

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., Хаммади А.Х., Черникова А.В., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

УДК 517.935



Задачи оптимального периодического сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями

Людмила Ивановна РОДИНА^{1,2}, Алаа Хуссейн ХАММАДИ³,Анастасия Владимировна ЧЕРНИКОВА¹¹ ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»

119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

³ Университет Аль-Кадисия

58001, Ирак, г. Аль-Дивания, ул. Вавилония, 29

Аннотация. Рассматриваются модели однородных или структурированных (по виду, возрасту или иному признаку) популяций, динамика которых при отсутствии эксплуатации задана системой разностных уравнений $x(k+1) = F(k, x(k))$, где $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$, $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ — численность i -го вида или возрастного класса популяции в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$; $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные функции, которые определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Предполагается, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ популяция подвержена промысловому воздействию $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Тогда исследуется модель эксплуатируемой популяции, заданной системой разностных уравнений

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Исследуется задача оптимального сбора возобновляемого ресурса на неограниченном промежутке времени при периодическом режиме эксплуатации, при котором достигаются наибольшие значения характеристик сбора. Первая из таких характеристик — средняя временная выгода, заданная пределом при $k \rightarrow \infty$ среднего арифметического стоимости ресурса за k сборов. Другая — эффективность сбора, равная пределу при $k \rightarrow \infty$ отношения стоимости ресурса, полученной за k сборов, к сумме приложенных для этого управлений (усилий сбора). Результаты работы проиллюстрированы на примерах однородной эксплуатируемой популяции, заданной дискретным логистическим уравнением, и структурированной популяции, состоящей из двух видов.

Ключевые слова: модель подверженной промыслу популяции, оптимальная эксплуатация, периодический сбор возобновляемого ресурса, средняя временная выгода, эффективность сбора ресурса

Для цитирования: Родина Л.И., Хаммади А.Х., Черникова А.В. Задачи оптимального периодического сбора ресурса для моделей популяций, заданных разностными уравнениями // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 255–266. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, A. H. Hammadi, A. V. Chernikova, 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

Problems of optimal periodic resource harvesting for population models described by difference equations

Lyudmila I. RODINA^{1,2}, Alaa H. HAMMADI³,Anastasia V. CHERNIKOVA¹¹ Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

² National University of Science and Technology "MISIS"

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

³ University of Al-Qadisiyah

29 Babilon St., Al Diwaniyah 58001, Iraq

Abstract. We consider models of homogeneous or structured (by type, age, or other characteristic) populations, the dynamics of which, in the absence of exploitation, is given by a system of difference equations $x(k+1) = F(k, x(k))$, where $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$, $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ is the amount of the i -th type or age class of the population at a time $k = 0, 1, 2, \dots$; $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ are real functions that are defined and continuous on the set $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

It is assumed that at times $k = 1, 2, \dots$ the population is exposed to harvesting $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Then the model of the exploited population is investigated, given by a system of difference equations

$$X(k+1) = F(k, (1-u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

where $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $(1-u(k))X(k) = ((1-u_1(k))X_1(k), \dots, (1-u_n(k))X_n(k))$, $X_i(k)$ and $(1-u_i(k))X_i(k)$ is the amount of the resource of the i type before and after harvesting at the time k respectively, $i = 1, \dots, n$.

The problem of optimal harvesting of a renewable resources for an unlimited period of time under periodic operation mode, in which the highest values of collection characteristics are achieved, is investigated. The first of these characteristics is the average time profit given by the limit at $k \rightarrow \infty$ of the arithmetic mean of the cost of the resource over k harvesting. Another characteristic is the harvesting efficiency equal to the limit at $k \rightarrow \infty$ of the ratio of the cost of the resource gathered in k harvestings to the amount of applied control (collection efforts). The results of the work are illustrated by examples of a homogeneous exploited population, given by a discrete logistic equation, and a structured population of two species.

