + |\langle \lambda^s, I^{\delta^s}(u^s) - I^0(u^s)\rangle| + c^s|\psi(\|I^{\delta^s}(u^s) - p\|_{2,1,X}) - \psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X})| + |V_{p,c^s}^{\delta^s}(\lambda^s) - V_{p,c^s}^0(\lambda^s)| \to 0, \quad s \to \infty.$$

Тогда, во-первых, из неравенства (3.10) в силу неравенств ($\|\lambda^s\|_{2,1,X} \le c^s$)

$$\langle \lambda^s, I^0(u^s) - p\rangle + c^s\psi(\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}) \ge 0, \quad V_{p,c^s}^0(\lambda^s) \le \beta(p)$$

следует, что

$$I^0(u^s) \le \beta(p) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s. \tag{3.11}$$

Во-вторых, из того же неравенства (3.10), так как $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \le c^s$, одновременно следует, что

$$I_0^0(u^s) + c^s l_2\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 \le V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s \tag{3.12}$$

или ($l_2 = 1$)

$$l_2\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 \le (V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - I^0(u^s))/c^s. \tag{3.13}$$

Поэтому из (3.11), (3.13) получаем для последовательности $u^s \equiv u^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}$, $s = 1, 2, \dots$ соотношения

$$I_0^0(u^s) \to \beta(p), \quad u^s \in \mathcal{U}^{0,\zeta^s}, \quad \zeta^s \to 0, \quad s \to \infty \tag{3.14}$$

с

$$\zeta^s = \sqrt{(V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - I_0^0(u^s))/c^s},$$

говорящие о том, что построенная выше последовательность u^s, $s = 1, 2, \dots$, является ОМП в задаче (OC_p^0). Одновременно, из (3.12) получаем, так как $V_{p,c^s}^0(\lambda) \le \beta(p)$ $\forall\,\lambda \in L_{2,1}(X)$ и $I_0^0(u^s) \ge \beta(p) - \chi^s$ (см. (3.14)),

$$c^s l_2\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X}^2 \le V_{p,c^s}^0(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - I_0^0(u^s) \le \beta(p) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - \beta(p) + \chi^s = \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s + \chi^s \to 0, \quad s \to \infty, \tag{3.15}$$

где χ^s, $s = 1, 2, \dots$ — некоторая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Отсюда, с учетом (3.14), следует, что $V_{p,c^s}^0(\lambda^s) \to \beta(p)$, $s \to \infty$. И, наконец, последнее предельное соотношение, оценка (3.10), предельное соотношение в (3.14), а также оценка (3.15) приводят и к предельному соотношению

$$\langle \lambda^s, I^0(u^s) - p\rangle + c^s l_1\|I^0(u^s) - p\|_{2,1,X} \to 0, \quad s \to \infty.$$

По аналогии с [14, теорема 3.2] может быть сформулирована и соответствующая теорема сходимости описанной выше процедуры двойственной регуляризация для решения исходной нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0) в случае **Б)**.

4. Регуляризованные ТКТ и ПЛ в нелинейной задаче оптимального управления

Описанное выше устойчивое построение ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0) в случаях **А)** и **Б)**, а также соответствующие теоремы сходимости (см. теоремы 3.1, 3.2 в [14]) предполагают конечность значения $\beta(p)$, т. е., другими словами, существование ОМП в рассматриваемой задаче. Другими словами, в этом случае описанные выше процедуры, а также соответствующие теоремы сходимости (см. теоремы 3.1, 3.2 в [14]) можно трактовать так же, как необходимые условия существования ОМП в задаче (OC_p^0). Формулируемые ниже регуляризованная ТКТ и регуляризованный ПЛ помимо содержащихся в них утверждений, связанных с необходимыми условиями существования ОМП, содержат так же и соответствующие достаточные условия существования ОМП в рассматриваемой задаче. По этой причине ниже в данном разделе теорему, «обслуживающую» регулярный случай **А)**, мы называем регуляризованной ТКТ, а теорему, «обслуживающую» как случай **А)**, так и случай **Б)** (например, в отсутствие информации о регулярности задачи) — регуляризованным ПЛ.

4.1. Регуляризованная ТКТ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления. Сформулированная в теореме 3.3 в [14] регуляризованная ТКТ может быть переформулирована в терминах нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0). Характерным свойством этой теоремы является «устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных». Это понимается в том смысле, что в утверждении теоремы указывается множество допустимых элементов в каждой возмущенной задаче, которое состоит из таких элементов, что при стремлении к нулю ошибки задания исходных данных δ^s, $s = 1, 2, \ldots$, они, взятые произвольным образом из указанного множества и последовательно при $\delta^s \to 0$, $s \to \infty$, составляют ОМП в задаче (OC_p^0). Это обстоятельство позволило «связать» естественным образом формулировку регуляризованной ТКТ с понятием ОМП-образующего оператора, введенным в определении 1.1.

