

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Жуковский Е.С., Жуковская Т.В., 2025

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>

УДК 517.988, 515.124



Некоторые топологические свойства f -квазиметрических пространств

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ¹, Татьяна Владимировна ЖУКОВСКАЯ²¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Советская, 106/5

Аннотация. Исследуются свойства f -квазиметрического пространства (X, ρ) . Расстояние ρ в таком пространстве удовлетворяет аксиоме тождества и обобщенному неравенству треугольника: $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ для любых $x, y, z \in X$. Здесь функция f положительна при положительных аргументах, непрерывна в точке $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 0$. Симметричность расстояния не предполагается. Стандартно определяется топология на X , порождаемая расстоянием ρ . Исследуются свойства сходящихся последовательностей и секвенциально компактных множеств. Получены условия, при которых сходимость в себе (фундаментальность) необходима для сходимости последовательности. Рассмотрена связь скоростей сходимости фундаментальной последовательности и ее сходимости в себе. Введено понятие секвенциально предкомпактного множества. Получены условия, при которых замыкание секвенциально предкомпактного множества является секвенциально компактным.

Ключевые слова: f -квазиметрическое пространство, расстояние, фундаментальная последовательность, сходящаяся последовательность, секвенциально компактное множество

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00272, <https://rscf.ru/project/24-21-00272/>).

Для цитирования: Жуковский Е.С., Жуковская Т.В. Некоторые топологические свойства f -квазиметрических пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 226–237. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>



Some topological properties of f -quasimetric spaces

Evgeny S. ZHUKOVSKIY¹, Tatyana V. ZHUKOVSKAYA²

¹ Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

² Tambov State Technical University

106/5 Sovetskaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. The properties of the f -quasimetric space (X, ρ) are studied. In a space as such, the distance ρ satisfies the identity axiom and the generalized triangle inequality: $\rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z))$ for any $x, y, z \in X$. Here the function f is positive for positive arguments, continuous at the point $(0, 0)$, and $f(0, 0) = 0$. The symmetry of the distance is not assumed. The topology on X generated by the distance ρ is defined in the standard way. The properties of convergent sequences and sequentially compact sets are studied. Conditions are obtained under which the convergence in itself (mutual convergence) is necessary for the convergence of a sequence. The relationship between the rates of convergence of a fundamental sequence and its convergence in itself is considered. The concept of a sequentially precompact set is introduced. Conditions are obtained under which the closure of a sequentially precompact set is sequentially compact.

Keywords: f -quasimetric space, distance, fundamental sequence, convergent sequence, sequentially compact set

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00272, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00272/>).

Mathematics Subject Classification: 54A20, 54D30, 54E45.

For citation: Zhukovskiy E.S., Zhukovskaya T.V. Some topological properties of f -quasimetric spaces. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 226–237. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-226-237>

Введение

В связи с естественным развитием математики и ее приложений в последние годы заметно возрос интерес к исследованию пространств с обобщенными метриками, в которых функция расстояния удовлетворяет не всем аксиомам «обычной» метрики (см. [1, 2]). Обобщенные метрики стали широко использоваться в информатике, естественных и др. науках (см. [3, части IV–VII]). Впрочем исследования пространств с обобщенными метриками имеют длительную историю, подобные пространства рассматривались М. Фреше еще до определения метрических пространств. В ряде современных работ исследуются топологические свойства таких пространств (см. [4–6]) в целях получения аналогов принципов неподвижных точек и точек совпадения отображений (см. [7–9]), разработки методов нелинейного, вариационного и многозначного анализа в таких пространствах (см. [10–13]). В процитированных работах рассматривались конкретные классы пространств с несимметричной функцией расстояния, удовлетворяющей обобщенному как линейному неравенству треугольника (называемой (q_1, q_2) -квазиметрикой), так и нелинейному неравенству треугольника (называемой f -квазиметрикой). В [14] были исследованы топологические свойства пространства с расстоянием, которое не обязано удовлетворять какому-либо аналогу неравенства треугольника.

Данная работа продолжает исследование [14] и имеет целью определить, какие дополнительные «хорошие» топологические свойства появляются у квазиметрического пространства в силу выполнения обобщенного неравенства треугольника. Основные темой работы являются вопросы сходимости последовательностей и связанные вопросы о секвенциальных топологических свойствах f -квазиметрических пространств.