Keywords: model of a population subject to harvesting, optimal exploitation, periodic harvesting of a renewable resource, average time profit, resource harvesting efficiency

Mathematics Subject Classification: 39A05, 39A23, 49N20, 93C55.

For citation: Rodina L.I., Chernikova A.V., Hammadi A.H. Problems of optimal periodic resource harvesting for population models described by difference equations. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 255–266. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-255-266>

Введение

Многие виды животных и растений имеют сезонный характер размножения. В этой связи представляет интерес исследование динамических режимов и устойчивости решений систем, описывающих такие популяции [1, 2]. В условиях промыслового воздействия является актуальной задача описания оптимальных режимов сбора возобновляемого ресурса, при которых часть популяции сохраняется для дальнейшего восстановления. При этом рассматриваемые популяции могут быть заданы различными детерминированными или стохастическими моделями [3–5]. Так, в работе [6] для дискретного аналога модели Базыкина–Людвига, описывающего популяции животных с сезонным характером размножения, изучены локальные последствия эффекта Олли. Исследование оптимальных режимов промысла при циклическом изменении лимитирующих популяционный рост факторов внешней среды проведено в работе [7] для модели популяции, заданной функцией Риккера.

К одной из задач оптимальной добычи возобновляемого ресурса относится задача нахождения наибольших значений характеристик сбора — эффективности и дохода, в том числе в долгосрочной перспективе. Например, в работе [8] исследован периодический импульсный сбор, доставляющий максимум дисконтированного дохода. Авторами работы [9] для популяции, распределенной на торе, доказано существование доли отбора, доставляющей максимум среднего временного дохода при периодическом промысле. На примере модели взаимодействия двух видов типа «хищник–жертва» (энтомофаг и насекомое-вредитель соответственно), рассмотренной в [10], исследуются вопросы существования решений задачи импульсного управления и их непрерывной зависимости от параметров управления (внесения биопрепарата-энтомофага). Для моделей популяций, динамика которых определена дифференциальными и разностными уравнениями, в работах [11, 12] построены управляющие воздействия, доставляющие заданные и наибольшие значения средней временной выгоды и эффективности сбора. В работе [13] доказано существование предела и получена оценка средней временной выгоды, выполненная с вероятностью единица, для модели эксплуатируемой популяции, определенной разностными уравнениями со случайными параметрами.

Настоящая работа является продолжением публикаций [11, 12, 14], в которых положено начало исследования различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь для модели популяции, динамика которой задана системой разностных уравнений, описан периодический режим сбора, при котором средняя временная выгода и эффективность достигают наибольших значений. Решение данной задачи проиллюстрировано на примерах однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением, и структурированной популяции, описывающей взаимодействие двух возрастных классов типа «симбиоз».

1. Оптимальное управление при периодическом режиме сбора ресурса

Рассмотрим модель популяции, состоящей из n видов или возрастных классов. В случае $n = 1$ популяция содержит один вид, ее называют однородной; при $n \geq 2$ популяцию называют структурированной. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ численность i -го вида или возрастного класса популяции в момент времени $k = 1, 2, \dots$. При отсутствии эксплуатации динамика всех видов $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ задана системой разностных

уравнений

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные функции, которые определены и непрерывны на множестве $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$. В данной работе предполагаем, что функции $F_i(k, x)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$, то есть $F_i(k + \tau, x) = F_i(k, x)$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$, которую будем интерпретировать как управление для достижения лучшего результата сбора. Также рассмотрим множество всех управлений

$$U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}.$$

Обозначим через $X(k) = (X_1(k), \dots, X_n(k))$, $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$. Исследуем модель популяции, подверженной промыслу, динамика которой задана системой разностных уравнений

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$. Отметим, что

$$X(k) = X(k, u(k), X_1) = (X_1(k, u(k), X_1), \dots, X_n(k, u(k), X_1))$$

является решением системы (1.1), удовлетворяющим начальному условию $X(1) = X_1$.