С целью переформулировки теоремы 3.3 в [14] обозначим через $U_p^{c,\kappa,\gamma,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{U}$, $\kappa \geq 0$, множество всех элементов $u^\gamma \in \mathcal{U}$, удовлетворяющих неравенству

$$L_{p,c+\kappa}^\delta(u^\gamma, \lambda) \leq L_{p,c+\kappa}^\delta(u, \lambda) + \gamma \quad \forall\, u \in \mathcal{U},$$

т. е. множество всех γ-оптимальных элементов в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,c+\kappa}^\delta(u, \lambda) \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}.$$

Примем также обозначение $U_p^{c,0,\gamma,\delta}[\lambda] \equiv U_p^{c,\gamma,\delta}[\lambda]$.

Теорема 4.1. *Пусть задача* (OC_p^0) *обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле,* δ^s, $s = 1, 2, \ldots$ *— произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел,* $(l_1, l_2) \neq 0$. *Тогда:*

1. *Найдутся достаточно большое* $c > 0$ *и ограниченная последовательность двойственной переменной* $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1, 2, \ldots$, *такие, что для последовательности* u^s, $s = 1, 2, \ldots$, *элементы которой при* $\kappa > 0$ *удовлетворяют соотношениям*

$$u^s \in U_p^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}, \quad \epsilon^s \to 0, \quad s \to \infty, \tag{4.1}$$

справедливы предельные соотношения

$$I_0^0(u^s) \to \beta(p), \quad V_{p,c}^0(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty, \tag{4.2}$$

$$I^0(u^s) - p \to 0, \quad s \to \infty, \tag{4.3}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V^0_{p,c+\kappa}(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty. \tag{4.4}$$

Элементы u^s *в* (4.1) *произвольным образом выбираются из множеств* $U_p^{c^s,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$, *а МФЛ* $L^{\delta^s}_{p,c+\kappa}(u,\lambda^s)$, $u \in \mathcal{U}$ *берется при* $(l_1,l_2) \neq 0$.

Другими словами, в этом случае оператор $R_p(\cdot,\delta^s)$, *ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* $\mathsf{f}^{\delta^s} \equiv (F^{\delta^s}, G^{\delta^s}, H^{\delta^s}, \varphi^{\delta^s}, x_0^{\delta^s})$, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta = \delta^s$, *множество* $R_p(\mathsf{f}^{\delta^s},\delta^s) \equiv U_p^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$, *где* $\epsilon^s \to 0$, $s \to \infty$, *является ОМП-образующим в задаче* (OC^0_p).

2. *И наоборот, если при некотором достаточно большом* $c > 0$ *существует ограниченная последовательность двойственной переменной* $\lambda^s \in L_{2,1}(X)$, $s = 1,2,\ldots$, *такая, что элементы последовательности* u^s, $s = 1,2,\ldots$, *удовлетворяют при* $\kappa \geq 0$ *соотношениям* (4.1) *и предельному соотношению* (4.3), *то выполняется и первое предельное соотношение* (4.2), *т. е. последовательность* u^s, $s = 1,2,\ldots$, *является ОМП в задаче* (OC^0_p). *При этом одновременно выполняется и предельное соотношение* (4.4).

З а м е ч а н и е 4.1. В качестве указанной в первом утверждении теоремы последовательности λ^s, $s = 1,2,\ldots$, может быть взята последовательность $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}$, $s = 1,2,\ldots$, вырабатываемая процедурой двойственной регуляризации (см. выше раздел 3, а также [14, теорема 3.1]), элементы которой максимизируют на множестве $L_{2,1}(X)$ сильно вогнутый функционал $R^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}$ при условии согласования $\delta^s/\alpha(\delta^s) \to 0$, $s \to \infty$. При этом $\lambda^s \to \lambda^0_{p,c}$, $s \to \infty$, где $\lambda^0_{p,c}$ — минимальный по норме во множестве $K_{p,c}$ обобщенный вектор Куна–Таккера задачи (OC^0_p).

З а м е ч а н и е 4.2. Подчеркнем, что в сформулированной теореме, несмотря на нелинейность задачи (OC^0_p), речь идет одновременно как о необходимых, так и о достаточных условиях для построения ОМП. Это является следствием регуляризации ПЛ именно в недифференциальной форме.

З а м е ч а н и е 4.3. Можно показать (см. [13, раздел 3]), что если функция значений β обладает в точке p дополнительными субдифференциальными свойствами, например, такими как **1)** множество $\partial^P\beta(p)$ является одноточечным; **2)** проксимальный субградиент $\partial^P\beta(p)$ содержит минимальный по норме элемент, то величину κ в утверждении **1.** теоремы можно считать равной нулю.

