ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 30, № 151 2025

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225

УДК 517.962.24

О достаточных условиях асимптотической устойчивости положений равновесия разностных уравнений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. В работе рассматриваются нелинейные разностные автономные системы первого порядка в вещественных конечномерных пространствах. Исследуется вопрос об устойчивости положений равновесия для таких систем. Для разностного уравнения, порожденного гладким отображением f, классические достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия состоят в следующем. Если спектральный радиус первой производной отображения f в точке равновесия строго меньше единицы, то рассматриваемое положение равновесия является асимптотически устойчивым. В настоящей работе приводятся новые достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия, применимые и к широкому классу отображений, у которых указанный спектральный радиус может быть равен единице. Новые достаточные условия состоят в том, что существует выколотая окрестность заданного положения равновесия такая, что отображение, определяющее разностное уравнение, является локально сжимающим в каждой точке этой окрестности. Приведен пример, в котором указанный спектральный радиус равен единице, однако выполняются все предположения полученной теоремы об устойчивости. Показано, что известные достаточные условия устойчивости вытекают из результатов настоящей статьи. Важной особенностью предлагаемых результатов является то, что они применимы и к разностным уравнениям, порожденным непрерывными негладкими отображениями.

Ключевые слова: автономное разностное уравнение, положение равновесия, асимптотическая устойчивость, достаточное условие устойчивости

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00012, https://rscf.ru/project/24-21-00012/).

Для цитирования: *Жуковская З.Т.* О достаточных условиях асимптотической устойчивости положений равновесия разностных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2025. Т. 30. № 151. С. 218–225. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225

On sufficient conditions of the asymptotic stability for equilibria of difference equations

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA
Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. The paper considers nonlinear autonomous first-order difference systems in real finite-dimensional spaces. For these systems, we study the asymptotic stability of equilibria. The classical sufficient conditions for asymptotic stability of an equilibrium for difference equation generated by a smooth mapping f are as follows. If the spectral radius of the first derivative of the mapping f at the given equilibrium point is strictly less than one, then this equilibrium point is asymptotically stable. In the present paper, new sufficient conditions for asymptotic stability of the equilibrium are given. The obtained conditions are also applicable to some mappings for which the spectral radius mentioned above is equal to one. These conditions are as follows. There exists a punctured neighborhood of the given equilibrium point such that the mapping defining the difference equation is locally contractive around each point of this neighborhood. We present an example in which the spectral radius mentioned above equals one, however, all the assumptions of the obtained stability theorem are fulfilled. It is shown that the known stability sufficient conditions follow from the obtained results. An important feature of our stability sufficient conditions is that they are applicable to difference equations generated by continuous non-smooth mappings.

Keywords: autonomous difference equation, equilibrium, asymptotic stability, sufficient stability condition

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00012, https://rscf.ru/en/project/24-21-00012/).

Mathematics Subject Classification: 39A30.

For citation: Zhukovskaya Z.T. On sufficient conditions of the asymptotic stability for equilibria of difference equations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **30**:151 (2025), 218–225. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2025-30-151-218-225

Введение и постановка задачи

Пусть заданы натуральное число n и отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Здесь $\mathbb{R}^n$ — это n-мерное вещественное линейное пространство со стандартной топологией. Зададим последовательность отображений $f^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по формуле

$$f^0(x) \coloneqq x, \quad f^{i+1}(x) \coloneqq f(f^i(x)), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим разностное уравнение

$$x_{i+1} = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{0.1}$$

с начальным условием

$$x_0 = \xi. \tag{0.2}$$

Решением разностного уравнения называется последовательность $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ элементов пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что $x_{i+1} = f(x_i)$ при всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ решением задачи Коши (0.1), (0.2) называется последовательность $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, которая является решением уравнения (0.1) и удовлетворяет соотношению (0.2). Очевидно, что для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ единственным решением задачи Коши (0.1), (0.2) является последовательность $\big(x_0(\xi), x_1(\xi), x_2(\xi), \dots\big)$ такая, что

$$x_i(\xi) = f^i(\xi), \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Теория разностных уравнений имеет многочисленные естественнонаучные приложения при моделировании поведения систем различной природы, когда рассматриваемые величины регистрируются через некоторые промежутки времени (см. [1–3] и др.). Разностные уравнения также имеют математические приложения. Так, например, функциональные уравнения с непрерывным временем можно сводить к уравнениям с дискретным временем, в том числе к системам вида (0.1). Имеется большое многообразие задач, связанных с разностными уравнениями. Эти уравнения рассматриваются в различных пространствах, например, в частично упорядоченных пространствах или специальных нормированных пространствах (см., например, [4, 5]). В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением уравнений в конечномерных пространствах и сосредоточимся на вопросе асимптотической устойчивости положений равновесия. Напомним необходимые определения и утверждения.