Пусть $C_i(k) \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида ресурса, тогда сумма $\sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j)$ равна общей стоимости ресурса, собранного в момент j . Предполагаем, что функции $C_i(k)$ являются периодическими с периодом $\tau \geq 2$, то есть $C_i(k + \tau) = C_i(k)$, $i = 1, \dots, n$. В работах [12, 14] исследуется характеристика сбора возобновляемого ресурса, которая называется *средней временной выгодой* и определяется функцией

$$H_*(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j).$$

Если существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j)$, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H(\bar{u}, X(1))$.

Исследуем также другую характеристику сбора возобновляемого ресурса — *эффективность*, которая рассмотрена в работе [12] и задана функцией

$$E_*(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}.$$

Если существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j)X_i(j)u_i(j) \left(\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}$, то эффективность сбора ресурса будем обозначать через $E(\bar{u}, X(1))$.

Исследуем периодический режим сбора ресурса с периодом $\tau \geq 2$, то есть рассмотрим периодические управляющие функции $u_i(k + \tau) = u_i(k)$, $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, n$. Если уравнение (1.1) имеет периодическое решение $X(k + \tau) = X(k)$, то обозначим через

$V = V(x(1), \dots, x(\tau))$ область притяжения цикла $X(u(1), \dots, u(\tau)) = (X(1), \dots, X(\tau))$. Рассмотрим множество $U(\tau) \subset U$ периодических управлений с периодом τ , при которых уравнение (1.1) имеет периодическое решение с тем же периодом. Обозначим k -ю итерацию функции F через F^k , то есть $F^1 = F$, $F^k = F(F^{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$

Напомним следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [15, с. 7]). Точка $\beta^1(u)$ называется *периодической точкой периода $\tau \geq 2$* для системы (1.1), если

$$F^\tau(\beta^1(u)) = \beta^1(u) \quad \text{и} \quad F^m(\beta^1(u)) \neq \beta^1(u)$$

при $m = 1, \dots, \tau - 1$.

Если $\tau \geq 2$, то каждая из точек $\beta^m(u) = F^m(\beta^1(u))$, $m = 1, \dots, \tau$, также является периодической точкой периода τ , то есть точки $\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B = B(u(1), \dots, u(\tau)) = \{\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)\}$ периода τ .

О п р е д е л е н и е 1.2. (см. [15, с. 9]). Областью притяжения $V = V(\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u))$ цикла B называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$F(V) \subset V \quad \text{и} \quad \bigcap_{k \geq 1} F^k(V) = B.$$

П р е д л о ж е н и е 1.1. Предположим, что при периодическом режиме эксплуатации $u_i(j + \tau) = u_i(j)$ уравнение (1.1) имеет периодическое решение $X_i(j + \tau) = X_i(j)$, $i = 1, \dots, n$, с периодом $\tau \geq 2$. Тогда для любой начальной точки $X_1 \in V$ выполнены равенства

$$H(\bar{u}, X(1)) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \beta_i^j(u) u_i(j), \quad (1.2)$$

$$E(\bar{u}, X(1)) = \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \beta_i^j(u) u_i(j) \left(\sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}. \quad (1.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Идея доказательства данного предложения схожа с идеей доказательств [12, утверждение 2] и [14, утверждение 2] в случае, когда управляющие воздействия стационарны. Для полноты изложения приведем его.

