

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Сенгупта Р., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

УДК 515.126.4



О зависимости неподвижной точки от параметра в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах

Ричик СЕНГУПТА

АНО «Институт искусственного интеллекта»

123317, Российская Федерация, г. Москва, Деловой комплекс «Империя», Пресненская набережная, 6
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. В статье исследуется вопрос о непрерывной зависимости неподвижных точек сжимающих отображений, действующих в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах, от параметра. Рассматривается уравнение вида $x = F(x, p)$. В нем $x \in X$ — это неизвестная, принадлежащая полному (q_1, q_2) -квазиметрическому пространству X , p — это параметр, лежащий в заданном топологическом пространстве P , а $F : X \times P \rightarrow X$ — это заданное отображение. Предполагается, что это отображение является сжимающим по переменной x . С использованием известных условий существования и единственности неподвижной точки сжимающих отображений полных (q_1, q_2) -квазиметрических пространств, получены достаточные условия, при которых отображение, которое каждому $p \in P$ ставит в соответствие решение $x(p)$ рассматриваемого уравнения, является непрерывным. Получено следствие, гарантирующее непрерывность отображения $x(p)$ в случае, когда X является полным метрическим пространством. Кроме того, рассмотрен случай, когда топологическое пространство P является (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством. Получены достаточные условия липшицевости отображения $x(p)$, получена оценка константы Липшица этого отображения. Выведено следствие этого результата для случая, когда X является полным метрическим пространством, а пространство параметров P является метрическим.

Ключевые слова: квазиметрические пространства, непрерывная зависимость от параметра, решение неявных уравнений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, <https://rscf.ru/project/23-11-20020/>).

Для цитирования: Сенгупта Р. О зависимости неподвижной точки от параметра в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 267–274. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

SCIENTIFIC ARTICLE

© R. Sengupta, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

On the dependence of a fixed point on a parameter in (q_1, q_2) -quasimetric spaces

R. SENGUPTA

Artificial Intelligence Research Institute

6 Presnenskaya embankment, Business Complex “Empire”, Moscow 123317, Russian Federation

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. In the paper, we investigate the problem of continuous dependence of fixed points of contractive mappings in (q_1, q_2) -quasimetric spaces on a parameter. We study equations of the form $x = F(x, p)$ where $x \in X$ is the unknown variable in a complete (q_1, q_2) -quasimetric space X , the parameter p lies in a given topological space P , and $F : X \times P \rightarrow X$ is a prescribed mapping. It is assumed that F is contractive in the variable x .

Using the classical existence and uniqueness results for fixed points of contractive mappings in complete (q_1, q_2) -quasimetric spaces, we derive sufficient conditions ensuring that the mapping assigning to each parameter $p \in P$ the corresponding solution $x(p)$ of the equation is continuous. As a corollary, we establish continuity of $x(p)$ in the case where X is a complete metric space.

We further consider the situation where the parameter space P itself carries the structure of a (q_1, q_2) -quasimetric space. In this context, sufficient conditions are obtained guaranteeing that the solution map $x(p)$ is Lipschitz continuous, together with an explicit estimate for its Lipschitz constant. As a consequence, we present a corollary for the case when X is a complete metric space and P is a metric space.

Keywords: quasimetric spaces, continuous dependence on a parameter, solution of implicit equations

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, <https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/>).

Mathematics Subject Classification: 54A05, 54H25.

For citation: Sengupta R. On the dependence of a fixed point on a parameter in (q_1, q_2) -quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 267–274. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-267-274>

Введение

Одним из фундаментальных результатов теории неподвижных точек является принцип сжимающих отображений (см., например, [1, с. 82]). Эта теорема утверждает, что для любого сжимающего отображения F полного метрического пространства в себя существует единственное решение уравнения $x = F(x)$. Принцип сжимающих отображений имеет многочисленные обобщения. Так, например, в [2] это утверждение было доказано для отображений некоторого широкого класса пространств, содержащего в себе все полные метрические пространства. Напомним, какие пространства рассматривались в [2].

Пусть задано непустое множество X и функция $\rho_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$. Здесь $\mathbb{R}_+$ — это множество неотрицательных чисел. Как известно, функция ρ_X называется метрикой, а пара (X, ρ_X) — метрическим пространством, если выполнены следующие условия:

- 1) $\rho_X(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);
- 2) $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- 3) $\rho_X(x, z) \leq \rho_X(x, y) + \rho_X(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Функцию ρ_X называют квазиметрикой, а пару (X, ρ_X) — квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы тождества и неравенство треугольника (см., например, [2]).

Пусть заданы числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Рассмотрим еще одну аксиому для функции ρ_X

- 3') $\rho_X(x, z) \leq q_1 \rho_X(x, y) + q_2 \rho_X(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ ((q_1, q_2) — обобщенное неравенство треугольника).