1. Определение f -квазиметрического пространства

Будем полагать, что на расширенной полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ задан «естественный» порядок, и значит $r < \infty$ при любом $r \in \mathbb{R}_+$. Обозначим символом $\mathbf{F}$ совокупность всех таких функций $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, что

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2) = 0 &\Leftrightarrow (r_1 = 0 \text{ и } r_2 = 0), \\ f(r_1, r_2) &\rightarrow 0 \text{ при } (r_1, r_2) \rightarrow (0, 0). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть задано множество X , содержащее не менее двух элементов, и определена *функция расстояния на X* — отображение $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее условию

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (1.2)$$

Значение $\rho(x, y)$ этого отображения называют *расстоянием от x до y* . Относительно функции расстояния везде далее предполагаем, что существуют $f \in \mathbf{F}$ и $\sigma \in (0, \infty]$ такие, что

$$\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) < \sigma, \rho(y, z) < \sigma \Rightarrow \rho(x, z) \leq f(\rho(x, y), \rho(y, z)). \quad (1.3)$$

Соотношение (1.2) называют *аксиомой тождества*, соотношение (1.3) — *f -неравенством треугольника*. При выполнении этих условий отображение ρ называют *f -квазиметрикой*, а пару (X, ρ) — *f -квазиметрическим пространством*. Учитывая соотношение (1.1), без ограничения общности можем полагать, там где это потребуется, что функция f ограничена на прямоугольнике $[0, \sigma) \times [0, \sigma)$.

Если f -квазиметрика удовлетворяет дополнительному условию симметричности

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x),$$

то ее называют f -метрикой (опуская приставку «квази»), а пространство (X, ρ) — f -метрическим. Если существует $q_0 \geq 1$, для которого выполнено соотношение

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \leq q_0 \rho(y, x),$$

то говорят, что f -квазиметрика является q_0 -симметрической. Очевидно, f -метрика — это 1-симметрическая f -квазиметрика.

Пусть $u \in X$, $r > 0$. Множество

$$O_X^R(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

называем R -шаром (с центром в точке u радиуса r) в пространстве (X, ρ) .

Определим топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$, полагая множество $U \subset X$ открытым, то есть $U \in \mathcal{T}_X^R$, если для любого $u \in U$ существует $\delta > 0$ такое, что $O_X^R(u, \delta) \subset U$. Определенное таким образом топологическое пространство исследовано в [1] (см. также [6, 7, 9, 10, 14, 15] и имеющуюся там библиографию). Приведем свойства этого пространства, используемые в данной работе.

2. Сходящиеся последовательности

Пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности и аксиоме отделимости T_1 , но может не быть Хаусдорфовым (см. [1, п. 1]). Сходимость в $(X, \mathcal{T}_X)$ последовательности $\{x_i\} \subset X$ к элементу $x \in X$ равносильна сходимости к нулю последовательности расстояний $\rho(x, x_i) \rightarrow 0$ (см. [14, предложение 2 и следствие 1]). Будем называть такую сходимость R -сходимостью и писать $x_i \xrightarrow{R} x$ или $x = \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$. Предел R -сходящейся последовательности $\{x_i\}$ не обязан быть единственным, множество всех пределов последовательности будем обозначать через $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$.

Если для любых $\{x_i\} \subset X$, $x \in X$ из сходимости $x_i \xrightarrow{R} x$ следует «симметричное» соотношение $\rho(x_i, x) \rightarrow 0$, то (X, ρ) называют слабо симметрическим f -квазиметрическим пространством, а ρ — слабо симметрической f -квазиметрикой (см. [1]). В слабо симметрическом пространстве предел сходящейся последовательности единственен. Действительно, для $u, v \in \text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ выполнено $\rho(x_i, u) \rightarrow 0$, $\rho(v, x_i) \rightarrow 0$, и поэтому $\rho(v, u) \leq f(\rho(v, x_i), \rho(x_i, u)) \rightarrow 0$. Это соотношение доказывает, что $v = u$.

Следуя [1, определение 1.7], последовательность $\{x_i\} \subset X$ будем называть R -фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I = I(\varepsilon) \quad \forall j > i > I \quad \rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Предложение 2.1. Пусть для R -фундаментальной в (X, ρ) последовательности $\{x_i\}$ существует R -сходящаяся подпоследовательность $\{x_{i_n}\}$. Тогда исходная последовательность $\{x_i\}$ тоже R -сходится, и $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i = \text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n}$.