Поскольку система (1.1) обладает циклом B , для каждой начальной точки $X_1 \in V$ траектория решения $X(k, u(k), X_1)$ данной системы распадается на τ последовательностей, сходящихся к точкам $\beta^1(u), \dots, \beta^\tau(u)$ соответственно (см. [15, с. 9]). Это означает, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} X_i(m + p\tau, u(m + p\tau), X_1) = \beta_i^m(u), \quad m = 1, 2, \dots, \tau, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим через $Y(j) = \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)$. Поскольку $u_i(k + \tau) = u_i(k)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$, то

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} Y(m + p\tau) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i(m + p\tau) X_i(m + p\tau, u(m + p\tau), X_1) u_i(m + p\tau) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(m) \beta_i^m(u) u_i(m). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, X(1)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p\tau} \sum_{j=1}^{p\tau} Y(j) \\ &= \frac{1}{\tau} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\tau} Y(m + p\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(m) \beta_i^m(u) u_i(m). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.2) выполнено для любой точки $X_1 \in V$.

Найдем значение эффективности сбора ресурса при периодическом режиме эксплуатации $u_i(j + \tau) = u_i(j)$, $j = 1, 2, \dots$:

$$E(\bar{u}, X(1)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n u_i(j)} = \frac{\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)}{\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j)}.$$

Таким образом, получили равенства (1.2) и (1.3), выполненные для любой начальной точки $X_1 \in V$. $\square$

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{n\tau}$. Рассмотрим функцию

$$D(x) \doteq \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) (F_i(j, x(j)) - x_i(j))$$

и множество

$$G \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^{n\tau} : x(1) \leq F(\tau, x(\tau)) \neq 0; x(k) \leq F(k-1, x(k-1)) \neq 0, k = 2, \dots, \tau\}.$$

Неравенство вида $x \leq y$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ всюду в статье будем понимать как совокупность неравенств $x_i \leq y_i$, $i = 1, \dots, n$.

Теорема 1.1. *Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G} \subseteq G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$ таких, что $(X(1), \dots, X(\tau)) \in \tilde{G}$, выполнено неравенство*

$$H(\bar{u}, X(1)) \leq H(\bar{u}^*, x^*(1)) = D(x^*),$$

где $\bar{u}^* \in U(\tau)$ — периодическое управление такое, что

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))}, \quad k = 2, \dots, \tau. \quad (1.4)$$

Доказательство. Обозначим через $\tilde{X}(k) \doteq (1 - u(k))X(k)$ видовой состав популяции после сбора в момент времени $k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\tilde{X}(k+1) = (1 - u(k+1))F(k, \tilde{X}(k)), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Пусть $z(u(1), \dots, u(\tau)) \doteq \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j)$. Найдем наибольшее значение этой функции при условии, что $X(k+\tau) = X(k)$ и $u(k+\tau) = u(k)$, $k = 1, 2, \dots$. Сделаем следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
 z(u(1), \dots, u(\tau)) &= \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \\
 &= \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n C_i(j) F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1)) u_i(j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) u_i(j+1) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) (1 - u_i(j+1)) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j+1) \tilde{X}_i(j+1) \\
 &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) (F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \tilde{X}_i(j)). \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Таким образом, $z(u(1), \dots, u(\tau)) = \tau \cdot D(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))$. Следовательно, наибольшее значение функции $z(u(1), \dots, u(\tau))$ совпадает с наибольшим значением $\tau \cdot D(x(1), \dots, x(\tau))$ и достигается при $(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau)) = x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G}$. Поэтому

$$\tilde{X}(1) = \tilde{X}(\tau+1) = (1 - u(\tau+1)) F(\tau, \tilde{X}(\tau)) = (1 - u^*(1)) F(\tau, x^*(\tau)) = x^*(1),$$

$$\tilde{X}(k) = (1 - u^*(k)) F(k-1, \tilde{X}(k-1)) = (1 - u^*(k)) F(k-1, x^*(k-1)) = x^*(k), \quad k = 2, \dots, \tau.$$

Отсюда получаем выражение для периодического управления, заданного (1.4).

Таким образом, по предложению 1.1 максимальное значение функции $H(\bar{u}, X(1))$ равно (1.2). $\square$

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{n\tau}$. Для оценки эффективности сбора возобновляемого ресурса рассмотрим функцию

$$E(x) \doteq \tau D(x) \left(\tau n - \sum_{i=1}^n \frac{x_i(1)}{F_i(\tau, x(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{x_i(j)}{F_i(j-1, x(j-1))} \right)^{-1}$$

и множество $\tilde{G} \subseteq G$.