Точка $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ называется положением равновесия уравнения (0.1), если она является неподвижной точкой отображения f, т. е. $\bar{x} = f(\bar{x})$. В этом случае $x_i(\bar{x}) = \bar{x}$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$. Положение равновесия $\bar{x}$ называется асимптотически устойчивым, если

(i) оно устойчиво, т. е. для любой окрестности $V \subset \mathbb{R}^n$ точки $\bar{x}$ существует окрестность U этой же точки такая, что $x_i(\xi) \in V$ для любой начальной точки $\xi \in U$;

(ii) существует окрестность W точки $\bar{x}$ такая, что $x_i(\xi) \to \bar{x}$ при $i \to \infty$ для любой начальной точки $\xi \in W$.

Далее положение равновесия $\bar{x}$ разностного уравнения (0.1) будем считать заданным. Для точек $x \in \mathbb{R}^n$, в которых отображение f дифференцируемо, обозначим производную отображения f через $f'(x)$. Для линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обозначим его спектральный радиус через $\rho(A)$.

Известно (см., например, [1, следствие 4.34] или [2, гл. 7, теорема 3]), что *если отображение* f *непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* $\bar{x}$ *и*

$$\rho\big(f'(\bar{x})\big) < 1,$$

то положение равновесия $\bar{x}$ *уравнения* (0.1) *асимптотически устойчиво.*

Известно, см., например, [6, лемма 5.6.10], что *для любого линейного оператора* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует норма* $|\cdot|$ *на* $\mathbb{R}^n$ *такая, что для соответствующей операторной нормы* $\|A\| \coloneqq \max\limits_{|x|\le 1} |Ax|$ *справедливо неравенство*

$$\|A\| < \rho(A) + \varepsilon.$$

Поэтому приведенные выше достаточные условия асимптотической устойчивости можно переформулировать следующим образом. *Пусть отображение* f *непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки* $\bar{x}$*. Если существует норма* $|\cdot|$ *на* $\mathbb{R}^n$ *такая, что для соответствующей операторной нормы справедливо неравенство*

$$\big\|f'(\bar{x})\big\| < 1,$$

то положение равновесия $\bar{x}$ *уравнения* (0.1) *асимптотически устойчиво.* Это утверждение приведено, например, в [1, следствие 4.35].

Рассмотрим пример, в котором приведенные достаточные условия асимптотической устойчивости нарушаются. Пусть $n = 1$, $f(x) = x - x^3$, $x \in \mathbb{R}$ и $\bar{x} = 0$. Тогда $\rho\big(f'(\bar{x})\big) = \big|f'(0)\big| = 1$. Значит, условие $\rho\big(f'(\bar{x})\big) < 1$ нарушается. В то же время непосредственно проверяется, что положение равновесия $\bar{x} = 0$ асимптотически устойчиво.

В настоящей работе приведено обобщение известных достаточных условий асимптотической устойчивости положения равновесия $\bar{x}$, которое применимо для широкого класса отображений f и в случае, когда $\rho\big(f'(\bar{x})\big) = 1$.

1. Основной результат

Сформулируем достаточные условия асимптотической устойчивости.

Пусть задана некоторая норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $B(x, r)$ открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$.

Теорема 1.1. *Предположим, что отображение* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно в некоторой окрестности* $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ *заданного положения равновесия* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$*. Пусть для каждой точки* $x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$ *существует окрестность* $W_x \subset \mathbb{R}^n$ *точки* x *такая, что*

$$\big|f(x) - f(y)\big| < |x - y| \quad \forall\, y \in W_x \setminus \{x\}. \tag{1.1}$$

Тогда положение равновесия $\bar{x}$ *уравнения* (0.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательству теоремы 1.1 предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.1*. Тогда для любого* $r > 0$*, для которого* $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$*, имеет место соотношение*

$$\big|f(x) - \bar{x}\big| < |x - \bar{x}| \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{x} = 0$. Тогда $f(0) = 0$. Обозначим $W_0 \coloneqq W_{\bar{x}}$. Возьмем произвольное $r > 0$, для которого $B(0, r) \subset W_0$.