Доказательство. Выберем любое $\varepsilon > 0$ и определим $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(\delta, \delta) < \varepsilon$. Пусть $x_{i_n} \xrightarrow{R} x$. Тогда

$$\exists N \quad \forall n > N \quad \rho(x, x_{i_n}) < \delta \quad \text{и} \quad \exists I \quad \forall j > i > I \quad \rho(x_i, x_j) < \delta.$$

Для всех $i > \max \{i_N, I\}$ имеем

$$\rho(x, x_i) \leq f(\rho(x, x_{i_N}), \rho(x_{i_N}, x_i)) < f(\delta, \delta) < \varepsilon.$$

Итак, доказано, что $x_i \xrightarrow{R} x$ и что $\text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n} \subset \text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i$. Противоположное вложение $\text{Lim}_{i \rightarrow \infty}^R x_i \subset \text{Lim}_{n \rightarrow \infty}^R x_{i_n}$ очевидно следует из определения предела. $\square$

Если в (X, ρ) любая R -фундаментальная последовательность R -сходится, то пространство (X, ρ) будем называть R -полным.

Пример 2.1. Пусть на $X = \mathbb{R}$ расстояние задано формулой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x, \\ 1, & y < x. \end{cases}$$

Топологическое пространство, определяемое этим расстоянием, называют *прямой Зоргенфрея* (см., например, [16]). Расстояние ρ удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника, но не симметрично (и даже не является слабо симметрическим). Пространства, в которых расстояние обладает такими свойствами, называют *квазиметрическими*. Прямая Зоргенфрея не является R -полным пространством, так как R -фундаментальная последовательность $\{x_i = (i-1)/i, i \in \mathbb{N}\}$ не имеет предела x . Действительно, для $x \geq 1$ выполнено $\rho(x, x_i) = 1$, а для $x < 1$ при любом $i > 2/(1-x)$ выполнено $\rho(x, x_i) > (1-x)/2$.

Отметим, что определение (2.1) R -фундаментальной последовательности отличается от определения *фундаментальной последовательности*, предложенного в [7]:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon) \quad \forall i, j > \tilde{I} \quad \rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Следуя [7], будем называть пространство (X, ρ) *полным*, если любая фундаментальная, т. е. удовлетворяющая (2.2), последовательность R -сходится. Очевидно, что R -полное пространство является полным. Обратное не верно. Например, на прямой Зоргенфрея фундаментальной является только последовательность, постоянная начиная с некоторого номера. Действительно, если для элементов произвольной последовательности выполнено $x_i \neq x_j$, то либо $\rho(x_i, x_j) = 1$, либо $\rho(x_j, x_i) = 1$. Таким образом, отличная от постоянной последовательность не может быть фундаментальной. А так как постоянная последовательность очевидно сходится, прямая Зоргенфрея является полным пространством. Но, как отмечено в примере 2.1, это пространство не R -полно.

Отметим, что если пространство слабо симметрическое и R -полное, то соотношения (2.1) и (2.2) становятся равносильными. Действительно, для произвольной последовательности $\{x_i\}$ при выполнении (2.1) существует $x = \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$, т. е. $\rho(x, x_i) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Тогда выполнено $\rho(x_j, x) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. Таким образом, $\rho(x_j, x_i) \rightarrow 0, i, j \rightarrow \infty$, а значит справедливо соотношение (2.2). Обратное утверждение тривиально: из (2.2) конечно следует (2.1).

В метрических пространствах любая сходящаяся последовательность является фундаментальной. В f -квазиметрических пространствах могут содержаться R -сходящиеся последовательности, не являющиеся R -фундаментальными (и тем более — фундаментальными). Так, на прямой Зоргенфрея любая непостоянная R -сходящаяся последовательность (например, $x_i = 1/i, i \in \mathbb{N}$) не R -фундаментальная. А в слабо симметрическом пространстве любая R -сходящаяся последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Это прямо следует из соотношений $\rho(x, x_i) \rightarrow 0, \rho(x_j, x) \rightarrow 0, i, j \rightarrow \infty$,

выполненных для последовательности $\{x_i\}$, R -сходящейся к $x \in X$. Из этих соотношений получаем $\rho(x_j, x_i) \rightarrow 0$, $i, j \rightarrow \infty$, поэтому $\{x_i\}$ — фундаментальная последовательность.

Если ρ — «обычная» метрика, то из соотношения (2.2) следует, что для предела x фундаментальной последовательности при всех $j > \tilde{I}(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x, x_j) \leq \varepsilon$. Получим аналог этого неравенства для общих f -квазиметрических пространств.