З а м е ч а н и е 4.4. Если в рамках теоремы 4.1 в задаче минимизации $L^{\delta^s}_{p,c+\kappa}(u,\lambda^s) \to \inf$, $u \in \mathcal{U}$, минимальное значения достигается, то в качестве элементов u^s, $s = 1,2,\ldots$ конструируемой ОМП могут быть естественно взяты непосредственно точки минимума в этой задаче минимизации МФЛ. Обсудим условия, при которых эта задача заведомо разрешима. Стандартные рассуждения позволяют легко такие условия сформулировать. Они предполагают, например, что интегрант F^δ и правая часть φ^δ управляемой системы устроены «аффинно» по u

$$F^\delta(t,x,u) \equiv F^\delta_1(t,x) + \langle F^\delta_2(t,x), u\rangle, \quad \varphi^\delta(t,x,u) \equiv \varphi^\delta_1(t,x) + \varphi^\delta_2(t,x)u,$$

где F^δ_1, F^δ_2, φ^δ_1, φ^δ_2 «устроены» так же, как и F_1, F_2, φ_1, φ_2 из замечания 1.3, $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество. В этом случае при каждом $s = 1,2,\ldots$ указанная задача минимизации МФЛ разрешима.

4.2. Регуляризованный ПЛ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления. В данном разделе переформулируем регуляризованный ПЛ теоремы 3.4 в [14] в терминах задачи (OC_p^0) настоящей работы. Здесь словосочетание «регуляризованный ПЛ» применяется благодаря тому, что формулируемый результат охватывает одновременно как случай **А)**, так и случай **Б)**. Как и в предыдущей ситуации, связанной с теоремой 4.1, его характерным свойством является «устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных», а понятие ОМП-образующего оператора, введенное в определении 1.1, естественным образом встроено в формулировку теоремы. Прежде чем формулировать указанный результат, напомним, что ввиду ограниченности множества $\mathcal{U}$ значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно тогда и только тогда, когда в ней существует ОМП.

Теорема 4.2. *Пусть значение $\beta(p)$ задачи (OC_p^0) конечно, δ^s, $s = 1, 2, \ldots$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $(l_1, l_2) \neq 0$. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

1. *Пусть задача (OC_p^0) обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле. Тогда справедливы все утверждения теоремы* 4.1, которые в совокупности можно трактовать как регуляризованную ТКТ для нелинейной задачи оптимального управления (OC_p^0).

2. Пусть в задаче (OC_p^0) не существует обобщенного вектора Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, c^s, $s = 1, 2, \ldots$ — произвольная фиксированная сходящаяся к $+\infty$ последовательность чисел такая, что $c^s\delta^s \to 0$, $s \to \infty$, оба штрафных коэффициента l_1, l_2 являются положительными. Тогда имеют место следующие два утверждения:

2.1. Если $\beta(p) < +\infty$, то найдется последовательность двойственной переменной λ^s, $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \le c^s$, $s = 1, 2, \ldots$, такая, что для последовательности $z^s \in \mathcal{U}$, $s = 1, 2, \ldots$, элементы которой удовлетворяют при $l_1 = l_2 = 1$ соотношениям

$$u^s \in \mathcal{U}_p^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}, \quad \epsilon^s \to 0, \quad s \to \infty, \tag{4.5}$$

справедливы предельные соотношения

$$I^{\delta^s}(u^s) - p \to 0, \quad s \to \infty, \tag{4.6}$$

$$\langle \lambda^s, I^{\delta^s}(u^s) - p\rangle + c^s\psi(\|I^{\delta^s}(u^s) - p\|_{2,1,X}) \to 0, \quad s \to \infty, \tag{4.7}$$

$$I^0(u^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty \tag{4.8}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V^0_{p,c^s}(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty. \tag{4.9}$$

Элементы u^s в (4.5) произвольным образом выбираются из множеств $\mathcal{U}_p^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$ (определение множества $\mathcal{U}_p^{c,\epsilon,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{U}$ см. перед формулировкой теоремы 4.1).

Другими словами, в этом случае оператор $R_p(\cdot, \delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\mathsf{f}^{\delta^s} \equiv (F^{\delta^s}, G^{\delta^s}, H^{\delta^s}, \varphi^{\delta^s}, x_0^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $R_p(\mathsf{f}^{\delta^s}, \delta^s) \equiv \mathcal{U}_p^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{U}$ с $\epsilon^s \to 0$, $s \to \infty$, является ОМП-образующим в задаче (OC_p^0).

2.2. Если существует последовательность двойственной переменной λ^s, $s = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \le c^s$, $s = 1, 2, \ldots$, и для последовательности u^s, $s = 1, 2, \ldots$, элементы которой удовлетворяют включениям (4.5), выполняются предельные соотношения (4.6), (4.7), то выполняются и предельные соотношения (4.8), (4.9).