Покажем сначала, что
$$\bigl|f(u)\bigr| \le |u| \quad \forall\, u \in B(0, r). \tag{1.3}$$

При $u = 0$ неравенство в (1.3) очевидно. Зафиксируем произвольное $u \in B(0, r)$, $u \ne 0$. Положим
$$T \coloneqq \Bigl\{t \in [0, 1] : \bigl|f(u) - f(tu)\bigr| \le (1 - t)|u|\Bigr\}.$$
Множество T непусто, поскольку $1 \in T$. Кроме того, множество T замкнуто, поскольку отображение f непрерывно на $B(0, r)$ и $tu \in B(0, r)$ для каждого $t \in [0, 1]$. Значит, $\min T$ существует.

Покажем, что $\min T = 0$. Предположим противное, т. е. $\min T > 0$. Обозначим $s \coloneqq \min T$. Поскольку $s \in T$, то
$$\bigl|f(u) - f(su)\bigr| \le (1 - s)|u|. \tag{1.4}$$
Кроме того, поскольку $s > 0$, то $su \ne 0$, и значит, существует окрестность W_{su} точки su такая, что
$$\bigl|f(su) - f(y)\bigr| < |su - y| \quad \forall\, y \in W_{su} \setminus \{su\}.$$
Для достаточно малого $\delta \in (0, s)$ имеем $(s - \delta)u \in W_{su} \setminus \{su\}$. Поэтому
$$\Bigl|f(su) - f\bigl((s - \delta)u\bigr)\Bigr| < \bigl|su - (s - \delta)u\bigr| = \delta|u|. \tag{1.5}$$

Имеем
$$\begin{aligned}\Bigl|f(u) - f\bigl((s - \delta)u\bigr)\Bigr| &\le \bigl|f(u) - f(su)\bigr| + \Bigl|f(su) - f\bigl((s - \delta)u\bigr)\Bigr| \\ &\overset{(1.4)}{\le} (1 - s)|u| + \Bigl|f(su) - f\bigl((s - \delta)u\bigr)\Bigr| \overset{(1.5)}{\le} (1 - s)|u| + \delta|u| = \bigl(1 - (s - \delta)\bigr)|u|.\end{aligned}$$
Значит, $s - \delta \in T$. Последнее противоречит тому, что $s = \min T$. Полученное противоречие доказывает, что $\min T = 0$.

Из соотношения $\min T = 0$ вытекает, что $0 \in T$. Поэтому $\bigl|f(u) - f(0)\bigr| \le |u|$. Поскольку $f(0) = 0$, то получаем, что $\bigl|f(u)\bigr| \le |u|$. Соотношение (1.3) доказано.

Возьмем произвольную точку $x \in B(0, r) \setminus \{0\}$ и покажем, что
$$\bigl|f(x)\bigr| < |x|.$$
Имеем $x \in W_0 \setminus \{0\}$. Поэтому по предположению леммы существует окрестность $W_x \subset \mathbb{R}^n$ точки x такая, что имеет место (1.1), т. е.
$$\bigl|f(x) - f(y)\bigr| < |x - y| \quad \forall\, y \in W_x \setminus \{x\}.$$
Возьмем $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $\lambda x \in W_x$. Для него имеем
$$\bigl|f(x) - f(\lambda x)\bigr| < |x - \lambda x| = (1 - \lambda)|x|.$$
Далее, применяя (1.3) при $u = \lambda x$, получаем, что
$$\bigl|f(\lambda x)\bigr| < \lambda|x|.$$
Из последних двух неравенств следует, что
$$\bigl|f(x)\bigr| \le \bigl|f(x) - f(\lambda x)\bigr| + \bigl|f(\lambda x)\bigr| < |x|.$$
Доказательство леммы завершено. $\square$

Лемма 1.2. *Предположим, что отображение* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно в некоторой окрестности* $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ *заданного положения равновесия* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. *Пусть существует* $r > 0$, *для которого* $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$ *и имеет место соотношение* (1.2). *Тогда положение равновесия* $\bar{x}$ *уравнения* (0.1) *асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{x} = 0$. Тогда $f(0) = 0$, а условие (1.2) принимает вид

$$\big|f(x)\big| < |x| \quad \forall\, x \in B(0, r) \setminus \{0\}. \tag{1.6}$$

Из последнего неравенства следует, что для любой окрестности нуля V для $\delta \in (0, r)$ такого, что $B(0, \delta) \subset V$, имеет место соотношение

$$x_i(\xi) = f^i(\xi) \in B(0, \delta) \quad \forall\, \xi \in B(0, \delta).$$

Значит, условие **(i)** из определения асимптотической устойчивости выполняется.