Функцию ρ_X называют (q_1, q_2) -квазиметрикой, а пару (X, ρ_X) — (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, если для ρ_X выполняются аксиомы 1) и 3') (см., например, [2, с. 527], [3, с. 34]). Очевидно, что $(1, 1)$ -квазиметрика является квазиметрикой, а $(1, 1)$ -квазиметрическое пространство является квазиметрическим пространством.

Для (q_1, q_2) -квазиметрических пространств в [2] был доказан следующий аналог принципа сжимающих отображений. Пусть (X, ρ_X) — это полное (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, отображение $F : X \rightarrow X$ является замкнутым и сжимающим, т. е. существует константа $0 \leq \beta < 1$, такая, что для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\rho_X(F(x_1), F(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2).$$

Тогда уравнение $x = F(x)$ имеет единственное решение.

В настоящей работе рассматривается более общее уравнение

$$x = F(x, p)$$

с параметром p , лежащим в заданном топологическом пространстве P , в предположении, что при каждом $p \in P$ отображение $F(\cdot, p)$ является сжимающим отображением полного (q_1, q_2) -квазиметрического пространства X в себя. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить условия, при которых решение этого уравнения $x(p)$ непрерывно. Кроме того, предполагая, что топологическое пространство P является (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством, мы получим достаточные условия липшицевости отображения $x(p)$.

Результаты, связанные с поиском неподвижных точек отображений и решений неявных уравнений в метрических пространствах, имеют широкий спектр применений в различных областях анализа, включая оптимизацию (см., например, [4]), оптимальное управление (см., например, [5]), теорию дифференциальных включений (см., например, [5]), теорию точек совпадения (см., например, [6–9]) и математическую экономику (см., например, [10]). Существует множество обобщений и модификаций вариационных принципов, которые позволяют получить вышеупомянутые результаты (см., например, [11, 12]).

1. Предварительные сведения

Пусть заданы числа $q_1, q_2 \geq 1$. Пусть (X, ρ_X) — это (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство. Напомним ряд определений, связанных с этим понятием.

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется *сходящейся* к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_X(x, x_i) < \varepsilon$ для любого $i > N$. В отличие от метрических пространств, (q_1, q_2) -квазиметрические пространства могут быть нехаусдорфовы. Поэтому сходящаяся последовательность может иметь более одного предела (см., например, [2, 13]).

Последовательность $\{x_i\} \subset X$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что $\rho_X(x_j, x_i) < \varepsilon$ для любых $i > j > N$. В отличие от метрических пространств, в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах из сходимости последовательности не следует ее фундаментальность (см., например, [2]).

Пространство (X, ρ_X) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Отображение $F : X \rightarrow X$ называется *сжимающим* с константой $0 \leq \beta < 1$, если для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено

$$\rho_X(F(x_1), F(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2).$$

Пусть заданы числа $\tilde{q}_1 \geq 1$, $\tilde{q}_2 \geq 1$, $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрическое пространство (Y, ρ_Y) и отображение $F : X \rightarrow Y$. Обозначим график отображения F через $\text{grh}(F)$, т. е.

$$\text{grh}(F) := \{(x, F(x)) : x \in X\}.$$

Отображение $F : X \rightarrow Y$ называется *замкнутым*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ и точек $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$ таких, что $x_i \rightarrow x_0$, $y_i \rightarrow y_0$ и $(x_i, y_i) \in \text{grh}(F)$ для любого i , выполняется $(x_0, y_0) \in \text{grh}(F)$. В отличие от метрических пространств, в квазиметрических пространствах график сжимающего отображения может не быть замкнутым (см., например, [2]).

Пусть P — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Отображение $F : P \rightarrow X$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности $p_n \in P$ и любой точки $p \in P$, если $p_n \rightarrow p$ (в топологическом пространстве P), то $F(p_n) \rightarrow F(p)$.

2. Основные результаты

Пусть заданы числа $q_1 \geq 1$ и $q_2 \geq 1$. Пусть (X, ρ_X) — это (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство, P — это топологическое пространство, $F : X \times P \rightarrow X$ — это заданное отображение.

Рассмотрим уравнение

$$x = F(x, p) \tag{2.1}$$

с неизвестным $x \in X$ и параметром $p \in P$. Приведем достаточные условия существования решения $x(p)$, зависящего от параметра $p \in P$ непрерывно.

Теорема 2.1. *Предположим, что (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) полно, а в топологическом пространстве P выполняется первая аксиома счетности. Пусть отображение $F : X \times P \rightarrow X$ удовлетворяет следующим предположениям:*

- 1) *существует неотрицательное число $\beta < 1/q_2$ такое, что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β , т. е.*

$$\rho_X(F(x_1, p), F(x_2, p)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \quad \forall p \in P; \quad (2.2)$$

- 2) *для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является замкнутым;*
- 3) *для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является непрерывным.*

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P .