З а м е ч а н и е 4.5. В качестве последовательности λ^s, $s = 1, 2, \ldots$, в утверждении **2.1** сформулированной теоремы годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\|_{2,1,X} \le c^s$. Например, в качестве такой последовательности может быть взята последовательность элементов $\lambda_{p,c^k}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}$, $s = 1, 2, \ldots$, максимизирующих на множестве Λ_{c^k} сильно вогнутый функционал $R_{p,c^k}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}$ (см. утверждение **1.** теоремы 4.1) с достаточно большими номерами при каждом фиксированном достаточно большом c^k, $c^k \to \infty$, $k \to \infty$.

З а м е ч а н и е 4.6. Если в рамках теоремы 4.2 в задаче минимизации $L_{p,c^s}^{\delta^s}(u, \lambda^s) \to \min$, $u \in \mathcal{U}$ минимальное значение достигается, то в качестве элементов u^s, $s = 1, 2, \ldots$, конструируемых ОМП могут быть естественно взяты непосредственно точки минимума в этой задаче минимизации МФЛ.

4.3. О возможности применения теорем 4.1, 4.2. Для применения теорем 4.1, 4.2 не требуется существования (обычного) оптимального управления. Приведем соответствующий иллюстративный пример задачи (OC_p), попадающей в сферу действия обеих этих теорем.

П р и м е р 4.1. Рассматриваем задачу оптимального управления с известной в теории конструкцией функционала качества и с параметром $p \in L_{2,1}(0,1)$ в ограничении-равенстве

$$\int_0^1 (x^2(t) - u^2(t))dt \to \inf, \quad x(t) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in [0,1],$$

$$\dot{x} = u(t), \quad x(0) = 0, \quad u(t) \in U \quad \text{при п. в.} \quad t \in (0,1), \quad U = \{-1, 1\}.$$

Легко заметить, что в этой задаче, в силу специфики функционала, при $p = 0$ имеют место равенства $\beta(0) = -1$, но $\beta_0(0) = +\infty$, т. е. $\beta(0) < \beta_0(0)$ (если же взять $U = [-1, +1]$, то $\beta(0) = -1$, $\beta_0(0) = 0$). Легко заметить также и то, что ни при каком управлении $u \in \mathcal{U}$ в ней при $p = 0$ обобщенная нижняя грань $\beta(0)$ не достигается (она достигается на обобщенном управлении $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_{+1}$, где δ_s — сосредоточенная в s мера Дирака). Одновременно, в силу той же специфики функционала задачи можно заметить, что проксимальный субградиент $\partial^P \beta(0) \ne \emptyset$ и, стало быть, с формальной точки зрения эта задача при $p = 0$ входит в сферу действия как теоремы 4.1, так и теоремы 4.2.

Далее, предлагаемая в теоремах 4.1, 4.2 и основанная на двойственности устойчивая процедура построения ОМП в нелинейной задаче (OC_p^0), как это обычно и бывает с двойственными алгоритмами, состоит из двух параллельных и неразрывно связанных процедур. Назначение первой из них состоит в том чтобы выделить определенную совокупность значений двойственной переменной λ^s, $s = 1, 2, \ldots$. Например, в регулярном случае такую совокупность значений выделяет устойчивый алгоритм максимизации в вогнутой модифицированной двойственной задаче. Он представляет собою обычный алгоритм стабилизации по Тихонову для приближения к решению этой двойственной задачи или, другими словами, к соответствующему обобщенному вектору Куна–Таккера задачи (OC_p^0). В свою очередь, вторая процедура предлагает составлять искомую ОМП из субэкстремалей (экстремалей) нелинейной МФЛ, в которую в качестве двойственной переменной подставляются выделяемые первой процедурой двойственные значения. Основной смысл теорем 4.1, 4.2 состоит в том, что они показывают, что обе процедуры, взятые в совокупности, действительно порождают конкретную ОМП в исходной задаче (OC_p^0). Причем для того чтобы «сработала» хотя бы одна из этих теорем, достаточно выполнения условия $\beta(p) < +\infty$, т. е. достаточно лишь, чтобы в задаче существовали ОМП. По этой причине описанные в теоремах 4.1, 4.2 процедуры могут составлять теоретическую основу для конструирования устойчивых алгоритмов решения нелинейных практических задач оптимального управления. Однако, в реальности, создание таких алгоритмов для решения тех или иных практических нелинейных экстремальных задач представляет собою, безусловно, сложную проблему, успех в решении которой сильно зависит от той или иной специфики конкретной экстремальной задачи. Описанная ситуация является хорошо известной специалистам, которые имеют дело с решением сложных нелинейных задач.