Теорема 1.2. *Предположим, что функция $E(x)$ достигает наибольшего значения $E(x^*)$ в точке $x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G} \subseteq G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$ таких, что $(X(1), \dots, X(\tau)) \in \tilde{G}$, выполнено неравенство*

$$E(\bar{u}, X(1)) \leq E(\bar{u}^*, x^*(1)) = E(x^*),$$

где $\bar{u}^* \in U(\tau)$ — периодическое управление такое, что

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}; \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))}, \quad k = 2, \dots, \tau. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть

$$v(u(1), \dots, u(\tau)) \doteq \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) \left(\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j) \right)^{-1}.$$

Из (1.6) следует

$$\sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) X_i(j) u_i(j) = \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i(j) \left(F_i(j, \tilde{X}_i(j)) - \tilde{X}_i(j) \right).$$

Учитывая, что $X(k + \tau) = X(k)$, $u(k + \tau) = u(k)$, $k = 1, 2, \dots$, и принимая во внимание (1.5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\tau+1} \sum_{i=1}^n u_i(j) &= \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n u_i(j+1) = \tau n - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{(1 - u_i(j+1)) F_i(j, \tilde{X}_i(j))}{F_i(j, \tilde{X}_i(j))} \\ &= \tau n - \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j+1)}{F_i(j, \tilde{X}_i(j))} = \tau n - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(1)}{F_i(\tau, \tilde{X}_i(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j)}{F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1))}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$v(u(1), \dots, u(\tau)) = \frac{\tau \cdot D(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))}{\tau n - \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(1)}{F_i(\tau, \tilde{X}_i(\tau))} - \sum_{j=2}^{\tau} \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{X}_i(j)}{F_i(j-1, \tilde{X}_i(j-1))}}.$$

Следовательно $v(u(1), \dots, u(\tau)) = E(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau))$. Наибольшее значение функции $v(u(1), \dots, u(\tau))$ совпадает с наибольшим значением $E(x(1), \dots, x(\tau))$ и достигается при $(\tilde{X}(1), \dots, \tilde{X}(\tau)) = x^* = (x^*(1), \dots, x^*(\tau)) \in \tilde{G}$ и управлениях, заданных (1.7).

Значит, по предложению 1.1 максимальное значение функции $E(\bar{u}, X(1))$ равно (1.4). $\square$

2. Примеры построения оптимальных режимов эксплуатации популяций

Пример 2.1. Найдем оптимальные режимы промысла однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = a(k)x(k)(1-x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $x \in [0, 1]$ — численность популяции, $a(k) > 0$ — коэффициент собственной скорости роста. Предполагаем, что коэффициент $a(k)$ периодический с периодом 2; пусть $a(k) = 1.5$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $a(k) = 3$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Тогда развитие однородной популяции можно описать периодическими функциями

$$F(1, x(1)) = 1.5x(1)(1-x(1)), \quad F(2, x(2)) = 3x(2)(1-x(2)).$$

Будем считать, что агрегированная стоимость условной единицы однородной популяции равна $C(1) = 1$ и $C(2) = 2$. Функция

$$\begin{aligned} D(x(1), x(2)) &= \frac{1}{2} \left(F(1, x(1)) - x(1) + F(2, x(2)) - x(2) \right) \\ &= 0.25x(1)(1-3x(1)) + x(2)(2-3x(2)) \end{aligned}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 0.3418, на множестве

$$G = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : x(1) \leq F(2, x(2)) \neq 0, x(2) \leq F(1, x(1)) \neq 0\},$$