По функции $f \in \mathbf{F}$ и параметру $\sigma \in (0, \infty]$ (из f -неравенства треугольника (1.3)) определим функцию $g : (0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$ соотношениями

$$g(\varepsilon) = \inf_{\delta \in (0, \sigma)} \sup_{r_1 \in [0, \delta], r_2 \in [0, \varepsilon]} f(r_1, r_2) \text{ при } \varepsilon \in (0, \sigma); \quad g(\varepsilon) = \infty \text{ при } \varepsilon \in [\sigma, \infty]. \quad (2.3)$$

В силу соотношений (2.3) функция g возрастает. А из сходимости $f(r_1, r_2) \rightarrow 0$ при $(r_1, r_2) \rightarrow (0, 0)$ следует, что $g(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Предложение 2.2. Пусть в (X, ρ) задана фундаментальная, т. е. удовлетворяющая соотношению (2.2) последовательность $\{x_i\}$, и пусть $x_i \xrightarrow{R} x$. Тогда для $\tilde{I}(\varepsilon)$ из соотношения (2.2) при любом $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\forall j > \tilde{I}(\varepsilon) \quad \rho(x, x_j) \leq g(\varepsilon). \quad (2.4)$$

Доказательство. Для $\varepsilon \geq \sigma$ доказываемое соотношение (2.4) очевидно.

Пусть $\varepsilon \in (0, \sigma)$. Из R -сходимости последовательности $\{x_i\}$ получаем

$$\forall \delta \in (0, \sigma) \quad \exists J = J(\delta) \quad \forall i > J \quad \rho(x, x_i) < \delta.$$

При $j > \tilde{I}(\varepsilon)$, $i > \max\{J(\delta), \tilde{I}(\varepsilon)\}$ согласно (1.3) имеем

$$\rho(x, x_j) \leq f(\rho(x, x_i), \rho(x_i, x_j)) \leq \sup_{r_1 \in [0, \delta], r_2 \in [0, \varepsilon]} f(r_1, r_2).$$

А так полученное неравенство выполнено при всех $\delta \in (0, \sigma)$, из него получаем требуемое соотношение (2.4). $\square$

Заметим, что в случае метрического пространства, поскольку $\sigma = \infty$, $f(r_1, r_2) = r_1 + r_2$, имеем $g(\varepsilon) = \inf_{\delta \in (0, \sigma)} \delta + \varepsilon = \varepsilon$. Соответственно, при всех $j > \tilde{I}(\varepsilon)$ получаем «привычное» неравенство $\rho(x, x_j) \leq \varepsilon$.

Следствие 2.1. Для пространства (X, ρ) существует такая возрастающая функция $Q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что для любой фундаментальной R -сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset X$, $x_i \xrightarrow{R} x$, для $\tilde{I}(\varepsilon)$ из соотношения (2.2) при любом $\varepsilon \in (0, \sigma)$ выполнено

$$\forall j > Q(\tilde{I}(\varepsilon)) \quad \rho(x, x_j) \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Доказательство. Определим функцию Q .

Пусть $g : [0, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная возрастающая функция, для которой $g(0) = 0$, и мажорирующая функцию g , т. е. удовлетворяющая неравенству $g(\varepsilon) \leq \mathbf{g}(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0, \sigma)$. Например, такую функцию можно задать следующим образом. Для любого целого l определим $\sigma_l \in (0, \sigma)$ так, что $\sigma_l < \sigma_{l+1}$, $\sigma_l \rightarrow 0$ при $l \rightarrow -\infty$ и $\sigma_l \rightarrow \sigma$ при $l \rightarrow +\infty$. Теперь для любого целого l и любого $\varepsilon \in (\sigma_{l-1}, \sigma_l]$ положим

$$g(\varepsilon) = g(\sigma_l) + \frac{g(\sigma_{l+1}) - g(\sigma_l)}{\sigma_l - \sigma_{l-1}}(\varepsilon - \sigma_{l-1}).$$

Для любого натурального J вычислим $r(J) = \sup\{\rho(x_i, x_j), i, j > J\}$. Если $r(J) < \sigma$, то положим $Q(J) = I(g^{-1}(r(J)))$. Эта функция возрастает, так как является композицией возрастающих функций.

Проверим для определенной здесь функции Q соотношение (2.5).