5. ПЛ и ПМП в нелинейной задаче оптимального управления

Посредством предельного перехода в соотношениях регуляризованной ТКТ в недифференциальной форме в нелинейной задаче оптимального управления (OC_p^0) (теорема 4.1) перекинем мостик к обычной ТКТ в недифференциальной форме для этой задачи, а, как следствие, и к соответствующему ПМП для нее. Основным при этом будет предположение об «аффинном» по u устройстве интегранта F и правой части φ управляемой системы. Так как условия оптимальности предполагают наличие оптимального элемента, то такое «устройство» задачи как раз и будет гарантировать его существование в задаче частного вида, о котором идет речь в замечании 1.3.

Итак, основной целью данного раздела является получение условий оптимальности в задаче (OC_p^0) частного вида, входящей при $\delta = 0$ в семейство зависящих от $\delta \in [0,\delta_0]$ задач

$$(SOC_p^\delta) \qquad I_0^\delta(u) \equiv \int_0^T F_1^\delta(t, x^\delta[u](t))dt + \int_0^T \langle F_2^\delta(t, x^\delta[u](t)), u(t)\rangle dt + G^\delta(x^\delta[u](T)) \to \inf,$$

$$I^\delta(u)(t) \equiv H^\delta(t, x^\delta[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0,T], \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0,T),$$

где $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ — абсолютно-непрерывное решение нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений,

$$\dot{x} = \varphi_1^\delta(t,x) + \varphi_2^\delta(t,x)u(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0^\delta \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

Здесь функции F_1^δ, F_2^δ, φ_1^δ, φ_2^δ «устроены» соответственно так же, как и функции F_1, F_2, φ_1, φ_2 из замечания 1.3, а $U \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество.

Если $\beta(p) < +\infty$, т. е. $\mathcal{U}_p^0 \equiv \{u \in \mathcal{U} : I^0(u) - p = 0\} \neq \emptyset$, то задача (SOC_p^0) разрешима. Это доказывается с помощью стандартных рассуждений, основанных на слабой компактности множества $\mathcal{U}$ и компактности в $C_n[0,T]$ множества траекторий $\{x^0[u] : u \in \mathcal{U}\}$. При этом можно говорить, что справедливо равенство $\beta(p) = \beta_0(p)$. Обозначим через $\mathcal{U}_p^* \subset \mathcal{U}_p^0$ совокупность всех оптимальных управлений в задаче (SOC_p^0) и зафиксируем произвольно выбранный элемент $u^* \in \mathcal{U}_p^*$. Получим условия оптимальности этого элемента с помощью предельного перехода в соотношениях теоремы 4.1. Основные предположения при этом: 1) $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$, т. е. задача (SOC_p^0) обладает обобщенным вектором Куна–Таккера; 2) весовой множитель l_1 равен нулю. Напомним, что точки $p \in \operatorname{dom}\beta$, для которых $\partial^P\beta(p) \neq \emptyset$, лежат всюду плотно в $\operatorname{dom}\beta$, см. раздел 2.2.

Для того чтобы записать условия оптимальности для выбранного элемента $u^* \in \mathcal{U}_p^*$, рассмотрим далее семейство специальных задач $(SOC_p^{\delta,l})$ с добавком

$$(SOC_p^{\delta,l}) \qquad I_0^{\delta,l}(u) \equiv I_0^\delta(u) + l|u-u^*|_{w,2,m} \to \inf,$$

$$I^\delta(u)(t) \equiv H^\delta(t, x^\delta[u](t)) = p(t) \quad \text{при п. в.} \quad t \in X \subset [0,T], \quad u \in \mathcal{U} \subset L_{2,m}(0,T),$$

где $x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$ — решение системы (5.1), $|\cdot|_{w,2,m}$ — так называемая слабая норма в $L_{2,m}(0,T)$ (как известно, слабая сходимость в $L_{2,m}(0,T)$ эквивалентна сходимости в слабой норме $|\cdot|_{w,2,m}$ [16, теорема I.3.11]), $l \in (0,1]$ — положительное число. Можно заметить, что задача $(SOC_p^{0,l})$, как и задача (SOC_p^0), разрешима при любом $l \in [0,1]$. Главным интересующим нас свойством этого семейства задач с добавком является то, что любая ОМП для задачи $(SOC_p^{0,l})$ при $l > 0$ слабо в $L_{2,m}(0,T)$ сходится к u^*. Функцию значений в задаче $(SOC_{p'}^{0,l})$, $p' \in L_{2,1}(X)$ (она определяется так же, как и функция β в задаче $(SOC_{p'}^0)$, $p' \in L_{2,1}(X)$), обозначим через β^l. Очевидно $\beta^l(p') \ge \beta(p')$ $\forall\, p' \in L_{2,1}(X)$, $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{dom}\beta^l$ и $\beta^l(p) = \beta(p)$ при $l > 0$.