Покажем, что выполняется **(ii)** при $W = B(0, r)$.

Для $t \in [0, r)$ положим

$$\gamma(t) \coloneqq \max_{|x| \le t} |f(x)|.$$

По построению функция γ является неубывающей и $\gamma(0) = 0$. Кроме того, функция γ непрерывна (см., например, [7, гл. 3, § 1, следствие 23]).

Покажем, что

$$\gamma(t) < t \quad \forall\, t \in (0, r).$$

Возьмем произвольное $t \in (0, r)$ и точку $x \in \mathbb{R}^n$ такую, что $|x| \le t$ и $\gamma(t) = \big|f(x)\big|$. Из (1.6) следует, что $\big|f(x)\big| < |x|$. Поэтому $\gamma(t) = \big|f(x)\big| < |x| \le t$.

Покажем, что

$$\gamma^i(t) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty \quad \forall\, t \in [0, r). \tag{1.7}$$

Зафиксируем произвольное $t \in [0, r)$. Очевидно, что последовательность $\big\{\gamma^i(t)\big\}$ является невозрастающей. Поэтому она сходится к некоторой точке $s \in [0, r)$. Последовательность $\big\{\gamma^{i+1}(t)\big\}$ сходится к точке $\gamma(s)$ в силу непрерывности функции γ. Очевидно, что пределы последовательностей $\big\{\gamma^i(t)\big\}$ и $\big\{\gamma^{i+1}(t)\big\}$ совпадают. Значит $\gamma(s) = s$. Следовательно, $s = 0$. Таким образом, доказано, что $\gamma^i(t) \to s = 0$ при $i \to \infty$.

Для произвольного $\xi \in B(0, r)$ имеем

$$\big|x_1(\xi)\big| = \big|f(\xi)\big| \le \gamma\big(|\xi|\big),$$

$$\big|x_2(\xi)\big| = \Big|f\big(x_1(\xi)\big)\Big| \le \gamma\Big(\big|x_1(\xi)\big|\Big) \le \gamma\Big(\gamma\big(|\xi|\big)\Big) = \gamma^2\big(|\xi|\big),$$

$$\big|x_3(\xi)\big| = \Big|f\big(x_2(\xi)\big)\Big| \le \gamma\Big(\big|x_2(\xi)\big|\Big) \le \gamma\Big(\gamma^2\big(|\xi|\big)\Big) = \gamma^3\big(|\xi|\big)$$

и т. д. Поэтому имеет место неравенство $\big|x_i(\xi)\big| \le \gamma^i\big(|\xi|\big)$, $i = 1, 2, \ldots$. Отсюда и из (1.7) получаем, что $x_i(\xi) \to 0$ при $i \to \infty$. □

Докажем теперь теорему 1.1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное $r > 0$, для которого $B(\bar{x}, r) \subset W_{\bar{x}}$. Из леммы 1.1 следует, что имеет место соотношение (1.2). Поэтому из леммы 1.2 получаем, что положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво. □

2. Обсуждение и примеры

Обсудим теорему 1.1. Покажем сначала, что из нее вытекают известные достаточные условия асимптотической устойчивости из [1, следствие 4.34] (см. также [2, гл. 7, теорема 3]). Для этого выведем следствие из теоремы 1.1.

Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана норма $|\cdot|$, а $\|\cdot\|$ — это соответствующая ей операторная норма.

Следствие 2.1. *Предположим, что существует окрестность $W_{\bar{x}} \subset \mathbb{R}^n$ заданного положения равновесия $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ такая, что отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в выколотой окрестности $W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$ и*

$$\big\|f'(x)\big\| < 1 \quad \forall\, x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}.$$

Тогда положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную точку $x \in W_{\bar{x}} \setminus \{\bar{x}\}$. Поскольку отображение f дифференцируемо в точке W_x, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 :$$
$$\big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| \le \varepsilon |y - x| \quad \forall\, y \in B(x, \delta). \tag{2.1}$$

Поскольку $\big\|f'(x)\big\| < 1$, то существует положительное число ε такое, что $\varepsilon + \big\|f'(x)\big\| < 1$. Выберем $\delta > 0$, отвечающее соотношению (2.1) и такое, что $B(x, \delta) \subset W_{\bar{x}}$.