Согласно (2.2), $r(\tilde{I}(\varepsilon)) \leq \varepsilon$, поэтому для любого $\varepsilon \in (0, \sigma)$ имеем

$$Q(\tilde{I}(\varepsilon)) = I(g^{-1}(r(\tilde{I}(\varepsilon)))) \leq \tilde{I}(g^{-1}(\varepsilon)).$$

А в силу (2.4), для любого $j > \tilde{I}(g^{-1}(\varepsilon))$ выполнено

$$\rho(x, x_j) \leq g(g^{-1}(\varepsilon)) \leq g(g^{-1}(\varepsilon)) = \varepsilon.$$

Итак, соотношение (2.5) выполнено. □

Заметим, что в случае метрического пространства, функцию Q можно выбирать тождественной, $Q(J) = J$, $J \in \mathbb{N}$.

Напомним, что в пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ множество U замкнуто, если его дополнение открыто, то есть $X \setminus U \in \mathcal{T}_X^R$, и секвенциально замкнуто, если для любой R -сходящейся последовательности $\{u_i\} \subset U$ выполнено $\lim_{i \rightarrow \infty}^R u_i \in U$. В силу первой аксиомы счетности свойства замкнутости и секвенциальной замкнутости множества равносильны.

Примером непустого замкнутого множества является множество $\lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ пределов любой R -сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset X$. Действительно, для произвольной сходящейся к некоторому элементу $u \in X$ последовательности $\{u_n\} \subset \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$ имеем $\rho(u, u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, при каждом n имеем $\rho(u_n, x_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Поэтому $\rho(u, x_i) \leq f(\rho(u, u_n), \rho(u_n, x_i)) \rightarrow 0$, и, таким образом, $u \in \lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i$.

Аналогичным образом в f -квазиметрическом пространстве (X, ρ) можно определить L -шар — множество

$$O_X^L(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$

ввести топологию $\mathcal{T}_X^L$ и соответствующие понятия L -сходимости последовательности $x_i \xrightarrow{L} x$, множества $\lim^L x_i$ ее пределов, L -полноты пространства X . В пространстве $(X, \mathcal{T}_X^L)$ замкнутость и секвенциальная замкнутость также равносильны. В дальнейшем будем рассматривать только пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$. Очевидно, все результаты, представленные далее, остаются справедливыми и для пространства $(X, \mathcal{T}_X^L)$.

3. Компактность и секвенциальная компактность

Напомним, что топологическое пространство *компактно*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие, и *секвенциально компактно*, если из любой последовательности его точек можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для рассматриваемого здесь f -квазиметрического пространства (X, ρ) топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ удовлетворяет первой аксиоме счетности, поэтому если оно компактно, то и секвенциально компактно (см., например, [17, теорема 3.10.31]). Множество A в топологическом пространстве компактно или секвенциально компактно, если соответствующим свойством обладает пространство A с индуцированной топологией. Заметим, что компактное или секвенциально компактное множество в $(X, \mathcal{T}_X^R)$ не обязано быть замкнутым и, что равносильно, секвенциально замкнутым. А замыкание компактного (или секвенциально компактного) множества может быть некомпактным (соответственно, секвенциально некомпактным).

Пример 3.1. Рассмотрим счетное множество X , состоящее из элементов x_i, y_j , $i, j \in \mathbb{N}$ (среди всех элементов нет совпадающих). Положим $\rho(y_j, x_i) = 1/i$, $i, j \in \mathbb{N}$, а для любых других пар $(u, v) \in X^2$ положим $\rho(u, v) = 1$, если $u \neq v$, и $\rho(u, v) = 0$, если $u = v$. Такое расстояние удовлетворяет «обычному» неравенству треугольника — соотношению (1.3) с $\sigma = \infty$ и $f(r_1, r_2) = r_1 + r_2$, но в отличие от «обычной» метрики не симметрично. По данному расстоянию определим топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$.

В рассматриваемом пространстве последовательность $\{x_i\}$, не являясь фундаментальной, R -сходится, $\lim_{i \rightarrow \infty}^R x_i = \{y_j\}$. Это множество R -пределов является последовательностью, у которой не существует сходящейся подпоследовательности. Действительно, для любого j и любого $u \in X$, $u \neq y_j$ выполнено $\rho(u, y_j) = 1$, то есть из последовательности $\{y_j\}$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Теперь в рассматриваемом пространстве определим множество $A = \{y_1, x_1, x_2, \dots\}$. Это множество компактно и секвенциально компактно, но не замкнуто. Замыкание множества A — это все пространство X . А оно не является секвенциально компактным и, следовательно, компактным.