Далее заметим, что, так как по предположению $\zeta \in \partial^P\beta(p)$ ($\partial\beta^P(p) \ne \emptyset$), то с учетом определения $\partial^P\beta(p)$ и леммы 2.1 можно утверждать, что $\zeta \in \partial^P\beta^l(p)$ и при всех $l \in (0,1]$, см. замечание 2.1. Более того, одновременно элемент $-\zeta$ является вектором Куна–Таккера специальной задачи с добавком ($SOC_p^{0,l}$) при каждом $l \in (0,l]$ для некоторого фиксированного значения штрафного коэффициента $c > 0$, которое без ограничения общности, с учетом опять же замечания 2.1, можно считать не зависящим от $l \in (0,1]$ в силу ограниченности множества $\mathcal{U}$ и вытекающей из этого равномерной по $l \in (0,1]$ ограниченности эффективного множества $\operatorname{dom}\beta^l$ и функции β^l на нем (на $\operatorname{dom}\beta^l$).

Таким образом, опираясь на теорему 4.1, с учетом замечания 4.4, можно записать неравенство при каждом $l \in (0,1]$ со штрафным коэффициентом c, не зависящим от l

$$L_{p,c}^{\delta^s,l}(u^{*,l,s}, -\zeta) \le L_{p,c}^{\delta^s,l}(u, -\zeta) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{5.2}$$

где ($l_1 = 0$)

$$L_{p,c}^{\delta,l}(u,-\zeta) \equiv I_0^{\delta,l}(u) - \langle \zeta, I^\delta(u) - p\rangle + c\|I^\delta(u) - p\|_{2,1,X}^2 + l|u-u^*|_{w,2,m}^2, \quad u \in \mathcal{U},$$

$u^{*,l,s} \in \mathcal{U}$ — оптимальный элемент в задаче

$$L_{p,c}^{\delta^s,l}(u,-\zeta) \to \min, \quad u \in \mathcal{U}$$

и при этом имеют место предельные соотношения

$$I_0^{0,l}(u^{*,l,s}) \to \beta(p), \quad I^0(u^{*,l,s}) - p \to 0, \quad s \to \infty. \tag{5.3}$$

Последние предельные соотношения (5.3) означают, что последовательность $u^{*,l,s}$, $s = 1, 2, \ldots$, является ОМП в задаче ($SOC_p^{0,l}$), т. е. слабо сходится к u^*. Данное обстоятельство позволяет вывести в результате предельного перехода в неравенстве (5.2) следующее неравенство

$$L_{p,c}^{0,l}(u^*, -\zeta) \le L_{p,c}^{0,l}(u, -\zeta) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$$

или

$$\begin{aligned} I_0^0(u^*) - \langle \zeta, I^0(u^*) - p\rangle + c\|I^0(u^*) - p\|_{2,1,X}^2 \\ \le I_0^0(u) - \langle \zeta, I^0(u) - p\rangle + c\|I^0(u) - p\|_{2,1,X}^2 + l|u-u^*|_{w,2,m}^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Предельный переход при $l \to 0$ в последнем неравенстве приводит к неравенству

$$L^0_{p,c}(u^*, -\zeta) \leq L^0_{p,c}(u, -\zeta) \quad \forall\, u \in \mathcal{U},$$

которое естественно интерпретировать как регулярный недифференциальный ПЛ для элемента u^* в задаче (SOC^0_p) и в котором в качестве ζ может быть взят любой элемент из $\partial^P \beta(p)$ со своим $c > 0$ (оно, вообще говоря, зависит от ζ). Таким образом, может быть сформулирован следующий регулярный ПЛ (т. е. ТКТ) в недифференциальной форме в задаче (SOC^0_p).

Теорема 5.1. *Пусть* $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$, $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ *— произвольно выбранный фиксированный элемент. В этом случае справедливы следующие два утверждения.*

1. *Если* $u^* \in \mathcal{U}^*_p$ *— произвольно выбранный оптимальный элемент в задаче* (SOC^0_p), *то найдется достаточно большое число* $c > 0$, *зависящее, вообще говоря, от* ζ, *такое, что*

$$L^0_{p,c}(u^*, -\zeta) \leq L^0_{p,c}(u, -\zeta) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}.$$

2. *Если* $\hat{u} \in \mathcal{U}^0_p$ *такой элемент, что при некотором* $c > 0$ *имеет место неравенство*

$$L^0_{p,c}(\hat{u}, -\zeta) \leq L^0_{p,c}(u, -\zeta) \quad \forall\, u \in \mathcal{U}, \tag{5.4}$$