Для произвольного $y \in B(x, \delta) \setminus \{x\}$ имеем

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(y)\big| &\le \big|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\big| + \big|f'(x)(y - x)\big| \\ &\le \varepsilon|y - x| + \big|f'(x)(y - x)\big| \le \varepsilon|y - x| + \big\|f'(x)\big\||y - x| < |y - x|.\end{aligned}$$

Таким образом, показано, что для окрестности $W_x \coloneqq B(x, \delta)$ точки x выполняется соотношение (1.1). Поэтому, применяя теорему 1.1, получаем, что положение равновесия $\bar{x}$ уравнения (0.1) асимптотически устойчиво. □

Из приведенного следствия 2.1 вытекают достаточные условия асимптотической устойчивости, сформулированные во введении настоящей статьи, а именно [1, следствие 4.34], [2, гл. 7, теорема 3] и [1, следствие 4.35].

Действительно, пусть отображение f непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $\bar{x}$. Если $\big\|f'(\bar{x})\big\| < 1$, то $\big\|f'(x)\big\| < 1$ в некоторой окрестности $W_{\bar{x}}$ точки $\bar{x}$ и, значит, $\bar{x}$ асимптотически устойчиво в силу следствия 2.1.

Если $\rho\big(f'(\bar{x})\big) < 1$, то, выбирая с помощью [6, лемма 5.6.10] подходящую норму $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$, мы получаем, что $\big\|f'(\bar{x})\big\| < 1$ для соответствующей операторной нормы $\|\cdot\|$. А в этом случае, как было показано в предыдущем абзаце, $\bar{x}$ асимптотически устойчиво в силу следствия 2.1.

Таким образом, теорема 1.1 и следствие 2.1 обобщают известные достаточные условия асимптотической устойчивости. В то же время следствие 2.1 применимо к примеру из введения. А именно, если $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - x^3$ и $\bar{x} = 0$, то $\big\|f'(x)\big\| = \big|f'(x)\big| < 1$ для всех $x \ne \bar{x}$, достаточно близких к $\bar{x}$. Значит, по следствию 2.1 положение равновесия $\bar{x}$ в этом примере устойчиво.

Отметим также, что в отличие от приведенных выше известных достаточных условий асимптотической устойчивости [1, следствие 4.34], [2, гл. 7, теорема 3] и [1, следствие 4.35] теорема 1.1 применима и к разностным уравнениям, порожденным негладкими непрерывными отображениями f.

References

[1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, Springer, New York, 2005.

[2] В. К. Романко, *Разностные уравнения*, БИНОМ, М., 2015. [V. K. Romanko, *Difference Equations*, BINOM, Moscow, 2015 (In Russian)].

[3] L. A. Pipes, "Difference equations and their applications", *Mathematics Magazine*, **32**:5, 231–246.

[4] Т. В. Жуковская, И. А. Забродский, М. В. Борзова, "Об устойчивости разностных уравнений в частично упорядоченных пространствах", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:123 (2018), 386–394. [T. V. Zhukovskaya, I. A. Zabrodskiy, M. V. Borzova, "On stability of difference equations in partially ordered spaces", *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:123 (2018), 386–394 (In Russian)].

[5] З. Т. Жуковская, С. Е. Жуковский,, "Возмущение задачи о неподвижных точках непрерывных отображений", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:135 (2021), 241–249. [Z. T. Zhukovskaya, S. E. Zhukovskiy,, "Perturbation of the fixed point problem for continuous mappings", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:135 (2021), 241–249 (In Russian)].

[6] R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 2012.

[7] J. P. Aubin, I. Ekeland, *Nonlinear Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

Информация об авторе

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории 45, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 25.06.2025 г.
Поступила после рецензирования 26.08.2025 г.
Принята к публикации 12.09.2025 г.

Information about the author

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher of Laboratory 45, Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation.
E-mail: zyxra2@yandex.ru
ORCID:https://orcid.org/0000-0002-4595-6685

There is no conflict of interests.

Received 25.06.2025
Reviewed 26.08.2025
Accepted for press 12.09.2025