Заметим, что если множество A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ секвенциально компактно (или, более того, компактно), то для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset A$ выполнено $A \cap \lim^R x_i \neq \emptyset$ (это прямо следует из определения секвенциальной компактности). Поэтому имеет место следующее вполне очевидное утверждение.

Предложение 3.1. Пусть в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ для любой R -сходящейся последовательности $\{x_i\}$ множество $\lim^R x_i \subset X$ состоит ровно из одной точки. Тогда любое секвенциально компактное множество $A \subset X$ замкнуто. В частности, если пространство X слабо симметрическое, то в нем любое секвенциально компактное множество замкнуто.

Так как компактное множество всегда секвенциально компактно, аналогичное предложение справедливо для компактных множеств.

Для установления компактности конкретных f -квазиметрических пространств удобно использовать следующее понятие, предложенное в [14]. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T}_X^R)$ будем называть O_X^R -компактным, если для любой функции $r : X \rightarrow (0, \infty)$ найдется такое конечное множество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset X$, что

$$X = \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Соответственно, множество A в топологическом пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ будем называть O_X^R -компактным, если для любой определенной на A положительной функции r найдется конечное подмножество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset A$, для которого

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

В [14, следствие 1] показано, что компактность пространства $(X, \mathcal{T}_X^R)$ (или его подмножества) равносильна O_X^R -компактности.

Для f -квазиметрических пространств введем аналоги известных для метрических пространств свойств предкомпактности и секвенциальной предкомпактности множеств.

О п р е д е л е н и е 3.1. Множество $A \subset X$ называют *секвенциально предкомпактным*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь R -сходящуюся к некоторому $a \in X$ подпоследовательность. Назовем множество $A \subset X$ *усиленно секвенциально предкомпактным*, если из любой последовательности его элементов можно извлечь R -фундаментальную R -сходящуюся подпоследовательность.

Как отмечалось выше, в отличие от метрических и некоторых других классов пространств в f -квазиметрическом пространстве R -сходящаяся последовательность не обязана быть R -фундаментальной. Поэтому усиленно секвенциально предкомпактное множество является секвенциально предкомпактным, но обратное в общем случае неверно. Секвенциально компактное множество, очевидно, является секвенциально предкомпактным, но может не быть усиленно секвенциально предкомпактным (и в силу этого обстоятельства в название рассматриваемого свойства добавлено слово «усиленно»). Для слабо симметрического пространства R -фундаментальность необходима для R -сходимости последовательности. В слабо симметрических пространствах понятия усиленной и «простой» секвенциальной предкомпактности равносильны.

П р е д л о ж е н и е 3.2. Пусть f -квазиметрическое пространство X является слабо симметрическим. Тогда замыкание в X секвенциально предкомпактного (или, что здесь то же самое, усиленно секвенциально предкомпактного) множества $A \subset X$ является секвенциально компактным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим замыкание $\text{Cl}A$ заданного секвенциально предкомпактного множества A , а в нем выберем любую последовательность $\{x_i\} \subset \text{Cl}A$. Для каждого элемента $x_i \in \text{Cl}A$ существует $a_{ij} \in A$ такой, что $\rho(x_i, a_{ij}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Поскольку X — слабо симметрическое пространство, также выполнено $\rho(a_{ij}, x_i) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Для каждого i определим $j(i)$ так, что $\rho(a_{ij(i)}, x_i) \rightarrow 0$ $i \rightarrow \infty$ (например, можно выбирать $j(i)$, для которого $\rho(a_{ij(i)}, x_i) < 2^{-i}$). Из последовательности $\{a_{ij(i)}\} \subset A$ извлечем сходящуюся к некоторому $x \in \text{Cl}A$ подпоследовательность. Чтобы упростить запись, обозначим ее, как и исходную последовательность, через $\{a_{ij(i)}\}$. Итак, $\rho(x, a_{ij(i)}) \rightarrow 0$. Теперь в силу f -неравенства треугольника, $\rho(x, x_i) \leq f(\rho(x, a_{ij(i)}), \rho(a_{ij(i)}, x_i)) \rightarrow 0$. Таким образом, множество A является секвенциально компактным. $\square$

О п р е д е л е н и е 3.2. Множество $A \subset X$ назовем *предкомпактным*, если для любой функции $r : X \rightarrow (0, \infty)$ найдется такое конечное множество $\{x_i, i = \overline{1, n}\} \subset X$, что выполнено вложение

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Подчеркнем, что, в отличие от определения [14] O_X^R -компактности, в определении 3.2 центры $x_i, i = \overline{1, n}$, шаров, «покрывающих» множество A , не обязаны ему принадлежать.