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $p \in P$. Из предположений доказываемой теоремы следует, что выполняются все условия принципа сжимающих отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах из [2, с. 15]. Из него следует, что уравнение $x = F(x, p)$ имеет единственное решение $x(p)$. В силу произвольности выбора точки $p \in P$ отображение $x(\cdot)$ определено на всем пространстве P . Покажем, что это отображение непрерывно.

Зафиксируем произвольную точку $p \in P$ и произвольную сходящуюся к ней последовательность $\{p_n\}_{n=1}^\infty \subset P$. Из определения отображения $x(\cdot)$ следует, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) = \rho_X(F(x(p), p), F(x(p_n), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Применяя обобщенное неравенство треугольника к правой части этого равенства получаем неравенство

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n)) + q_2 \rho_X(F(x(p), p_n), F(x(p_n), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, из первого предположения доказываемой теоремы следует неравенство

$$\rho_X(F(x(p), p_n), F(x(p_n), p_n)) \leq \beta \rho_X(x(p), x(p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Из последних двух неравенств следует, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n)) + q_2 \beta \rho_X(x(p), x(p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Следовательно,

$$(1 - q_2 \beta) \rho_X(x(p), x(p_n)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\beta < 1/q_2$, то $1 - q_2 \beta > 0$. Поэтому, разделив последнее неравенство на $1 - q_2 \beta$, получаем, что

$$\rho_X(x(p), x(p_n)) \leq \frac{q_1}{1 - q_2 \beta} \rho_X(F(x(p), p), F(x(p), p_n))$$

при всех $n = 1, 2, \dots$.

По предположению доказываемой теоремы отображение $F(x(p), \cdot)$ непрерывно на пространстве P . Отсюда, поскольку $p_n \rightarrow p$ при $n \rightarrow \infty$, правая часть в полученном выше неравенстве стремится к нулю. Следовательно, $x(p_n) \rightarrow x(p)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, в силу произвольности выбора точки $p \in P$ и сходящейся к ней последовательности p_n отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P . $\square$

Если (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, то оно является полным (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством с $q_1 = q_2 = 1$. В этом случае, для любого сжимающего отображения его константа сжатия β удовлетворяет соотношению $\beta < 1 = 1/q_2$. Наконец, как известно, любое сжимающее отображение метрического пространства X в себя является замкнутым и, более того, непрерывным. Таким образом, из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.1. Пусть (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, (P, ρ_P) — это метрическое пространство. Предположим, что

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1$, такое что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β ;
- 2) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является непрерывным.

Тогда для каждого $p \in P$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $x(p)$, причем отображение $p \mapsto x(p)$ непрерывно на P .

В близких предположениях это утверждение доказано, например, в [7, гл. I, § 1.1, (A4)].

Далее будем предполагать, что заданы числа $\tilde{q}_1 \geq 1$ и $\tilde{q}_2 \geq 1$. Пусть теперь топологическое пространство P является $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрическим пространством с $(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$ -квазиметрикой ρ_P . Приведем достаточные условия липшицевости функции решения $x(p)$ для уравнения (2.1).

Теорема 2.2. Предположим, что (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) полно. Пусть отображение $F : X \times P \rightarrow X$ удовлетворяет следующим предположениям:

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1/q_2$ такое, что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β , т. е. имеет место (2.2);
- 2) для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является замкнутым;
- 3) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является липшицевым с константой Липшица $L > 0$, т. е.

$$\rho_X(F(x, p_1), F(x, p_2)) \leq L \rho_P(p_1, p_2) \quad \forall p_1, p_2 \in P.$$

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и для любых $p_1, p_2 \in P$ имеет место неравенство

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq \frac{q_1 L}{1 - q_2 \beta} \rho_P(p_1, p_2). \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Повторяя рассуждения, приведенные в начале доказательства теоремы 2.1, из принципа сжимающих отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах [2, с. 15] получаем, что уравнение (2.1) имеет единственное решение $x(p)$ при каждом $p \in P$. Перейдем к доказательству липшицевости отображения $x(\cdot)$.