то $\mathcal{U}^*_p \neq \emptyset$ *и* $\hat{u} \in \mathcal{U}^*_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение доказано выше посредством рассуждений, проведенных перед формулировкой теоремы. Доказываем второе утверждение. Подставляя произвольный элемент $u \in \mathcal{U}^0_p$ в неравенство (5.4), получаем $I^0_0(\hat{u}) \leq I^0_0(u)$ $\forall\, u \in \mathcal{U}^0_p$, т. е. $\mathcal{U}^*_p \neq \emptyset$ и $\hat{u} \in \mathcal{U}^*_p$. □

Из этого недифференциального ПЛ при дополнительных предположениях дифференцируемости по фазовой переменной x исходных данных задачи (SOC^0_p) мы выведем далее ПМП для управления u^* в «простейшей» (т. е. без фазового ограничения-равенства) задаче оптимального управления

$$L^0_{p,c}(u, -\zeta) \to \min, \quad u \in \mathcal{U}. \tag{5.5}$$

С этой целью сделаем необходимые дополнительные предположения относительно исходных данных задачи (SOC^0_p). Считаем, что в дополнение к уже сделанным выполняются следующие предположения: 1) функция F^0 обладает измеримым по $(t, x, u) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и непрерывным по $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ при п. в. $t \in [0, T]$ градиентом $\nabla_x F^0(\cdot, \cdot, \cdot)$; 2) функция G^0 имеет непрерывный по $x \in \mathbb{R}^n$ градиент $\nabla_x G^0(\cdot)$; 3) функция H^0 имеет измеримый по $(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ и непрерывный по $x \in \mathbb{R}^n$ при п. в. $t \in [0, T]$ градиент $\nabla_x H^0(\cdot, \cdot, \cdot)$; 4) векторная функция φ^0 обладает измеримым по $(t, x, u) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и непрерывным по $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ при п. в. $t \in [0, T]$ якобианом $\nabla_x \varphi^0(\cdot, \cdot, \cdot)$.

Далее, прежде всего, заметим, что ($l_1 = 0$)

$$\begin{aligned} L^0_{p,c}(u, \zeta) = \int_0^T F^0_1(t, x^0[u](t))dt + \int_0^T F^0_2(t, x^0[u](t))dt + G^0(x^0[u](T)) \\ - \int_0^T \chi_X(t)\zeta(t)(H^0(t, x^0[u](t)) - p(t))dt + c\int_0^T \chi_X(t)(H^0(t, x^0[u](t)) - p(t))^2 dt, \end{aligned}$$

где $x^0[u](t)$, $0 \le t \le T$ — решение системы (5.1) при $\delta = 0$, χ_X — характеристическая функция множества $X \subset [0,T]$.

Введем функцию Гамильтона–Понтрягина $\mathcal{H}^0(t,x,u,\psi) = \langle \psi, \varphi_2^0(t,x)u\rangle - F_1^0(t,x) - \langle F_2^0(t,x), u\rangle + \chi_X(t)\zeta(t)(H^0(t,x)-p(t)) - c\chi_X(t)(H^0(t,x)-p(t))^2$. Задача оптимального управления (5.5) является хорошо изученной оптимизационной задачей (см., например, [5]) с точки зрения получения в ней необходимых условий оптимальности в форме ПМП. Таким образом, с учетом сделанных дополнительных предположений, можем сформулировать следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть $\zeta \in \partial^P \beta(p)$ — произвольно выбранный фиксированный элемент и выполняются сформулированные выше дополнительные предположения, связанные со свойствами градиентов функций F^0, G^0, H^0, и якобиана векторной функции φ^0. Пусть $u^* \in \mathcal{U}_p^*$ — произвольно выбранный оптимальный элемент в задаче (SOC_p^0). Тогда выполняется соотношение максимума*

$$\mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), u^*(t), \psi^0[u^*](t)) = \max_{v \in U} \mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), v, \psi^0[u^*](t)) \quad \text{при п. в.} \quad t \in [0,T], \tag{5.6}$$

где через $\psi^0[u^*](t)$, $t \in [0,T]$, обозначено решение сопряженной задачи

$$\dot{\psi} = -\nabla_x \mathcal{H}^0(t, x^0[u^*](t), u^*(t), \psi), \quad \psi(T) = -\nabla_x G^0(x^0[u^*](T)).$$

З а м е ч а н и е 5.1. Можно заметить, что ввиду наличия множителя $(H^0(t,x) - p(t))^2$ в слагаемом $c\chi_X(t)(H^0(t,x)-p(t))^2$ и равенства $H^0(t, x^0[u^*](t)) - p(t) = 0$ при п. в. $t \in X$ решение $\psi^0[u^*](t)$, $t \in [0,T]$, сопряженной задачи, как и сама сопряженная задача, не зависят от штрафного коэффициента $c > 0$.