при $x^*(1) \approx 0.2702$, $x^*(2) \approx 0.2958$ и управлениях $u^*(1) \approx 0.5676$, $u^*(2) = 0$ (рис. 1 а).
Функции

$$E(x(1), x(2)) = 2D(x(1), x(2)) \left(2 - \frac{x(1)}{F(2, x(2))} - \frac{x(2)}{F(1, x(1))} \right)^{-1}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 2.0465, на множестве $\tilde{G} \subseteq G$ таком, что

$$\tilde{G} = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : D(x(1), x(2)) \geq 0.5, x(1) \leq F(2, x(2)) \neq 0, x(2) \leq F(1, x(1)) \neq 0\},$$

при $x^*(1) \approx 0.5305$, $x^*(2) \approx 0.3736$ и управлениях $u^*(1) \approx 0.2443$, $u^*(2) = 0$ (рис. 1 б).

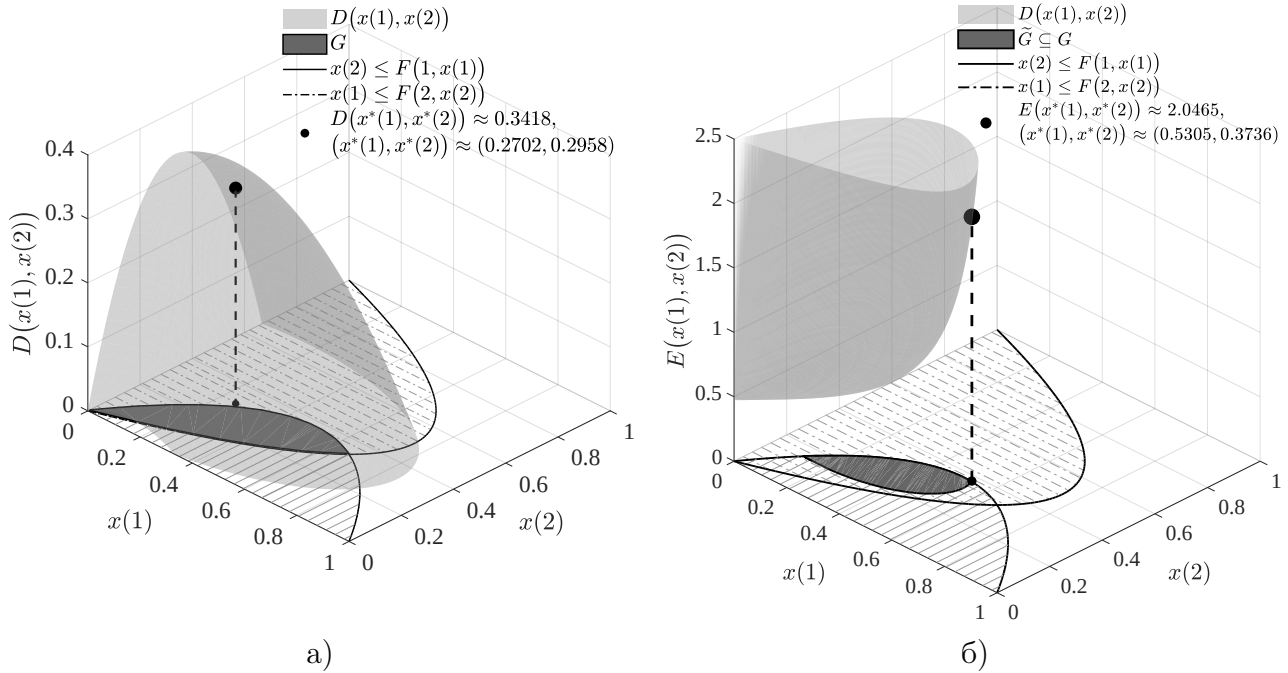


Рис. 1. Функции $D(x(1), x(2))$, $E(x(1), x(2))$ и наибольшие значения характеристик сбора ресурса для популяции, заданной логистическим уравнением (2.1): а) наибольшее значение функции $D(x(1), x(2))$ (светло-серая поверхность) достигается на границе множества G (темно-серая область) при $(x^*(1), x^*(2)) \approx (0.2702, 0.2958)$ (черная точка на поверхности) и управлениях $u^*(1) \approx 0.5676$, $u^*(2) = 0$; б) наибольшее значение функции $E(x(1), x(2))$ (светло-серая поверхность) достигается на множестве $\tilde{G} \subseteq G$ (темно-серая область) при $D(x(1), x(2)) = 0.5$ в точке $(x(1), x(2)) \approx (0.5305, 0.3736)$ (черная точка на поверхности) и управлениях $u(1) \approx 0.2443$, $u(2) = 0$.

Пример 2.2. Найдем оптимальные управляющие воздействия, при которых функция $D(x)$ достигает наибольшего значения. Рассмотрим модель двухвозрастной популяции, динамика которой описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = b(k)x_1(k) + x_1(k)x_2(k) - 2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + \frac{1}{4}x_1(k)x_2(k) - 3x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k) \in [0, 1]$ и $x_2(k) \in [0, 1]$ — численность младшего и старшего возрастного класса соответственно в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$, $b(k) > 0$ — периодический (с периодом 2) коэффициент собственной скорости роста младшего возрастного класса. Пусть $b(k) = 2$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $b(k) = 4$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Развитие двухвозрастной популяции можно описать периодическими функциями

$$F(1) = (F_1(1, x(1)), F_2(1, x(1))), \quad F(2) = (F_1(2, x(2)), F_2(2, x(2))),$$

где $x(1) = (x_1(1), x_2(1))$, $x(2) = (x_1(2), x_2(2))$,

$$\begin{aligned} F_1(1, x(1)) &= 2x_1(1) + x_1(1)x_2(1) - 2x_1^2(1), & F_1(2, x(2)) &= 4x_1(2) + x_1(2)x_2(2) - 2x_1^2(2), \\ F_2(1, x(1)) &= 4x_2(1) + \frac{1}{4}x_1(1)x_2(1) - 3x_2^2(1), & F_2(2, x(2)) &= 4x_2(2) + \frac{1}{4}x_1(2)x_2(2) - 3x_2^2(2). \end{aligned}$$

Пусть $C_1(k) = 1$ для всех $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$, $C_1(k) = 2$ для всех $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$ и $C_2(k) = 4$ для любого $k = 0, 1, 2, \dots$. Функция

$$\begin{aligned} D(x(1), x(2)) &= 0.5x_1(1)(1 - 2x_1(1)) + 6x_2(1)(1 - x_2(1)) + x_1(2)(3 - 2x_1(2)) \\ &\quad + 6x_2(2)(1 - x_2(2)) + x_1(1)x_2(1) + 1.5x_1(2)x_2(2) \end{aligned}$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 5.0243, на множестве G при $x_1^*(1) \approx 0.5217$, $x_2^*(1) \approx 0.5434$, $x_1^*(2) \approx 0.7826$, $x_2^*(2) \approx 0.6229$ и управлениях $u_1^*(1) \approx 0.7819$, $u_2^*(1) \approx 0.6250$, $u_1^*(2) = 0$, $u_2^*(2) \approx 0.5415$.