Зафиксируем две произвольные точки $p_1, p_2 \in P$. Из определения отображения $x(\cdot)$ вытекают равенства $x(p_1) = F(x(p_1), p_1)$ и $x(p_2) = F(x(p_2), p_2)$. Поэтому

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) = \rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_2), p_2)).$$

Применяя обобщенное неравенство треугольника к правой части этого равенства, получаем, что

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 \rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_1), p_2)) + q_2 \rho_X(F(x(p_1), p_2), F(x(p_2), p_2)). \quad (2.4)$$

Из липшицевости отображения $F(x(p_1), \cdot)$ с константой Липшица L следует, что имеет место неравенство

$$\rho_X(F(x(p_1), p_1), F(x(p_1), p_2)) \leq L \rho_P(p_1, p_2).$$

А так как отображение $F(\cdot, p_2)$ является сжимающим с константой сжатия β , получаем, что имеет место неравенство

$$\rho_X(F(x(p_1), p_2), F(x(p_2), p_2)) \leq \beta \rho_X(x(p_1), x(p_2)).$$

Из последних двух неравенств и соотношения (2.4) следует, что

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 L \rho_P(p_1, p_2) + q_2 \beta \rho_X(x(p_1), x(p_2)).$$

Следовательно,

$$(1 - q_2 \beta) \rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq q_1 L \rho_P(p_1, p_2).$$

Из этого неравенства, поскольку по предположению 1) доказываемой теоремы имеет место соотношение $1 - q_2 \beta > 0$, получаем (2.3) $\square$

Как отмечалось выше, если (X, ρ_X) является полным метрическим пространством, то оно является полным (q_1, q_2) -квазиметрическим пространством с $q_1 = q_2 = 1$; константа сжатия $\beta < 1$ сжимающего отображения удовлетворяет соотношению $\beta < 1 = 1/q_2$; а само сжимающее отображение метрического пространства X в себя является замкнутым. Таким образом, из теоремы 2.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.2. Пусть (X, ρ_X) — это полное метрическое пространство, (P, ρ_P) — это метрическое пространство. Предположим, что

- 1) существует неотрицательное число $\beta < 1$, такое что для каждого $p \in P$ отображение $F(\cdot, p) : X \rightarrow X$ является сжимающим с константой сжатия β ;
- 2) для каждого $x \in X$ отображение $F(x, \cdot) : P \rightarrow X$ является липшицевым с константой Липшица $L > 0$.

Тогда для каждого $p \in P$ существует единственное решение $x(p) \in X$ уравнения (2.1), т. е.

$$x(p) = F(x(p), p),$$

и для любых $p_1, p_2 \in P$ имеет место неравенство

$$\rho_X(x(p_1), x(p_2)) \leq \frac{L}{1 - \beta} \rho_P(p_1, p_2).$$

References

- [1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, I, II, Dover Publications, Mineola, New York, 1957, 1961.

- [2] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Докл. РАН.*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Dokl. RAS*, **469**:5 (2016), 434–437.
- [3] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский, Р. Сенгупта, “О точных неравенствах треугольника в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:125 (2019), 33–38. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy, R. Sengupta, “On exact triangle inequalities in (q_1, q_2) -quasimetric spaces”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:125 (2019), 33–38 (In Russian)].
- [4] A. V. Arutyunov, B. D. Gel'man, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-like condition. Existence of solutions to equations and minima of functions in metric spaces”, *Fixed Point Theory*, **20**:1 (2019), 31–58.
- [5] A. V. Arutyunov, V. A. de Oliveira, F. L. Pereira, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the solvability of implicit differential inclusions”, *Applicable Analysis*, **94**:1 (2015), 129–143.
- [6] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241–251.
- [7] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer–Verlag, New York, 2003.
- [8] A. V. Arutyunov, E. R. Avakov, S. E. Zhukovskiy, “Stability Theorems for Estimating the Distance to a Set of Coincidence Points”, *SIAM Journal on Optimization*, **25**:2 (2015), 807–828.
- [9] М. В. Борзова, Е. С. Жуковский, Н. Ю. Черникова, “Одна оценка неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических пространств”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1255–1260. [M. V. Borzova, E. S. Zhukovskiy, N. Yu. Chernikova, “One estimate of fixed points and coincidence points of mappings of metric spaces”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1255–1260 (In Russian)].
- [10] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, N. G. Pavlova, “Equilibrium price as a coincidence point of two mappings”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:2 (2013), 158–169.
- [11] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.
- [12] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Caristi-Like Condition and the Existence of Minima of Mappings in Partially Ordered Spaces”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **180**:1 (2019), 48–61.
- [13] R. Sengupta, “On fixed points of contraction maps acting in (q_1, q_2) -quasimetric spaces and geometric properties of these spaces”, *Eurasian Math. J.*, **8**:3 (2017), 70–76.

Информация об авторе

Сенгупта Ричик, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт искусственного интеллекта, г. Москва; научный сотрудник Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: r.sengupta@skoltech.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 30.05.2025 г.

Поступила после рецензирования 05.09.2025 г.

Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Richik Sengupta, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Research Scientist, Artificial Intelligence Research Institute, Moscow; Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.

E-mail: r.sengupta@skoltech.ru.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9916-8177>

There is no conflict of interests.

Received 30.05.2025

Reviewed 05.09.2025

Accepted for press 12.09.2025