Итак, если $\partial^P \beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P \beta(p)$, то в соответствии с теоремой 5.2 каждое управление $u^* \in \mathcal{U}_p^*$ удовлетворяет регулярному ПМП (5.6).

References

[1] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization methods: In 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[2] Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978; франц. ориг.:J. Hadamard, *Le problème de Caucy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperbolicues*, Hermann, Paris, 1932.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington–New York, 1977.

[4] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov, *Theory of Extremal Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam–New York–Oxford, 1979.

[5] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

[6] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987. [*Ill-posed Problems in the Natural Science*, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, MSU Publ., Moscow, 1987 (In Russian)].

[7] А. Н. Тихонов, А. С. Леонов, А. Г. Ягола, *Нелинейные некорректные задачи*, Наука, М., 1995; англ. пер.:A. N. Tikhonov, A. S. Leonov, A. G. Yagola, *Nonlinear Ill-Posed Problems*, Taylor and Francis, London, 1998.

[8] М. И. Сумин, “Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ. пер.:M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[9] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **25**:1 (2019), 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **25**:1 (2019), 279–296 (In Russian)].

[10] М. И. Сумин, “Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 151–171. [M. I. Sumin, “Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 151–171 (In Russian)].

[11] А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997; англ. пер.:A. V. Arutyunov, *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 2000.

[12] А. А. Милютин, А. В. Дмитрук, Н. П. Осмоловский, *Принцип максимума в оптимальном управлении*, Центр прикладных исследований мехмата МГУ, М., 2004. [A. A. Milyutin, A. V. Dmitruk, N. P. Osmolovsky, *The Maximum Principle in Optimal Control*, Center for Applied Research of the Faculty of Mechanics and Mathematics of MSU, Moscow, 2004 (In Russian)].

[13] М. И. Сумин, “Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **55**:6 (2015), 947–977; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential Kuhn–Tucker theorem in iterative form or a regularized Uzawa algorithm in a regular nonlinear programming problem”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **55**:6 (2015), 935–961.

[14] М. И. Сумин, “Метод возмущений и регуляризация принципа Лагранжа в нелинейных задачах на условный экстремум”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **64**:12 (2024), 2312—2331; англ. пер.:M. I. Sumin, “Perturbation method and regularization of the Lagrange principle in nonlinear constrained optimization problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **64**:12 (2024), 2823—2844.

[15] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **26**:2 (2020), 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **26**:2 (2020), 252–269 (In Russian)].

[16] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[17] Е. Г. Гольштейн, *Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения*, Наука, М., 1971. [E. G. Golshtein, *Duality Theory in Mathematical Programming and Its Applications*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russian)].

[18] P. D. Loewen, *Optimal Control via Nonsmooth Analysis*, CRM Proceedings & Lecture Notes, **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[19] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **178**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[20] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **330**, Springer, Berlin, 2006.

[21] М. И. Сумин, “Метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа и регуляризация правила множителей Лагранжа в нелинейном оптимальном управлении”, *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, **28**:3 (2022), 202–221. [M. I. Sumin, “Perturbation method, subdifferentials of nonsmooth analysis, and regularization of the Lagrange multiplier rule in nonlinear optimal control”, *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, **28**:3 (2022), 202–221 (In Russian)].

[22] М. И. Сумин, “О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 351–374. [M. I. Sumin, “On regularization of the nondifferential Kuhn–Tucker theorem in

a nonlinear problem for constrained extremum", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 351–374 (In Russian)].

[23] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional analysis*, Nauka Publ., M., 1980 (In Russian)].

[24] М. И. Сумин, "Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, "Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].

[25] Л. Янг, *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Наука, М., 1974; англ. ориг.:L. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia, 1969.

[26] М. И. Сумин, "О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, "On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].

[27] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, 1-е изд., Радио и связь, М., 1987; англ. ориг.:D. -P. Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Academic Press, New York–London–Paris–San Diego–SanFrancisco–Sao Paulo–Sydney–Tokyo–Toronto, 1982.

[28] М. Мину, *Математическое программирование. Теория и алгоритмы*, 1-е изд., Наука, М., 1990; англ. ориг.:M. Minoux, *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, Wiley, New York, 1986.

[29] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации*, Наука, М., 1989. [E. G. Gol'shtein, N. V. Tret'yakov, *Augmented Lagrangians: Theory and Optimization Methods*, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russian)].

[30] Ж. -П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.:J. -P. Aubin, *L'analyse non lineaire et ses motivations economiques*, Masson, Paris–New York, 1984.

[31] М. И. Сумин, "Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, "Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

Информация об авторе

Сумин Михаил Иосифович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 25.08.2025 г.
Поступила после рецензирования 09.09.2025 г.
Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Mikhail I. Sumin, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: m.sumin@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

There is no conflict of interests.

Received 25.08.2025
Reviewed 09.09.2025
Accepted for press 12.09.2025