П р е д л о ж е н и е 3.3. Пусть f -квазиметрическое пространство X является слабо симметрическим. Тогда замыкание в X предкомпактного множества $A \subset X$ является компактным множеством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть некоторое множество $A \subset X$ предкомпактно. Обозначим его замыкание через $\text{Cl}A$. Множество $B = A \setminus \text{Cl}A$ открыто. Поэтому для любого $b \in B$ существует такое положительное число $\bar{r}(b)$, что $O_X^R(b, \bar{r}(b)) \subset B$.

Рассмотрим любую функцию $r : X \rightarrow (0, \infty)$. Без ограничения общности будем полагать, что $r(b) < \bar{r}(b)$ при любом $b \in B$. Докажем, что существует конечный набор точек $x_i \in \text{Cl}A$, $i = \overline{1, n}$, для которого имеет место вложение

$$\text{Cl}A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)). \quad (3.1)$$

При каждом $x \in X$ определим $\epsilon(x) > 0$ так, что выполнены неравенства

$$\forall x \in X \quad \epsilon(x) < 2^{-1}r(x) \quad \text{и} \quad f(\epsilon(x), \epsilon(x)) < r(x).$$

В силу предкомпактности множества A существует такой конечный набор точек $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$, что выполнены вложения

$$A \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, \epsilon(x_i)) \subset \bigcup_{i=\overline{1, n}} O_X^R(x_i, r(x_i)).$$

Этот набор $\{x_i, i = \overline{1, n}\}$ принадлежит множеству $\text{Cl}A$. Действительно, если какая-то из точек x_j этого набора принадлежит его дополнению — открытому множеству B , то соответствующий шар $O_X^R(x_i, r(x_i)) \subset O_X^R(x_j, \bar{r}(x_j)) \subset B$ не пересекается с множеством $\text{Cl}A$.

Выберем произвольную точку $\bar{a} \in \text{Cl}A$. Для этой точки существует последовательность $\{a_j\} \subset A$ такая, что $\rho(\bar{a}, a_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. А так как X является слабо симметрическим пространством, имеем еще и сходимост $\rho(a_j, \bar{a}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Бесконечное количество членов последовательности $\{a_j\} \subset A$ должно содержаться в одном из шаров (которых конечное количество), покрывающих множество A . Для сокращения обозначений будем полагать, что $\{a_j\} \subset O_X^R(x_1, \epsilon(x_1))$.

В рассматриваемой последовательности выберем элемент a_{j_0} , отвечающий условию $\rho(a_{j_0}, \bar{a}) < \epsilon(\bar{a})$. Для этого элемента имеем

$$\rho(x_1, \bar{a}) \leq f(\rho(x_1, a_{j_0}), \rho(a_{j_0}, \bar{a})) \leq f(\epsilon(x_1), \epsilon(x_1)) < r(x).$$

Итак, $\bar{a} \in O_X^R(x_1, \epsilon(x_1))$ и, таким образом, соотношение (3.1) выполнено. А значит доказано, что множество $\text{Cl}A$ предкомпактного множества A является O_X^R -компактным, а поэтому и компактным. $\square$

В заключение отметим, что если в f -неравенстве треугольника (1.3) $\sigma = \infty$, а функция f ограничена на $[0, \varsigma) \times [0, \varsigma)$ при любом $\varsigma > 0$, то из компактности множества A в пространстве $(X, \mathcal{T}_X^R)$ очевидно следует его *ограниченность*, т. е. для некоторых $a \in A$ и $r = r(a)$ выполнено $A \subset O_X^R(a, r)$. Действительно, так как существует конечное покрытие компактного множества A шарами $O_X^R(a_i, 1)$, $i = \overline{1, n}$, можно принять a любым и положить $r = \max_{i=\overline{1, n}} \sup_{\varsigma \in [0, 1]} f(\rho(a, a_i), \varsigma)$.

References

- [1] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, L. V. Lokoutsievskii, K. V. Storozhuk, “Topological and geometrical properties of spaces with symmetric and nonsymmetric f -quasimetrics”, *Topology Appl.*, **221** (2017), 178–194.
- [2] A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -Quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points. A review of the results”, *Fixed Point Theory*, **23**:2 (2022), 473–486.