References

- [1] A. S. Ackleh, S. R. J. Jang, “A discrete two-stage population model: continuous versus seasonal reproduction”, *Journal of Difference Equations and Applications*, **13**:4 (2007), 261–274.
- [2] К. В. Шлюфман, Г. П. Неверова, Е. Я. Фрисман, “Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром”, *Нелинейная динамика*, **13**:3 (2017), 363–380. [K. V. Shlufman, G. P. Neverova, E. Ya. Frisman, “Dynamic modes of the Ricker model with periodic Malthusian parameter”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **13**:3 (2017), 363–380 (In Russian)].
- [3] M. Fan, K. Wang, “Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients”, *Mathematical Biosciences*, **152**:2 (1998), 165–178.
- [4] L. Dong, L. Chen, L. Sun, “Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **8**:2 (2007), 572–578.
- [5] M. Liu, “Optimal harvesting of stochastic population models with periodic coefficients”, *Journal of Nonlinear Science*, **32**:23 (2022), 23.
- [6] Г. П. Неверова, Р. Г. Хлебопрос, Е. Я. Фрисман, “Влияние эффекта Олли на динамику популяций с сезонным характером размножения”, *Биофизика сложных систем*, **62**:6 (2017), 1174–1184; англ. пер.: G. P. Neverova, R. G. Khlebopros, E. Y. Frisman, “The Allee effect in population dynamics with a seasonal reproduction pattern”, *Biophysics*, **62**:6 (2017), 967–976.
- [7] Е. В. Ашихмина, Ю. Г. Израильский, “Оптимизации промысла популяций при циклическом изменении лимитирующих рост численности факторов среды”, *Информатика и системы управления*, **2(20)** (2009), 11–18. [E. V. Ashikhmina, Yu. G. Izraily, “Harvest optimization for population, when environment conditions limiting population growth change cyclically”, *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **2(20)**:2 (2009), 11–18 (In Russian)].
- [8] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, “On optimal harvesting in age-structured populations”, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance, **22**, eds. H. Dawid, K. F. Doerner, G. Feichtinger, P. M. Kort, A. Seidl, 2016, 149–166.

- [9] А. А. Давыдов, Д. А. Мельник, “Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **27**, 2021, 99–107; англ. пер.: A. A. Davydov, D. A. Melnik, “Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse harvesting”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315**:suppl. 1 (2021), S81–S88.
- [10] Е. О. Бурлаков, В. А. Ярема, “О задачах импульсного управления, возникающих при разработке автоматизированных систем контроля численности вредителей в тепличных комплексах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:148 (2024), 381–390. [E. O. Burlakov, V. A. Yarema, “On impulse control problems arising in automatization of pests control in greenhouses”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:148 (2024), 381–390 (In Russian)].
- [11] L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “Problems of optimal resource harvesting for infinite time horizon”, *Journal of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 609–623.
- [12] Л. И. Родина, А. В. Черникова, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени”, *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **29**:1 (2023), 167–179. [L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, **29**:1 (2023), 167–179 (In Russian)].
- [13] А. В. Черникова, “О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 386–404. [A. V. Chernikova, “About existence of the limit to the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 386–404 (In Russian)].
- [14] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].
- [15] А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко, *Динамика одномерных отображений*, Наукова думка, Киев, 1989, 216 с. [A. N. Sharkovsky, S. F. Kolyada, A. G. Sivak, V. V. Fedorenko, *Dynamics of One-Dimensional Maps*, Naukova Dumka, Kiev, 1989 (In Russian), 216 pp.]

Информация об авторах

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики. Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Хаммади Алаа Хуссейн, кандидат физико-математических наук, преподаватель, Университет Аль-Кадисия, г. Аль-Дивания, Ирак. E-mail: alaa.hammadi@qu.edu.iq
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1740-1145>

Information about the authors

Lyudmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Alaa H. Hammadi, Candidate of Physics and Mathematics, Lecturer, University of Al-Qadisiyah, Al Diwaniyah, Iraq.
E-mail: alaa.hammadi@qu.edu.iq
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1740-1145>

Черникова Анастасия Владимировна, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация.
E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Родина Людмила Ивановна
E-mail: LRodina67@mail.ru

Поступила в редакцию 25.04.2025 г.
Поступила после рецензирования 02.09.2025 г.
Принята к публикации 12.09.2025 г.

Anastasia V. Chernikova, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3930-0743>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Lyudmila I. Rodina
E-mail: LRodina67@mail.ru

Received 25.04.2025
Reviewed 02.09.2025
Accepted for press 12.09.2025