- [3] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [4] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Теория (q_1, q_2) -квазиметрических пространств и точки совпадения”, *Доклады Академии наук*, **469**:5 (2016), 527–531; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Theory of (q_1, q_2) -quasimetric spaces and coincidence points”, *Doklady Mathematics*, **94**:1 (2016), 434–437.
- [5] А. В. Грешнов, “Об оценках устойчивости сжимающих отображений первой группы Гейзенберга в теореме о неподвижной точке”, *Вестник российских университетов. Математика*, **30**:149 (2025), 15–27. [A. V. Greshnov, “About estimates of stability of contraction mappings on the first Heisenberg group in the fixed point theorem”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:149 (2025), 15–27 (In Russian)].
- [6] Е. С. Жуковский, “Геометрические прогрессии в пространствах с расстоянием, приложения к неподвижным точкам и точкам совпадения отображений”, *Матем. сб.*, **214**:2 (2023), 112–142; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Geometric progressions in distance spaces; applications to fixed points and coincidence points”, *Sb. Math.*, **214**:2 (2023), 246–272.
- [7] Е. С. Жуковский, “Неподвижные точки сжимающих отображений f -квазиметрических пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “The fixed points of contractions of f -quasimetric spaces”, *Siberian Math. J.*, **59**:6 (2018), 1063–1072.
- [8] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “ (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “ (q_1, q_2) -Quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points”, *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.
- [9] Т. Н. Фоменко, “Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f -квазиметрическом пространстве”, *Матем. заметки*, **110**:4 (2021), 598–609; англ. пер.: T. N. Fomenko, “The existence of zeros of multivalued functionals, coincidence points, and fixed points in f -quasimetric spaces”, *Math. Notes*, **110**:4 (2021), 583–591.
- [10] А. В. Арутюнов, С. Е. Жуковский, К. В. Сторожук, “Структура множества точек локального минимума функций в различных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **60**:3 (2019), 518–526; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, K. V. Storozhuk, “The structure of the set of local minima of functions in various spaces”, *Siberian Math. J.*, **60**:3 (2019), 398–404.
- [11] Р. Сенгупта, “Вариационный принцип Экланда в квазиметрических пространствах”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:143 (2023), 268–276. [R. Sengupta, “Ekeland variational principle for quasimetric spaces”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 268–276 (In Russian)].
- [12] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, “Точки совпадения многозначных отображений в (q_1, q_2) -квазиметрических пространствах и точки совпадения”, *Доклады Академии наук*, **476**:2 (2017), 129–132; англ. пер.: A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, “Coincidence points of multivalued mappings in (q_1, q_2) -quasimetric spaces”, *Doklady Mathematics*, **96**:2 (2017), 438–441.
- [13] В. Мерчела, “Включения с отображениями, действующими из метрического пространства в пространство с расстоянием”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 27–36. [W. Merchela, “Inclusions with mappings acting from a metric space to a space with distance”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 27–36 (In Russian)].
- [14] Е. С. Жуковский, “Некоторые топологические свойства пространств с расстоянием”, *Матем. заметки*, **117**:2 (2025), 223–237; англ. пер.: E. S. Zhukovskiy, “Topological properties of spaces with a distance”, *Math. Notes*, **117**:2 (2025), 248–258.
- [15] А. В. Грешнов, “Некоторые проблемы регулярности f -квазиметрик”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **15** (2018), 355–361. [A. V. Greshnov, “Some problems of regularity of f -quasimetrics”, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **15** (2018), 355–361 (In Russian)].
- [16] D. Doitchinov, “On completeness in quasi-metric spaces”, *Topology Appl.*, **30**:2 (1988), 127–148.
- [17] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; англ. ориг.: R. Engelking, *General Topology*, State Scientific Publishing House, Warsaw, 1977.

Информация об авторах

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования»; профессор кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Жуковская Татьяна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковский Евгений Семенович
 E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 16.07.2025 г.
 Поступила после рецензирования 04.09.2025 г.
 Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the authors

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Director of the Scientific and Educational Center “Fundamental Mathematical Research”; Professor of Functional Analysis Department, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Tatiana V. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Tambov State Technical University, Tambov, Russian Federation. E-mail: t_zhukovskaia@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4374-4336>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Evgeny S. Zhukovskiy
 E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 16.07.2025
 Reviewed 04.09.2025
 Accepted for press 12.09.2025